НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ ФІЗИКИ

Вітренко Андрій Миколайович

УДК 531.19

ВПЛИВ ДВОХ ЗОВНІШНІХ ШУМІВ НА СТАТИСТИЧНУ ПОВЕДІНКУ СИЛЬНО ЗАГАСАЮЧИХ СИСТЕМ

01.04.02 – теоретична фізика

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Суми – 2007

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі загальної та експериментальної фізики Сумського державного університету Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник – доктор фізико-математичних наук, професор
Денисов Станіслав Іванович,
Сумський державний університет, завідувач
кафедри загальної та експериментальної фізики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Яновський Володимир Володимирович,
Інститут монокристалів НАН України, завідувач
відділу теорії конденсованого стану речовини;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Харченко Дмитро Олегович,
Сумський державний університет, професор
кафедри моделювання складних систем.

Провідна установа – Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, фізичний факультет,
кафедра теоретичної фізики.

Захист відбудеться “24” травня 2007р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 55.250.01 при Інституті прикладної фізики НАН України за адресою: 40030, м. Суми, вул. Петропавлівська, 58.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Інституту прикладної фізики НАН України за адресою: 40030, м. Суми, вул. Римського-Корсакова, 3.

Автореферат розісланий “ 20 ” квітня 2007р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
кандидат фізико-математичних наук С.М. Мордик

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

У сильно нерівноважних відкритих системах флуктуації середовища (зовнішній шум) можуть відігравати *конструктивну* роль, утворюючи структури, неможливі при детермінованому впливі. Відповідну теорію першими запропонували В. Хорстхемке (W. Horsthemke) та Р. Лефевр (R. Lefever) [1*]. Вони знехтували внутрішніми флуктуаціями та використали такі припущення: 1) нульвимірна система (її стан залежить лише від часу); 2) одна динамічна змінна; 3) *білий* шум. Це дозволило отримати *точні* результати для класу макроскопічних систем та відкрити індуковані шумом нерівноважні переходи, які нагадують рівноважні та нерівноважні *фазові* переходи.

Актуальність теми. Системи мікро- і наномасштабу останнім часом інтенсивно досліджуються як теоретично, так і експериментально. Серед них можна виділити протяжні *наномеханічні* системи, наприклад, затиснуті з обох боків нанобалки. Відомо, що поперечні зміщення їх центрів мас добре описуються класичними осциляторами з однією динамічною змінною [2*]. При таких розмірах значні не лише зовнішні флуктуації, але й внутрішні (розмежування флуктуацій умовне і залежить від того, де проводиться межа між системою та середовищем), їх спільний вплив на центр мас врахуємо за допомогою двох зовнішніх, у загальному випадку *взаємно корельованих*, шумів з відомими статистичними характеристиками. Розробка відповідних теоретичних моделей, для яких можна отримати точні результати, вивчення за їх допомогою статистичних закономірностей в ансамблях названих систем є актуальними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалася в рамках тематичного плану науково-дослідної роботи Міністерства освіти і науки України № 71.01.04.03-05 д/б "Статистичні характеристики динамічних систем з флуктуючими параметрами", № держ. реєстрації 0103U000766.

Мета і задачі дослідження. Метою є виявлення конструктивного впливу двох шумів на статистичну поведінку нульвимірних систем (частинок), що описуються однією динамічною змінною. Для досягнення поставленої мети вирішуються такі задачі:

- досліджується роль взаємної кореляції в явищі індукованих шумом нерівноважних переходів;
- описується еволюція системи в нестаціонарному середовищі, для якого ефективний коефіцієнт загасання залежить від часу за степеневим законом;
- розробляється метод отримання щільності імовірності для системи з гаусівськими шумами, які характеризуються довільними кореляційними функціями.

Об'єктом дослідження є процес еволюції систем до рівноважного стану під впливом двох зовнішніх шумів.

Предметом дослідження є нульвимірні системи, що описуються однією динамічною змінною.

Методи дослідження. Для спрощення отримання точних результатів розглядався випадок сильного загасання, який відповідав руху фізичних систем у достатньо в'язкому середовищі, що дозволило знехтувати масою. Для описання процесу часової еволюції систем з флуктуючими параметрами використовувалися методи нерівноважної статистичної фізики – рівняння Ланжевена та Фоккера-Планка. Для виявлення нерівноважних переходів, обумовлених взаємною кореляцією шумів, застосовувалися методи теорії індукованих шумом переходів. Для визначення дифузійних режимів знаходили статистичні моменти щільності імовірності.

Наукова новизна одержаних результатів. Для класу нелінійних систем у наближенні взаємно корельованих гаусівських білих шумів вперше встановлено, що взаємна кореляція може індукувати нерівноважні переходи, а саме: одномодальний-бімодальний перехід. При цьому в її відсутності жоден з шумів не викликає такі якісні зміни в поведінці систем. При вивченні еволюції лінійних систем зі степеневим у часі коефіцієнтом загасання розглянуто процес, викликаний флуктуаціями жорсткості, який характеризуються нескінченними статистичними моментами. У залежності від параметрів коефіцієнта загасання та ефективної інтенсивності гаусівського білого шуму класифіковані дифузійні режими. У спеціальному класі систем вперше виявлено нетипову для звичайних дифузійних процесів зміну характеру дифузії при зміні інтенсивності шуму. Досліджено часову еволюцію систем під впливом двох джерел гаусівського шуму, що характеризуються довільними кореляційними функціями. Розроблено метод визначення інтерполяційної формули для нестаціонарної щільності імовірності динамічної змінної, яка дає точні результати у випадку нехтовно малого одного з шумів.

Практичне значення одержаних результатів. Результати, отримані в роботі, розширюють знання про властивості систем з флуктуючими параметрами. Спільний вплив зовнішніх та внутрішніх флуктуацій істотно позначається на поведінці мікро- та наносистем, які можуть не тільки спостерігатися в природі (полімери, біополімери тощо), але й конструюватися завдяки прогресу в розвитку технічних засобів (нанобалки тощо). Точні результати можуть бути використані для розроблення наближених методів аналізу таких систем.

Особистий внесок здобувача. Роботи [1,2] підготовлені дисертантом у співавторстві, а роботи [3-7] – самостійно за підтримки наукового керівника. У роботах [1,2] автор дисертації брав участь у вивченні літературних джерел, в обговоренні отриманих результатів та роботі над публікаціями. У роботі [1] здобувач також брав участь у розробленні нового методу одержання рівняння Фоккера-Планка, запропонував приклад системи, в якій взаємна кореляція шумів може індукувати нерівноважні переходи. У роботі [2] у рамках теми дисертації сформулював задачу про частинку в нестаціонарному середовищі, одержав для загального випадку точні вирази щільності імовірності та її моментів. Також запропонував приклади систем, для яких були знайдені їх явні вирази, виявив нетипову для звичайних дифузійних процесів зміну характеру дифузії при зміні інтенсивності білого шуму.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на таких наукових конференціях: Науково-технічній конференції викладачів, співробітників і студентів механіко-математичного факультету СумДУ (Суми, 2001, 2002, 2004 рр.); VII Міжнародній науковій конференції “Физические явления в твердых телах” (Харків, 2005 р.); I Міжнародній науково-практичній конференції “Наука и технологии: шаг в будущее – 2006” (Бєлгород, 2006 р.); Міжнародній конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики “Еврика – 2006” (Львів, 2006 р.).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи викладені в 4 статтях у наукових журналах, що входять до переліку ВАК України, і 6 збірниках тез конференцій.

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 147 найменувань. Повний обсяг дисертації складає 142 сторінки, містить 13 рисунків.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** до дисертації обґрунтовано актуальність теми, сформульовано основну мету і задачі роботи, зазначено її зв'язок із науковими темами, розкрито наукову новизну та практичне значення одержаних результатів, визначено особистий внесок дисертанта, наведено відомості про апробацію роботи, основні публікації автора та структуру роботи.

У **першому розділі** “Індуковані шумом явища в стохастичних системах та методи їх описання” подано огляд літературних джерел за темою дисертації. Зазначено коло явищ, що мають відношення до проблеми конструктивної ролі шуму, особливу увагу приділено індукованим шумом переходам. Розглянуто найпростішу стохастичну систему – частинку, що здійснює броунівський рух. Названо фізичні системи, у яких явище дифузії має аномальний характер. Наведено основні методи описання стохастичних систем – рівняння Ланжевена та Фоккера-Планка. На підставі проведеного аналізу літератури окреслено коло задач, розв’язання яких і є метою дисертаційної роботи.

У **другому розділі** “Нерівноважні переходи, індуковані взаємною кореляцією білих шумів” розглядається випадок значних відхилень системи та вивчається вплив взаємної кореляції шумових джерел на її найбільш ймовірні рівноважні стани. Відповідне безрозмірне рівняння Ланжевена можна записати у такому вигляді:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^{2} g_i(x(t))\xi_i(t), \tag{1}$$

де $x(t)$ – динамічна змінна (крапка – похідна за часом); $f(x)$ – детермінована сила, $f(x) = -U'(x)$ (штрих – похідна за змінною x); $U(x)$ – детермінований потенціал; $g_i(x)$ ($i = 1,2$) – мультиплікативні функції (амплітуди флуктуацій), які характеризують вплив шумів залежно від динамічної змінної; $о_i(t)$ – зовнішні гаусівські білі шуми з нульовими середніми значеннями та кореляційними функціями:

$$\langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle = 2\Delta_{ij}\delta(t-t'), \tag{2}$$

де кутові дужки – усереднення за статистичним ансамблем; $Д_{11} \equiv Д_1$ (≥ 0), $Д_{22} \equiv Д_2$ (≥ 0) – інтенсивності шумів $о_1(t)$ і $о_2(t)$ відповідно; $Д_{12} = Д_{21} \equiv r\sqrt{\Delta_1\Delta_2}$, r ($|r| \leq 1$) – коефіцієнт кореляції між $о_1(t)$ і $о_2(t)$; $\partial(t)$ – дельта-функція Дірака. Припущення про гаусівський шум виконується для багатьох джерел реального шуму, тому що його ефект часто обумовлений кумулятивною дією багатьох випадкових факторів. Наближення білого шуму застосовне, якщо час кореляції флуктуацій значно менший за час релаксації системи. Потрібно відзначити, що сила $f(x)$ та амплітуди флуктуацій $g_i(x)$ можуть також явно залежати від часу.

Розглядаючи ансамбль систем, описуваних рівнянням Ланжевена (1), можна перейти до рівняння Фоккера-Планка для щільності імовірності станів $P(x, t)$. У випадку мультиплікативних шумів ($g_i(x)$ не являються константами), існує безліч рівнянь Фоккера-Планка, еквівалентних рівнянню (1). Щоб установити однозначну відповідність, припустимо, що кожний гаусівський білий шум $о_i(t)$ характеризується своїм власним параметром $г_i$ ($0 \leq г_i \leq 1$, значення $г_i = 0$, $г_i = 1/2$ та $г_i = 1$ відповідають розумінню Іто, Стратоновича та Клімонтовича), що визначає моменти часу, в яких обчислюються значення мультиплікативної функції $g_i(x(t))$ у відповідній інтегральній сумі. Рівняння Фоккера-Планка можна подати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}[f(x) + h(x)]P(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}d(x)P(x,t), \tag{3}$$

де індукований шумом коефіцієнт зносу $h(x)$ і коефіцієнт дифузії $2d(x)$ визначаються виразами:

$$h(x) = 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\gamma_i\Delta_{ij}g_i'(x)g_j(x),$$

$$d(x) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\Delta_{ij} g_i(x) g_j(x) .$$

Беручи природні граничні умови (тобто потік імовірності на нескінченності дорівнює нулю) для рівняння (3), визначимо рівноважну щільність імовірності динамічної змінної

$$P_{st}(x) = \frac{1}{Zd(x)} \exp\left[\int_0^x dy \frac{f(y)+h(y)}{d(y)}\right], \tag{4}$$

де Z – константа нормування. Запишемо рівняння $P'_{st}(x) = 0$ для локальних точок екстремуму $P_{st}(x)$ (параметрів порядку)

$$f(x) + h(x) - d'(x) = 0. \tag{5}$$

Використовуючи (5), дослідимо можливість існування нерівноважних переходів, індукованих взаємною кореляцією шумових джерел. Це означає, що при $r = 0$ рівняння (5) має таке саме число коренів, як і рівняння $f(x) = 0$, а при деякому критичному значенні $r = r_{cr}$ це число змінюється.

Розглянемо просте детерміноване рівняння руху з повертальною силою, у розкладанні якої враховуються члени до першого нелінійного: $\dot{x} = -ax - bx^2$, де $a > 0$ і $b > 0$. При такому підході з'являється фізично неіснуюча точка нестійкої рівноваги $x = -a/b$, тому зазначене рівняння застосовне в області $x > -a/b$, інакше необхідно враховувати в розкладанні сили члени більш високого порядку. Зробимо так: перейдемо до розгляду рівняння $\dot{x} = -ax - bx^2/(1+x^2)$, яке адекватно описує фізичну систему в області $|x| << 1$. А вивчення поведінки саме в цій області являє інтерес, тому що виникнення індукованого шумом переходу пов'язане з точкою стійкої рівноваги $x = 0$. Припустимо $a >> b$ та введемо флуктуації, обумовлені тепловим рухом атомів системи: $b \to b[1 - o_1(t)]$, де $o_1(t)$ – мультиплікативний шум (флуктуаціями параметра a нехтуємо). Враховуючи випадковий вплив середовища за допомогою адитивного шуму $o_2(t)$, стохастичне рівняння руху запишемо у вигляді

$$\dot{x} = -ax + bx^2 \xi_1(t) / (1+x^2) + \xi_2(t) . \tag{6}$$

Воно відповідає рівнянню (1) з $f(x) = -ax$, $g_1(x) = bx^2/(1+x^2)$, $g_2(x) = 1$.

Рівняння (5) для точок екстремуму набере вигляду

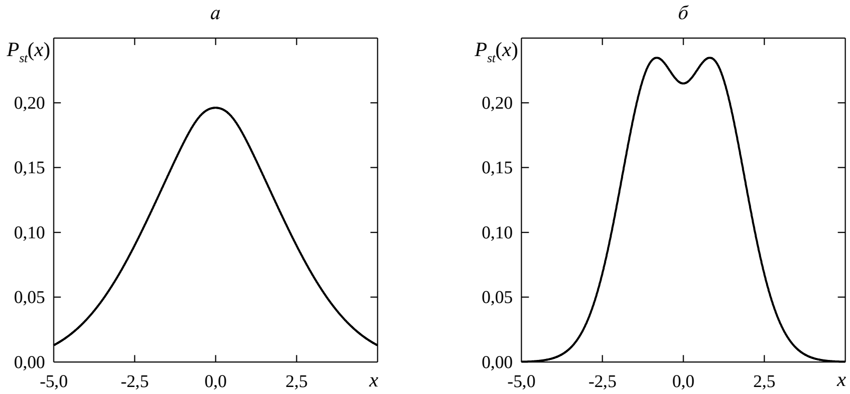

Рис. 1. Рівноважна щільність імовірності при $з = 2$, $н = 2$, $г_1 = 0{,}5$ ($r_{cr} = -0{,}25$): а) $r = 0$; б) $r = -0{,}9$

$$x[z^3 + \eta(1 + r\nu)z - \eta] = 0\,, \tag{7}$$

де $z = 1 + x^2$, $з = 4(1 - г_1)Д_1 b^2 / a$, $\nu = \sqrt{\Delta_2/\Delta_1}\big/ b$. Аналізуючи (7), приходимо до висновку, що $r_{cr} = -1/зн$. При $r > r_{cr}$ рівняння (7) має єдиний дійсний корінь $x = 0$, рівноважна щільність імовірності (4) є одномодальною з глобальним максимумом в точці $x = 0$ (рис. 1а), найбільш ймовірний стан системи в стохастичній динаміці відповідає точці стійкої рівноваги в детермінованій динаміці. При $r < r_{cr}$ (ця умова може бути виконана, якщо $|r_{cr}| \le 1$), рівняння (7) має три корені, один з яких відповідає локальному мінімуму $P_{st}(x)$, а два інших – локальним максимумам однакової висоти, тобто $P_{st}(x)$ – бімодальна щільність імовірності (рис. 1б). Найбільш ймовірні стани системи вже не відповідають точці стійкої рівноваги в детермінованій динаміці. Отже, при $r = r_{cr}$ відбувається нерівноважний перехід, індукований взаємною кореляцією, а саме: одномодальний-бімодальний перехід.

Роль шумів $о_1(t)$ і $о_2(t)$ у зазначеному явищі бачимо з фазової діаграми на рис. 2. За наявності від'ємної взаємної кореляції ($-1 \le r < 0$) одномодальний-бімодальний перехід можуть індукувати як мультиплікативний шум $о_1(t)$, так і адитивний $о_2(t)$. Формально, взявши параметр b повертальної сили меншим від нуля, розглянуті ефекти будуть спостерігатися для позитивної взаємної кореляції ($0 < r \le 1$).

У наступному прикладі при розкладанні повертальної сили врахуємо члени до третього порядку. Детерміноване рівняння руху набере вигляду $\dot{x} = -ax - bx^2 - x^3$, де $a, b > 0$ (вводиться масштаб часу, в якому коефіцієнт при кубічному члені дорівнює одиниці). Припустимо, що $a >> b$ і $b << 1$, і введемо флуктуації параметра b та швидкості (флуктуаціями параметра a нехтуємо). Рівняння Ланжевена (1) набере вигляду

$$\dot{x} = -ax - b[1-\xi_1(t)]x^2 - x^3 + \xi_2(t)\,. \tag{8}$$

Таким чином, у цьому випадку $f(x) = -ax - bx^2 - x^3$, $g_1(x) = bx^2$, $g_2(x) = 1$. Рівняння (8) описує сильно загасаючий нелінійний осцилятор.

Рівняння (5) для точок екстремуму рівноважної щільності імовірності набере вигляду

$$x[x^2 + bx/(1+\rho) + (a+\rho\nu r)/(1+\rho)] = 0\,, \tag{9}$$

де $\rho = 4(1-\gamma_1)\Delta_1 b^2$. При $r = 0$ воно має єдиний корінь $x = 0$, найбільш ймовірний стан рівноважної системи в стохастичній динаміці відповідає точці стійкої рівноваги в детермінованій динаміці. Таким чином, некорельовані шуми не змінюють якісно її поведінку. У випадку $r \neq 0$ критичне

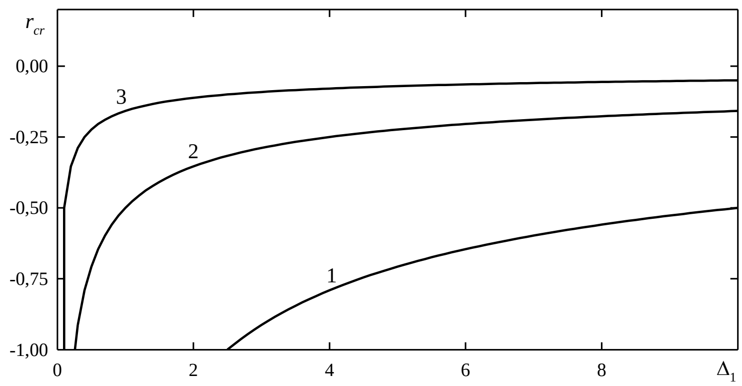

Рис. 2. Фазова діаграма в площині параметрів ($Д_1$, r) при $г_1 = 0{,}5$, $a = 1$, $b = 0{,}1$: 1) $Д_2 = 0{,}1$; $Д_2 = 1$; $Д_2 = 10$. Область над кривою відповідає одномодальній щільності імовірності, під кривою – бімодальній

значення параметра кореляції таке саме, як у попередньому прикладі, $r_{cr} = -1/зн$, де $з = c/a$. При $r > r_{cr}$ рівняння (9) має єдиний дійсний корінь $x = 0$, і рівноважна щільність імовірності (4) є одномодальною, як на рис. 1а. При $r < r_{cr}$ (ця умова може бути виконана, якщо $|r_{cr}| \leq 1$) рівняння (9) має три корені, і рівноважна щільність імовірності – бімодальна, як на рис. 1б. Отже, при $r = r_{cr}$ відбувається одномодальний-бімодальний перехід.

У **третьому розділі** "Еволюція системи в нестаціонарному середовищі" досліджується випадок малих зміщень системи в нестаціонарному середовищі. Відповідне рівняння руху з урахуванням флуктуацій повертальної сили та швидкості можна записати у вигляді

$$\lambda(t)\dot{x}(t) + [\kappa - \xi_1(t)]x(t) = \xi_2(t) \qquad [x(0) = x_0], \tag{10}$$

де л(t) – позитивний коефіцієнт загасання, залежність від часу якого обумовлена нестаціонарністю середовища; $\kappa > 0$ – параметр повертальної сили (жорсткість). Це рівняння відповідає рівнянню Ланжевена (1) з $f(x, t) = -\kappa x$ / л(t), $g_1(x, t) = x$ / л(t), $g_2(x, t) \equiv g_2(t) = 1$ / л(t) і описує сильно загасаючий гармонічний осцилятор. Вважаючи, що час релаксації системи значно більший за час кореляції шумів, використаємо наближення гаусівського білого шуму, і рівняння (10) інтерпретується у розумінні Стратоновича. Припустимо також, що шуми некорельовані, їх статистичні характеристики визначаються виразом (2) з $r = 0$.

Щоб отримати вираз для траєкторій, використаємо наближений підхід [3*]. Введемо характеристичну амплітуду $s = \sqrt{\Delta_2/\Delta_1}$ і розділимо область значень динамічної змінної x на два інтервали $|x| < s$ та $|x| > s$. В області $|x| < s$ основний внесок робить адитивний шум $o_2(t)$, в області $|x| > s$ – мультиплікативний $o_1(t)$. Відповідно нехтовно малий шум можна не враховувати в рівнянні (10). Його розв'язок для області $|x| > s$ має вигляд

$$x(t) = x_0 \exp\left[\Xi(t) - \kappa\Lambda(t)\right] ,$$

де $\Xi(t) = \int_0^t d\tau\, \xi_1(\tau)/\lambda(\tau)$; $\Lambda(t) = \int_0^t d\tau/\lambda(\tau)$. У наведеному виразі випадковий процес $x_0 \exp[\Xi(t)]$, викликаний флуктуаціями жорсткості, не залежить від параметра повертальної сили κ та може характеризуватися нескінченною дисперсією, що характерно для дифузійної поведінки. Дослідимо її у загальному випадку двох взаємно корельованих ($r \neq 0$) мультиплікативних шумів, рівняння Ланжевена (10) без детермінованої повертальної сили набере вигляду

$$\lambda(t)\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} g_i(x(t))\xi_i(t) \quad [x(0) = x_0]. \tag{11}$$

Воно описує одновимірний рух частинок у випадковому полі швидкостей в умовах великого тертя. Рівняння (11) можна звести до рівняння з одним шумом, у розумінні Стратоновича отримаємо $\lambda(t)\dot{x}(t) = G(x(t))\xi(t)$, $[x(0) = x_0]$, де $o(t)$ – ефективний гаусівський білий шум з нульовим середнім значенням та одиничною інтенсивністю;

$$G(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \Delta_{ij} g_i(x) g_j(x)} . \tag{12}$$

У загальному випадку амплітуда флуктуацій $G(x)$ є не негативною. Обмежимося випадком $G(x) > 0$ для всіх x, тобто $x(t) \in (-\infty, \infty)$.

Вираз для моментів динамічної змінної *x*, яка задовольняє рівняння (11), можна подати у вигляді

$$\langle x^n(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy\left[\Psi^{-1}(y\sigma(t)+u_0)\right]^n e^{-y^2/2}\ , \tag{13}$$

де $n = 0,1,2,\ldots$; Ш$^{-1}(u)$ – взаємно обернена функція до Ш(x):

$$\Psi(x)-\Psi(x_0)=\int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{G(x')}\,,$$

Ш($-\infty$) = $-\infty$ і Ш(∞) = ∞; $\sigma^2(t) = 2\int_0^t d\tau\big/\lambda^2(\tau)$ – дисперсія випадкового процесу О(t); u_0 = Ш(x_0).

Дослідимо асимптотичну поведінку моментів (13) для великих часів. Візьмемо асимптотику амплітуди флуктуацій (12) у вигляді $G(x)\sim\sqrt{\Delta}\,|x|^{\alpha}$ ($|x|\to\infty$), де Д – ефективна інтенсивність шуму при $|x| = \infty$; *б* (≤ 1) – дійсний параметр. Випадок *б* = 1 відповідає лінійному мультиплікативному шуму, *б* = 0 – адитивному шуму. Можна назвати ще одну фізичну можливість, нелінійний мультиплікативний шум з *б* = 1/2, при якому лінійна залежність реалізується не для амплітуди флуктуацій шуму, а для його інтенсивності. Надалі будемо проводити дослідження для довільного значення *б* (≤ 1). Обрана степенева залежність для $G(x)$ відповідає припущенню про самоподібність [4*]. Візьмемо асимптотику коефіцієнта загасання у вигляді *л*(t) ~ $lt^{в}$ ($t\to\infty$), де l – позитивний параметр і *в* ≤ 1/2 (ця умова гарантує, що *у*(∞) = ∞). Ефективний коефіцієнт тертя, який належить до названого класу, використовувався при описанні аномальної дифузії броунівських частинок в неоднорідному середовищі, такому, як оточення живої клітини [5*]. Обрані степеневі залежності для $G(x)$ і *л*(t) спільно згадуються в контексті дифузії в комплексному середовищі, такому, як турбулентна рідина [6*].

При *б* = 1 вираз (13) має вигляд

$$\langle x^n(t)\rangle \sim 2a^n\cosh(n\sqrt{\Delta}u_0)\exp(n^2\Delta\sigma^2(t)/2)\qquad (t\to\infty),$$

якщо n – парне, і

$$\langle x^n(t)\rangle \sim 2a^n\sinh(n\sqrt{\Delta}u_0)\exp(n^2\Delta\sigma^2(t)/2)\qquad (t\to\infty),$$

якщо n – непарне. При $u_0 = 0$ не відбувається систематичного збільшення першого моменту ($n = 1$), тобто динамічна змінна демонструє чисто дифузійну поведінку, яка може характеризуватися дисперсією $\sigma_x^2(t) = \langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2$. При *в* < 1/2 отримаємо

$$\ln\sigma_x^2(t) \sim \frac{4\Delta}{l^2(1-2\beta)} t^{1-2\beta} \qquad (t\to\infty).$$

Дифузія затягнута експоненціальна при $0 < в < 1/2$, експоненціальна при $в = 0$, стисла експоненціальна при $в < 0$. Якщо $в = 1/2$, то

$$\sigma_x^2(t) \sim 2a^2(t/\tilde{t})^{4\Delta/l^2} \qquad (t\to\infty),$$

де $\tilde{t}$ – деякий масштаб часу. Ця формула демонструє чудову особливість, режим дифузії визначається ефективною інтенсивністю Д білого шуму. Має місце субдифузія при $Д < l^2/4$, нормальна дифузія – при $Д = l^2/4$, супердифузія – при $Д > l^2/4$.

При $б < 1$ вираз (13) має вигляд

$$\langle x^n(t)\rangle \sim \frac{\Gamma(\eta/2)}{\sqrt{\pi}}[\sqrt{2\Delta}(1-\alpha)\sigma(t)]^{\eta-1} \qquad (t\to\infty),$$

якщо n – парне, і

$$\langle x^n(t)\rangle \sim u_0\frac{\eta-1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)[\sqrt{2\Delta}(1-\alpha)]^{\eta-1}\sigma^{\eta-2}(t) \qquad (t\to\infty),$$

якщо n – непарне. Тут $\Gamma(z)$ – гамма-функція, $з = 1 + n/(1-б)$. Останнє співвідношення показує, що $\langle x(t)\rangle = 0$ при $u_0 = 0$, спостерігається чисто дифузійна поведінка. У цьому випадку вираз для дисперсії динамічної змінної набере вигляду

$$\sigma_x^2(t) \sim \frac{\Gamma(1/(1-\alpha)-1/2)}{\sqrt{\pi}}[\sqrt{2\Delta}(1-\alpha)\sigma(t)]^{2/(1-\alpha)} \qquad (t\to\infty).$$

При $в < 1/2$ $\sigma_x^2(t) \propto t^{(1-2\beta)/(1-\alpha)}$, має місце супердифузія при $б > 2в$, нормальна дифузія – при $б = 2в$, субдифузія – при $б < 2в$. При $в = 1/2$ – степенево-логарифмічна дифузія $\sigma_x^2(t) \propto \ln^{2/(1-\alpha)}(t/\tilde{t})$.

У **четвертому розділі** “Еволюція системи з двома джерелами кольорового шуму” розглядається випадок малих зміщень системи, досліджується її часова еволюція під впливом джерел кольорового шуму. Рівняння Ланжевена має вигляд

$$\dot{x}(t) + [\kappa - f_1(t)]x(t) = |x(t)|^{\alpha} f_2(t) \qquad [x(0) = x_0 > 0], \tag{14}$$

де κ (≥ 0) і *б* (< 1) – дійсні параметри системи; $f_1(t)$ і $f_2(t)$ – кольорові шуми з відомими статистичними характеристиками. Це рівняння (докладно досліджене у випадку $f_1(t) \equiv 0$ [7*]), зокрема при *б* $= 0$, описує сильно загасаючий гармонічний осцилятор з флуктуючими жорсткістю та швидкістю. Для випадку $0 <$ *б* < 1 існує особлива точка $x = 0$. Припустимо, що вона є регулярною, і розв’язок рівняння (14) для всіх моментів часу $t \geq 0$ збігається з розв’язком рівняння

$$\{\dot{x}(t) + [\kappa - f_1(t)]x(t)\}|x(t)|^{-\alpha} = f_2(t).$$

Розв’язок цього рівняння можна записати у вигляді

$$x(t) = F(t)\,|\,F(t)\,|^{\alpha/(1-\alpha)}\; e^{F_1(t)}, \tag{15}$$

де

$$F(t) = e^{-\omega t}\left[x_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\int_0^t d\tau\; f_2(\tau) e^{\omega\tau - (1-\alpha)F_1(\tau)}\right]; \tag{16}$$

щ = (1 – *б*)*к*;

$$F_1(t) = \int_0^t d\tau\; f_1(\tau).$$

Щоб отримати щільність імовірності для $x(t)$, використовуючи вираз для траєкторій (15), визначимо щільності імовірності для $F_1(t)$ і $F(t)$. Припустимо, що $f_1(t)$ – гаусівський шум з нульовим середнім значенням і довільною кореляційною функцією $\langle f_1(t) f_1(t') \rangle = r_1(|t-t'|)$. Тоді $F_1(t)$ – гаусівський процес з нульовим середнім значенням і дисперсією

$$\sigma_1^2(t) = 2\int_0^t du r_1(u)(t-u).$$

Щоб визначити щільність імовірності для $F(t)$, введемо для розгляду між шумами $f_1(t)$ і $f_2(t)$ спеціальну залежність

$$f_2(t) = f(t) e^{(1-\alpha)F_1(t)}, \tag{17}$$

де $f(t)$ – гаусівський шум з нульовим середнім значенням і довільною кореляційною функцією $\langle f(t) f(t') \rangle = r(|t-t'|)$. Тоді $F(t)$ – гаусівський процес з середнім значенням $m(t) = x_0^{1-\alpha} e^{-\omega t}$ і дисперсією

$$\sigma^2(t) = 2(1-\alpha)\frac{e^{-\omega t}}{\kappa}\int_0^t du r(u)\sinh[\omega(t-u)].$$

Підставляючи (17) в (16), траєкторії (15) можна подати у вигляді $x(t) = p(t)/l(t)$, де $p(t)$ і $l(t)$ – незалежні степенево-нормальний і логнормальний процеси. Використовуючи відомі вирази для статистичних характеристик цих процесів, знайдемо щільність імовірності для $x(t)$:

$$P_x(x,t) = \frac{1-\alpha}{2\pi\sigma_\alpha(t)\sigma(t)|x|^\alpha}\int_0^\infty du \exp\left\{-\frac{\ln^2 u}{2\sigma_\alpha^2(t)} - \frac{[ux|x|^{-\alpha} - m(t)]^2}{2\sigma^2(t)}\right\}, \tag{18}$$

де $y_б(t) = (1-б)y_1(t)$, і дробові моменти

$$m_r^\nu(t) = \frac{\Gamma(\eta)}{\sqrt{2\pi}}\sigma^{\eta-1}(t)\exp\left[\frac{1}{2}r^2\sigma_1^2(t) - \frac{1}{4}a^2(t)\right]\times$$
$$\times\left\{D_{-\eta}[-a(t)] + (-1)^\nu D_{-\eta}[a(t)]\right\}, \tag{19}$$

де r – дійсне число; $\nu = 0$ або 1, $з = 1 + r/(1-б)$; $a(t) = m(t)/y(t)$; $D_{-з}(z)$ – інтегральне подання функції параболічного циліндра

$$D_{-\eta}(z) = \frac{e^{-z^2/4}}{\Gamma(\eta)}\int_0^\infty dy y^{\eta-1}e^{-y^2/2-zy} \qquad (з > 0).$$

Формулу (18) для нестаціонарної щільності імовірності назвемо інтерполяційною, вона дає точні результати у випадку нехтовно малого одного з шумів.

Розглянемо сильно загасаючий гармонічний осцилятор, описуваний рівнянням Ланжевена (14) при $б = 0$. Вирази (19) для середнього значення та дисперсій наберуть вигляду:

$$\langle x(t)\rangle = x_0 \exp\left[\sigma_1^2(t)/2 - \kappa t\right], \tag{20}$$

$$\sigma_x^2(t) = m^2(t)\left\{\exp\left[2\sigma_1^2(t)\right] - \exp\left[\sigma_1^2(t)\right]\right\} + \sigma^2(t)\exp\left[2\sigma_1^2(t)\right]. \tag{21}$$

Середнє значення (20) динамічної змінної спадає за експонентою в часі і визначається параметрами флуктуючого коефіцієнта жорсткості: його середнім значенням κ і кореляційною функцією $r_1(|t-t'|)$.

Визначимо область застосовності формули для щільності імовірності (18), отримання якої ґрунтується на виразі (17), при описі часової еволюції осцилятора з двома незалежними шумами. Для цього запишемо вирази (20) і (21) для випадку гаусівських білих шумів, тобто $r_1(u) = D_1\partial(u)$ і $r(u) = D\partial(u)$, при нульовому параметрі κ:

$$\langle x(t)\rangle = x_0 e^{D_1 t}, \tag{22}$$

$$\sigma_x^2(t) = x_0^2\left(e^{4D_1 t} - e^{2D_1 t}\right) + 2Dte^{4D_1 t}. \tag{23}$$

Порівняємо їх з точними результатами для цього самого випадку в розумінні Стратоновича:

$$\langle x(t)\rangle = x_0 e^{D_1 t}, \tag{24}$$

$$\sigma_x^2(t) = x_0^2\left(e^{4D_1 t} - e^{2D_1 t}\right) + D/2D_1\left(e^{4D_1 t} - 1\right). \tag{25}$$

Середні значення (22) і (24) збігаються, дисперсії (23) і (25) відрізняються другими доданками. Щоб їх значення практично не відрізнялись, накладемо обмеження: 1) інтенсивність адитивного шуму $f(t)$ значно менша за інтенсивність мультиплікативного шуму $f_1(t)$, тобто $D << D_1$; 2) добуток інтенсивності адитивного шуму на час значно менший за одиницю, тобто $Dt << 1$. Таким чином, запропонований метод знаходження статистичних характеристик може бути застосовним при дослідженні еволюції осцилятора в початкові моменти часу у випадку слабкого адитивного шуму.

У висновках подані перелік і коротка характеристика основних результатів дисертаційної роботи.

ВИСНОВКИ

У даній дисертаційній роботі розглянуто нульвимірні системи (частинки), стан яких може бути описаний однією динамічною змінною. У випадку сильного загасання досліджено їх часову еволюцію під впливом двох зовнішніх шумів. Найбільш важливими результатами дисертації є такі:

1. Для нелінійних систем у наближенні взаємно корельованих гаусівських білих шумів встановлено, що зміна коефіцієнта взаємної кореляції може приводити до якісної зміни рівноважної щільності імовірності динамічної змінної. Тим самим виявлена конструктивна роль взаємної кореляції в явищі одномодального-бімодального нерівноважного переходу.
2. Досліджено часову еволюцію системи в нестаціонарному середовищі. Розгляд проведений на прикладі сильно загасаючого гармонічного осцилятора з коефіцієнтом загасання, що змінюється

в часі за степеневим законом. Установлено, що випадкові осциляції, викликані флуктуаціями жорсткості, характеризуються статистичними моментами, що необмежено зростають у часі.

3. Вивчено аномальну дифузію частинок, що виконують одновимірний рух у випадковому полі швидкостей, що породжується корельованими мультиплікативними шумами. Розгляд проведений для випадку великого тертя, що змінюється в часі за степеневим законом. Залежно від параметрів загасання та шумів виявлені такі дифузійні режими: нормальний, субдифузійний, супердифузійний, експоненціальний, затягнутий експоненціальний, стислий експоненціальний, логарифмічний.
4. У спеціальному класі систем з лінійним мультиплікативним шумом виявлено нетипову для звичайних дифузійних процесів зміну характеру дифузії при зміні інтенсивності Д цього шуму. Показано, що існує критичне значення інтенсивності $Д_{cr}$ таке, що при $Д<Д_{cr}$ має місце субдифузія (повільна дифузія), при $Д=Д_{cr}$ – нормальна дифузія, а при $Д>Д_{cr}$ – супердифузія (швидка дифузія).
5. Досліджено часову еволюцію сильно загасаючого гармонічного осцилятора, збуджуваного двома джерелами кольорового шуму. Розроблено метод визначення нестаціонарної щільності імовірності для динамічної змінної та її моментів. Установлено, що середнє значення динамічної змінної спадає за експонентою в часі й визначається параметрами флуктуючого коефіцієнта жорсткості: його середнім значенням і кореляційною функцією.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1*. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. Теория и применение в физике, химии и биологии: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 400с.

2*. Aldridge J.S., Cleland A.N. Noise-enabled precision measurements of a Duffing nanomechanical resonator // Phys. Rev. Lett. – 2005. – Vol. 94. – 156403(4).

3*. Nakao H. Asymptotic power law of moments in a random multiplicative process with weak additive noise // Phys. Rev. E. – 1998. – Vol. 58. – P. 1591–1600.

4*. Олемской А.И. Теория стохастических систем с сингулярным мультипликативным шумом // УФН. – 1998. – Т.168,№3. – С. 287–321.

5*. Caspi A., Granek R., Elbaum M. Enhanced diffusion in active intracellular transport // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 85. – P. 5655-5658.

6*. Kwok Sau Fa Exact solution of the Fokker-Planck equation for a broad class of diffusion coefficients // Phys. Rev. E. – 2005. – Vol. 72. – 020101(R)(3).

7*. Denisov S.I. and Horsthemke W. Statistical properties of a class of nonlinear systems driven by colored multiplicative Gaussian noise // Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 65. – P. 031105(13).

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Denisov S.I., Vitrenko A.N., Horsthemke W. Nonequilibrium transitions induced by the cross-correlation of white noises // Phys. Rev. E. – 2003. – Vol. 68. – 046132(5).
2. Denisov S.I., Vitrenko A.N., Horsthemke W., Hдnggi P. Anomalous diffusion for overdamped particles driven by cross-correlated white noise sources // Phys. Rev. E. – 2006. – Vol. 73. – 036120(6).
3. Витренко А.Н. Статистические характеристики свободной частицы в поле двух независимых белых шумов // Вісник СумДУ. – 2003. – №10(56). – С. 58-63.
4. Vitrenko A.N. Exactly solvable nonlinear model with two multiplicative Gaussian colored noises // Physica A. – 2006. – Vol. 359. – P. 65-74.
5. Витренко А.Н. Режим аномальной диффузии для сверхзатухающих частиц, ведомых взаимно-коррелированными белыми шумами // Тезисы докладов VII Международной научной конференции “Физические явления в твердых телах”. – Харьков: ХНУ. – 2005. – С. 6.
6. Витренко А.Н. Функция распределения вероятности системы, подверженной воздействию двух цветных шумов // Материалы I Международной научно-практической конференции “Наука и технологии: шаг в будущее – 2006”. – Белгород: Руснаучкнига. – 2006. – С. 37-39.
7. Вітренко А. Режими аномальної дифузії частинок, викликаної дією двох залежних кольорових шумів // Збірник тез Міжнародної конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики “Еврика – 2006”. – Львів: ЛНУ. – 2006. – С51.

АНОТАЦІЯ

Вітренко А.М. Вплив двох зовнішніх шумів на статистичну поведінку сильно загасаючих систем. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Інститут прикладної фізики НАН України, Суми, 2007.

Розглянуто протяжні механічні системи малих масштабів, наприклад, затиснуті з обох боків нанобалки, полімерні ланцюжки та ін. Досліджено пружні поперечні зміщення їх центрів мас (фрагментів) під впливом зовнішніх та внутрішніх флуктуацій у в’язкому середовищі. Використано метод рівнянь Ланжевена з однією динамічною змінною. Застосовано наближення взаємно корельованих гаусівських білих шумів. При значних зміщеннях виявлено конструктивну роль взаємної кореляції в явищі одномодального-бімодального переходу. Для малих зміщень в неоднорідному середовищі розглянуто процес, викликаний флуктуаціями жорсткості, який проявляє дифузійну поведінку. Встановлено, що зміна інтенсивності флуктуацій може призводити

до зміни характеру аномальної дифузії. Для малих зміщень запропонована модель із залежними кольоровими шумами, отримані нестаціонарні щільність імовірності та моменти для динамічної змінної. Зазначено область застосовності знайдених статистичних характеристик для незалежних шумів.

Ключові слова: рівняння Ланжевена, білий і кольоровий шум, одномодальний-бімодальний перехід, аномальна дифузія.

АННОТАЦИЯ

Витренко А.Н. Влияние двух внешних шумов на статистическое поведение сильно затухающих систем. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика. – Институт прикладной физики НАН Украины, Сумы, 2007.

Рассмотрены протяженные механические системы малых масштабов, например, зажатые с двух сторон нанобалки, полимерные цепочки и др. Исследованы упругие поперечные смещения их центров масс (фрагментов) в приближении сильного затухания, для которого можно пренебречь инерционными свойствами. Оно применимо, если коэффициент затухания намного больше частоты собственных колебаний, и соответствует движению системы в достаточно вязкой среде. Использован метод уравнений Ланжевена с одной динамической переменной, при котором случайные влияния среды и тепловых флуктуаций системы учитываются соответственно посредством аддитивного и мультипликативного шума. Применено приближение взаимно коррелированных гауссовских белых шумов, что предполагает малые времена корреляции реальных шумов в сравнении со временем релаксации системы. Оно позволяет записать соответствующее уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности динамической переменной.

Рассмотрен случай значительных смещений системы от положения равновесия, соответствующие уравнения движения – нелинейные. Найдена равновесная плотность вероятности и изучено влияние параметра взаимной корреляции r ($|r| \leq 1$) шумовых источников на наиболее вероятные состояния равновесной системы. Установлено, что существует такое критическое значение r_{cr}, что при $r < r_{cr}$ равновесная плотность вероятности имеет один глобальный максимум, соответствующий точке устойчивого равновесия $x = 0$ в детерминированной динамике. Соответственно при $r > r_{cr}$ – два локальных симметричных максимума, уже не соответствующих этой точке. Т.е. при $r = r_{cr}$ происходит одномодальный-бимодальный переход. Также показано, что при отсутствии взаимной корреляции ($r = 0$) ни один из шумов не может вызвать такие

качественные изменения в поведении системы. Наоборот, при ее наличии неравновесный переход может быть индуцирован как мультипликативным шумом, так и аддитивным.

Рассмотрен случай малых смещений системы от положения равновесия в нестационарной среде. Соответствующее линейное уравнение движения содержит эффективный коэффициент затухания, зависящий от времени по степенному закону. Исследован случайный процесс, вызванный мультипликативным шумом и обуславливающий случайные осцилляции системы при релаксации к равновесию. Он характеризуется бесконечной дисперсией, что свойственно диффузионному поведению. Обнаружено нетипичное для обычных диффузионных процессов изменение характера диффузии при изменении интенсивности Д этого шума. Показано, что существует критическое значение интенсивности $Д_{cr}$, такое, что при $Д<Д_{cr}$ имеет место субдиффузия (медленная диффузия), при $Д=Д_{cr}$ – нормальная диффузия, а при $Д>Д_{cr}$ – супер диффузия (быстрая диффузия).

Для малых смещений системы предложена модель с двумя гауссовскими шумами, характеризующимися произвольными корреляционными функциями. Использован метод, основанный на специальной зависимости между шумами, который позволяет получить формулу для нестационарной плотности вероятности динамической переменной. Она дает точные результаты в случае пренебрежимо малого мультипликативного или аддитивного шума. Также найдены нестационарные статистические моменты. Сравнивая выражения для среднего значения и дисперсии динамической переменной в случаях зависимых и независимых дельта-коррелированных (белых) шумов, указана область применимости предложенного метода для независимых шумов: малый аддитивный шум и начальные моменты времени.

Ключевые слова: уравнение Ланжевена, белый шум, цветной шум, одномодальный-бимодальный переход, аномальная диффузия.

ABSTRACT

Vitrenko A.N. The influence of two external noises on the statistical behavior of overdamped systems. – Manuscript.

Thesis for the Degree of Doctor of Philosophy (Ph.D.) in physics and mathematics, specialty 01.04.02 – theoretical physics. – Applied Physics Institute of National Academy of Science of Ukraine, Sumy, 2007.

Extended mechanical systems in small scales, for example, doubly clamped beams, polymeric chains, are considered. Elastic displacements of their centers of mass (fragments) under influence of external and internal fluctuations in a viscous environment are studied. The method of the Langevin equations with one dynamic variable is used. The cross-correlated Gaussian white noises are considered. In the case of large displacements the constructive role of the cross-correlation in the phenomenon of unimodal-bimodal nonequilibrium transition is discovered. In the case of small displacements in a nonhomogeneous environment it is considered the random process caused by the fluctuation of the stiffness and which displays diffusive behavior. It is determined that changing of the fluctuation intensity can lead to a change of the anomalous diffusion regimes. In the case of small displacements the model with related colored noises is discussed; the time-dependent probability distribution function and moments for the dynamic variable are obtained. The application field of these statistical characteristics for the case of independent noises is shown.

Keywords: Langevin equations, white noise, colored noise, unimodal-bimodal transition, anomalous diffusion.