МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ С НЕРАВНОМЕРНЫМ ШАГОМ В ЗАДАЧЕ ПРЯМОГО ИЗГИБА БАЛКИ

Божок А. И., студент; Жигилий Д. А., ст. преподаватель

Метод конечных разностей это приближенный метод решения дифференциальных уравнений. Сущность метода состоит замене функции w=f(z) конечным (дискретным) множеством точек (узлов) и вместо функции непрерывного аргумента рассматривают функции дискретного аргумента, определенные в узлах и называемые условными функциями. Производные, входящие в дифференциальные уравнения, заменяют (аппроксимируют) соответствующими разностными отношениями, т.е. линейной комбинацией значений функций в узлах. При этом дифференциальные уравнения заменяются системой алгебраических уравнений (разностных уравнений), а начальные и краевые условия – разностными начальными и краевыми условиями для узловой функции.

Рассмотрим двухопорную балку постоянного поперечного сечения, нагруженную сосредоточенной силой (рис. 1) и найдём прогибы в уздовых точках.

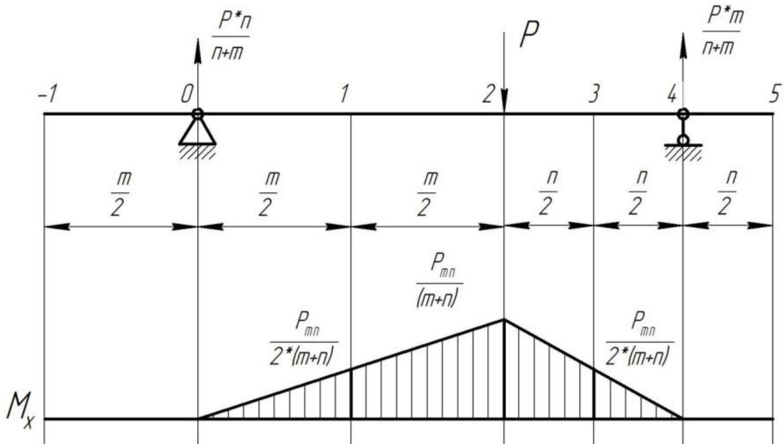

Рисунок 1 - Розрахункова модель

Разделим балку на четыре части так, что шаг $\Delta z_л = \frac{m}{2}$, $\Delta z_п = \frac{n}{2}$. Искомые узловые значения функции-прогибы в точках 1, 2, 3 найдём из дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_x}.$$

В разностной системе алгебраических уравнений:

$$W_0' = \frac{W_1 - W_{-1}}{m};\ W_1' = \frac{W_2 - W_0}{m};\ W_2' = \frac{W_3 - W_1}{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}};$$

$$W_3' = \frac{W_4 - W_2}{n};\; W_4' = \frac{W_5 - W_3}{m};$$

$$W_1'' = \frac{W_2' - W_0'}{m} = \frac{\frac{W_3 - W_1}{\frac{m+n}{2}} - \frac{W_1 - W_{-1}}{m}}{m};$$

$$W_2'' = \frac{W_3' - W_1'}{\frac{m}{2} + \frac{n}{2}} = \frac{\frac{W_1 - W_2}{n} - \frac{W_2 - W_0}{m}}{\frac{m}{2} + \frac{n}{2}};$$

$$W_3'' = \frac{W_4' - W_3'}{n} = \frac{\frac{W_5 - W_3}{n} - \frac{W_3 - W_1}{\frac{m}{2} + \frac{n}{2}}}{m}.$$

Граничные условия:

1) $W_0 = 0$;

2) $W_4 = 0$;

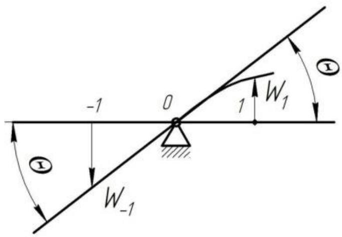

Рисунок 2 - Граничное условие в точке 0.

$$tg\theta = W_0' = \frac{W_{-1}}{\frac{m}{n}};$$

$$\frac{W_1 - W_{-1}}{m} = \frac{-W_{-1}}{\frac{m}{2}};$$

$$W_1 - W_{-1} = -2W_{-1};$$

3) $W_1 = -W_{-1}$;

4) $W_3 = -W_5$.

$$W_1'' = \left.\frac{M_x}{EJ_x}\right|_{z=\frac{m}{2}} = \frac{P_{mn}}{2(m+n)EJ_x};$$

$$W_2'' = \left.\frac{M_x}{EJ_x}\right|_{z=m} = \frac{P_{mn}}{(m+n)EJ_x};$$

$$W_3'' = \left.\frac{M_x}{EJ_x}\right|_{z=m+\frac{n}{2}} = \frac{P_{mn}}{2(m+n)EJ_x}.$$

Произведена оценка точности метода при различных соотношениях m/n по сравнению с методом начальных параметров и интегралом Мора. Показано повышение степени точности метода при увеличении количества узловых точек.

Сучасні технології у промисловому виробництві : матеріали науково-технічної конференції викладачів, співробітників, аспірантів і студентів фак-ту технічних систем та енергоефективних технологій, м. Суми, 23-26 квітня 2013 р.: у 2-х ч. / Ред.кол.: О.Г. Гусак, В.Г. Євтухов. - Суми : СумДУ, 2013. - Ч.1. - С. 180-181.