УДК 330.43

О.М. Назаренко, П.І. Загряжська

Динамічне моделювання макроекономічного розвитку за допомогою декомпозиції траєкторії руху на складові

У статті розглядається процес побудови лінійної стаціонарної моделі макроекономічної системи. Розвивається оригінальний підхід до специфікації та ідентифікації макроекономічних систем, що об'єднує економетричні та диференційно-ігрові методи. Апробація моделі проводиться на прикладі макроекономіки США.

Ключові слова: декомпозиція, зв'язок, макроекономічний розвиток, моделювання, система, тренд.

Вступ

Останнім часом, у зв'язку зі зростаючим впливом макроекономічної ситуації на усі сфери життя, зростає і зацікавленість дослідників у відтворенні функціонування макроекономічних динамічних систем. Адже для підвищення рівня життя та всебічного покращення реальної ситуації необхідно розробити схему дій, макроекономічну політику. Розробка макроекономічної політики, у свою чергу, неможлива без виконання комплексної перспективної оцінки впливу найважливіших факторів розвитку економіки на динаміку і структуру виробництва. Неважко зрозуміти, що така перспективна оцінка відноситься до числа найважливіших проблем, від успішного розв'язання яких залежить формування науково обґрунтованої макроекономічної політики. Розв'язання цієї задачі має спиратися на системний підхід, який наряду зі змістовним аналізом реальних процесів включає також застосування математичних методів та економіко-математичного моделювання.

Оцінювання макроекономічних показників на перспективу неможливе без розробки імітаційних та прогнозних моделей. Значення математичного моделювання як методу досліджень визначається тим, що модель являє собою концептуальний інструмент, орієнтований на аналіз та прогнозування динамічних процесів. Останнім часом у теорії математичного моделювання економічних процесів та систем знайшли широке застосування методи економетрики, які дозволяють провести глибокий якісний аналіз динамічних систем, запропонованих у вигляді лінійних [1], нелінійних [2, 3] моделей та моделей з лаговими змінними [4, 5].

Зазвичай, при практичних дослідженнях модельні динамічні системи вважають автономними та керованими. У загальному випадку вони подаються системою диференційних рівнянь. Побудова оптимальних керувань у задачах макроекономіки ґрунтується на ідентифікованих рівняннях руху, які отримуються із законів, властивих даним макроекономічним процесам [6, 7].

Однак більшість об'єктів, що вивчаються економічною наукою, можна охарактеризувати поняттям „складна система" [8, 9]. З'ясувати усі можливі зв'язки між

Назаренко Олександр Максимович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри моделювання складних систем Сумського державного університету; *Загряжська Поліна Іллівна*, студентка Сумського державного університету.

елементами такої системи практично неможливо. Тут закон руху $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ не може адекватно відображати динамічний процес, оскільки завжди будуть діяти невраховані фактори. У зв'язку з цим, керування доцільно розглядати як характеристику зовнішньої дії на динамічну систему [10, 11].

Отже, ключовою проблемою моделювання макроекономічних систем є ідентифікація рівнянь руху, оскільки на практиці вони не специфіковані. Дослідник може виходити лише зі статистичної інформації про значення фазових змінних та, можливо, керованих змінних у дискретні моменти часу із заданого проміжку. Економетрична побудова моделі оптимального керування проводиться в рамках моделі „сірого ящика" [12], коли за допомогою аналізу даних та деякого обґрунтованого підходу проводиться повна або часткова специфікація між входами, станами та виходами системи, а невідомі параметри системи оцінюються економетричними методами.

Економетричні методи ідентифікації макроекономічних динамічних систем у багатьох випадках при правильній специфікації рівнянь руху системи дозволяють будувати адекватні моделі та ефективні схеми їх чисельної реалізації. Адекватність моделі та точність отриманих результатів перевіряється за допомогою статистичних тестів і коефіцієнтів детермінації [2, 13].

Головною проблемою на етапі побудови моделей макроекономічних динамічних систем є оцінювання невідомих параметрів, або параметрична ідентифікація. Огляд сучасних процедур параметричної ідентифікації міститься в [14]. Дана робота спирається на методи колокації, в основі яких лежить декомпозиція траєкторії руху на базові функції (складові).

Постановка задачі

Нехай макроекономічна динамічна система характеризується вектором – стовпцем фазових координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)'$. Компоненти $\mathbf{x}$ та розмірність m залежать від конкретної задачі, визначаються досвідом та інтуїцією дослідника або процедурою кореляційного аналізу. У загальному випадку вектор фазових координат $\mathbf{x}(\tau)$ подається у вигляді [15]:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_{TP}(\tau) + \mathbf{x}_{\Pi}(\tau) + \mathbf{x}_{CE3}(\tau) + \boldsymbol{\varepsilon}(\tau), \tag{1}$$

де $\mathbf{x}_{\text{ТР}}$ – трендова, $\mathbf{x}_{\text{П}}$ – періодична, $\mathbf{x}_{\text{СЕЗ}}$ – сезонна, $\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)$ – випадкова (шуми) складові траєкторії руху відповідно.

Оскільки досліджувана система слабо формалізована, то в якості рівняння руху пропонується розглядати лінійне стаціонарне рівняння першого порядку:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{x}(\tau_*) = \mathbf{x}_*. \end{cases} \tag{2}$$

Тут $\mathbf{x}_*$ – деякий фіксований стан в момент часу τ_*; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – невідомі матриці розмірності $m \times m$; $\mathbf{u} = (u_1,\ u_2, ...,\ u_m)'$ – вектор – стовпець керувань, які в загальному випадку також невідомі.

Для ідентифікації системи диференційних рівнянь вигляду (2) при практичних дослідженнях використовують метод оберненого зв'язку [16] між динамічною системою (2) та регулятором. Оскільки метою даного дослідження є отримання якісних прогнозних характеристик моделі, то у якості регулятора будемо вибирати відносну похибку прогнозу δ [13].

Регулюючий пристрій керує рухом системи, яка в свою чергу керує роботою регулюючого пристрою. У цій двосторонній взаємодії динамічної системи та регулятора за допомогою оберненого зв'язку відбувається самокерування дисперсійним балансом системи.

Обернений зв'язок між динамічною системою та регулятором може відбуватися різними способами. У даній роботі пропонується схема, зображена на рис.1. Задача формулюється наступним чином. Нехай існують m – вимірні часові ряди спостережень кожної фазової координати $\{\mathbf{x}_\tau,\ \tau = 0,\ 1,\ \dots\ ,N\}$ динамічної системи. Мета полягає у відшуканні таких керувань $\mathbf{u}(\tau)$ та параметрів моделі (2), щоб при переведенні системи із деякого початкового стану в кінцеву бажану точку $\mathbf{x}_*$ траєкторії фазових координат системи аппроксимували реальні траєкторії $\{\mathbf{x}_\tau\}$ з найбільшою точністю [17].

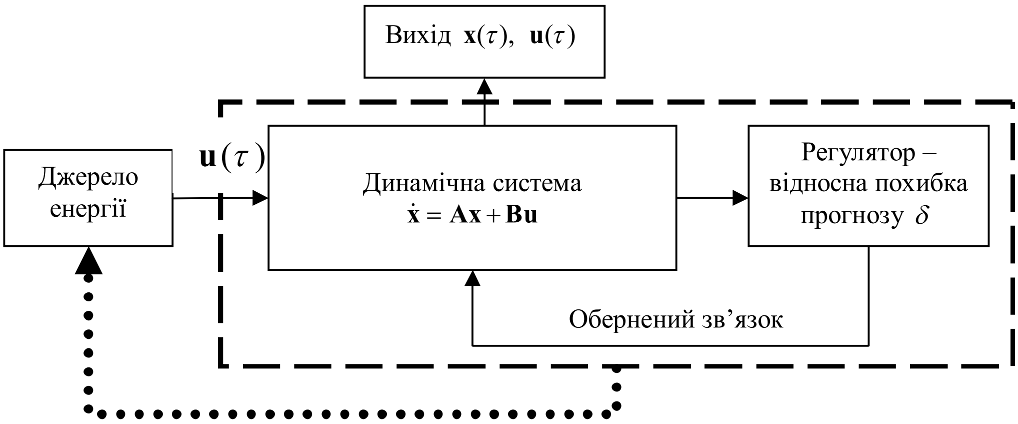

Рис. 1. Схема оберненого зв'язку у динамічній системі

Ідентифікація декомпозиції траєкторій руху системи

При чисельній реалізації регресійних моделей, метою яких є прогнозування або оптимізація, граничну умову диференційного рівняння (2) зручно задовольняти в момент часу, що слідує за періодом ідентифікації. У даній роботі ідентифікація рівнянь руху здійснюється на проміжку $[\tau_0,\ \tau_k]$. Тому у якості τ_* виберемо момент часу $\tau_k + 1$. Зробимо заміну $t = \tau - \tau_*$, що дозволяє будувати модель на проміжку $t \in [-N,\ -1]$, а відносну похибку прогнозу обчислювати в момент $t = 0$. При цьому гранична умова задачі (2) подається у вигляді $\mathbf{x(0)} = \mathbf{x}_*$.

Необхідно зазначити, що задача специфікації усіх складових розкладу (1) досить складна, тому у даній роботі пропонується зупинитися на специфікації трендової та періодичної складових. Такий розклад ($\mathbf{x}_{\text{СЕЗ}} \equiv 0$) є допустимим, оскільки статистична інформація містить щорічні дані і не враховує поквартальних коливань.

Для специфікації трендової складової $\mathbf{x}_{\text{ТР}}$ зручно використовувати регресійну модель

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{d}_1 + \mathbf{k}_1 e^{\lambda t} + \boldsymbol{\varepsilon}(t), \tag{3}$$

а періодичну складову будемо задавати у вигляді суми двох елементів розкладу МНК– оцінок $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ у ряд Фур'є:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{x}_{\Pi} + \mathbf{v}(t)\ ,\ \mathbf{x}_{\Pi} = \mathbf{k}_2 \cos \omega t + \mathbf{k}_3 \sin \omega t + \mathbf{d}_2 \cos \mu t + \mathbf{d}_3 \sin \mu t\ . \tag{4}$$

Тут $\mathbf{d}_i,\ \mathbf{k}_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ – невідомі коефіцієнти розкладу; параметри λ *і* ω є параметрами динамічної системи, а μ задає частоту коливань гармонійного керування; $\mathbf{v}(t)$ – випадкове збурення.

Зазначимо, що оскільки регресійна модель (4) не має вільного члена, то у загальному випадку для неї не будуть виконуватись умови Гауса-Маркова для класичних регресій [2]. Щоб уникнути нелінійного оцінювання, знайдемо такі значення частот ω *і* μ, при яких модель (4) буде класичною регресійною. Відомо, що для регресій без вільного члена це можливо у випадку, коли середні всіх регресорів та регресанду будуть дорівнювати нулю [2]. Середнє регресанду $\overline{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}(t) \equiv 0$ за властивістю МНК-залишків регресійної моделі (3). Тоді необхідно знайти такі частоти ω *і* μ, при яких середні регресорів $\overline{\cos \omega t}$, $\overline{\sin \omega t}$ і $\overline{\cos \mu t}$, $\overline{\sin \mu t}$ дорівнювали б нулю. Згідно [18] оптимальні значення частот ω *і* μ належать множині $\{2\pi k / N,\ k = 1,\ 2,\ ...\}$. Вони дозволяють оцінювати регресійну модель (4) за допомогою звичайного МНК:

$$\mathbf{x} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \cos \mu t + \mathbf{d}_3 \sin \mu t + \mathbf{k}_1 e^{\lambda t} + \mathbf{k}_2 \cos \omega t + \mathbf{k}_3 \sin \omega t + \mathbf{v}(t)\ . \tag{5}$$

Тепер зупинимося на ідентифікації невідомих параметрів розкладу (5). Оптимальні значення $\lambda,\ \omega,\ \mu$ можна вибрати методом логічного перебору, і далі при знайдених оцінках цих параметрів для оцінювання невідомих коефіцієнтів розкладу використовувати методи лінійної економетрики [4], основою якої є метод найменших квадратів (МНК).

В рамках МНК оцінювання регресії (5) можна здійснювати, використовуючи статистичні тести перевірки значущості МНК-оцінок невідомих параметрів. У даній роботі значущість оцінок коефіцієнтів розкладу (5) перевіряється за допомогою t-статистики Ст'юдента. Це дає можливість провести рафінування моделі (5), послідовно відкидаючи незначущі коефіцієнти розкладу.

Критерій Ст'юдента має вигляд [13]:

$$\left| \frac{\hat{\theta}}{\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}} \right| > t_{кр}(\alpha)\,, \tag{6}$$

де $\hat{\theta}$ – МНК – оцінка параметра θ, $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^{\,2}$ – оцінка дисперсії $\sigma_{\hat{\theta}}^{\,2}$, $t_{кр}$ – квантиль розподілу Ст'юдента, обчислений при кількості ступенів вільності $k = m \cdot N - l$ (l – кількість невідомих коефіцієнтів) та рівні значущості α .

Ідентифікацію параметрів $\lambda,\ \omega,\ \mu$ та всіх невідомих коефіцієнтів розкладу (5) слід проводити з урахуванням оберненого зв'язку між динамічною системою та її регулятором (рис. 1). Дія регулятора полягає в мінімізації відносної похибки прогнозу δ, яка є середньоквадратичною відносних похибок прогнозу кожного фактора [13]:

$$\delta_i^{\,2} = \hat{\sigma}_{\mathrm{v}}^2 (1 + \mathbf{x}_{\mathrm{i\,прогн}} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}'_{\mathrm{i\,прогн}}),\ \delta = \sqrt{(\delta_1^2 + ... + \delta_m^2)/m},\quad i = 1,\ \ldots\ ,\ m. \qquad (7)$$

Апробація побудованої моделі

Отже, ми отримали повністю специфікований розклад (5). Залишилося випробувати отриману модель на практиці. Апробація проводилася на прикладі макроекономічної динаміки США в період 1971-1998 [19], відносна похибка прогнозу обчислювалась для 1999 р. Крім того, розраховувалися прогнозні значення факторів за 2000 р.

Аналіз діаграм розсіювання важливих макроекономічних факторів та результати кореляційного аналізу дозволили у якості основних факторів макроекономічного розвитку США вибрати наступні: x_1 – споживчі витрати домогосподарств; x_2 – валовий приріст основних фондів; x_3 – валовий експорт.

Після обробки статистичної інформації та проведенні порівняльного аналізу були отримані результати, з яких слідує, що найкращою за прогнозними значеннями є наступна комбінація частот $\left\{\ \hat{\omega} = 2\pi / N,\ \hat{\mu} = 4\pi / N\ \right\}$ та оптимальне значення $\hat{\lambda} = 0.098$. „Рафінування" моделі (звільнення від незначущих коефіцієнтів згідно з критерієм Ст'юдента при рівні значущості $\alpha = 0.05$ та числу ступенів вільності $k = 3N - 3l = 66$) привело до розкладу:

$$\begin{gathered}
\hat{x}_1(t) = 1.142 + 0.233\cos(0.449t) + 6.70e^{0.098t} - 0.734\cos(0.224t) - 0.351\sin(0.224t), \\
\hat{x}_2(t) = 1 + 0.390\cos(0.449t) + 0.241\sin(0.449t) + 7.072e^{0.098t} - 0.980\cos(0.224t), \\
\hat{x}_3(t) = 0.844 + 0.290\cos(0.449t) + 13.936e^{0.098t} - 0.862\cos(0.224t).
\end{gathered} \qquad (8)$$

Як вже зазначалося, головною метою даної роботи є побудова моделі з досягненням якомога меншої похибки прогнозу (7) (величин δ_i) за 1999р.. У табл. 1 наведені значення відносних похибок прогнозу за 1999р. та 2000р., які розраховувалися за формулою:

$$\xi_i = \left| \frac{(x_i^{регр} - x_i^{табл})}{x_i^{регр}} \right| \cdot 100\%,\ i = 1,\ 2,\ 3, \qquad (9)$$

де $x_i^{регр}$ – значення, отримані згідно (8), $x_i^{табл}$ – реальні дані за 1999 та 2000 рр.. Тут також приведене значення коефіцієнта детермінації R^2 регресійної моделі (5), який обчислювався за формулою

$$R^2 = \frac{\textit{Дисперсія моделі}}{\textit{Дисперсія системи}} = \frac{D_{мод}}{D_{сист}}. \qquad (10)$$

Чисельні експерименти підтверджують той факт, що мінімальні значення δ відповідають максимальним значенням коефіцієнта детермінації моделі R^2.

Таблиця 1 – Відносні похибки прогнозів та коефіцієнт детермінації моделі

Країна – США	Похибки прогнозу			Коефіцієнт детермінації моделі R^2
	δ_i	ξ_i		
	1999 р.	1999р.	2000р.	
x_1	0,308%	0,172%	3,879%	98,23%
x_2	0,412%	0,347%	3,245%	
x_3	0,439%	0,195%	1,080%	

Як бачимо, побудована модель дає задовільні прогнозні значення на 1 та 2 роки , і тому її можна використовувати при короткостроковому прогнозуванні макроекономічної динаміки. У даному випадку відносна похибка прогнозу на 1 рік складає не більше 0,35% , а при прогнозуванні на 2 роки – не більше 3,88 %

Оптимальні траєкторії руху проілюстровані на рис. 2. Точками тут зображені діаграми розсіювання відповідних фазових координат (x_1 – споживчі витрати домогосподарств (*а*); x_2 – валовий приріст основних фондів (*б*); x_3 – валовий експорт (*в*)), причому статистичні дані обезрозмірені шляхом ділення на значення у 1971 році.

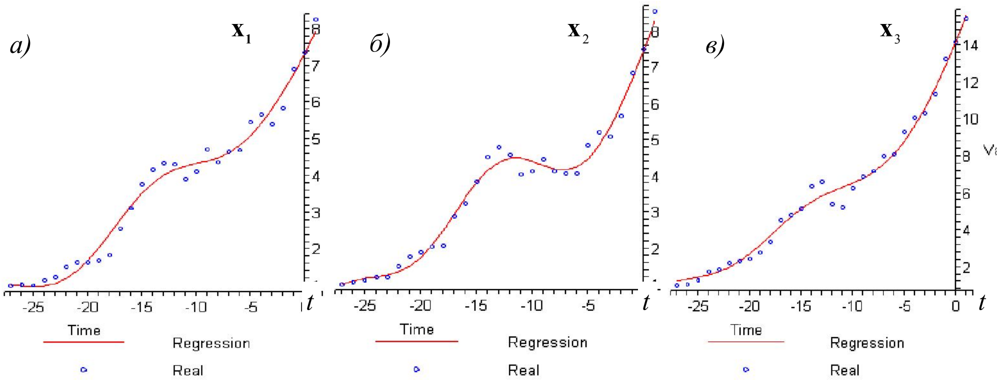

Рис. 2. Графіки фазових траєкторій та відповідні діаграми розсіювання

Аналіз модельних траєкторій руху та відповідних діаграм розсіювання показує адекватність побудованих моделей статистичним даним і їх можна використовувати при імітації макроекономічного розвитку.

Висновки

Підсумуємо тепер результати даної роботи. Побудований механізм імітації та прогнозування динаміки макроекономічної системи, а саме: розроблено методику розкладання (специфікації та ідентифікації) траєкторії руху системи на складові з урахуванням мети дослідження (якість, прогнозні властивості моделі), для чого в роботі реалізований обернений зв’язок між траєкторією руху динамічної системи та її регулятором. Апробація проведена на реальній макроекономічній динаміці, адекватність побудованої моделі перевірялась за допомогою коефіцієнта детермінації. Згідно з запропонованим методом декомпозиції траєкторії руху системи на складові можна будувати моделі динаміки реальної макроекономічної системи та використовувати їх при практичних дослідженнях.

1. *Колемаев В. А.* Экономико–математическое моделирование. Моделирование макро-экономических процессов и систем / В. А. Колемаев. – М. : ЮНИТИ–ДАНА, 2005. – 295 с.
2. *Greene W. H.* Econometric Analysis. Fifth Edition / W. H. Greene. – New Jersey : Prentice Hall Upper Saddle River, 2003. – 802 p.
3. *Назаренко А. М.* Об економетрико–игровом методе построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов / А. М. Назаренко // Механізм регулирования экономики. – 2006. – № 1. – С. 105–114.
4. *Доугерти К.* Введение в економетрику / К. Доугерти. – М. : ИНФРА–М, 1997. – 402 с.
5. *Назаренко А. М.* Построение эконометрической модели с лаговыми переменными при описании ВВП / А. М. Назаренко, Н. В. Бондар // Вісник Сумського державного університету. Економіка. – 2008. – Т. 2, № 2. – С. 119–125.
6. *Лившиц А. Я.* Введение в рыночную экономику : [курс лекций] / А. Я. Лившиц. – М. : МП ТПО «Квадрат», 1991. – 255 с.
7. *Макконелл К. Р.* Экономикс: принципы, проблемы, политика / К. Р. Макконелл, С. Л. Брю ; [пер. с 13–го англ. изд.]. – М. : ИНФРА–М, 1999. – XXXIV, 974 с.
8. *Пономаренко О. І.* Сучасний економічний аналіз : навчальний посібник : [у 2 т.] / О. І. Пономаренко – К. : Вища школа, 2004 – .– Т. 2. – Макроекономіка. – 2004. – 207 с.
9. *Горчаков А. А.* Компьютерные экономико–математические модели : учебное пособие / А. А. Горчаков, И. В. Орлова. – М. : Компьютер, Юнити, 1995. – 170 с.
10. *Intriligator M. D.* Mathematical optimization and economic theory / M. D. Intriligator. – Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. – 508 p.
11. *Nazarenko O. M.* Parametric Identification of State–Space Dynamic Systems: A Time–Domain Perspective / O. M. Nazarenko, D. V. Filchenko // International Journal of Innovating Computing, Information and Control. – 2008. – Vol. 4, Number 7. – P. 1553–1566.
12. *Juang, J. N.* Applied System Identification / J. N. Juang. – PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994. – 394 p.
13. *Назаренко О. М.* Основи економетрики : підруч. ; [вид. 2–ге, перероб.] / О. М. Назаренко. – К. : "Центр навчальної літератури", 2005. – 392 с.
14. *Parameter* Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach / J. O. Ramsay, G. Hooker, D. Campbell, J. Cao // Journal of the Royal Statistical Society: Series B. – 2007. – Vol. 69, Issue 5, – P. 741–796.
15. *Айвазян С. А.* Прикладная статистика и основы эконометрики / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. – М. : Юнити, 1998. – 1012 с.
16. *Назаренко О. М.* Параметрична ідентифікація стаціонарних лінійно–квадратичних моделей динамічних систем / О. М. Назаренко, Д. В. Фільченко // Складні системи і процеси. – Запоріжжя : ГУ „ЗІДМУ", 2007. – С. 37–43.
17. *Ljung. L.* System Identification: Theory for the User / L. Ljun – PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1999. – 607 p.
18. *Назаренко О. М.* Побудова та ідентифікація лінійно–квадратичних моделей слабо формалізованих динамічних систем / О. М. Назаренко // Вестник Харк. нац. ун-та. – 2008. – № 833. – Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления», вып. 10. – С. 185–192.
19. *Європейська* статистика [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://epp.eurostat.ec.europa.eu.

Отримано 20.02.2009 р.

А.М. Назаренко, П.И. Загряжская

Динамическое моделирование макроэкономического развития при помощи декомпозиции траектории движения на составляющие

В статье рассматривается процесс построения линейной стационарной модели макроэкономической системы. Развивается оригинальный подход к спецификации и идентификации макроэкономических систем, объединяющий эконометрические и дифференциально-игровые методы. Апробация модели проводится на примере макроэкономики США.

Ключевые слова: декомпозиция, связь, макроэкономическое развитие, моделирование, система, тренд.