

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

На правах рукопису

Коваль Віталій Вікторович

УДК 621.373

**МУЛЬТИГАРМОНІЧНІ ПЛАЗМО-ПУЧКОВІ
СУПЕРГЕТЕРОДИННІ ЛАЗЕРИ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ**

01.04.01 – фізика приладів, елементів і систем

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Лисенко Олександр Володимирович,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент

Суми – 2010

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1 СУПЕРГЕТЕРОДИННІ ЛАЗЕРИ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ (ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД)	9
1.1. Ефект супергетеродинного підсилення.....	9
1.2. Супергетеродинні лазери на вільних електронах	12
1.3. Мультигармонічні супергетеродинні ЛВЕ	17
1.4. Теоретичні методи дослідження	24
1.5. Висновки до розділу 1	29
РОЗДІЛ 2 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕТОДИКИ ТЕОРЕТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ МУЛЬТИГАРМОНІЧНИХ ПЛАЗМО-ПУЧКОВИХ СУПЕРГЕТЕРОДИННИХ ЛАЗЕРІВ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ	30
2.1. Метод усереднених характеристик.....	31
2.2. Модернізований метод повільно змінних амплітуд	39
2.3. Висновки до розділу 2.....	44
РОЗДІЛ 3 САМОУЗГОДЖЕНА КУБІЧНО-НЕЛІНІЙНА ТЕОРІЯ СУПЕРГЕТЕРОДИННИХ МУЛЬТИГАРМОНІЧНИХ ПЛАЗМО-ПУЧКОВИХ ЛАЗЕРІВ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ ДОПЛЕРТРОННОГО ТИПУ	45
3.1. Модель супергетеродинного плазмо-пучкового ЛВЕ доплертронного типу	45
3.2. Система самоузгоджених кубічно-нелінійних рівнянь для комплексних амплітуд хвиль	51
3.3. Аналіз інкрементів зростання	75
3.4. Вплив вищих гармонік хвиль	80
3.5. Рівні та механізми насичення	83
3.6. Висновки до розділу 3.....	89

РОЗДІЛ 4 МУЛЬТИГАРМОНІЧНА НЕЛІНІЙНА ТЕОРІЯ ПЛАЗМО-ПУЧКОВОГО СУПЕРГЕТЕРОДИННОГО ЛАЗЕРА НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ З Н-УБІТРОННОЮ НАКАЧКОЮ	90
4.1. Вихідні рівняння	90
4.2. Кубічно-нелінійні вкорочені рівняння	95
4.3. Режими роботи	114
4.4. Аналіз нелінійної динаміки хвильових процесів	121
4.5. Висновки до розділу 4.....	128
ВИСНОВКИ	130
ПРИМІТКИ	133
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	134

ВСТУП

Актуальність теми. Одним із найбільш цікавих об'єктів релятивістської електроніки як з точки зору теорії, так і з точки зору експерименту та можливих практичних застосувань, є лазери на вільних електронах (ЛВЕ)[1-7]. Серед цих пристроїв звертають увагу супергетеродинні ЛВЕ, які при помірних вимогах до їх технологічної бази демонструють виключно високі коефіцієнти підсилення, високі рівні вихідної потужності, компактність [1-3, 8-23].

Серед можливих конструкцій супергетеродинних лазерів на вільних електронах, які найбільш перспективні для практичної реалізації, необхідно виділити двопотокові [12-15] та плазмо-пучкові ЛВЕ [18-26]. Незважаючи на те, що саме плазмо-пучкова версія супергетеродинного ЛВЕ була запропонована першою [18], основний розвиток «супергетеродинна» ідея історично отримала у формі двопотокових супергетеродинних ЛВЕ. Було з'ясовано, що двопотокові супергетеродинні ЛВЕ у порівнянні з параметричними ЛВЕ мають суттєво більші коефіцієнти підсилення електромагнітних хвиль, мають високі рівні вихідної потужності у міліметровому-інфрачервоному діапазоні довжин хвиль. Крім того, вони здатні формувати надпотужні мультигармонічні сигнали принципово нового типу – фемтосекундні кластери електромагнітної енергії тераватного рівня [27-30].

Подібними властивостями повинні характеризуватись і плазмо-пучкові супергетеродинні ЛВЕ. Тут завдяки використанню плазмо-пучкової нестійкості у порівнянні з двопотоковими ЛВЕ можна отримати більші інкременти зростання хвиль та більшу вихідну потужність електромагнітного сигналу [18]. Також потрібно зазначити, що плазмо-пучкова нестійкість, як і двопотокова, має яскраво виражену мультигармонічність [26, 31-33]. Це означає, що плазмо-пучкові супергетеродинні ЛВЕ можна використовувати для формування електромагнітного сигналу зі складним мультигармонічним спектром, у тому числі й для формування надкоротких електромагнітних кластерів. Тому

вивчення фізичних процесів у пристроях типу мультигармонічні плазмо-пучкові супергетеродинні лазери на вільних електронах є завданням безумовно актуальним.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі загальної та теоретичної фізики Сумського державного університету в рамках таких держбюджетних тем: «Фізика хвильових процесів у відкритих хвилеводно-резонаторних металодіелектричних системах з розподіленими джерелами випромінювання» (номер державної реєстрації № 0106U001931, термін виконання 2006 – 2008 рр.), «Фізика формування потоків заряджених частинок у приладах для діагностики матеріалів атомної енергетики» (номер державної реєстрації № 0106U001378, термін виконання 2009 – 2011 рр.).

Мета і завдання дослідження. Мета дисертаційної роботи – побудова мультигармонічної нелінійної теорії плазмо-пучкових супергетеродинних лазерів на вільних електронах та вивчення фізичних процесів у цих пристроях.

Відповідно до поставленої мети в роботі були вирішені такі завдання:

- розроблена нелінійна теорія мультигармонічних плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з доплертронною накачкою з урахуванням мультигармонічної взаємодії хвиль;
- побудована нелінійна теорія мультигармонічних плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з Н-убітронною накачкою з урахуванням мультигармонічної взаємодії хвиль;
- визначені інкременти зростання, рівні та механізми насичення хвиль плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з урахуванням мультигармонічних взаємодій.

Об'єкт дослідження – параметрично-резонансні хвильові процеси, що проходять у плазмо-пучкових релятивістських системах.

Предмет дослідження – мультигармонічні плазмо-пучкові супергетеродинні лазери на вільних електронах.

Методи дослідження. Як базовий математичний апарат для дослідження

параметрично-резонансних хвильових процесів у мультигармонічних плазмо-пучкових ЛВЕ використано ієрархічний підхід до теорії коливань і хвиль [1]. Також застосовувалися стандартні числові та чисельно-аналітичні методи, в тому числі й модернізований метод повільно-змінних амплітуд.

Наукова новизна отриманих результатів

1. Уперше в рамках квадратично-нелінійної теорії мультигармонічних плазмо-пучкових супергетеродинних лазерів на вільних електронах з доплертронною накачкою показано, що мультигармонічна взаємодія хвиль обумовлює якісну зміну динаміки основних гармонік: має місце не тільки зменшення темпів зростання, а й з'являється насичення навіть у квадратичному наближенні. Показано, що плазмо-пучкові супергетеродинні ЛВЕ з доплертронною накачкою завдяки використанню плазмо-пучкової нестійкості мають суттєво більші інкременти зростання, ніж еквівалентні двопотокові супергетеродинні ЛВЕ.

2. Уперше на базі методу усереднених характеристик побудована самоузгоджена мультигармонічна кубічно-нелінійна теорія плазмо-пучкового супергетеродинного лазера на вільних електронах з доплертронною накачкою. Встановлено суттєвий вплив вищих гармонік пучкових хвиль на процеси насичення. З'ясовано, що основні механізми насичення пов'язані з нелінійним зміщенням частоти і захопленням плазмовою хвилею електронів пучка. Аналіз рівнів насичення показав, що плазмо-пучкові супергетеродинні ЛВЕ з доплертронною накачкою перспективні для створення потужного електромагнітного випромінювання в міліметровому-субміліметровому діапазоні довжин хвиль.

3. Уперше з'ясовано, що плазмо-пучкові супергетеродинні лазери на вільних електронах з Н-убітронною накачкою мають чотири різні режими роботи. Два з них дозволяють підсилювати сигнали, що мають високий ступінь монохроматичності. Два інших завдяки використанню лінійних ділянок дисперсійних залежностей дозволяють формувати сигнал з досить широким мультигармонічним спектром.

4. Уперше на базі методу усереднених характеристик побудована нелінійна самоузгоджена мультигармонічна кубічно-нелінійна теорія плазмо-пучкового супергетеродинного лазера на вільних електронах з Н-убітронною накачкою. З'ясовано, що рівні насичення суттєво залежать від параметрично-резонансних взаємодій вищих гармонік хвиль просторового заряду. Показана перспективність використання плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з Н-убітронною накачкою для створення потужного мультигармонічного електромагнітного випромінювання в міліметровому-субміліметровому діапазоні.

Практичне значення отриманих результатів. У результаті проведених досліджень була побудована мультигармонічна нелінійна теорія плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ, одним із практичних результатів якої є висновок про можливість експериментального створення на базі таких лазерів на вільних електронах джерел потужного електромагнітного випромінювання в міліметровому-субміліметровому діапазоні хвиль. Отримані розрахункові результати дають можливість визначити оптимальні режими роботи запропонованих пристроїв, з'ясувати їх характеристики, розрахувати варіанти конкретних конструкцій. Результати, отримані в дисертаційній роботі, можуть бути використані в Інституті прикладної фізики Національної академії наук України (м. Суми), Національному науковому центрі «Харківський фізико-технічний інститут».

Особистий внесок здобувача. У роботах [34-36] участь автора дисертації полягала в аналітичному розв'язанні поставленої задачі. В роботах [37, 38] дисертант брав участь у побудові нелінійної теорії, ним була розроблена комп'ютерна програма та проведено комп'ютерне моделювання фізичних процесів у мультигармонічному плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ з доплертронною накачкою. В роботах [39-42] здобувач взяв участь у побудові квадратично-нелінійної теорії плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ з Н-убітронною накачкою з урахуванням мультигармонічної взаємодії хвиль. У роботі [43] автор дисертації взяв участь у побудові нелінійної теорії, ним була

розроблена комп'ютерна програма та проведене комп'ютерне моделювання фізичних процесів у мультигармонічному плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ з Н-убітронною накачкою. У всіх роботах дисертант брав участь в обговоренні отриманих результатів. Особисто автором підготовлені стаття [40] та тези доповідей [36, 42].

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на таких конференціях: 17-й, 18-й та 19-й Міжнародних кримських конференціях “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии” (КрыМиКо'2007, 2008, 2009) (Севастополь, 2007–2009 г.); 8-th International Young Scientists Conference Optics and High Technology Material Science SPO 2007 (Київ, 2007 р.); Міжнародній конференції молодих учених і аспірантів «ІЕФ-2009». (Ужгород, 2009 р.); науково-технічних конференціях викладачів, співробітників, аспірантів та студентів Сумського державного університету (Суми, 2006–2010).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в 5 статтях у спеціалізованих журналах [34, 37, 39, 40, 43], що входять до переліку ВАК України, та в 5 тезах доповідей у збірниках наукових праць конференцій [35, 36, 38, 41, 42].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Обсяг дисертації – 151 сторінка, у тому числі 19 рисунків і 2 таблиці. Список використаних джерел містить 175 найменувань.

РОЗДІЛ 1

СУПЕРГЕТЕРОДИННІ ЛАЗЕРИ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ (ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД)

1.1. Ефект супергетеродинного підсилення

В супергетеродинних лазерах на вільних електронах використовується ефект супергетеродинного підсилення електромагнітних хвиль у релятивістських електронних пучках [9-11, 18-21, 24-25, 44-50], завдяки якому ці прилади характеризуються суттєво більшими коефіцієнтами підсилення у порівнянні з параметричними ЛВЕ. Розглянемо цей ефект.

Поняття про ефект супергетеродинного підсилення хвиль вперше було сформульовано Ю.В. Гуляєвим і П.Є. Зільберманом [51], які розглядали задачу про трихвильовий параметричний резонанс електромагнітних хвиль (накачки, сигналу, холостої хвилі) в нелінійному активному середовищі. Параметри середовища підбиралися таким чином, щоб частота холостої хвилі була у смузі підсилення, яка пов'язана з деяким зовнішнім додатковим механізмом. У силу нелінійного зв'язку хвиль це підсилення транслювалося на хвилю сигналу, що й трактувалося як ефект супергетеродинного підсилення. Практичний сенс останнього полягав у наступному. Частоти накачки ω_1 та сигналу ω_2 підбиралися близькими, а саме, такими, що частота холостої хвилі $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2 \ll \omega_{1,2}$. За рахунок реалізації ефекту супергетеродинного підсилення з'являлася можливість переносити підсилення далеко "вгору" за частотою, а саме, з більш низькочастотної області (де працював додатковий механізм підсилення) у відносно більш високочастотну область (де таких механізмів підсилення не має).

Аналогічна ідея стосовно ЛВЕ була сформульована в роботах [18, 19]. Хоча тут є деякі відмінності. У ЛВЕ частоти сигналу ω_1 і холостої хвилі (ХПЗ) ω_3 виявляються близькими або однаковими. Тому вище описана ідея

перенесення підсилення в частотному діапазоні тут використана бути не могла. З іншого боку, у вакуумній та плазмовій електроніці вже давно відомі ефективні механізми підсилення поздовжніх пучкових хвиль. Наприклад, двопотоковий [52-53], плазмо-пучковий [54-80] та інші, що забезпечують рекордні рівні їх підсилення. Багато років ситуація ускладнювалася тим, що були відсутні ефективні способи трансформації поздовжніх хвиль (пучкових) у поперечні (електромагнітні) [58, 81]. З появою параметричних лазерів на вільних електронах стало зрозуміло, що проблема трансформації поздовжніх у поперечні може бути вирішена з використанням явища трихвильового параметричного резонансу [82-86]. В роботах [18, 19] було запропоновано об'єднати ідею додаткового підсилення поздовжніх хвиль просторового заряду та трансформації енергії цих хвиль у поперечну електромагнітну шляхом використання параметричного резонансу. Лазери на вільних електронах, в яких використовуються такі ефекти, отримали назву – супергетеродинні лазери на вільних електронах.

Особливості механізму супергетеродинного підсилення в супергетеродинних ЛВЕ розглянемо на прикладі раманівської стаціонарної моделі з довільним квазілінійним механізмом додаткового підсилення [18, 19]. Тоді для нормованих амплітуд хвиль можемо отримати систему рівнянь (див. [8, 24]):

$$\frac{da_1}{dz} = -a_2 a_3, \quad \frac{da_2}{dz} = -a_1 a_3, \quad \frac{da_3}{dz} - \Gamma a_3 = -a_1 a_2. \quad (1.1)$$

Лінійним доданком у третьому з рівнянь (1.1) моделюємо від'ємне "загасання" ХПЗ (тобто підсилення) за рахунок зовнішнього додаткового механізму. Тут: a_k , ($k=1,2,3$) нормовані амплітуди хвиль накачки ($k=2$), сигналу ($k=1$) і ХПЗ ($k=3$); Γ – нормований інкремент, що описує додатковий механізм підсилення. Незважаючи на різноманітність фізичних форм останнього, всі моделі даного типу зберігають деякі загальні характерні

риси. Вважаємо накачку сильною $|a_2| \gg |a_{1,3}|$, тому в процесі взаємодії її зміною будемо нехтувати ($a_2 \cong a_{20}$). Хвилі сигналу і ХПЗ вважаємо такими, що поширюються в додатному напрямку осі Z , граничні умови вибираємо у вигляді:

$$a_1(z=0) = a_{10}, \quad a_3(z=0) = a_{30} = 0. \quad (1.2)$$

Розв'язки системи (1.1) шукаємо у формі $\sim e^{\alpha z}$. Після нескладних обчислень отримуємо вираз для інкрементів [18, 19]:

$$\alpha_{1,2} = \frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} + a_{20}^2}. \quad (1.3)$$

Використовуючи граничні умови (1.1), для коефіцієнта підсилення електромагнітної хвилі знаходимо:

$$K_1 = \frac{a_1(L)}{a_{10}} = \frac{\alpha_2 e^{\alpha_1 L} - \alpha_1 e^{\alpha_2 L}}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad (1.4)$$

де L – довжина області взаємодії, $a_1(L) = a_1(z=L)$.

За умови $4a_{20}^2 \ll \Gamma^2$ вираз (1.4) можна спростити [18, 19]:

$$K_1 \cong 1 + \frac{a_{20}^2}{\Gamma^2} e^{\Gamma L}. \quad (1.5)$$

Отримане співвідношення (1.4) демонструє суть ефекту супергетеродинного підсилення. Як бачимо, основне підсилення електромагнітної хвилі досягається

не за рахунок параметричного (інкремент a_{20} , як у традиційних ЛВЕ), а додаткового механізму підсилення $e^{\Gamma L}$. Однак, параметричний інкремент при цьому не може бути занадто малим, оскільки він впливає на загальний інкремент супергетеродинного підсилення:

$$\frac{a_{20}^2}{\Gamma^2} \exp(\Gamma L) \gg 1. \quad (1.6)$$

З числового аналізу (1.5) легко бачити, що супергетеродинні ЛВЕ мають коефіцієнти підсилення такі самі як і параметричні ЛВЕ, але при цьому використовують накачку, амплітуда якої є набагато меншою (на порядок і більше [24]).

1.2. Супергетеродинні лазери на вільних електронах

Двопотоківі супергетеродинні ЛВЕ. На сьогодні відомо достатньо багато різних типів пучкових нестійкостей [2, 52, 58, 60, 87, 88], які можна використати у якості додаткового механізму підсилення у супергетеродинних ЛВЕ. Серед можливих типів супергетеродинних ЛВЕ, які запропоновані на сьогодні, найцікавішими є два типи. Перший [18, 45] базується на плазмопучкових системах [54-80], які широко застосовуються у плазмовій електроніці для підсилення та генерації електромагнітних хвиль у сантиметровому-субміліметровому діапазоні довжин хвиль. Другий тип супергетеродинних ЛВЕ заснований на ідеї Г. Бекефі, який запропонував використовувати двопотоківу нестійкість як основний механізм підсилення в супергетеродинних ЛВЕ [12]. Подальший аналіз двопотоківих супергетеродинних ЛВЕ показав їх здатність працювати як в інфрачервоному, так і в міліметровому діапазоні. В 1991 році Кулішем В.В. було запропоновано двопотоківий супергетеродинний лазер на вільних електронах клістронного типу [24]. Двопотоківий супергетеродинний

ЛВЕ клістронного типу складається щонайменше з трьох секцій. Завдяки такій конструкції створюється можливість кардинального зменшення впливу виходу на вхід підсилувача у випадку високого рівня підсилення.

Двопотокові супергетеродинні лазери на вільних електронах мають досить значну кількість різних модифікацій. Ряд схем конструкцій двопотокових супергетеродинних ЛВЕ показані на рис. 1.1 – рис. 1.3. Так на рис. 1.1 представлена двопотокова доплертронна схема двопотокових супергетеродинних ЛВЕ з уповільненою електромагнітною хвилею накачки [2].

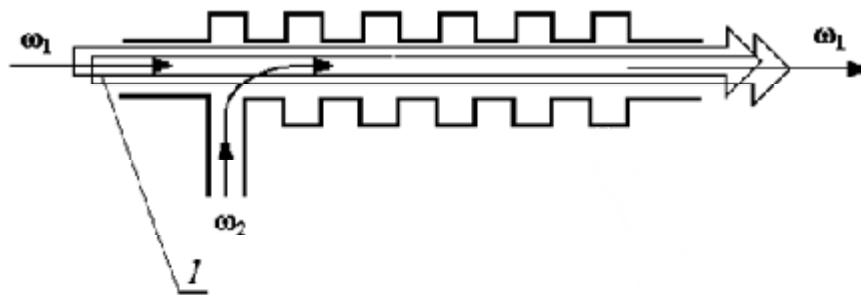


Рис. 1.1. Схема односекційного двопотокового супергетеродинного лазера на вільних електронах – підсилувача доплертронного типу

Розглянемо її роботу більш детально. У робочу область ЛВЕ вводиться двопотоковий релятивістський електронний пучок 1. На вхід системи також подається електромагнітний сигнал з частотою ω_1 та хвильовим числом k_1 . Завдяки параметричній взаємодії електромагнітного сигналу $\{\omega_1, k_1\}$ з системою накачки $\{\omega_2, k_2\}$ у релятивістському електронному пучку виникає хвиля просторового заряду з частотою ω_3 та хвильовим числом k_3 . Частоти і хвильові числа цих хвиль у досліджуваній системі пов'язані між собою умовою параметричного резонансу

$$p_3 = p_1 - p_2, \quad \omega_3 = \omega_1 - \omega_2, \quad k_3 = k_1 + k_2, \quad (1.7)$$

де $p_1 = \omega_1 t - k_1 z$ – фаза електромагнітної хвилі сигналу;

$p_2 = \omega_2 t + k_2 z$ – фаза електромагнітної хвилі накачки;

$p_3 = \omega_3 t - k_3 z$ – фаза хвилі ХПЗ.

Параметри двопотокового супергетеродинного ЛВЕ вибираємо таким чином, щоб хвиля ХПЗ $\{\omega_3, \mathbf{k}_3\}$ мала додаткове підсилення за рахунок двопотокової нестійкості. Трихвильовий параметричний резонанс у досліджуваному приладі виконує лише роль переносу додаткового підсилення з хвилі ХПЗ на електромагнітну хвилю сигналу $\{\omega_1, \mathbf{k}_1\}$. Завдяки використанню ефекту супергетеродинного підсилення на базі двопотокової нестійкості інкременти зростання хвиль у двопотоковому супергетеродинному ЛВЕ є суттєво більшими ніж у еквівалентних параметричних однопотоківих ЛВЕ.

Пристрої, що показані на рис. 1.2 та рис. 1.3 (двопотокові супергетеродинні ЛВЕ-клістрон) [2, 21], відрізняються від односекційної системи, яка описана вище. Справа в тому, що для випадку односекційного двопотокового супергетеродинного ЛВЕ-підсилювача реальне значення коефіцієнта підсилення обмежене ефектом самозбудження системи. Тобто підсилювач перетворюється в генератор для високих рівнів коефіцієнта підсилення. Головна причина цього процесу – присутність у реальних підсилювачах зв'язку між їх входом і виходом за потужністю. Ця задача може бути вирішена радикально завдяки використанню клістронної схеми, приклади якої подано на рис. 1.2 та рис. 1.3.

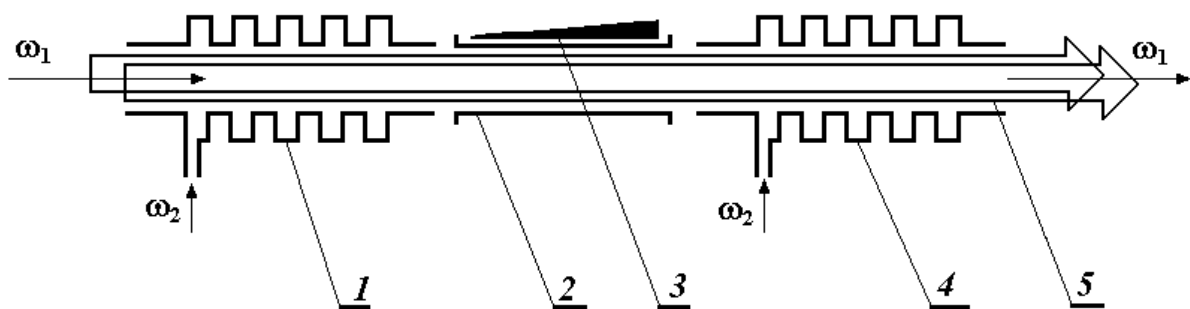


Рис. 1.2. Схема доплертронного двопотокового супергетеродинного ЛВЕ-прискорювача клістронного типу

Вище згадана задача повного розв'язання виходу системи з входом за потужністю для клістронних систем вирішена завдяки спеціальній прольотній секції (рис. 1.2, позиція 2). У цьому випадку система накачки розділена на дві частини: системи накачки першої (позиція 1) та третьої секції (позиція 4). Між ними розміщена прольотна секція 2. В цій секції знаходиться спеціальний поглинач для хвилі сигналу 3. Електромагнітні хвилі завдяки поглиначу 3 повністю поглинаються, електронний же пучок 5 проходить без перешкод. Завдяки цьому стає можливим виконати повний розділ виходу і входу двопотокового супергетеродинного ЛВЕ-підсилювача. З іншого боку, завдяки зменшенню довжини системи накачки конструкція усієї системи істотно спрощується.

Зауважимо, що крім обговореного варіанту доплертронного двопотокового супергетеродинного ЛВЕ клістронного типу (рис. 1.2) або Н-убітронного двопотокового супергетеродинного ЛВЕ клістронного типу (рис. 1.3) існують змішані схеми.

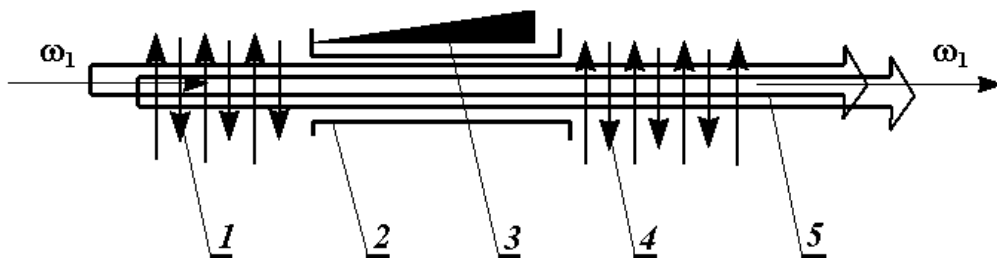


Рис. 1.3. Схема Н-убітронного двопотокового супергетеродинного ЛВЕ-прискорювача клістронного типу

Теоретичні дослідження двопотокових супергетеродинних ЛВЕ [1-23] показали, що ці пристрої характеризуються суттєво більшими у порівнянні з параметричними ЛВЕ коефіцієнтами підсилення в міліметровому-інфрачервоному діапазоні довжин хвиль, високою вихідною потужністю, компактністю. Також, як буде показано в підрозділі 1.3, на базі цих пристроїв можливо формувати надпотужні мультигармонічні сигнали принципово нового типу – фемтосекундні кластери електромагнітних хвиль [27-29].

Плазмо-пучкові супергетеродинні ЛВЕ. Вперше ідея плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ була сформульована в роботі [18]. Тут було запропоновано застосувати супергетеродинне підсилення електромагнітної хвилі у системі плазма-пучок, де у якості додаткового механізму підсилення використати плазмо-пучкову нестійкість. В цій роботі розглядалась система плазма – електронний пучок, яка знаходилась у поздовжньому магнітному полі. Накачка вибиралася у вигляді незвичайної електромагнітної хвилі. В роботі, використовуючи метод дисперсійного рівняння, були отримані оцінки для інкременту зростання електромагнітного сигналу. Такі оцінки показали, що досліджувана система має набагато більші інкременти зростання ніж еквівалентний параметричний ЛВЕ. Було зроблено висновок, що на базі таких систем можливо створити новий тип супергетеродинних параметричних плазмо-пучкових пристроїв. Ці пристрої будуть мати основні переваги традиційних плазмо-пучкових генераторів та підсилювачів і будуть позбавлені деяких їх найбільш суттєвих недоліків. Так, ці системи, як і традиційні плазмо-пучкові [64-72], повинні характеризуватися великим коефіцієнтом підсилення та об'ємним характером взаємодії, що відкриває можливості генерації електромагнітних сигналів великої потужності. З іншого боку, в плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ не існує проблеми трансформації хвиль просторового заряду в електромагнітні хвилі, яка в значній мірі обмежує можливості практичного застосування плазмо-пучкових приладів.

Також зазначимо, що поля в системі плазма-пучок незначно змінюються вздовж поперечного перерізу, що дозволяє використовувати більш широкі пучки, ніж у вакуумних приладах у тому ж частотному діапазоні. Тому плазмо-пучкові супергетеродинні ЛВЕ повинні мати більш високі ККД, більш високі потужності підсилення і генерації електромагнітного випромінювання. Також тут можливе просування в область великих струмів пучків. Нагадаємо, що у вакуумній релятивістській електроніці існує граничний струм пучка, який обмежений просторовим зарядом електронів, вище якого транспортування пучка через простір взаємодії є неможливим [63, 58-80]. Пучки зі струмом

більше граничного можуть поширюватися тільки при наявності нейтралізації просторового заряду електронів, що легко досягається у плазмо-пучковій системі заповненням відносно щільною (у порівнянні з густиною пучка) плазмою.

Однією з особливостей плазмо-пучкової нестійкості (як і дво потокової) є яскраво виражена мультигармонічність [54-80]. Це означає, що плазмо-пучкові супергетеродинні ЛВЕ можливо використовувати для формування електромагнітного сигналу зі складним мультигармонічним спектром (див. підрозділ 1.3).

Аналіз літературних джерел показав, що систематичних досліджень саме супергетеродинних плазмо-пучкових ЛВЕ до робіт дисертанта проведено не було. Була лише сформульована загальна ідея плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ [18, 45] та передбачена перспективність практичної реалізації цих пристроїв як надпотужних підсилювачів електромагнітного сигналу в міліметровому-субміліметровому діапазоні хвиль. Тому дослідження таких пристроїв, які б дозволили впевнитись у вище викладених властивостях плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ, з'ясувати їх нові особливості, є задачею важливою і актуальною.

1.3. Мультигармонічні супергетеродинні ЛВЕ

У теорії лазерів на вільних електронах поле накачки часто вважають гармонічним (або квазігармонічним, якщо враховуються перехідні області на вході і виході в систему) [2-3, 90-99]. У таких моделях помітна мультигармонічність хвильових полів, характерна для нелінійної стадії взаємодії, виявляється тільки по відношенню до електронних хвиль пучка [2, 95-99]. Вищими гармоніками хвиль сигналу і накачки, як правило, нехтують. Перш за все, тому, що їх поява в спектрі хвилі сигналу у такій ситуації обумовлена, частіше за все, лише слабким впливом нерезонансних нелінійних ефектів [2].

В експерименті магнітні ондулятори завжди характеризуються неідеально-синусоїдальним магнітним або електромагнітним полем і, як наслідок, хоч і слабо вираженою, але все ж таки помітною мультигармонічністю. Це означає, що для деяких вищих гармонік ХПЗ і гармонік поля накачки, можуть виконуватися додаткові умови параметричного зв'язку. При цьому процес генерації гармонік хвилі сигналу виявляється резонансним, і, відповідно, стає набагато більш інтенсивним. А це, у свою чергу, може відчутно позначитися на формі електромагнітного сигналу, який підсилюється (генерується).

Незважаючи на очевидність описаного вище резонансного механізму генерації вищих гармонік, в теорії параметричних ЛВЕ він практично не вивчався. Перш за все, тому, що в традиційній постановці питання, коли головною метою є досягнення високих рівнів підсилення і ККД при гармонічному вихідному сигналі [2, 95-99], така версія мультигармонічної взаємодії представляє незначний інтерес для практики. У тих же окремих випадках, коли явищам даного класу все ж приділяють якусь увагу, їх розглядають як паразитні ефекти, реалізація яких для практики є небажаною.

Ситуація істотно змінилася з появою супергетеродинних ЛВЕ. Останні, як відомо [1-23, 100-101], побудовані на основі просторового поєднання однієї із поздовжніх пучкових нестійкостей (наприклад, двопотокової або плазмопучкової) з традиційною для звичайних ЛВЕ параметричною нестійкістю [2-3, 90-99]. На відміну від параметричних ЛВЕ [2-3, 90-99], тут в силу специфічних властивостей зазначених нестійкостей, мультигармонічність ХПЗ виявляється досить сильно вираженою спочатку [26, 31-33, 89]. Наприклад, в деяких спеціальних випадках максимум амплітуди гармоніки в спектрі ХПЗ при розвитку двопотокової нестійкості може припадати на 15 або 20-ту гармоніку, а не на першу, як звичайно. У такій ситуації навіть наявність слабо вираженої мультигармонічності поля накачки здатне привести до генерації досить інтенсивного спектру вищих гармонік електромагнітного сигналу. Форма вихідного сигналу в такому випадку може радикально змінитися.

Наприклад, як показано в роботах [27, 28], гармонічний на вході двопотокового супергетеродинного ЛВЕ електромагнітний сигнал у процесі підсилення здатний трансформуватися в знаковмінну послідовність надпотужних фемтосекундних кластерів електромагнітного поля – кластерну хвилю.

Аналіз показав, що фемтосекундні кластери, так само як і їхні більш відомі аналоги – фемтосекундні радіоімпульси [102, 103], можуть мати унікальні фізичні властивості. Наприклад, вони можуть проникати на задану глибину в різні щільні матеріальні середовища (газоподібні, тверді, рідкі) без загасання. А це, у свою чергу, відкриває можливість для практичної реалізації ряду абсолютно нових технологій як комерційного, так і спеціального призначень. Відзначимо, що в таких застосуваннях основні вимоги до ЛВЕ істотно змінюються. А саме, підсилювальні властивості ЛВЕ відходять на другий план, а головним стає його здатність працювати як формувач коротких (фемтосекундних) кластерів електромагнітного поля. Або, іншими словами, задачі оптимізації системи за максимумом підсилення і ККД, залишаючись, як і раніше важливими, стають, все ж таки, набагато менш актуальними. На перший план виходить здатність системи ефективно формувати мультигармонічні спектри вихідного сигналу заданої форми. А це, у свою чергу, помітно змінює як саму ідеологію побудови ЛВЕ такого класу, так і головні акценти теорії при вивченні базової фізики процесів, що протікають тут. Про такі ЛВЕ говорять як про мультигармонічні лазери на вільних електронах [27, 30-31].

Численні теоретичні та експериментальні роботи кінця 70-х – першої половини 80-х [102, 103] підтвердили як принципову можливість практичної побудови фемтосекундних генераторів, так і ключові фізичні особливості самих фемтосекундних імпульсів. Зауважимо, що всі, без винятку, експериментально реалізовані в той час фемтосекундні системи були побудовані на базі квантових лазерів. Важливо відзначити, що незважаючи на реально досягнуті успіхи фундаментального плану, такого роду системи не отримали того широкого практичного застосування, заради якого все і починалося. Перш за все, тому, що найбільш «цікаві» з них вимагали виключно високих рівнів середньої

потужності (одиниці - десятки, а в ряді випадків - і сотні кВт). Тоді як реально досягнуті рівні середньої потужності були набагато нижчі (як правило, десятки - сотні мВт). Це стимулювало одних продовжувати такі роботи, а інших – шукати більш ефективні технологічні принципи і фізичні механізми.

І такі принципи і механізми були знайдені [27-29, 104]. Новий технологічний принцип був сформульований у формі ідеї синтезу (формування) кластерів електромагнітного поля сигналу з полів багатьох електромагнітних хвиль, як спектральних компонент. Новий фізичний механізм був запропонований у формі ефекту множинних паралельних трихвильових параметричних резонансів у мультигармонічному двопотоковому супергетеродинному ЛВЕ. Як результат, вихідний електромагнітний сигнал генерувався у формі періодичної знакозмінної послідовності електромагнітних кластерів – кластерної хвилі. У якості вище згаданих «багатьох гармонічних джерел» тут реально виступали множинні гармоніки хвилі просторового заряду (ХПЗ), збуджені в одному і тому ж релятивістському електронному пучку. ХПЗ в такій мультигармонічній системі існувала у вигляді періодичної знакозмінної послідовності електронних кластерів. Відповідно, поле мультигармонічного магнітного ондулятора також розглядається як задана знакозмінна послідовність своєрідних магнітних кластерів. За рахунок ефекту множинного трихвильового параметричного резонансу гармонік цих кластерних хвиль енергія електронного пучка в полі накачки через гармоніки ХПЗ трансформується в енергію гармонік електромагнітного кластерного сигналу. Як наслідок, ми і маємо на виході системи надпотужний електромагнітний сигнал у формі згаданої знакозмінної послідовності вузьких (в тому числі, фемтосекундних) кластерів електромагнітного поля.

Один з варіантів реалізації вище розглянутої ідеї синтезу (формування) кластерів електромагнітного поля сигналу з полів багатьох електромагнітних хвиль, як спектральних компонент, ілюструється на рис. 1.4. Як бачимо, на вхід системи подається гармонічний сигнал 1, який може бути формально

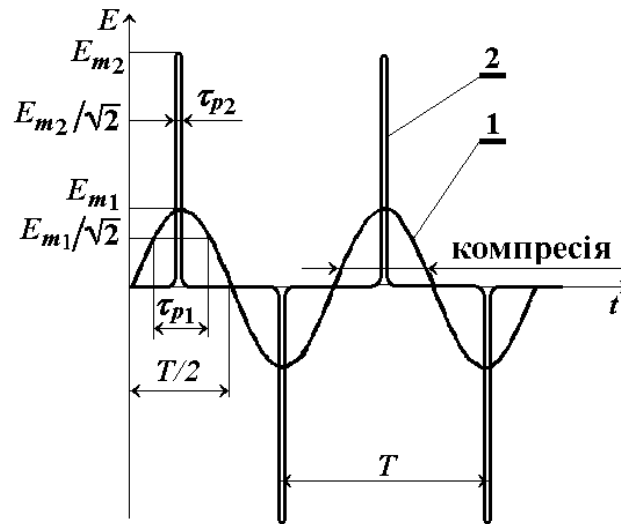


Рис. 1.4. Демонстрація сутності методу компресії фемтосекундних хвильових пакетів

представлений, як послідовність (з періодом T) імпульсів, що мають синусоподібну форму. Головна ідея цього варіанту полягає у компресії цих напівсинусних імпульсів і створення послідовності (з періодом T) дельтоподібних (в тому числі і фемтосекундних) імпульсів 2. Цей процес характеризується коефіцієнтом компресії, який може бути визначений як

$$f_{com} = \tau_{p1}/\tau_{p2} \approx T/4\tau_{p2}, \quad (1.8)$$

де всі величини, пояснюються на рис. 1.4. В цій послідовності кожний скомпресований імпульс 2 можна розглядати, як солетоноподібний надкороткий хвильовий пакет, за умови виконання нерівності $\tau_{p2} \ll \tau_{ch}$ (τ_{ch} – характеристичний час). Також неважко з'ясувати, що збільшення миттєвої амплітуди імпульсу одночасно відбувається зі скороченням його тривалості τ_{p2} (або, як це впливає з формули (1.8), одночасно збільшується коефіцієнт компресії f_{com}). Так, коли коефіцієнт компресії дорівнює $f_{com} \cong 100$, потужність стиснутого імпульсу збільшується у 100 разів.

Зрозуміло, що у випадку ідеальної компресії система повинна генерувати

послідовність дельта-імпульсів. За своєю суттю така послідовність дельта-імпульсів є складним мультигармонічним сигналом. Неважко з'ясувати, яким повинен бути спектр мультигармонічного сигналу щоб реалізувати сигнал у вигляді надкоротких (дельтоподібних) кластерів. Як показують відповідні розрахунки (наприклад, [105]), такі вузькі хвильові пакети характеризуються широким мультигармонічним спектром, модуль амплітуд яких характеризується однаковим значенням.

Таким чином, щоб прилад створював вузькі хвильові пакети необхідно, щоб він генерував спектр гармонік, які мають приблизно однакові амплітуди. Суперпозиція цих гармонік і утворить вузький хвильовий пакет. В цьому і полягає ідея синтезу надкоротких електромагнітних кластерів.

Отже, для реалізації генерації вузьких хвильових пакетів (в тому числі і фемтосекундних) необхідно унікальне (з технологічної точки зору) мультигармонічне джерело електромагнітних хвиль. Унікальність його полягає у тому, що таке джерело повинне генерувати якнайменше десятки (і навіть сотні) гармонік сигналу з приблизно однаковими амплітудами. А це, як відомо, не така проста технологічна задача.

Як показано в роботах [27-30], джерело, що здатне генерувати потужний мультигармонічний сигнал з багатьма гармоніками, можливо побудувати на базі мультигармонічного двопотокового супергетеродинного лазера на вільних електронах. Найпростіший варіант схеми мультигармонічного двопотокового супергетеродинного ЛВЕ-підсилювача клістронного типу зображено на рисунку 1.5.

Прилад працює наступним чином. До входу в систему подається слабкий електромагнітний сигнал (тут $n\omega_1, nk_1$ – частота и хвильове число, відповідно, n номер n -ої гармоніки Фур'є). Сигнал може бути як монохроматичним ($n = 1$), так і мультигармонічним ($n = 2, 3, \dots, l$). Релятивістські парціальні електронні пучки 1 й 2, що мають різну швидкість, формують двошвидкісний електронний пучок 3. Останній, в свою чергу, спрямовується в робочу частину першої системи накачки 4. Перша система накачки 4 є мультигармонічною,

коли сигнал вхідної хвилі є мультигармонічним. Якщо ж сигнал є монохроматичним, то система 4 теж є монохроматичною. Будемо вважати, що система 4 – монохроматична. Головне призначення системи 4 – модуляція електронного двошвидкісного пучка 3 (за густиною) та збудження вищих гармонік хвилі просторового заряду (ХПЗ) електронного пучка 3. Для цього використовується фізичний механізм супергетеродинного підсилення. Реалізація цього механізму приводить до того, що електромагнітний сигнал перетворюється в форму мультигармонічної хвилі просторового заряду електронного пучка. Далі електромагнітний сигнал поглинається повністю системою поглинання прольотної секції 5.

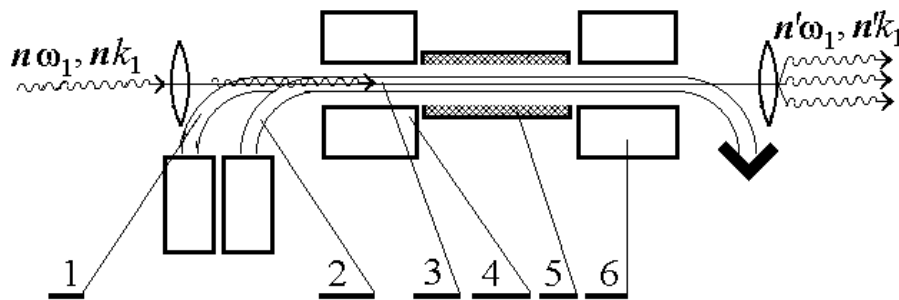


Рис. 1.5. Варіант схеми мультигармонічного двопотокового супергетеродинного ЛВЕ-підсилювача клістронного типу

В прольотній секції 5 через реалізацію механізму двопотокової нестійкості відбувається суттєве підсилення хвиль ХПЗ (включаючи усі їх гармоніки). Таким чином, сильно модульований (та мультигармонічний) електронний пучок 3 попадає до входу другої мультигармонічної системи накачки 6. Саме тут відбувається генерація вихідного мультигармонічного електромагнітного сигналу (в тому числі і фемтосекундного хвильового пакету). Це відбувається завдяки механізму мультигармонічної параметрично-резонансної трихвильової взаємодії. Специфічна особливість цього механізму полягає в його «множинній» природі. А саме, в параметрично-резонансній взаємодії знаходяться також і відповідні вищі гармоніки. Так, коли ми маємо, наприклад, N гармонік кожної хвилі, то разом з цим маємо одночасно і N

відповідних трихвильових резонансів. Таким чином, маємо випадок специфічної взаємодії мультигармонічної хвилі просторового заряду (разом із вищими гармоніками) з хвилею другої системи накачки б та мультигармонічним вихідним сигналом.

Таким чином на виході пристрою формується мультигармонічний електромагнітний сигнал великої потужності та вузької направленості. Цей сигнал може бути фемтосекундним хвильовим пакетом, або сигналом іншої заданої форми.

Пізніше було з'ясовано, що крім мультигармонічного двопотокового супергетеродинного ЛВЕ можливий і ряд інших подібних типів конструкцій. І всі вони також можуть бути успішно використані як джерела фемтосекундних кластерних хвиль. У тому числі і на основі мультигармонічних плазмо-пучкових ЛВЕ.

З експериментальних досліджень відомо [28, 31, 58, 104], що в плазмо-пучковій системі генеруються хвилі просторового заряду з великою кількістю вищих гармонік. Тому на базі плазмо-пучкових ЛВЕ можливо створювати аналогічно, як і на базі мультигармонічних двопотокових супергетеродинних ЛВЕ, формувачі надкоротких електромагнітних кластерів. У зв'язку з цим задача дослідження мультигармонічних властивостей плазмо-пучкових лазерів на вільних електронах є актуальною.

1.4. Теоретичні методи дослідження

Нелінійні процеси, що мають місце у мультигармонічних лазерах на вільних електронах, характеризуються тим, що тут відбувається параметрична резонансна взаємодія між великою кількістю (сотні і більше) гармонік хвиль. Тому з математичної точки зору задача аналізу фізичних процесів у таких приладах є надзвичайно складною. Виникає питання, який теоретичний метод потрібно використати щоб розв'язати таку складну задачу?

Лазери на вільних електронах, як клас пристроїв, народилися на стику

квантової і класичної електроніки [1-7, 106-109]. У зв'язку з цим сучасна теорія ЛВЕ містить коріння самих різних галузей знань. Найбільше значення тут мають три сучасні галузі фізики: фізична електроніка НВЧ, електродинаміка плазми і релятивістська електродинаміка [1-7, 106-109].

Історично квантово-механічні методи дослідження в теорії ЛВЕ довгий час залишалися єдиними [106-113]. Проте з часом з'ясувалося, що базові робочі механізми ЛВЕ виявилися класичними [114-117], тобто для опису переважного числа явищ в ЛВЕ можна використовувати класичний підхід. Цьому сприяло також те, що у рамках квантової теорії виявилось дуже важко описати ефекти кулонівської взаємодії електронів між собою (колективні ефекти), які проявляються, коли пучок можна подати як потік дрейфуючої плазми. Тому квантово-механічний опис процесів в ЛВЕ має обмежену область застосування [106-109]. Слід зазначити, що ряд фізичних явищ в ЛВЕ, таких як статистичні характеристики випромінювання, ефекти квантової віддачі та деякі інші можуть бути досліджені тільки за допомогою квантових методів [106-109].

Перші нелінійні "класичні" теорії ЛВЕ [116-117] використовували метод одночастинкових струмів [116] і метод квазіблохівських рівнянь [117]. Метод одночастинкових струмів [116-121] базується на релятивістському рівнянні руху окремо взятого електрона в електромагнітних полях ЛВЕ та на рівняннях Максвелла. Густина струму електронного пучка обчислюється як сукупність одночастинкових струмів, створених окремими електронами, які мають різні початкові координати і початкові швидкості. Для опису електромагнітних хвиль використовується метод повільно змінних амплітуд і фаз. У результаті отримуємо систему зв'язаних рівнянь, у які входять як рівняння для амплітуди і фази хвилі сигналу, так і релятивістські рівняння руху електрона. Зазначимо, що рівняння руху електрона часто зводять до рівняння нелінійного маятника [4-109]. Далі отримана система зв'язаних рівнянь аналізується за допомогою чисельних методів.

Результати теоретичних розрахунків, які отримані за допомогою методу одночастинкових струмів, як правило, добре узгоджуються з

експериментальними даними [4-109, 118-119]. У цьому виявляється беззаперечна перевага цього методу. Однак слід зазначити і недоліки цього методу. Перш за все метод одночастинкових струмів – складний метод, який, в основному, спирається на чисельний аналіз. Проведення аналітичного дослідження, навіть у відносно простих випадках, за допомогою цього методу, як правило, виявляється досить складним. Внаслідок цього, як показує досвід, виникають проблеми. Так, зокрема, неможливо описати ефекти нелінійної генерації поперечних Н-убітронних [122-124] і поздовжніх електричних [97, 125-126] полів, появи вищих смуг підсилення [127], реалізації різного типу електронно-хвильових механізмів супергетеродинного підсилення [8, 20-21]. Крім цього, за допомогою методу одночастинкових струмів досить складно аналізувати колективні явища, які проявляються при підвищенні густини пучка.

Є й інші варіанти теорії ЛВЕ, що використовують рівняння руху окремо взятого електрона в електромагнітних полях. Наприклад, в роботі [128] використовувався метод великих частинок [129-131]. Відмінність його від методу одночастинкових струмів полягає тільки в тому, що вивчається рух не окремого електрона, а групи електронів, що мають близькі координати і швидкості. В інших варіантах теорії ЛВЕ рівняння руху окремого електрона зводиться до рівнянь добре вивчених у НВЧ електроніці [132-134]. Після цього використовуються відомі класичні результати НВЧ електроніки.

Про переваги і недоліки цих варіантів теорії ЛВЕ слід сказати, що вони ті ж, що і у варіантів теорій, побудованих на основі методу одночастинкових струмів.

У роботах [4-7, 108-119, 135] використовується теорія ЛВЕ, яка побудована на основі методів теорії плазми. Релятивістський електронний пучок при цьому розглядається як потік дрейфуючої плазми [63, 136]. Теорія ЛВЕ ґрунтується на самоузгодженому вирішенні електродинамічних рівнянь Максвелла і кінетичного рівняння Больцмана. Такий підхід дозволяє послідовно описати як колективні ефекти, так і явища, що протікають при низькій густині електронів. Аналізу ЛВЕ з використанням методів теорії

плазми присвячені численні роботи [137-144].

У роботах [137-145] використовується метод штучного магнітодіелектрика. Суть ідеї цього методу полягає в тому, що кожній фіксованій електромагнітній хвилі, наприклад, що розповсюджується в хвилеводі складної конфігурації, можна поставити у відповідність точно таку ж хвилю, але яка поширюється у суцільному середовищі. У силу більш простих граничних умов розв'язки електродинамічної задачі у другому випадку є простішими. У рамках цього методу є можливість однакового опису різних типів накачки і електромагнітних полів. Використовуючи цей метод, в роботах [137-145] вперше описані ЛВЕ з уповільненою доплертронною і ЕН-убітронною накачкою, показана можливість реалізації ефекту вибухової нестійкості, стаціонарних асимптотичних і осциляторних типів взаємодії.

В роботах [117, 146-147] теоретичний аналіз ЛВЕ проводився з точки зору теорії плазми, в результаті якого отримували систему квазіблохівських рівнянь. При такому методі дослідження розв'язки рівняння Больцмана шукаються у вигляді розкладу функції розподілу в ряд за гармоніками з повільно змінними амплітудами. Далі з рівняння Больцмана отримують систему зв'язаних (так званих квазіблохівських) рівнянь для амплітуд функції розподілу. Розклад в ряд за гармоніками застосовують також і до рівнянь Максвелла. Отримується система зв'язаних вкорочених максвеллівських і квазіблохівських рівнянь, яка використовується для опису нелінійних процесів. До недоліків такого методу дослідження слід віднести його трудомісткість і складність [97, 107, 123-126].

Для усунення труднощів, пов'язаних з наявністю секулярних доданків використовується метод великомасштабних збурень для опису нелінійних процесів в ЛВЕ [147]. В роботі [147] метод великомасштабних збурень використовувався в найбільш спрощеному вигляді.

У ряді робіт, присвячених теорії ЛВЕ, для аналізу самоузгодженої системи рівнянь Максвелла-Больцмана використовують метод нелінійного дисперсійного рівняння [15-49, 148-150], застосовують техніку прямого і

зворотного перетворень Лапласа [13, 4, 149]. Результати, які отримують при таких підходах, як правило, справедливі лише у вузькому інтервалі параметрів систем.

Для аналізу процесів у ЛВЕ також широко використовують методи ієрархічного підходу до теорії коливань і хвиль [1-3, 151-158]. До цих методів відносять методи усереднених кінетичного [99] і квазігідродинамічного рівнянь [3, 153], усередненого рівняння для густини струму [153], метод усереднених характеристик [159]. Слід зазначити, що вище перелічені методи можна розглядати як часткові реалізації методу усереднених характеристик [1-2, 159]. В основі методу усереднених характеристик лежить ідея про можливість вирішення, наприклад, кінетичного рівняння Больцмана або квазігідродинамічного рівняння за допомогою класичної версії методу усереднення Боголюбова [1-3, 160-161]. Ідея базується на тому спостереженні, що характеристики, наприклад, кінетичного чи квазігідродинамічного рівняння для функції розподілу є не що інше, як рівняння руху окремих електронів, для яких техніка застосування методу асимптотичного інтегрування досить добре розроблена. Це і відкриває можливість до застосування методу Боголюбова для інтегрування вихідного рівняння. Слід відмітити, що цей метод успішно застосовується для аналізу складних мультигармонічних взаємодій [22-23, 26-27, 29, 31, 89, 159, 162-163]. Завдяки цьому методу стає можливим дослідження параметрично-резонансних взаємодій, в яких приймають участь сотні гармонік. При цьому можливо для деяких випадків отримати аналітичні співвідношення.

Порівнюючи вищевикладені теоретичні методи досліджень можна стверджувати, що найбільш ефективним для аналізу мультигармонічних процесів у плазمو-пучкових супергетеродинних ЛВЕ є метод усереднених характеристик.

1.5. Висновки до розділу 1

1. У результаті огляду літературних джерел з'ясовано, що супергетеродинні лазери на вільних електронах мають ряд переваг у порівнянні з параметричними ЛВЕ. Вони при помірних вимогах до їх технологічної бази, демонструють виключно високі коефіцієнти підсилення та рівні вихідної потужності, компактність.

2. На базі супергетеродинних ЛВЕ можливо створити мультигармонічні пристрої – мультигармонічні ЛВЕ, які здатні формувати надпотужні мультигармонічні сигнали принципово нового типу – фемтосекундні електромагнітні кластерів тераватного рівня.

3. Визначено, що на поточний час була лише сформульована загальна ідея плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ, передбачена перспективність практичної реалізації цих пристроїв як надпотужних підсилювачів електромагнітного сигналу в міліметровому-субміліметровому діапазоні хвиль, проте систематичних досліджень цих приладів не проводилося.

4. На основі аналізу теоретичних підходів, що використовуються для вивчення систем типу лазери на вільних електронах, з'ясовано, що найбільш ефективним для теоретичного дослідження фізичних процесів у ЛВЕ з урахуванням мультигармонічної взаємодії гармонік хвиль є ієрархічний підхід до теорії коливань і хвиль, а саме, одна з його реалізацій – метод усереднених характеристик.

РОЗДІЛ 2

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕТОДИКИ ТЕОРЕТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ МУЛЬТИГАРМОНІЧНИХ ПЛАЗМО-ПУЧКОВИХ СУПЕРГЕТЕРОДИННИХ ЛАЗЕРІВ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ

Виходячи з аналізу літературних джерел можна визначити основні завдання, які необхідно вирішити у дисертаційній роботі:

- побудувати нелінійну теорію мультигармонічних плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ доплертронного типу з урахуванням мультигармонічної взаємодії хвиль;
- побудувати нелінійну теорію мультигармонічних плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з Н-убітронною накачкою з урахуванням мультигармонічної взаємодії хвиль;
- визначити інкременти зростання, рівні та механізми насичення хвиль плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з урахуванням мультигармонічних взаємодій.

Також з цього аналізу з'ясовано, що найбільш ефективним для теоретичного розв'язання вище сформованих задач є метод усереднених характеристик. У дисертаційній роботі метод усереднених характеристик застосовується для розв'язання квазігідродинамічного рівняння [1-2] та рівняння неперервності. Отримані за допомогою методу усереднених характеристик розв'язки для швидкості та концентрації використовують у рівняннях Максвелла, які в свою чергу розв'язуються за допомогою методу повільно змінних амплітуд. У зв'язку з використанням двох методів виникає завдання у модернізації, узгодженні алгоритмів, які у них використовуються.

У цьому розділі викладені модернізовані метод усереднених характеристик та метод повільно змінних амплітуд, які використовуються як базові для теоретичного дослідження плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ.

2.1. Метод усереднених характеристик

Сутність методу усереднених характеристик [1-2, 159] полягає в спеціальному перетворенні вихідних рівнянь, у результаті яких вони стають більш простими. Для цього пропонується цілий ряд ієрархічних схем [1-2, 151-158]. Кінцева мета усіх цих перетворень є зведення вихідних рівнянь до так званих «згладжених» рівнянь, тобто, до таких, які не містять ніяких швидких осциляцій. В теорії ієрархічних та асимптотичних методів ці рівняння називаються вкороченими [1-2, 151]. Це означає, що в результаті процедур перетворення замість початкової складної системи отримуємо деяку суттєво спрощену систему рівнянь. Характерною особливістю останньої є те, що вкороченні рівняння записуються відносно найповільніших динамічних змінних. Завдяки цьому, «згладжені» (вкорочені) рівняння не містять ніяких швидких осциляцій.

Головна цінність вкорочених рівнянь полягає в їх простоті. На відміну від випадку вихідної системи для їх інтегрування можна використати традиційні аналітичні, або числові методи. Однак, отриманий «вкорочений» розв'язок не може бути використаний безпосередньо як розв'язок початкової задачі. Для знаходження рішення цієї проблеми необхідно виконати зворотні перетворення.

Метод усереднених характеристик застосовується для асимптотичного інтегрування систем з частинними похідними з осцилюючими правими частинами, які можна записати в стандартній формі

$$A'(U, z, t) \frac{\partial U}{\partial t} + \left(Z'(U, z, t) \times \frac{\partial}{\partial z} \right) U + C'(z, t) U = R'(U, z, t), \quad (2.1)$$

де A', Z', C', R', Z' є квадратними матрицями розміру $l \times l$;

$U = U(z, t)$ деяка вектор-функція з координатами $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$;

t – деяка змінна, наприклад, лабораторний час.

Можна довести (див., наприклад, [1]), що рівняння в стандартній формі (2.1) може бути перетворене у квазілінійне рівняння першого порядку типу

$$\frac{\partial U}{\partial t} + Z(U, z, t) \frac{\partial U}{\partial z} = R(U, z, t). \quad (2.2)$$

На першому етапі обчислювального алгоритму використаємо відомі властивості вихідного диференціального рівняння (2.2). Завдяки цим властивостям рівняння у частинних похідних (2.2) зводиться до системи диференціальних рівнянь у повних похідних, які є характеристиками рівняння (2.2):

$$\frac{dU}{dt} = R(U, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = Z(U, z, t). \quad (2.3)$$

Це спрощення дає можливість отримати систему рівнянь, яка є суттєво простішою, ніж процедура пошуку розв'язків рівнянь із частинними похідними (2.2). Однак воно, як правило, є недостатнім для побудови розв'язків рівняння (2.2). Розв'язання рівняння (2.3), особливо у випадку багатоперіодичних нелінійних коливань, може бути досить складною розрахунковою задачею. Тому на другому етапі обчислювального алгоритму проводимо асимптотичне інтегрування рівнянь (2.3). Для цього використовується ієрархічна розрахункова технологія [1, 2]. Рівняння (2.3) приймається у якості початкового рівняння нульового рівня ієрархії. Далі, згідно до ієрархічної розрахункової схеми виконуємо процедуру введення швидких фаз у, як параметрів, і систему (2.3) подаємо у вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= Z(U, z, \psi, t), \\ \frac{dU}{dt} &= R(U, z, \psi, t),\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \Omega(z, U) + Y(U, z, \psi, t).\tag{2.5}$$

Відповідно до загальної процедури асимптотичного інтегрування, виділяємо набір великих параметрів задачі і будуємо ієрархічний ряд

$$\xi_1 \gg \xi_2 \gg \dots \gg \xi_\kappa \gg \xi_m \gg 1,\tag{2.6}$$

де всі великі параметри задачі визначаються згідно стандартного метода [1, 2].

Далі виділяємо найбільш швидко змінну, яка характеризується найбільшим великим параметром. Усі інші змінні у порівнянні з цією змінною вважаємо повільними. У результаті приходимо до задачі з однією швидкою змінною, або за термінами ієрархічного підходу розглядаємо перехід з нульового на перший ієрархічний рівень. Асимптотичний розв'язок системи (2.4), (2.5) у цьому випадку будується за допомогою заміни змінних Крилова-Боголюбова [1-2, 160-161, 164]:

$$U = \bar{U} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_u^{(n)}(\bar{z}, \bar{U}, \bar{\Psi}), \quad z = \bar{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_z^{(n)}(\bar{z}, \bar{U}, \bar{\Psi}),\tag{2.7}$$

$$\psi = \bar{\Psi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} v^{(n)}(\bar{z}, \bar{U}, \bar{\Psi}).\tag{2.8}$$

У результаті такої заміни отримуємо систему диференціальних рівнянь для усереднених величин \bar{U} , \bar{z} , $\bar{\Psi}$, або систему рівнянь першого рівня ієрархії:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{U}}{dt} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_u^{(n)}(\bar{z}, \bar{U}), \\ \frac{d\bar{z}}{dt} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_z^{(n)}(\bar{z}, \bar{U}),\end{aligned}\quad (2.9)$$

$$\frac{d\bar{\Psi}}{dt} = \Omega(\bar{z}, \bar{U}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} B^{(n)}(\bar{z}, \bar{U}), \quad \xi \equiv \xi_1. \quad (2.10)$$

Особливість цієї системи рівнянь полягає у тому, що тут швидка і повільні змінні розділені між собою (праві частини рівнянь (2.9) та (2.10) не залежать від швидкої змінної $\bar{\Psi}$). Всі функції, що входять до правих частин співвідношень (2.9), (2.8) можна знайти, використовуючи відомі алгоритми асимптотичного інтегрування [1-2]. У першому наближенні (за малим параметром $1/\xi$) ці функції знаходимо з співвідношень

$$A_u^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(\bar{z}, \bar{U}, \bar{\Psi}) d\bar{\Psi}, \quad (2.11)$$

$$u_u^{(1)} = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\bar{\Psi}} (R(\bar{z}, \bar{U}, \bar{\Psi}) - A_u^{(1)}) d\bar{\Psi}, \quad (2.12)$$

$$A_z^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(\bar{z}, \bar{U}, \bar{\Psi}) d\bar{\Psi}, \quad (2.13)$$

$$u_z^{(1)} = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\bar{\Psi}} (Z(\bar{z}, \bar{U}, \bar{\Psi}) - A_z^{(1)}) d\bar{\Psi}, \quad (2.14)$$

$$B^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial U} u_u^{(1)} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}} u_z^{(1)} + Y(\bar{z}, \bar{U}, \bar{\Psi}) \right) d\bar{\Psi}, \quad (2.15)$$

$$v^{(1)} = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\bar{\Psi}} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial U} u_u^{(1)} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}} u_z^{(1)} + Y(\bar{z}, \bar{U}, \bar{\Psi}) - B^{(1)} \right) d\bar{\Psi}. \quad (2.16)$$

Для другого наближення відповідні формули стають складнішими

$$A_u^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial R}{\partial \bar{U}} u_u^{(1)} + \frac{\partial R}{\partial \bar{z}} u_z^{(1)} + \frac{\partial R}{\partial \bar{\Psi}} v^{(1)} - \right. \\ \left. - \frac{\partial u_u^{(1)}}{\partial \bar{U}} A_u^{(1)} - \frac{\partial u_u^{(1)}}{\partial \bar{z}} A_z^{(1)} - \frac{\partial u_u^{(1)}}{\partial \bar{\Psi}} B^{(1)} \right) d\bar{\Psi}, \quad (2.17)$$

$$u_u^{(2)} = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\bar{\Psi}} \left(\frac{\partial R}{\partial \bar{U}} u_u^{(1)} + \frac{\partial R}{\partial \bar{z}} u_z^{(1)} + \frac{\partial R}{\partial \bar{\Psi}} v^{(1)} - \right. \\ \left. - \frac{\partial u_u^{(1)}}{\partial \bar{U}} A_u^{(1)} - \frac{\partial u_u^{(1)}}{\partial \bar{z}} A_z^{(1)} - \frac{\partial u_u^{(1)}}{\partial \bar{\Psi}} B^{(1)} - A_u^{(2)} \right) d\bar{\Psi}, \quad (2.18)$$

$$A_z^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Z}{\partial \bar{U}} u_u^{(1)} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} u_z^{(1)} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{\Psi}} v^{(1)} - \right. \\ \left. - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \bar{U}} A_u^{(1)} - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \bar{z}} A_z^{(1)} - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \bar{\Psi}} B^{(1)} \right) d\bar{\Psi}, \quad (2.19)$$

$$u_z^{(2)} = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\bar{\Psi}} \left(\frac{\partial Z}{\partial \bar{U}} u_u^{(1)} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} u_z^{(1)} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{\Psi}} v^{(1)} - \right. \\ \left. - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \bar{U}} A_u^{(1)} - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \bar{z}} A_z^{(1)} - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \bar{\Psi}} B^{(1)} - A_z^{(2)} \right) d\bar{\Psi}, \quad (2.20)$$

$$B^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{U}} u_u^{(1)} + \frac{\partial Y}{\partial \bar{z}} u_z^{(1)} + \frac{\partial Y}{\partial \bar{\Psi}} v^{(1)} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{U}} u_u^{(2)} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}} u_z^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z} \partial \bar{U}} u_z^{(1)} u_u^{(1)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z}_j \partial \bar{z}_k} u_{z,j}^{(1)} u_{z,k}^{(1)} - \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \bar{U}} A_u^{(1)} - \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \bar{z}} A_z^{(1)} - \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \bar{\Psi}} B^{(1)} \right) d\bar{\Psi}, \quad (2.21)$$

$$v^{(2)} = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\bar{\Psi}} \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{U}} u_u^{(1)} + \frac{\partial Y}{\partial \bar{z}} u_z^{(1)} + \frac{\partial Y}{\partial \bar{\Psi}} v^{(1)} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{U}} u_u^{(2)} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}} u_z^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z} \partial \bar{U}} u_z^{(1)} u_u^{(1)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z}_j \partial \bar{z}_k} u_{z,j}^{(1)} u_{z,k}^{(1)} - \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \bar{U}} A_u^{(1)} - \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \bar{z}} A_z^{(1)} - \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \bar{\Psi}} B^{(1)} - B^{(2)} \right) d\bar{\Psi} \quad (2.22)$$

Далі рівняння системи (2.9) для повільних змінних аналізуємо з точки зору великого параметра наступного рівня ієрархії ξ_2 , виділяємо наступну швидку змінну і аналогічно переходимо до усереднених рівнянь наступного ієрархічного рівня. На цьому ієрархічному рівні отримуємо систему аналогічну до (2.9), у якій уже дві швидкі змінні будуть відділені від повільних змінних. Таким чином ми можемо повторювати процедуру переходу на вищий ієрархічний рівень поки не вичерпається весь ієрархічний ряд великих параметрів (2.6). Рівняння для довільного k -го ієрархічного рівня в загальному випадку можна записати у вигляді:

$$\frac{dU^{(k)}}{dt} = R^{(k)}(U^{(k)}, z^{(k)}), \quad \frac{dz^{(k)}}{dt} = Z^{(k)}(U^{(k)}, z^{(k)}). \quad (2.23)$$

Тут $R^{(k)}(U^{(k)}, z^{(k)})$ деяка нелінійна функціональна матриця; верхній індекс k означає, що відповідні величини належать до k -го ієрархічного рівня. Таким чином, отримуємо рівняння для довільного k -го ієрархічного рівня (2.23) безпосередньо k -раз усереднюючи рівняння (2.3).

Рівняння на верхньому ієрархічному рівні є найбільш простими через відсутність швидкоосцилюючих змінних. Тому знайти розв'язок цього рівняння виявляється набагато простіше, ніж для вихідного рівняння. Однак, як зазначалось вище, цей розв'язок не буде задовольняти вихідному рівнянню, необхідно виконати зворотні перетворення.

Зворотні перетворення [1-2] знаходимо, використовуючи прямі перетворення (2.7)-(2.8), у яких відповідні функції визначаються формулами (2.11)-(2.22). За допомогою зворотних перетворень з отриманих розв'язків на верхніх рівнях ієрархії знаходимо розв'язки на нижніх рівнях ієрархії. Заміна (2.24) демонструє перехід від змінних k -го ієрархічного рівня до змінних $(k-1)$ -го ієрархічного рівня:

$$z^{(k-1)}(t) = z^{(k)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_{\kappa}^n} u_{z\kappa}^{(n)}(z^{(k)}(t), \psi^{(k)}(t)),$$

$$\psi^{(k-1)}(t) = \psi^{(k)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_{\kappa}^n} v_{\kappa}^{(n)}(z^{(k)}(t), \psi^{(k)}(t)), \quad (2.24)$$

$$U^{(k-1)}(z^{(k-1)}, t) = U^{(k)}(z^{(k)}, \mathcal{Y}^{(k)}, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_{\kappa}^n} u_{U\kappa}^{(n)}(U^{(k)}, z^{(k)}, \mathcal{Y}^{(k)}, t).$$

Зазначимо, що функції за допомогою яких ми виконуємо цей перехід знаходяться за стандартною процедурою [1-2]. Таким чином, здійснюємо перехід від найвищого ієрархічного рівня до нульового тобто початкового. У результаті таких перетворень отримуємо розв'язок вихідного рівняння.

Аналізуючи процедуру зворотних перетворень, слід зазначити, що вона є достатньо складною. Розв'язки, які отримуємо після зворотних перетворень, як зазначалось вище, використовуються у рівняннях Максвелла, які, в свою чергу, розв'язуємо за допомогою методу повільно змінних амплітуд. Виявляється, що у разі застосування методу повільно змінних амплітуд зворотні перетворення необхідно проводити не для всіх змінних. Так у випадку розв'язання мультигармонічних задач обов'язковим є зворотній перехід лише для швидких фаз. У зв'язку з цим виникає завдання модернізації алгоритму асимптотичного інтегрування таким чином, щоб не виконувати пряме та зворотне перетворення для швидких фаз.

Розглянемо такий модернізований алгоритм на прикладі однорівневої ієрархічної схеми. Також прийнемо до уваги, що для задач плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ швидкими є фази хвиль, швидкість зміни у часі яких має вигляд

$$\frac{dp}{dt} = \omega - k \cdot v_z \equiv \Omega.$$

У цій формулі ω , k та v_z є частота, хвильове число та швидкість, відповідно.

Порівнюючи це співвідношення з (2.5) бачимо, що функції Y для досліджуваного випадку дорівнюють нулю.

Далі застосуємо заміну подібну до (2.7)

$$U = \bar{U} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_u^{(n)}(\bar{z}, \bar{U}, \psi), \quad z = \bar{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_z^{(n)}(\bar{z}, \bar{U}, \psi), \quad (2.25)$$

у якій використовується неусереднена фаза. Підставляємо вирази (2.25) у систему (2.4)-(2.5), прийmemo до уваги умову $Y = 0$, застосовуємо розкладання у ряди Тейлора і отримуємо для функцій $u_u^{(n)}$, $u_z^{(n)}$ та $A^{(n)}$ відповідні співвідношення. Для першого наближення вони подібні до (2.11)-(2.14), у яких потрібно замінити усереднену фазу $\bar{\Psi}$ на неусереднену Ψ . Для другого наближення відповідні формули мають вигляд

$$A_u^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial R}{\partial \bar{U}} u_u^{(1)} + \frac{\partial R}{\partial \bar{z}} u_z^{(1)} - \frac{\partial u_u^{(1)}}{\partial \bar{U}} A_u^{(1)} - \frac{\partial u_u^{(1)}}{\partial \bar{z}} A_z^{(1)} - \frac{\partial u_u^{(1)}}{\partial \Psi} \left(\frac{d\Omega}{d\bar{U}} u_u^{(1)} + \frac{d\Omega}{d\bar{z}} u_z^{(1)} \right) \right) d\Psi, \quad (2.26)$$

$$u_u^{(2)} = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Psi} \left(\frac{\partial R}{\partial \bar{U}} u_u^{(1)} + \frac{\partial R}{\partial \bar{z}} u_z^{(1)} - \frac{\partial u_u^{(1)}}{\partial \bar{U}} A_u^{(1)} - \frac{\partial u_u^{(1)}}{\partial \bar{z}} A_z^{(1)} - \frac{\partial u_u^{(1)}}{\partial \Psi} \left(\frac{d\Omega}{d\bar{U}} u_u^{(1)} + \frac{d\Omega}{d\bar{z}} u_z^{(1)} \right) - A_u^{(2)} \right) d\Psi, \quad (2.27)$$

$$A_z^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Z}{\partial \bar{U}} u_u^{(1)} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} u_z^{(1)} - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \bar{U}} A_u^{(1)} - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \bar{z}} A_z^{(1)} - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \Psi} \left(\frac{d\Omega}{d\bar{U}} u_u^{(1)} + \frac{d\Omega}{d\bar{z}} u_z^{(1)} \right) \right) d\Psi, \quad (2.28)$$

$$u_z^{(2)} = \frac{1}{\Omega} \int_0^\Psi \left(\frac{\partial Z}{\partial U} u_u^{(1)} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} u_z^{(1)} - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial U} A_u^{(1)} - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \bar{z}} A_z^{(1)} - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \Psi} \left(\frac{d\Omega}{dU} u_u^{(1)} + \frac{d\Omega}{d\bar{z}} u_z^{(1)} \right) - A_z^{(2)} \right) d\Psi. \quad (2.29)$$

Перевагою співвідношень (2.26)-(2.29) у порівнянні з (2.17)-(2.22) є те, що тут вже використовується неусереднена швидка фаза, для якої виконувати зворотний перехід непотрібно. Зрозуміло, що використовуючи як стандартний алгоритм (2.17)-(2.22) разом зі зворотними перетвореннями, так і модернізований (2.26)-(2.29), ми отримуємо один і той же результат. Таким чином модернізація алгоритму асимптотичного інтегрування полягає у його спрощенні та скороченні, що особливо є важливим для проведення розрахунків у третьому та вищих наближеннях.

2.2. Модернізований метод повільно змінних амплітуд

Самоузгоджена теорія нелінійних процесів в лазерах на вільних електронах, як відомо складається з двох основних задач: задача руху заряджених частинок в заданих електромагнітних полях та задача про збудження цих полів за відомим рухом цих частинок. Першу задачу будемо розв'язувати за допомогою методу усереднених характеристик, який викладено в попередньому параграфі. Для розв'язку ж польової задачі, тобто задачі збудження електромагнітних полів при заданому русі будемо використовувати метод повільно змінних амплітуд, який модернізуємо у плані спряження з методом усереднених характеристик для застосування до нелінійних задач супергетеродинних ЛВЕ.

Метод повільно змінних амплітуд широко використовується у лінійній та нелінійній теорії коливань (див., наприклад, [165-173]). У фізиці хвильових процесів цей метод уперше був застосований Леонтовичем у задачі поширення

радіохвиль [168] (метод параболічного рівняння). Для розв'язання лінійних і нелінійних хвильових задач метод повільно змінних амплітуд детально розробив Хохлов [169]. Подальший розвиток цього методу був виконаний у роботах [170-173 і ін.]. Однак безпосередньо застосовувати метод повільно змінних амплітуд до нелінійних задач теорії супергетеродинних ЛВЕ, у тому вигляді, у якому він розроблений у [165-173], достатньо важко.

До першої групи проблем слід віднести вибір малого параметру, за яким проводять розкладання нелінійних доданків у методі повільно змінних амплітуд. Найчастіше, у якості малого параметру вибирають відповідним чином віднормовану найбільшу з амплітуд хвиль [53 і ін.]. Однак, такий спосіб виділення малого параметра не має чіткого математичного обґрунтування й базується тільки на міркуваннях якісного порядку. Це приводить до ряду математичних недоліків – неясності у питаннях збіжності, проблемах у визначенні робочих довжин системи, на яких "працює" метод, втрата доданків у вкорочених рівняннях і так далі.

Ця проблема може бути вирішена, якщо використовувати метод повільно змінних амплітуд у комбінації з методом усереднених характеристик. Через те, що спосіб виділення малого параметра у теорії методу характеристик (який базується на схемі асимптотичного інтегрування Боголюбова) є обґрунтованим, то логічно спробувати використовувати цей самий малий параметр і під час використання методу повільно змінних амплітуд. Цьому сприяє також та обставина, що густина струму та електричного заряду, які визначаються за допомогою метода усереднених характеристик, подаються у вигляді ряду за малим параметром.

Також підкреслимо, що безпосереднє застосування обчислювальних схем методу повільно змінних амплітуд, викладених, наприклад, в [171-173] безпосередньо до задач нелінійної теорії супергетеродинних лазерів на вільних електронах виявляється проблемним. Останнє пов'язане з конкретними фізичними особливостями моделей (як правило, твердотільних), стосовно до яких вони у свій час були розроблені. Зокрема, наприклад, в [171-173]

передбачалося, що елементи матриць лінійних доданків у стандартній формі не залежать від частот і хвильових векторів. Випускається з розгляду нульова гармоніка. Отже, процедури описані в [171-173] також вимагають уточнення. Таким чином, виникає необхідність у модернізації техніки розрахунку методу повільно змінних амплітуд, що враховує специфіку моделей супергетеродинних ЛВЕ.

Викладемо основні ідеї методу повільно змінних амплітуд та модернізуємо його для узгодженого використання з методом усереднених характеристик.

Як відомо, метод повільно змінних амплітуд застосовується до систем, які мають наступну матричну форму (стандартна форма Рабіновича) [171-173]:

$$\left[A \frac{\partial}{\partial t} + (B\hat{P}) + C \right] U = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n R_U^{(n)} \left(U, \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \mathbf{r}, t \right), \quad (2.30)$$

де A , B , C – є квадратними матрицями;

U та $R_U^{(n)}$ – періодичні вектор-функції по вхідним $\dot{\mathbf{r}}$ та t ($R_U^{(n)}$ є поліномом за U , $\partial U / \partial t$, $\partial U / \partial \dot{\mathbf{r}}$);

\hat{P} – матриця-оператор, елементи якої складаються з частинних похідних;

$\varepsilon \ll 1$ – малий параметр.

Неважко рівняння (2.30) подати через елементи відповідних матриць

$$\sum_{k=1}^p \left(a_{k1} \frac{\partial}{\partial t} + b_{k1} \dot{\mathbf{p}}_{k1} + c_{k1} \right) U_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n R_{k,U}^{(n)}, \quad (2.31)$$

де a_{k1} , b_{k1} та c_{k1} є елементами матриць A , B , C відповідно;

$\dot{\mathbf{p}}_{k1}$ – елементи матриці-оператора \hat{P} .

Зрозуміло, що систему рівнянь Максвелла можна подати у вигляді (2.30) (або (2.31)). При цьому права частина цих співвідношень буде визначатись

густиною електричного заряду та густиною електричного струму.

На першому етапі розв'язання здійснюємо перехід $\varepsilon \rightarrow 0$, в результаті якого отримуємо систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{\mathbf{l}=1}^p \left(a_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \frac{\partial}{\partial t} + b_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \frac{\mathbf{r}}{r} p_{\mathbf{k}\mathbf{l}} + c_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \right) U_{\mathbf{l}} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} = 0. \quad (2.32)$$

Розв'язки цієї системи рівнянь шукаємо у вигляді $\sim \exp[i(\omega t - \frac{\mathbf{r}}{k} \mathbf{r})]$. В результаті отримуємо алгебраїчну систему відносно $U_{\mathbf{l}}$, яка має розв'язки лише у випадку:

$$D = D(\omega, \mathbf{k}) = \det[a_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \omega - b_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \frac{\mathbf{r}}{k} \mathbf{k} - ic_{\mathbf{k}\mathbf{l}}] = 0. \quad (2.33)$$

Вираз (2.33) є лінійним дисперсійним рівнянням, яке дозволяє визначити зв'язок між хвильовим числом та частотою $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega)$. Тоді розв'язки системи (2.32) можемо подати у вигляді:

$$U_{\mathbf{k}} |_{\varepsilon=0} = \sum_S \psi_k^S \exp[i(\omega t - \frac{\mathbf{r}}{k_S(\omega)} \mathbf{r})] + k.c., \quad (2.34)$$

де ψ_k^S – невідомі амплітуди, що підлягають визначенню.

Підставляючи (2.34) до (2.32), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{\mathbf{l}=1}^p g_{\mathbf{k}\mathbf{l}}^S \psi_{\mathbf{l}}^S = 0, \quad (2.35)$$

де $g_{\mathbf{k}\mathbf{l}}^S = a_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \omega - b_{\mathbf{k}\mathbf{l}} k_S - ic_{\mathbf{k}\mathbf{l}}$.

Розв'язуємо систему рівнянь (2.35) за допомогою формул Крамера. В результаті отримуємо опорний розв'язок (2.34).

Розв'язки нелінійної системи рівнянь шукаємо з використанням опорних у вигляді:

$$U_k = \left\{ \sum_{S=1}^{r'} \Psi_k^S(\omega) A^S(\tau, \dot{\rho}) \exp[i(\omega t - k_S(\omega) \dot{r})] + k.c. \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n W_k^{(n)}(A, t, \dot{r}, \tau, \dot{\rho}), \quad (2.36)$$

де $A^S(\tau, \dot{\rho})$ – функція, яка характеризує повільно змінні величини;

$W_k^n(A^S, t, \dot{r}, \tau, \dot{\rho})$ – деяка нелінійна функція;

$\tau = \varepsilon t$ – повільний час;

$\dot{\rho} = \varepsilon \dot{r}$ – повільна координата.

Для знаходження повільно змінних величин $A^S(\tau, \dot{\rho})$ та визначення нелінійних функцій $W_k^n(A^S, t, \dot{r}, \tau, \dot{\rho})$ підставляємо (2.36) до вихідної системи (2.30) (або (2.31)). Потім праву і ліву частини отриманого рівняння розкладаємо за Фур'є гармоніками хвиль, що розповсюджуються в системі, та в ряди Тейлора за параметром малості ε . Таким чином, виникає проблема у поданні елементів вектор-функції R_U як ряду за параметром малості (в теорії супергетеродинних ЛВЕ R_U визначає густину електричного струму та заряду).

Як раніш було зазначено, використання разом з методом повільно змінних амплітуд методу усереднених характеристик вище зазначену проблему вибору малого параметру знімає. Справа в тому, що метод усереднених характеристик є математично обґрунтованим [1-3], вибір малого параметру тут є чітко визначеним. Розв'язуючи задачу руху і неперервності за допомогою метода усереднених характеристик, ми автоматично отримуємо густину струму та заряду в досліджуваній системі саме як ряд за малим параметром задачі. Це

означає, що вектор-функція R_U за умови використання методу усереднених характеристик приймає вигляд

$$R_U = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n R_U^{(n)} \left(U, \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, t, \mathbf{r} \right)$$

і ми можемо записати досліджувану систему у стандартній формі Рабіновича ((2.30) або (2.31)).

Далі використовуємо стандартний алгоритм [1-3, 171-166] і отримуємо вкорочені рівняння для знаходження повільно змінних величин $A^S(\tau, \rho)$, що мають, наприклад, у одновимірному наближенні вигляд

$$\frac{\partial A^S}{\partial t} + \frac{d\omega}{dk} \frac{\partial A^S}{\partial z} + \frac{i}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} \frac{\partial^2 A^S}{\partial z^2} = \varepsilon f^{(1)S} + \varepsilon^2 f^{(2)S} + \varepsilon^3 f^{(3)S}.$$

Таким чином, використовуючи метод повільно змінних амплітуд разом з методом усереднених характеристик, отримуємо потужний підхід для аналізу нелінійних процесів у плазмо-пучкових супергетеродинних лазерах на вільних електронах.

2.3. Висновки до розділу 2

1. У відповідності до мети дисертаційної роботи для теоретичного дослідження мультигармонічних супергетеродинних ЛВЕ базовим є метод усереднених характеристик у разі з методом повільно змінних амплітуд.

2. Для поставлених у дисертаційній роботі задач проведена модернізація алгоритму асимптотичного інтегрування, що використовується у методі усереднених характеристик, у частині виконання зворотних перетворень. Це привело до спрощення та скорочення цього алгоритму, що є особливо важливим для проведення розрахунків у третьому та вищих наближеннях.

3. Проведена модернізація методу повільно змінних амплітуд, яка полягає у адаптації, спряженні його з методом усереднених характеристик.

РОЗДІЛ 3
САМОУЗГОДЖЕНА КУБІЧНО–НЕЛІНІЙНА ТЕОРІЯ
СУПЕРГЕТЕРОДИННИХ МУЛЬТИГАРМОНІЧНИХ ПЛАЗМО-
ПУЧКОВИХ ЛАЗЕРІВ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ
ДОПЛЕРТРОННОГО ТИПУ

У цьому розділі побудована самоузгоджена кубічно-нелінійна теорія супергетеродинних мультигармонічних плазмо-пучкових лазерів на вільних електронах доплертронного типу, де у якості накачки використовується незвичайна електромагнітна хвиля [59, 174], що поширюється у замагніченій плазмо-пучковій системі назустріч електронному пучку. Проведено врахування параметрично-резонансних взаємодій гармонік хвиль. Отримано систему диференціальних рівнянь для амплітуд гармонік напруженості електричного поля електромагнітної хвилі та електронної хвилі ХПЗ в кубічно-нелінійному наближенні. Проведено аналіз інкременту зростання електромагнітної хвилі сигналу, рівнів та механізмів насичення, досліджено вплив вищих гармонік на ці процеси. Показана перспективність використання даних систем для створення потужного електромагнітного випромінювання в міліметровому-субміліметровому діапазоні довжин хвиль.

3.1. Модель супергетеродинного плазмо-пучкового ЛВЕ доплертронного типу [34-38]

Модель. Модель плазмо-пучкового супергетеродинного лазера на вільних електронах доплертронного типу представлена на рис. 3.1. Електронний релятивістський пучок 1 з ленгмюрівською частотою ω_b проходить через плазму 2, яка характеризується ленгмюрівською частотою ω_p . Плазмо-пучкова система розміщена у поздовжньому фокусувальному магнітному полі з напруженістю H_0 . Накачку вибираємо у вигляді незвичайної

електромагнітної хвилі [59, 174] з частотою ω_2 і хвильовим числом k_2 , яка розповсюджується назустріч електронному пучку 1. На вхід системи також подається електромагнітний сигнал з частотою ω_1 та хвильовим числом k_1 .

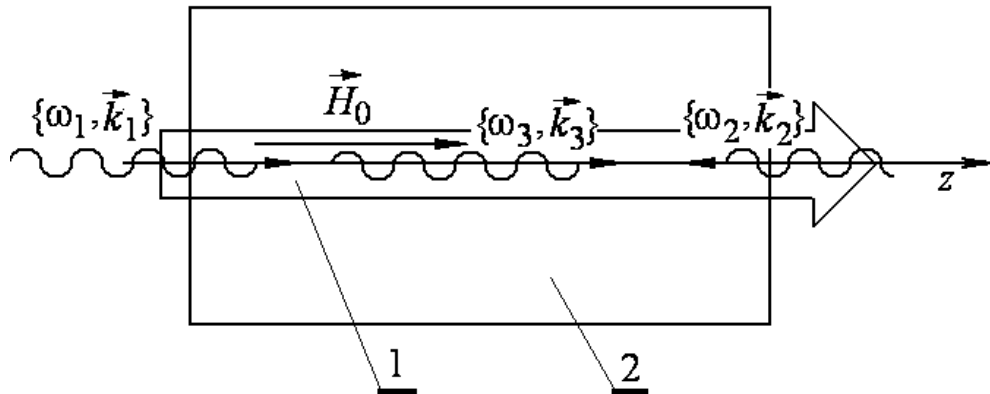


Рис. 3.1. Схема плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ

У результаті параметричного резонансу між електромагнітними хвилями сигналу $\{\omega_1, \vec{k}_1\}$ та накачки $\{\omega_2, \vec{k}_2\}$ у плазмо-пучковій системі збуджується хвиля просторового заряду з частотою ω_3 та хвильовим числом k_3 . Частоти і хвильові числа цих хвиль у досліджуваній системі пов'язані між собою умовою параметричного резонансу

$$p_3 = p_1 - p_2 \text{ або } \omega_3 = \omega_1 - \omega_2, \quad k_3 = k_1 + k_2, \quad (3.1)$$

де $p_1 = \omega_1 t - k_1 z$ – фаза електромагнітної хвилі сигналу;

$p_2 = \omega_2 t + k_2 z$ – фаза електромагнітної хвилі накачки;

$p_3 = \omega_3 t - k_3 z$ – фаза хвилі ХПЗ.

Параметри системи вибираємо таким чином, щоб хвиля ХПЗ $\{\omega_3, \vec{k}_3\}$ мала максимальний інкремент зростання внаслідок плазмо-пучкової нестійкості.

Особливістю досліджуваної системи є те, що тут реалізується ефект супергетеродинного підсилення [2,18]. Сутність цього ефекту полягає у тому,

що підсилення хвиль в таких системах відбувається як за рахунок трихвильового параметричного резонансу, так і за рахунок додаткового механізму підсилення однієї із трьох хвиль, які беруть участь в параметричному резонансі. У досліджуваному пристрої у якості додаткового механізму підсилення виступає ефект підсилення хвилі просторового заряду за рахунок плазмо-пучкової нестійкості. Через те, що інкременти зростання хвиль за рахунок плазмо-пучкової нестійкості є набагато більшими за інкременти зростання за рахунок трихвильового параметричного резонансу, роль останнього зводиться до перенесення додаткового підсилення з хвиль просторового заряду до електромагнітної хвилі сигналу $\{\omega_1, \mathbf{k}_1\}$. Системи, у яких разом з параметричним механізмом підсилення використовують додатковий механізм, що базується на плазмо-пучковій нестійкості, отримали назву плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ [2, 18].

Ще однією особливістю досліджуваної системи є те, що у якості хвилі накачки тут використовується уповільнена електромагнітна хвиля, закон дисперсії якої має вигляд (див., наприклад, [59,174])

$$k_2 = \frac{\omega_2}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_2(\omega_2 - \omega_H)}} \approx \frac{\omega_2}{c} \cdot N_2, \quad (3.2)$$

де c – швидкість світла;

ω_H – циклотронна частота;

$N_2 = \omega_p / \sqrt{\omega_2 \omega_H}$ – коефіцієнт уповільнення.

Параметри системи вибираємо, таким чином, щоб $N_2 \gg 1$. Завдяки цьому в даному приладі з'являється можливість підсилювати електромагнітний сигнал, частота якого набагато більше частоти накачки [18]

$$\omega_1 = \omega_2(1 + N_2 \cdot \beta)/(1 - \beta), \quad (3.3)$$

де $\beta = v_{b,z} / c$ – відношення швидкості електронного пучка до швидкості світла.

Зрозуміло, що використовуючи релятивістські пучки ($1 - \beta \ll 1$), ми також можемо додатково збільшити частоту електромагнітної хвилі, яку ми підсилюємо.

У зв'язку з тим, що плазмо-пучкова нестійкість характеризується збудженням вищих гармонік, розглядаємо хвилю електромагнітного сигналу, електромагнітну хвилю накачки та поздовжню електронну хвилю просторового заряду я такі, що мають вищі гармоніки. Тоді електричні $\dot{\mathbf{E}}$ та магнітні $\dot{\mathbf{B}}$ компоненти полів у досліджуваній системі будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_1 &= \sum_{m=1}^N [(E_{1x,m} \mathbf{e}_x + E_{1y,m} \mathbf{e}_y) e^{imp_1} + \text{к.с.}], \quad \dot{\mathbf{B}}_1 = \sum_{m=1}^N [(B_{1x,m} \mathbf{e}_x + B_{1y,m} \mathbf{e}_y) e^{imp_1} + \text{к.с.}], \\ \dot{\mathbf{E}}_2 &= \sum_{m=1}^N [(E_{2x,m} \mathbf{e}_x + E_{2y,m} \mathbf{e}_y) e^{imp_2} + \text{к.с.}], \quad \dot{\mathbf{B}}_2 = \sum_{m=1}^N [(B_{2x,m} \mathbf{e}_x + B_{2y,m} \mathbf{e}_y) e^{imp_2} + \text{к.с.}], \quad (3.4) \\ \dot{\mathbf{E}}_3 &= \sum_{m=1}^N [E_{3z,m} e^{imp_3} + \text{к.с.}] \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

де N – кількість гармонік, які враховуємо при розрахунках;

m – номер відповідної гармоніки.

індексом “к.с.” позначено комплексно спряжені доданки відповідних функцій.

Таким чином, електричне та магнітне поля, в робочій області плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ можна подати як

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\mathbf{E}}_2 + \dot{\mathbf{E}}_3; \quad \dot{\mathbf{B}} = \dot{\mathbf{B}}_1 + \dot{\mathbf{B}}_2. \quad (3.5)$$

Вихідні рівняння. В якості вихідних рівнянь використовуємо релятивістське квазігідродинамічне рівняння [2, 58]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_q \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{v}{\gamma_q^2} \right) \mathbf{v}_q = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_q \mathbf{B}] - \frac{\mathbf{v}_q}{c^2} (\mathbf{v}_q \mathbf{E}) \right\} - \frac{v_T^2}{n_q \gamma_q} \left[\frac{\partial n_q}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\mathbf{v}_q}{c^2} \left(\mathbf{v}_q \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) n_q \right], \quad (3.6)$$

рівняння неперервності

$$\frac{\partial n_q}{\partial t} + \frac{\partial (n_q \mathbf{v}_q)}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (3.7)$$

і рівняння Максвелла

$$\text{rot}(\mathbf{B}) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_q (en_q \mathbf{v}_q), \quad \text{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.8)$$

У цих рівняннях індекс q приймає значення 1 для електронів пучка та 2 для електронів плазми; \mathbf{v}_q – вектор швидкості; v – частота зіткнення; \mathbf{E} – напруженість електричного поля; \mathbf{B} – індукція магнітного поля; $\gamma_q = 1/\sqrt{1 - v_q^2/c^2}$ – релятивістський фактор; n_q – концентрація частинок q ; v_T – середньоквадратична швидкість теплового руху частинок; \mathbf{r} – просторова координата точки спостереження; c – швидкість світла; $e = -|e|$, m_e – заряд і маса електрона, відповідно. Через те що маса іонів плазми набагато більша за масу електронів, їх швидкість є суттєво меншою за швидкість електронів. Тому рух іонів плазми у досліджуваній моделі розглядати не будемо. Тобто будемо вважати, що іони плазми є нерухомими.

Розглядаємо випадок, коли релятивістський електронний пучок, який використовується у плазмо-пучковій системі, характеризується відносним

енергетичним розкидом, що має порядок $\sim 10^{-4}$. Для таких систем тепловим розкидом електронів можемо знехтувати і прийняти, що $v_T=0$.

В плазмо-пучкових системах частота зіткнень ν визначається зіткненнями електронів пучка з іонами плазми (див., наприклад, [59, 175]). Вона залежить як від концентрації електронів пучка (пропорційна квадрату ленгмюрівської частоти релятивістського електронного пучка ω_b), так і концентрації іонів плазми (пропорційна квадрату ленгмюрівської частоти плазми ω_p). Частота зіткнень ν повинна обов'язково прийматись до уваги, коли частоти хвиль, що збуджуються у досліджуваній системі сумірні з частотою ν . В плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ концентрація електронів пучка є набагато меншою за концентрацію іонів плазми, тобто $\omega_b \ll \omega_p$. В цьому випадку частота зіткнень ν виявляється набагато меншою за плазмову частоту ω_p . Параметри хвиль у досліджуваній системі вибираємо так, щоб виконувались умови максимального зростання за рахунок плазмо-пучкової нестійкості. Це означає, що частоти хвиль у приладі, що розглядається, є набагато більшими за частоту зіткнень ν . Тому під час розгляду фізичних процесів у досліджуваній системі зіткненнями електронів будемо нехтувати ($\nu=0$).

Вважаємо, що поля в досліджуваній системі у поперечній площині є однорідними. Фактично це означає, що ми нехтуємо зовнішнім оточенням, яке в загальному випадку впливає на характеристики полів, на їх дисперсійні властивості. Однак, коли поперечні розміри пучка є набагато більшими за довжини хвиль, що тут збуджуються, обмеженістю моделі можна знехтувати [58]. Саме такий випадок далі ми і будемо розглядати.

Тоді з урахуванням вище обговорених припущень квазігідродинамічне рівняння для досліджуваної систем в проекціях на вісі координат може бути записано у наступній формі:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{z,q} \frac{\partial}{\partial z} \right) v_{x,q} = \\ & = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_x + \frac{1}{c} (v_{y,q} B_z - v_{z,q} B_y) - \frac{v_{x,q}}{c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{z,q} \frac{\partial}{\partial z} \right) v_{y,q} = \\ & = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_y - \frac{1}{c} (v_{x,q} B_z - v_{z,q} B_x) - \frac{v_{y,q}}{c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{z,q} \frac{\partial}{\partial z} \right) v_{z,q} = \\ & = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_z + \frac{1}{c} (v_{x,q} B_y - v_{y,q} B_x) - \frac{v_{z,q}}{c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Рівняння (3.7) – (3.11) описують фізичні процеси в плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ доплертронного типу. Для їх розв'язання використаємо метод усереднених характеристик та модернізований метод повільно змінних амплітуд.

3.2. Система самоузгоджених кубічно-нелінійних рівнянь для комплексних амплітуд хвиль [34-38]

Розділимо розв'язання самоузгодженої задачі про підсилення електромагнітних хвиль у плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ на три формально незалежні етапи. Перший етап є задачею руху релятивістського електронного пучка та плазми у заданих, тобто, відомих електромагнітних полях (задача руху). Другий етап є задачею знаходження концентрації електронного пучка та плазми за відомими швидкостями (задача неперервності). Третій етап є задачею підсилення (збудження) цих полів при заданому русі (польова задача). Знаходження розв'язків, які б узгоджено

задовольняли усі вище вказані задачі дає самоузгоджене рішення вихідної задачі.

Розв'язок задачі руху. У якості вихідних використовуємо рівняння квазігідродинамічне рівняння (3.9)-(3.11). Поля (3.4) вважаємо відомими. Для знаходження розв'язку задачі руху застосовуємо метод усереднених характеристик [1].

Згідно із загальною процедурою методу усереднених характеристик, на першому етапі даної обчислювальної процедури має записемо характеристики для вихідних рівнянь (3.9) – (3.11):

$$\frac{dv_{x,q}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_x + \frac{1}{c} (v_{y,q} B_z - v_{z,q} B_y) - \frac{v_{x,q}}{c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \right), \quad (3.12)$$

$$\frac{dv_{y,q}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_y - \frac{1}{c} (v_{x,q} B_z - v_{z,q} B_x) - \frac{v_{y,q}}{c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \right), \quad (3.13)$$

$$\frac{dv_{z,q}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_z + \frac{1}{c} (v_{x,q} B_y - v_{y,q} B_x) - \frac{v_{z,q}}{c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \right). \quad (3.14)$$

У рівняннях (3.12) – (3.14) фази коливань $p_{1,q}, p_{2,q}, p_{3,q}$ вважаємо параметрами, зміна яких визначається співвідношенням:

$$\frac{dp_{1,q}}{dt} = \omega_1 - k_1 v_{z,q}, \quad \frac{dp_{2,q}}{dt} = \omega_2 + k_2 v_{z,q}, \quad \frac{dp_{3,q}}{dt} = \omega_3 - k_3 v_{z,q}. \quad (3.15)$$

Зручно доповнити систему (3.12) – (3.14) рівнянням для повної енергії:

$$m_e c^2 \frac{d\gamma_q}{dt} = e (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \quad (3.16)$$

і формально вважати компоненти швидкості та релятивістський фактор

незалежними змінними.

Далі у відповідності до методу усереднених характеристик проводимо класифікацію змінних на швидкі та повільні. Для цього формуємо ряд великих параметрів задачі:

$$\xi = \frac{dp}{dt} / \frac{dx}{dt} \gg 1, \quad (3.17)$$

де p – вектор швидких змінних, а x – вектор повільних змінних. Для того щоб описати повільну зміну у часі амплітуд полів вводимо повільний час

$$\tau = \frac{1}{\xi} t. \quad (3.18)$$

Тоді виходячи з фізичних міркувань до вектора повільних змінних x потрібно включити величини $v_{x,q}$, $v_{y,q}$, $v_{z,q}$, γ_q та τ , а до вектора швидких змінних p – фази p_1 , p_2 та p_3 . Стандартна система рівнянь [1] тоді буде мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dv_{x,q}}{dt} &= \frac{1}{\xi} X^{v_{x,q}}, \quad \frac{dv_{y,q}}{dt} = \frac{1}{\xi} X^{v_{y,q}}, \quad \frac{dv_{z,q}}{dt} = \frac{1}{\xi} X^{v_{z,q}}, \quad \frac{d\gamma_q}{dt} = \frac{1}{\xi} X^{\gamma_q}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\xi} X^{\tau}, \\ \frac{dp_{1,q}}{dt} &= \Omega_{1,q} + \frac{1}{\xi} Y_1, \quad \frac{dp_{2,q}}{dt} = \Omega_{2,q} + \frac{1}{\xi} Y_2, \quad \frac{dp_{3,q}}{dt} = \Omega_{3,q} + \frac{1}{\xi} Y_3. \end{aligned} \quad (3.19)$$

У рівняннях (3.19) позначено

$$\frac{1}{\xi} X^{v_{x,q}} \equiv \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_x + \frac{1}{c} (v_{y,q} B_z - v_{z,q} B_y) - \frac{v_{x,q}}{c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \right),$$

$$\frac{1}{\xi} X^{v_{y,q}} \equiv \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_y - \frac{1}{c} (v_{x,q} B_z - v_{z,q} B_x) - \frac{v_{y,q}}{c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \right),$$

$$\frac{1}{\xi} X^{v_{z,q}} \equiv \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_z + \frac{1}{c} (v_{x,q} B_y - v_{y,q} B_x) - \frac{v_{z,q}}{c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \right),$$

$$\frac{1}{\xi} X^{\gamma_q} \equiv \frac{e}{m_e c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z), \quad \frac{1}{\xi} X^\tau \equiv \frac{1}{\xi},$$

$$\Omega_{1,q} = \omega_1 - k_1 v_{z,q}, \quad \Omega_{2,q} = \omega_2 + k_2 v_{z,q}, \quad \Omega_{3,q} = \omega_3 - k_3 v_{z,q},$$

$$\frac{1}{\xi} Y_1 = \frac{1}{\xi} Y_2 = \frac{1}{\xi} Y_\chi = 0.$$

Згідно до загальної процедури [1] розв'язок будемо шукати в вигляді суми повільно змінної усередненої величини та осциляторних функцій відповідного порядку малості:

$$\begin{aligned} v_{x,q} &= \bar{v}_{x,q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{v_{x,q}}^{(n)}(\bar{x}, \bar{p}), \quad v_{y,q} = \bar{v}_{y,q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{v_{y,q}}^{(n)}(\bar{x}, \bar{p}), \\ v_{z,q} &= \bar{v}_{z,q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{v_{z,q}}^{(n)}(\bar{x}, \bar{p}), \quad \gamma_q = \bar{\gamma}_q + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{\gamma_q}^{(n)}(\bar{x}, \bar{p}), \\ \tau &= \bar{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_\tau^{(n)}(\bar{x}, \bar{p}), \quad p_{1,q} = \bar{p}_{1,q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} v_{p_{1,q}}^{(n)}(\bar{x}, \bar{p}), \\ p_{2,q} &= \bar{p}_{2,q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} v_{p_{2,q}}^{(n)}(\bar{x}, \bar{p}), \quad p_{3,q} = \bar{p}_{3,q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} v_{p_{3,q}}^{(n)}(\bar{x}, \bar{p}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

При цьому динаміка повільно змінних величин описується наступними рівняннями [1]:

$$\frac{d\bar{v}_{x,q}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{v_{x,q}}^{(n)}(\bar{x}), \quad \frac{d\bar{v}_{y,q}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{v_{y,q}}^{(n)}(\bar{x}),$$

$$\frac{d\bar{v}_{z,q}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{v_{z,q}}^{(n)}(\bar{x}), \quad \frac{d\bar{\gamma}_q}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{\gamma_q}^{(n)}(\bar{x}), \quad \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{\tau}^{(n)}(\bar{x}), \quad (3.21)$$

$$\frac{d\bar{p}_{1,q}}{dz} = \bar{\Omega}_{1,q}(\bar{v}_{z,q}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} B_{p_{1,q}}^{(n)}(\bar{x}), \quad \frac{d\bar{p}_{2,q}}{dz} = \bar{\Omega}_{2,q}(\bar{v}_{z,q}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} B_{p_{2,q}}^{(n)}(\bar{x}),$$

$$\frac{d\bar{p}_{3,q}}{dz} = \bar{\Omega}_{3,q}(\bar{v}_{z,q}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} B_{p_{3,q}}^{(n)}(\bar{x}),$$

де $\bar{\Omega}_{1,q}(\bar{v}_{z,q}) = \omega_1 - k_1 \bar{v}_{z,q}$, $\bar{\Omega}_{2,q}(\bar{v}_{z,q}) = \omega_2 + k_2 \bar{v}_{z,q}$, $\bar{\Omega}_{3,q}(\bar{v}_{z,q}) = \omega_3 - k_3 \bar{v}_{z,q}$.

Звернемо увагу на специфічну розрахункову особливість. Вибір номера наближення на практиці визначається фізичними особливостями моделі, яку ми вивчаємо. Обчислення, виконані в першому наближенні за $1/\xi$, як показує аналіз, дозволяють аналізувати лінійні процеси, що протікають в системі. У свою ж чергу характерні нелінійні ефекти можуть бути описані, як мінімум, в другому наближенні за $1/\xi$. Для дослідження процесів насичення, визначення максимальних значень амплітуд хвиль необхідне проведення обчислень в третьому наближенні за $1/\xi$.

Проведемо розрахунки для першого наближення [1]. У результаті проведення стандартних перетворень отримуємо

$$\bar{\Omega}_{j,q} \frac{\partial u_{v_{x,q}}^{(1)}}{\partial \bar{p}_j} = X^{v_{x,q}}(\bar{x}, \bar{p}) - A_{v_{x,q}}^{(1)}, \quad \bar{\Omega}_{j,q} \frac{\partial u_{v_{y,q}}^{(1)}}{\partial \bar{p}_j} = X^{v_{y,q}}(\bar{x}, \bar{p}) - A_{v_{y,q}}^{(1)},$$

$$\bar{\Omega}_{j,q} \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(1)}}{\partial \bar{p}_j} = X^{v_{z,q}}(\bar{x}, \bar{p}) - A_{v_{z,q}}^{(1)}, \quad \bar{\Omega}_{j,q} \frac{\partial u_{\gamma_q}^{(1)}}{\partial \bar{p}_j} = X^{\gamma_q}(\bar{x}, \bar{p}) - A_{\gamma_q}^{(1)},$$

$$\bar{\Omega}_{j,q} \frac{\partial u_{\tau}^{(1)}}{\partial \bar{p}_j} = X^{\tau}(\bar{x}, \bar{p}) - A_{\tau}^{(1)}, \quad (3.22)$$

$$\bar{\Omega}_{j,q} \frac{\partial v_{p_{1,q}}^{(1)}}{\partial \bar{p}_j} = \frac{\partial \bar{\Omega}_{p_{1,q}}}{\partial x_i} u_i^{(1)} - B_{p_{1,q}}^{(1)}, \quad \bar{\Omega}_{j,q} \frac{\partial v_{p_{2,q}}^{(1)}}{\partial \bar{p}_j} = \frac{\partial \bar{\Omega}_{p_{2,q}}}{\partial x_i} u_i^{(1)} - B_{p_{2,q}}^{(1)},$$

$$\bar{\Omega}_{j,q} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \bar{p}_j} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial x_i} u_i^{(1)} - B_{p_{3,q}}^{(1)},$$

де $i = v_{x,q}, v_{y,q}, v_{z,q}, \gamma_q, \tau$, $j = 1, 2, 3$.

Функції $A_i^{(1)}$ та $B^{(1)}$ знаходимо наступним чином [1]:

$$A_{v_{x,q}}^{(1)} = \frac{1}{T_1 T_2 T_3} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_0^{T_3} X^{v_{x,q}} d\bar{p}_1 d\bar{p}_2 d\bar{p}_3 = 0,$$

$$A_{v_{y,q}}^{(1)} = \frac{1}{T_1 T_2 T_3} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_0^{T_3} X^{v_{y,q}} d\bar{p}_1 d\bar{p}_2 d\bar{p}_3 = 0,$$

$$A_{v_{z,q}}^{(1)} = \frac{1}{T_1 T_2 T_3} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_0^{T_3} X^{v_{z,q}} d\bar{p}_1 d\bar{p}_2 d\bar{p}_3 = 0,$$

$$A_{\gamma_q}^{(1)} = \frac{1}{T_1 T_2 T_3} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_0^{T_3} X^{\gamma_q} d\bar{p}_1 d\bar{p}_2 d\bar{p}_3 = 0,$$

$$A_{\tau}^{(1)} = \frac{1}{T_1 T_2 T_3} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_0^{T_3} X^{\tau} d\bar{p}_1 d\bar{p}_2 d\bar{p}_3 = \frac{1}{\xi}, \quad (3.23)$$

$$B_{p_{1,q}}^{(1)} = \frac{1}{T_1 T_2 T_3} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_0^{T_3} \left(\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial x_i} u_i^{(1)} \right) d\bar{p}_1 d\bar{p}_2 d\bar{p}_3 = 0,$$

$$B_{p_{2,q}}^{(1)} = \frac{1}{T_1 T_2 T_3} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_0^{T_3} \left(\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial x_i} u_i^{(1)} \right) d\bar{p}_1 d\bar{p}_2 d\bar{p}_3 = 0,$$

$$B_{p_{3,q}}^{(1)} = \frac{1}{T_1 T_2 T_3} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_0^{T_3} \left(\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial x_i} u_i^{(1)} \right) d\bar{p}_1 d\bar{p}_2 d\bar{p}_3 = 0.$$

Розв'язуючи рівняння (3.22) і використовуючи (3.23), отримуємо осциляторні функції відповідних величин першого наближення:

$$\begin{aligned}
u_{\nu_{x,q},m}^{(1)} &= u_{\nu_{x,q},m}^{(1)(\bar{p}_1)} e^{im\bar{p}_1} + u_{\nu_{x,q},m}^{(1)(\bar{p}_2)} e^{im\bar{p}_2} + \kappa.c., \\
u_{\nu_{x,q},m}^{(1)(\bar{p}_1)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{\bar{\Omega}_{1,q}}{\omega_1} \right) \left(im\bar{\Omega}_{1,q} E_{1x,m} + \omega_{H,q} E_{1y,m} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\bar{\Omega}_{1,q})^2 \right), \\
u_{\nu_{x,q},m}^{(1)(\bar{p}_2)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{\bar{\Omega}_{2,q}}{\omega_2} \right) \left(im\bar{\Omega}_{2,q} E_{2x,m} + \omega_{H,q} E_{2y,m} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\bar{\Omega}_{2,q})^2 \right), \\
u_{\nu_{y,q},m}^{(1)} &= u_{\nu_{y,q},m}^{(1)(\bar{p}_1)} e^{im\bar{p}_1} + u_{\nu_{y,q},m}^{(1)(\bar{p}_2)} e^{im\bar{p}_2} + \kappa.c., \\
u_{\nu_{y,q},m}^{(1)(\bar{p}_1)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{\bar{\Omega}_{1,q}}{\omega_1} \right) \left(im\bar{\Omega}_{1,q} E_{1y,m} - \omega_{H,q} E_{1x,m} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\bar{\Omega}_{1,q})^2 \right), \\
u_{\nu_{y,q},m}^{(1)(\bar{p}_2)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{\bar{\Omega}_{2,q}}{\omega_2} \right) \left(im\bar{\Omega}_{2,q} E_{2y,m} - \omega_{H,q} E_{2x,m} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\bar{\Omega}_{2,q})^2 \right), \\
u_{\nu_{z,q},m}^{(1)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \bar{\Omega}_{3,q}} \frac{E_{3z,m}}{im} e^{im\bar{p}_3} + \kappa.c., \quad u_{\gamma_q,m}^{(1)} = \frac{e\bar{\nu}_{z,q}}{m_e c^2 \bar{\Omega}_{3,q}} \frac{E_{3z,m}}{im} e^{im\bar{p}_3} + \kappa.c., \\
u_{\tau,m}^{(1)} &= 0, \quad v_{p_{1,q}}^{(1)} = \frac{ek_1}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \bar{\Omega}_{3,q}^2 m^2} E_{3z,m} e^{im\bar{p}_3} + \kappa.c., \\
v_{p_{2,q}}^{(1)} &= -\frac{ek_2}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \bar{\Omega}_{3,q}^2 m^2} E_{3z,m} e^{im\bar{p}_3} + \kappa.c., \quad v_{p_{3,q}}^{(1)} = \frac{ek_3}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \bar{\Omega}_{3,q}^2 m^2} E_{3z,m} e^{im\bar{p}_3} + \kappa.c..
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Проведемо розрахунки для другого наближення [1]. Згідно з алгоритмом асимптотичного інтегрування маємо:

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}_{j,q} \frac{\partial u_\chi^{(2)}}{\partial \bar{p}_j} &= \frac{\partial X^\chi}{\partial \bar{\nu}_{x,q}} u_{\nu_{x,q}}^{(1)} + \frac{\partial X^\chi}{\partial \bar{\nu}_{y,q}} u_{\nu_{y,q}}^{(1)} + \frac{\partial X^\chi}{\partial \bar{\nu}_{z,q}} u_{\nu_{z,q}}^{(1)} + \frac{\partial X^\chi}{\partial \bar{\gamma}_q} u_{\gamma_q}^{(1)} + \\
&+ \frac{\partial X^\chi}{\partial \bar{\tau}} u_\tau^{(1)} + \frac{\partial X^\chi}{\partial \bar{p}_j} v_{p_{j,q}}^{(1)} - A_\chi^{(2)} - \frac{\partial u_\chi^{(1)}}{\partial \bar{\nu}_{x,q}} A_{\nu_{x,q}}^{(1)} - \frac{\partial u_\chi^{(1)}}{\partial \bar{\nu}_{y,q}} A_{\nu_{y,q}}^{(1)} - \\
&- \frac{\partial u_\chi^{(1)}}{\partial \bar{\nu}_{z,q}} A_{\nu_{z,q}}^{(1)} - \frac{\partial u_\chi^{(1)}}{\partial \bar{\gamma}_q} A_{\gamma_q}^{(1)} - \frac{\partial u_\chi^{(1)}}{\partial \bar{\tau}} A_\tau^{(1)} - \frac{\partial u_\chi^{(1)}}{\partial \bar{p}_j} B_{p_{j,q}}^{(1)},
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\bar{\Omega}_{j,q} \frac{\partial v_\alpha^{(2)}}{\partial \bar{p}_j} = -B_\alpha^{(1)} - \frac{\partial v_\alpha^{(1)}}{\partial \bar{\chi}} A_\chi^{(1)} - \frac{\partial v_\alpha^{(1)}}{\partial \bar{p}_j} B_{p_j}^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega_\alpha}{\partial \bar{\chi}^2} (u_\chi^{(1)})^2 - \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial \bar{\chi}} u_\chi^{(2)}, \quad (3.26)$$

де $\chi = v_{x,q}, v_{y,q}, v_{z,q}, \gamma_q, \tau$, $j = 1, 2, 3$, $\alpha = p_{1,q}, p_{2,q}, p_{3,q}$.

Для осциляторних функцій другого порядку малості швидкості $v_{x,q}$ отримуємо

$$\begin{aligned} u_{v_{x,q},m}^{(2)(\bar{p}_j)} = & \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_z \right) u_{v_{x,q}}^{(1)} + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{B_z}{c} u_{v_{y,q}}^{(1)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{1}{c} B_y \right) u_{v_{z,q}}^{(1)} - \right. \\ & - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_x - \frac{v_{z,q}}{c} B_y \right) u_{\gamma_q}^{(1)} + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{1x} - \frac{v_{z,q}}{c} B_{1y} \right) v_{p_{1,q}}^{(1)} + \\ & \left. + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{2x} - \frac{v_{z,q}}{c} B_{2y} \right) v_{p_{2,q}}^{(1)} - A_{v_{x,q}}^{(2)} - \frac{\partial u_{v_{x,q}}^{(1)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}, \quad (3.27) \end{aligned}$$

де вираз $\langle \dots \rangle_{mp_j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \mathbf{K} \} e^{-imp_j} \cdot dp_j$ визначає процедуру виділення m -ої гармоніки фази p . Для функцій A , які описують динаміку повільно змінної складової швидкості $\bar{v}_{x,q}$ (див. (3.21)) знаходимо $A_{v_{x,q}}^{(2)} = 0$.

Аналогічно знаходимо вирази для осциляторних функцій величин v_y, v_z, γ, τ

$$\begin{aligned} u_{v_{y,q},m}^{(2)(\bar{p}_j)} = & \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{B_z}{c} u_{v_{x,q}}^{(1)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_z \right) u_{v_{y,q}}^{(1)} + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{B_x}{c} \right) u_{v_{z,q}}^{(1)} - \right. \\ & - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_y + \frac{1}{c} \bar{v}_{z,q} B_x \right) u_{\gamma_q}^{(1)} + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{1y} + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{1x} \right) v_{p_{1,q}}^{(1)} + \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
& + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{1y} + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{1x} \right) v_{p_{2,q}}^{(1)} - A_{v_{y,q}}^{(2)} - \frac{\partial u_{v_{y,q}}^{(1)}}{\partial t} \Bigg\rangle_{mp_j}, \\
u_{v_{z,q},m}^{(2)(\bar{p}_j)} &= \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{1}{c} B_y - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_x \right) u_{v_{x,q}}^{(1)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{1}{c} B_x + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_y \right) u_{v_{y,q}}^{(1)} - \right. \\
& - 2 \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_z u_{v_{z,q}}^{(1)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_z - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_z \right) u_{\gamma_q}^{(1)} + \\
& \left. + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{3z} - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_{3z} \right) v_{p_{3,q}}^{(1)} - A_{v_{z,q}}^{(2)} - \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(1)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}, \quad (3.29)
\end{aligned}$$

$$u_{\gamma_q,m}^{(2)(\bar{p}_j)} = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle \frac{e}{m_e c^2} E_z u_{v_{z,q}}^{(1)} + i \frac{em}{m_e c^2} \bar{v}_{z,q} E_{3z} v_{p_{3,q}}^{(1)} - A_{\gamma_q}^{(2)} - \frac{\partial u_{\gamma_q}^{(1)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}, \quad (3.30)$$

$$A_{v_{y,q}}^{(2)} = 0, \quad A_{v_{z,q}}^{(2)} = 0, \quad A_{\gamma_q}^{(2)} = 0, \quad u_{\tau}^{(2)} = 0, \quad A_{\tau}^{(2)} = 0,$$

$$v_{p_{1,q},m}^{(2)(\bar{p}_j)} = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -B_{p_{1,q}}^{(2)} - \frac{\partial v_{p_{1,q}}^{(1)}}{\partial t} + k_1 u_{v_{z,q}}^{(2)} \right\rangle_{mp_j}, \quad (3.31)$$

$$v_{p_{2,q},m}^{(2)(\bar{p}_j)} = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -B_{p_{2,q}}^{(2)} - \frac{\partial v_{p_{2,q}}^{(1)}}{\partial t} - k_2 u_{v_{z,q}}^{(2)} \right\rangle_{mp_j}, \quad (3.32)$$

$$v_{p_{3,q},m}^{(2)(\bar{p}_j)} = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -B_{p_{3,q}}^{(2)} - \frac{\partial v_{p_{3,q}}^{(1)}}{\partial t} + k_3 u_{v_{z,q}}^{(2)} \right\rangle_{mp_j}. \quad (3.33)$$

Проведемо розрахунки для третього наближення за $1/\xi$. Вихідні рівняння у цьому випадку мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}_{j,q} \frac{\partial u_\chi^{(3)}}{\partial \bar{p}_j} = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X^\chi}{\partial \bar{v}_{x,q}^2} \left(u_{v_{x,q}}^{(1)} \right)^2 + \frac{\partial^2 X^\chi}{\partial \bar{v}_{y,q}^2} \left(u_{v_{y,q}}^{(1)} \right)^2 + \frac{\partial^2 X^\chi}{\partial \bar{v}_{z,q}^2} \left(u_{v_{z,q}}^{(1)} \right)^2 + \frac{\partial^2 X^\chi}{\partial \bar{\gamma}_q^2} \left(u_{\gamma_q}^{(1)} \right)^2 \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X^\chi}{\partial \bar{\tau}^2} \left(u_\tau^{(1)} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X^\chi}{\partial \bar{p}_{j,q}^2} \left(v_{p_{j,q}}^{(1)} \right)^2 + \frac{\partial^2 X^\chi}{\partial \bar{v}_{x,q} \partial \bar{p}_{j,q}} u_{v_{x,q}}^{(1)} v_{p_{j,q}}^{(1)} + \frac{\partial^2 X^\chi}{\partial \bar{v}_{y,q} \partial \bar{p}_{j,q}} u_{v_{y,q}}^{(1)} v_{p_{j,q}}^{(1)} + \\
& + \frac{\partial^2 X^\chi}{\partial \bar{v}_{z,q} \partial \bar{p}_{j,q}} u_{v_{z,q}}^{(1)} v_{p_{j,q}}^{(1)} + \frac{\partial^2 X^\chi}{\partial \bar{\gamma}_q \partial \bar{p}_{j,q}} u_{\gamma_q}^{(1)} v_{p_{j,q}}^{(1)} + \frac{\partial^2 X^\chi}{\partial \bar{\tau} \partial \bar{p}_{j,q}} u_\tau^{(1)} v_{p_{j,q}}^{(1)} + \frac{\partial X^\chi}{\partial \bar{v}_{x,q}} u_{v_{x,q}}^{(2)} + \\
& + \frac{\partial X^\chi}{\partial \bar{v}_{y,q}} u_{v_{y,q}}^{(2)} + \frac{\partial X^\chi}{\partial \bar{v}_{z,q}} u_{v_{z,q}}^{(2)} + \frac{\partial X^\chi}{\partial \bar{\gamma}_q} u_{\gamma_q}^{(2)} + \frac{\partial X^\chi}{\partial \bar{\tau}} u_\tau^{(2)} + \frac{\partial X^\chi}{\partial \bar{p}_{j,q}} v_{p_{j,q}}^{(2)} - \left(A_\chi^{(3)} + \frac{\partial u_\chi^{(1)}}{\partial \bar{v}_{x,q}} A_{v_{x,q}}^{(2)} + \right. \\
& + \frac{\partial u_\chi^{(1)}}{\partial \bar{v}_{y,q}} A_{v_{y,q}}^{(2)} + \frac{\partial u_\chi^{(1)}}{\partial \bar{v}_{z,q}} A_{v_{z,q}}^{(2)} + \frac{\partial u_\chi^{(1)}}{\partial \bar{\gamma}_q} A_{\gamma_q}^{(2)} + \frac{\partial u_\chi^{(1)}}{\partial \bar{\tau}} A_\tau^{(2)} + \frac{\partial u_\chi^{(1)}}{\partial \bar{p}_{j,q}} B_{p_{j,q}}^{(2)} + \frac{\partial u_\chi^{(2)}}{\partial \bar{v}_{x,q}} A_{v_{x,q}}^{(1)} + \\
& \left. + \frac{\partial u_\chi^{(2)}}{\partial \bar{v}_{y,q}} A_{v_{y,q}}^{(1)} + \frac{\partial u_\chi^{(2)}}{\partial \bar{v}_{z,q}} A_{v_{z,q}}^{(1)} + \frac{\partial u_\chi^{(2)}}{\partial \bar{\gamma}_q} A_{\gamma_q}^{(1)} + \frac{\partial u_\chi^{(2)}}{\partial \bar{\tau}} A_\tau^{(1)} + \frac{\partial u_\chi^{(2)}}{\partial \bar{p}_{j,q}} B_{p_{j,q}}^{(1)} \right), \quad (3.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}_{j,q} \frac{\partial v_\alpha^{(3)}}{\partial \bar{p}_j} = & -B_\alpha^{(3)} - \frac{\partial v_\alpha^{(1)}}{\partial \bar{\chi}} A_\chi^{(2)} - \frac{\partial v_\alpha^{(1)}}{\partial \bar{p}_j} B_{p_j}^{(2)} - \frac{\partial v_\alpha^{(2)}}{\partial \bar{\chi}} A_\chi^{(1)} - \frac{\partial v_\alpha^{(2)}}{\partial \bar{p}_j} B_{p_j}^{(1)} + \\
& + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Omega_\alpha}{\partial \bar{\chi}^3} \left(u_\chi^{(1)} \right)^3 + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \Omega_\alpha}{\partial \bar{\chi}_i \partial \bar{\chi}_j} u_{\chi_i}^{(1)} u_{\chi_j}^{(2)} - \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial \bar{\chi}} u_\chi^{(3)}, \quad (3.35)
\end{aligned}$$

де $\chi = v_{x,q}, v_{y,q}, v_{z,q}, \gamma_q, \tau$, $j = 1, 2, 3$, $\alpha = p_{j,q}$

Для осциляторних функцій швидкості $v_{x,q}$ отримуємо наступний розв'язок:

$$\begin{aligned}
u_{v_{x,q},m}^{(3)(\bar{p}_j)} = & \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{E_x}{c^2} \right) \left(u_{v_{x,q}}^{(1)} \right)^2 + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^3} \left(E_x - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_y \right) \left(u_{\gamma_q}^{(1)} \right)^2 - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \frac{em^2}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{1x} - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{1y} \right) \left(v_{p_{1,q}}^{(1)} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{em^2}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{2x} - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{2y} \right) \left(v_{p_{2,q}}^{(1)} \right)^2 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} B_{1y} u_{v_{z,q}}^{(1)} v_{p_{1,q}}^{(1)} - i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_{1x} - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{1y} \right) u_{\gamma_q}^{(1)} v_{p_{1,q}}^{(1)} - \\
& -i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} B_{2y} u_{v_{z,q}}^{(1)} v_{p_{2,q}}^{(1)} - i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_{2x} - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{2y} \right) u_{\gamma_q}^{(1)} v_{p_{2,q}}^{(1)} - \quad (3.36) \\
& -i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_{3z} u_{v_{x,q}}^{(1)} v_{p_{3,q}}^{(1)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_z u_{v_{x,q}}^{(2)} + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} B_z u_{v_{y,q}}^{(2)} - \\
& - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} B_y u_{v_{z,q}}^{(2)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_x - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_y \right) u_{\gamma}^{(2)} + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{1x} - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{1y} \right) v_{p_{1,q}}^{(2)} + \\
& + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{2x} - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{2y} \right) v_{p_{2,q}}^{(2)} - \frac{\partial u_{v_{x,q}}^{(2)}}{\partial t} \Bigg|_{mp_j}.
\end{aligned}$$

Для осциляторних функцій швидкості $v_{y,q}$ знаходимо:

$$\begin{aligned}
u_{v_{y,q},m}^{(3)(\bar{p}_j)} &= \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{E_y}{c^2} \left(u_{v_{y,q}}^{(1)} \right)^2 + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^3} \left(E_y + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_x \right) \left(u_{\gamma_q}^{(1)} \right)^2 - \right. \\
& - \frac{1}{2} \frac{em^2}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{1y} + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{1x} \right) \left(v_{p_{1,q}}^{(1)} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{em^2}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{2y} + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{2x} \right) \left(v_{p_{2,q}}^{(1)} \right)^2 + \\
& + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} B_{1x} u_{v_{z,q}}^{(1)} v_{p_{1,q}}^{(1)} - i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_{1y} + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{1x} \right) u_{\gamma_q}^{(1)} v_{p_{1,q}}^{(1)} + \\
& + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} B_{2x} u_{v_{z,q}}^{(1)} v_{p_{2,q}}^{(1)} - i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_{2y} + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{2x} \right) u_{\gamma_q}^{(1)} v_{p_{2,q}}^{(1)} - \quad (3.37) \\
& - i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_{3z} u_{v_{y,q}}^{(1)} v_{p_{3,q}}^{(1)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} B_z u_{v_{x,q}}^{(2)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_z u_{v_{y,q}}^{(2)} + \\
& + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} B_x u_{v_{z,q}}^{(2)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_y + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_x \right) u_{\gamma}^{(2)} + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{1y} + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{1x} \right) v_{p_{1,q}}^{(2)} +
\end{aligned}$$

$$+ i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{2y} + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{2x} \right) v_{p_{2,q}}^{(2)} - \frac{\partial u_{v_{y,q}}^{(2)}}{\partial t} \Bigg\rangle_{mp_j} .$$

Аналогічно для осциляторних функцій швидкості $v_{z,q}$:

$$\begin{aligned} u_{v_{z,q},m}^{(3)(\bar{p}_j)} = & \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{E_z}{c^2} \left(u_{v_{z,q}}^{(1)} \right)^2 + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^3} \left(E_z - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_z \right) \left(u_{\gamma_q}^{(1)} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{em^2}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{3z} - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_{3z} \right) \left(v_{p_{3,q}}^{(1)} \right)^2 + \right. \\ & + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(B_{1y} - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} E_{1x} \right) u_{v_{x,q}}^{(1)} v_{p_{1,q}}^{(1)} - i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(B_{1x} + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} E_{1y} \right) u_{v_{y,q}}^{(1)} v_{p_{1,q}}^{(1)} + \\ & + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(B_{2y} - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} E_{2x} \right) u_{v_{x,q}}^{(1)} v_{p_{2,q}}^{(1)} - i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(B_{2x} + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} E_{2y} \right) u_{v_{y,q}}^{(1)} v_{p_{2,q}}^{(1)} - \\ & - 2i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_{3z} u_{v_{z,q}}^{(1)} v_{p_{3,q}}^{(1)} - i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_{3z} - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_{3z} \right) u_{\gamma_q}^{(1)} v_{p_{3,q}}^{(1)} + \quad (3.38) \\ & + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(B_y - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} E_x \right) u_{v_{x,q}}^{(2)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(B_x + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} E_y \right) u_{v_{y,q}}^{(2)} - \\ & - 2 \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_z u_{v_{z,q}}^{(2)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_z - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_z \right) u_{\gamma_q}^{(2)} + \\ & \left. + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{3z} - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_{3z} \right) v_{p_{3,q}}^{(2)} - \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(2)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j} . \end{aligned}$$

Для релятивістського фактору γ_q

$$u_{\gamma_q,m}^{(3)(\bar{p}_j)} = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{1}{2} \frac{em^2}{m_e c^2} \bar{v}_{z,q} E_{3z} \left(v_{p_{3,q}}^{(1)} \right)^2 + i \frac{em}{m_e c^2} E_{3z} u_{v_{z,q}}^{(1)} v_{p_{3,q}}^{(1)} + \right.$$

$$+ \frac{e}{m_e c^2} E_z u_{v_{z,q}}^{(2)} + i \frac{em}{m_e c^2} \bar{v}_{z,q} E_{3z} v_{p_{3,q}}^{(2)} - \frac{\partial u_{\gamma_q}^{(2)}}{\partial t} \Bigg\rangle_{mp_j}. \quad (3.39)$$

Для $v_{p_{1,q}}$, $v_{p_{2,q}}$ та $v_{p_{3,q}}$ знаходимо:

$$v_{p_{1,q},m}^{(3)}(\bar{p}_j) = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{\partial v_{p_{1,q}}^{(2)}}{\partial t} + k_1 u_{v_{z,q}}^{(3)} \right\rangle_{mp_j}. \quad (3.40)$$

$$v_{p_{2,q},m}^{(3)}(\bar{p}_j) = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{\partial v_{p_{2,q}}^{(2)}}{\partial t} - k_2 u_{v_{z,q}}^{(3)} \right\rangle_{mp_j}. \quad (3.41)$$

$$v_{p_{3,q},m}^{(3)}(\bar{p}_j) = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{\partial v_{p_{3,q}}^{(2)}}{\partial t} + k_3 u_{v_{z,q}}^{(3)} \right\rangle_{mp_j}. \quad (3.42)$$

Далі згідно зі схемою методу усереднених характеристик проводимо зворотні перетворення у відповідності до алгоритму, що описаний у другому розділі. Після проведення процедури зворотних перетворень отримуємо наступні вирази.

Для осциляторних функцій другого порядку швидкості v_x та v_y :

$$u_{v_{x,q},m}^{(2)} = u_{v_{x,q},m}^{(2)}(p_1) e^{imp_1} + u_{v_{x,q},m}^{(2)}(p_2) e^{imp_2} + \text{к.с.},$$

$$u_{v_{x,q},m}^{(2)}(p_j) = \left(im\bar{\Omega}_{j,q} V_{x,q,m}^{(p_j)} + \omega_{H,q} V_{y,q,m}^{(p_j)} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\bar{\Omega}_{j,q})^2 \right),$$

$$u_{v_{y,q},m}^{(2)} = u_{v_{y,q},m}^{(2)}(p_1) e^{imp_1} + u_{v_{y,q},m}^{(2)}(p_2) e^{imp_2} + \text{к.с.},$$

$$u_{\nu_{y,q},m}^{(2)(p_j)} = \left(im\bar{\Omega}_{j,q} V_{y,q,m}^{(p_j)} - \omega_{H,q} V_{x,q,m}^{(p_j)} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\bar{\Omega}_{j,q})^2 \right), \quad (3.43)$$

де

$$V_{x,q,m}^{(p_j)} = \left\langle \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{1}{c} \left(-\bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(2)} - u_{\nu_{z,q}}^{(1)} u_{B_y}^{(1)} \right) - \frac{1}{c^2} \left(u_{\nu_{x,q}}^{(1)} \bar{v}_{z,q} E_z \right) \right) + \right. \\ \left. + \left(-\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{u_{\gamma_q}^{(1)}}{\bar{\gamma}_q} \right) \left(E_x + \frac{1}{c} \left(u_{\nu_{y,q}}^{(1)} B_z - \bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(1)} \right) \right) \right) - \frac{\partial u_{\nu_{x,q}}^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial u_{\nu_{x,q}}^{(1)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{\nu_{z,q}}^{(1)} \right) \right\rangle_{mp_j},$$

$$V_{y,q,m}^{(p_j)} = \left\langle \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(-\frac{1}{c} \left(-\bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(2)} - u_{\nu_{z,q}}^{(1)} u_{B_x}^{(1)} \right) - \frac{1}{c^2} \left(u_{\nu_{y,q}}^{(1)} \bar{v}_{z,q} E_z \right) \right) + \right. \\ \left. + \left(-\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{u_{\gamma_q}^{(1)}}{\bar{\gamma}_q} \right) \left(E_y - \frac{1}{c} \left(u_{\nu_{x,q}}^{(1)} B_z - \bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(1)} \right) \right) \right) - \frac{\partial u_{\nu_{y,q}}^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial u_{\nu_{y,q}}^{(1)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{\nu_{z,q}}^{(1)} \right) \right\rangle_{mp_j}.$$

Для осциляторних функцій третього порядку швидкості ν_x та ν_y :

$$u_{\nu_{x,q},m}^{(3)} = u_{\nu_{x,q},m}^{(3)(p_1)} e^{imp_1} + u_{\nu_{x,q},m}^{(3)(p_2)} e^{imp_2} + \text{к.с.},$$

$$u_{\nu_{x,q},m}^{(3)(p_j)} = \left(im\bar{\Omega}_{j,q} V_{x,q,m}^{(p_j)} + \omega_{H,q} V_{y,q,m}^{(p_j)} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\bar{\Omega}_{j,q})^2 \right),$$

$$u_{\nu_{y,q},m}^{(3)} = u_{\nu_{y,q},m}^{(3)(p_1)} e^{imp_1} + u_{\nu_{y,q},m}^{(3)(p_2)} e^{imp_2} + \text{к.с.},$$

$$u_{\nu_{y,q},m}^{(3)(p_j)} = \left(im\bar{\Omega}_{j,q} V_{y,q,m}^{(p_j)} - \omega_{H,q} V_{x,q,m}^{(p_j)} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\bar{\Omega}_{j,q})^2 \right), \quad (3.44)$$

де

$$V_{x,q,m}^{(p_j)} = \left\langle \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(-\bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(3)} - u_{\nu_{z,q}}^{(1)} u_{B_y}^{(2)} - u_{\nu_{z,q}}^{(2)} u_{B_y}^{(1)} \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q c^2} \left(u_{v_{x,q}}^{(1)} u_{v_{x,q}}^{(1)} E_x + u_{v_{x,q}}^{(1)} u_{v_{y,q}}^{(1)} E_y + u_{v_{x,q}}^{(1)} u_{v_{z,q}}^{(1)} E_z + u_{v_{x,q}}^{(2)} \bar{v}_{z,q} E_z \right) - \\
& -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} u_{\gamma_q}^{(1)} \left(\frac{1}{c} \left(u_{v_{y,q}}^{(2)} B_z - \bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(2)} - u_{v_{z,q}}^{(1)} u_{B_y}^{(1)} \right) - \frac{1}{c^2} \left(u_{v_{x,q}}^{(1)} \bar{v}_{z,q} E_z \right) \right) - \\
& -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} u_{\gamma_q}^{(2)} \left(E_x + \frac{1}{c} \left(u_{v_{y,q}}^{(1)} B_z - \bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(1)} \right) \right) + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^3} \left(u_{\gamma_q}^{(1)} \right)^2 \left(E_x + \frac{1}{c} \left(u_{v_{y,q}}^{(1)} B_z - \bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(1)} \right) \right) + \\
& \quad \left. + \frac{\partial u_{v_{x,q}}^{(1)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{v_{z,q}}^{(2)} \right) + \frac{\partial u_{v_{x,q}}^{(2)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{v_{z,q}}^{(1)} \right) - \frac{\partial u_{v_{x,q}}^{(2)}}{\partial t} \right)_{mp_j}, \\
V_{y,q,m}^{(p_j)} & = \left\langle -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q c} \left(-\bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(3)} - u_{v_{z,q}}^{(1)} u_{B_x}^{(2)} - u_{v_{z,q}}^{(2)} u_{B_x}^{(1)} \right) - \right. \\
& -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q c^2} \left(u_{v_{y,q}}^{(1)} u_{v_{x,q}}^{(1)} E_x + u_{v_{y,q}}^{(1)} u_{v_{y,q}}^{(1)} E_y + u_{v_{y,q}}^{(2)} \bar{v}_{z,q} E_z + u_{v_{y,q}}^{(1)} u_{v_{z,q}}^{(1)} E_z \right) - \\
& -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} u_{\gamma_q}^{(1)} \left(-\frac{1}{c} \left(u_{v_{x,q}}^{(2)} B_z - \bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(2)} - u_{v_{z,q}}^{(1)} u_{B_x}^{(1)} \right) - \frac{1}{c^2} \left(u_{v_{y,q}}^{(1)} \bar{v}_{z,q} E_z \right) \right) - \\
& -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} u_{\gamma_q}^{(2)} \left(E_y - \frac{1}{c} \left(u_{v_{x,q}}^{(1)} \bar{B}_z - \bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(1)} \right) \right) + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^3} \left(u_{\gamma_q}^{(1)} \right)^2 \left(E_y - \frac{1}{c} \left(u_{v_{x,q}}^{(1)} \bar{B}_z - \bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(1)} \right) \right) + \\
& \quad \left. + \frac{\partial u_{v_{y,q}}^{(1)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{v_{z,q}}^{(2)} \right) + \frac{\partial u_{v_{y,q}}^{(2)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{v_{z,q}}^{(1)} \right) - \frac{\partial u_{v_{y,q}}^{(2)}}{\partial t} \right)_{mp_j}.
\end{aligned}$$

Для функцій швидкості v_z :

$$u_{v_{z,q},m}^{(2)} = \sum_{j=1}^3 u_{v_{z,q},m}^{(2)(p_j)} e^{imp_j} + \text{к.с.},$$

$$u_{v_{z,q},m}^{(2)(p_j)} = \frac{1}{im\Omega_{j,q}} \left\langle \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{1}{c} \left(u_{v_{x,q}}^{(1)} u_{B_y}^{(1)} - u_{v_{y,q}}^{(1)} u_{B_x}^{(1)} \right) - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} \left(u_{v_{x,q}}^{(1)} E_x + u_{v_{y,q}}^{(1)} E_y + 2u_{v_{z,q}}^{(1)} E_z \right) \right) - \right.$$

$$-\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{u_{\gamma q}^{(1)}}{\bar{\gamma}_q} \right) E_z \left(1 - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} \right) + \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(1)}}{\partial p_3} \left(k_3 u_{v_{z,q}}^{(1)} \right) - \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(1)}}{\partial t} \Bigg|_{mp_j}, \quad (3.45)$$

$$u_{v_{z,q},m}^{(3)} = \sum_{j=1}^3 u_{v_{z,q},m}^{(3)(p_j)} e^{imp_j} + \text{к.с.},$$

$$\begin{aligned} u_{v_{z,q},m}^{(3)(p_j)} = & \frac{1}{im\Omega_{j,q}} \left\langle \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(u_{v_{x,q}}^{(1)} u_{B_y}^{(2)} + u_{v_{x,q}}^{(2)} u_{B_y}^{(1)} - u_{v_{y,q}}^{(1)} u_{B_x}^{(2)} - u_{v_{y,q}}^{(2)} u_{B_x}^{(1)} \right) - \right. \\ & - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c^2} \left(\bar{v}_{z,q} u_{v_{x,q}}^{(2)} E_x + \bar{v}_{z,q} u_{v_{y,q}}^{(2)} E_y + \bar{v}_{z,q} u_{v_{z,q}}^{(2)} E_z + u_{v_{z,q}}^{(1)} u_{v_{x,q}}^{(1)} E_x \right) - \\ & - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c^2} \left(u_{v_{z,q}}^{(1)} u_{v_{y,q}}^{(1)} E_y + u_{v_{z,q}}^{(2)} \bar{v}_{z,q} E_z + u_{v_{z,q}}^{(1)} u_{v_{z,q}}^{(1)} E_z \right) - \\ & \left. - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2 c} u_{\gamma q}^{(1)} \left(u_{v_{x,q}}^{(1)} u_{B_y}^{(1)} - u_{v_{y,q}}^{(1)} u_{B_x}^{(1)} \right) + \right. \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2 c^2} u_{\gamma q}^{(1)} \left(\bar{v}_{z,q} u_{v_{x,q}}^{(1)} E_x + \bar{v}_{z,q} u_{v_{y,q}}^{(1)} E_y + \bar{v}_{z,q} u_{v_{z,q}}^{(1)} E_z + u_{v_{z,q}}^{(1)} \bar{v}_{z,q} E_z \right) - \\ & - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} u_{\gamma q}^{(2)} \left(E_z - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_z \right) + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^3} \left(u_{\gamma q}^{(1)} \right)^2 \left(E_z - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_z \right) + \\ & + \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(1)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{v_{z,q}}^{(2)} \right) + \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(2)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{v_{z,q}}^{(1)} \right) - \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(2)}}{\partial t} \Bigg|_{mp_j}. \end{aligned}$$

Для γ :

$$u_{\gamma q,m}^{(2)} = \sum_{j=1}^3 u_{\gamma q,m}^{(2)(p_j)} e^{imp_j} + \text{к.с.},$$

$$u_{\gamma q,m}^{(2)(p_j)} = \frac{1}{im\Omega_{j,q}} \left\langle \frac{e}{m_e c^2} E_z u_{v_{z,q}}^{(1)} + \frac{\partial u_{\gamma q}^{(1)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{v_{z,q}}^{(1)} \right) - \frac{\partial u_{\gamma q}^{(1)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}, \quad (3.47)$$

$$u_{\gamma_q, m}^{(3)} = \sum_{j=1}^3 u_{\gamma_q, m}^{(3)(p_j)} e^{imp_j} + \text{к.с.},$$

$$u_{\gamma_q, m}^{(3)(p_j)} = \frac{1}{im\Omega_{j,q}} \left\langle \frac{e}{m_e c^2} E_z u_{v_{z,q}}^{(2)} + \frac{\partial u_{\gamma_q}^{(1)}}{\partial p_j} (k_j u_{v_{z,q}}^{(2)}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u_{\gamma_q}^{(2)}}{\partial p_j} (k_j u_{v_{z,q}}^{(1)}) - \frac{\partial u_{\gamma_q}^{(2)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}. \quad (3.48)$$

Розв'язок рівняння неперервності. У якості вихідного рівняння для знаходження концентрації використаємо рівняння (3.7). Застосуємо до цього рівняння метод усереднених характеристик. Спочатку запишемо рівняння неперервності (3.7) у стандартній формі [1]

$$\frac{\partial n_q}{\partial t} + v_{z,q} \frac{\partial n_q}{\partial z} = -n_q \frac{\partial v_{z,q}}{\partial z}.$$

Запишемо характеристику для цього рівняння:

$$\frac{dn_q}{dt} = \frac{1}{\xi} X^{n_q}. \quad (3.49)$$

$$\text{де } \frac{1}{\xi} X^{n_q} \equiv -n_q \frac{\partial v_{z,q}}{\partial z}.$$

Необхідно відзначити, що на цьому етапі розв'язання вважаємо рішення задачі руху вже відомими. Тобто $\partial v_{z,q} / \partial z$ є відомою функцією, яка залежить від амплітуд полів та їх фаз. Доповнимо рівняння (3.49) рівняннями для фаз коливань $p_{1,q}, p_{2,q}, p_{3,q}$ (3.15) і отримаємо систему рівнянь, яку будемо розв'язувати аналогічно як і у випадку задачі руху.

У відповідності із загальною процедурою вводимо вектор повільних змінних $x = \{n_q, v_x, v_y, v_z, \gamma_q, \tau\}$ та $p = \{p_1, p_2, p_3\}$ вектор швидких змінних. Розв'язок будемо шукати в наступному вигляді:

$$n_q = \bar{n}_q + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{n_q}^{(n)}(\bar{x}, \bar{p}), \quad (3.50)$$

де для усередненої концентрації можемо написати рівняння

$$\frac{d\bar{n}_q}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{n_q}^{(n)}(\bar{x}). \quad (3.51)$$

Для інших повільно змінних величин використовуємо рівняння, які були записані вище. У першому наближенні отримаємо наступне рішення для n_q

$$\bar{\Omega}_{j,q} \frac{\partial u_{n_q}^{(1)}}{\partial \bar{p}_j} = X^{n_q}(\bar{x}, \bar{p}) - A_{n_q}^{(1)}, \quad (3.52)$$

$$A_n^{(1)} = \frac{1}{T_1 T_2 T_3} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_0^{T_3} X^{n_q} d\bar{p}_1 d\bar{p}_2 d\bar{p}_3 = 0. \quad (3.53)$$

Розв'язуючи (3.52) і використовуючи (3.53) отримуємо:

$$u_{n_q,m}^{(1)} = \frac{e\bar{n}_q}{m_e \bar{\gamma}_q^3} \frac{k_3}{\Omega_{3,q}^2} \left(\frac{E_{3z,m}}{im} e^{im\bar{p}_3} + \text{к.с.} \right). \quad (3.54)$$

Використовуючи розрахункову схему для другого наближення (3.25) знаходимо:

$$A_n^{(2)} = 0,$$

$$u_{n_q, m}^{(2)(\bar{p}_j)} = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle \frac{ek_3}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \bar{\Omega}_{3,q}^2} E_z u_n^{(1)} - 3 \frac{e\bar{n}_q k_3}{m_e \bar{\Omega}_{3,q}^2 \bar{\gamma}_q^4} E_z u_\gamma^{(1)} + \right. \\ \left. + i \frac{e\bar{n}k_3 m}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \bar{\Omega}_{3,q}^2} E_{3z} v_{p_{3,q}}^{(1)} - A_{n_q}^{(2)} - \frac{\partial u_{n_q}^{(1)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}. \quad (3.55)$$

Для третьего приближения отримуємо:

$$u_{n_q, m}^{(3)(\bar{p}_j)} = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle 6 \frac{e\bar{n}_q k_3}{m_e \bar{\gamma}_q^5 \bar{\Omega}_{3,q}} E_z (u_\gamma^{(1)})^2 - \frac{1}{2} \frac{em^2 \bar{n}k_3}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \bar{\Omega}_{3,q}} E_z (v_{p_3}^{(1)})^2 + \right. \\ \left. + i \frac{emk_3}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \bar{\Omega}_{3,q}} E_{3z} u_{n_q}^{(1)} v_{p_3}^{(1)} - 3i \frac{e\bar{n}k_3 m}{m_e \bar{\gamma}_q^4 \bar{\Omega}_{3,q}} E_{3z} u_{\gamma_q}^{(1)} v_{p_{3,q}}^{(1)} + \frac{ek_3}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \bar{\Omega}_{3,q}} E_z u_n^{(2)} - \right. \\ \left. - 3 \frac{e\bar{n}k_3}{m_e \bar{\gamma}_q^4 \bar{\Omega}_{3,q}} E_z u_\gamma^{(2)} + i \frac{e\bar{n}mk_3}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \bar{\Omega}_{3,q}} E_{3z} v_{p_3}^{(2)} - A_{n_q}^{(3)} - \frac{\partial u_{n_q}^{(2)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}. \quad (3.56)$$

Виконуємо процедуру зворотних перетворень і знаходимо

$$u_{n_q, m}^{(2)} = \sum_{j=1}^3 u_{n_q, m}^{(2)(p_j)} e^{imp_j} + \text{к.с.},$$

$$u_{n_q, m}^{(2)(p_j)} = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\bar{n}_q \left[\frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(2)}}{\partial z} \right] - (u_{n_q}^{(1)}) \left[\frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(1)}}{\partial z} \right] - \frac{\partial u_{n_q}^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial u_{n_q}^{(1)}}{\partial p_j} (k_j u_{v_{z,q}}^{(1)}) \right\rangle_{mp_j}, \quad (3.57)$$

$$u_{n_q, m}^{(3)} = \sum_{j=1}^3 u_{n_q, m}^{(3)(p_j)} e^{imp_j} + \text{к.с.},$$

$$\begin{aligned}
u_{n_q,m}^{(3)(p_j)} = \frac{1}{im\Omega_{j,q}} \left\langle \bar{n}_q \left[k_3 \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(2)}}{\partial p_3} \right] + \left(u_{n_q}^{(1)} \right) \left[k_3 \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(2)}}{\partial p_3} \right] + \left(u_{n_q}^{(2)} \right) \left[k_3 \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(1)}}{\partial p_3} \right] - \right. \\
\left. - \frac{\partial u_{n_q}^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial u_{n_q}^{(1)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{v_{z,q}}^{(2)} \right) + \frac{\partial u_{n_q}^{(2)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{v_{z,q}}^{(1)} \right) \right\rangle_{mp_j}. \quad (3.58)
\end{aligned}$$

Польова задача. Далі отримані розв'язки для швидкостей і концентрації підставляємо до рівнянь Максвелла (3.8). Розв'язуючи задачу руху і неперервності за допомогою метода усереднених характеристик, ми отримали вирази для швидкостей і концентрації в досліджуваній системі як ряд за малим параметром задачі. Використовуючи цю обставину застосовуємо модернізований метод повільно змінних амплітуд до рівнянь Максвелла. Проводимо алгебраїчні перетворення, в результаті яких отримуємо для амплітуд гармонік напруженості електричного поля електромагнітної хвилі $\{\omega_1, \mathbf{k}_1\}$ та електронної хвилі ХПЗ $\{\omega_3, \mathbf{k}_3\}$ систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
K_{2,m}^s \frac{\partial^2 E_{1x,m}}{\partial t^2} + K_{1,m}^s \frac{\partial E_{1x,m}}{\partial t} + D_{1,m} E_{1x,m} &= K_{3,m}^s E_{3z,m} E_{2x,m} + FX_{1,m}, \\
K_{2,m}^s \frac{\partial^2 E_{1y,m}}{\partial t^2} + K_{1,m}^s \frac{\partial E_{1y,m}}{\partial t} + D_{1,m} E_{1y,m} &= K_{3,m}^s E_{3z,m} E_{2y,m} + FY_{1,m}, \\
K_{2,m}^p \frac{\partial^2 E_{2x,m}}{\partial t^2} + K_{1,m}^p \frac{\partial E_{2x,m}}{\partial t} + D_{2,m} E_{2x,m} &= K_{3,m}^p E_{3z,m}^* E_{1x,m} + FX_{2,m}, \quad (3.59) \\
K_{2,m}^p \frac{\partial^2 E_{2y,m}}{\partial t^2} + K_{1,m}^p \frac{\partial E_{2y,m}}{\partial t} + D_{2,m} E_{2y,m} &= K_{3,m}^p E_{3z,m}^* E_{1y,m} + FY_{2,m}, \\
C_{2,m} \frac{\partial^2 E_{3z,m}}{\partial t^2} + C_{1,m} \frac{\partial E_{3z,m}}{\partial t} + D_{3,m} E_{3z,m} &= C_{3,m} E_{1x,m} E_{2x,m}^* + \\
+ C_{4,m} \left\langle \int E_z \left(\int E_z dp_3 \right) dp_3 \right\rangle_{mp_3} &+ C_{5,m} \left\langle \left(\int E_z dp_3 \right)^2 \right\rangle_{mp_3} + FZ_{3,m}.
\end{aligned}$$

В рівняннях (3.59) позначено:

$$\begin{aligned}
K_{2,m}^s &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{1,m}}{\partial (im\omega_1)^2} = \frac{ck_1^2}{im\omega_1^3} + \\
&+ \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2 (\Omega_{1,\alpha} \omega_1^2 - (\Omega_{1,\alpha} - \omega_{H,\alpha} \eta_1 / m) \bar{v}_{z,\alpha} k_1 (\omega_1 + \Omega_{1,\alpha} - \omega_{H,\alpha} \eta_1 / m))}{i\omega_1^3 c \bar{\gamma}_{\alpha} (m\Omega_{1,\alpha} - \omega_{H,\alpha} \eta_1)^3}, \\
K_{1,m}^s &= \frac{\partial D_{1,m}}{\partial (im\omega_1)} = -\frac{c^2 k_1^2 + \omega_1^2}{\omega_1^2 c} + \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2 (-\Omega_{1,\alpha} \omega_1 + (\Omega_{1,\alpha} - \omega_{H,\alpha} \eta_1 / m) \bar{v}_{z,\alpha} k_1)}{\omega_1^2 c \bar{\gamma}_{\alpha} (m\Omega_{1,\alpha} - \omega_{H,\alpha} \eta_1)^2}, \\
D_{1,m} &= \frac{im}{c\omega_1} \left(k_1^2 c^2 - \omega_1^2 + \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2 \Omega_{1,\alpha} (m\Omega_{1,\alpha} + \eta_1 \omega_{H,\alpha})}{m \bar{\gamma}_{\alpha} ((m\Omega_{1,\alpha})^2 - (\omega_{H,\alpha})^2)} \right), \\
K_{3,m}^s &= \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2}{c \bar{\gamma}_{\alpha}^2} \frac{e}{m_e} \left[\frac{\Omega_{2,\alpha} k_3}{\bar{\gamma}_{\alpha}^2 m \Omega_{3,\alpha}^2 \omega_2 (\omega_{H,\alpha} \eta_2 - m\Omega_{2,\alpha})} + \frac{(\omega_{H,\alpha} \eta_2 + m\Omega_{1,\alpha})}{(\omega_{H\alpha})^2 - (m\Omega_{1\alpha})^2} \times \right. \\
&\times \left. \left(\frac{(-1)}{m\Omega_{3,\alpha}} \left(\frac{\bar{v}_{z,\alpha}}{c^2} \frac{\Omega_{2,\alpha}}{\omega_2} - \frac{k_2}{\bar{\gamma}_{\alpha}^2 \omega_2} \right) + \frac{\Omega_{2,\alpha} (\bar{v}_{z,\alpha} (m\Omega_{3,\alpha} + \omega_{H,\alpha} \eta_2) + mk_2 c^2 / \bar{\gamma}_{\alpha}^2)}{\omega_2 c^2 m \Omega_{3,\alpha} (\omega_{H,\alpha} \eta_2 - m\Omega_{2,\alpha})} \right) \right], \\
K_{2,m}^p &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{2,m}}{\partial (im\omega_2)^2} = \frac{ck_2^2}{im\omega_2^3} + \\
&+ \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2 (\Omega_{2,\alpha} \omega_2^2 + (\Omega_{2,\alpha} - \omega_{H,\alpha} \eta_2 / m) \bar{v}_{z,\alpha} k_2 (\omega_2 + \Omega_{2,\alpha} - \omega_{H,\alpha} \eta_2 / m))}{i\omega_2^3 c \bar{\gamma}_{\alpha} (m\Omega_{2,\alpha} - \omega_{H,\alpha} \eta_2)^3}, \\
K_{1,m}^p &= \frac{\partial D_{2,m}}{\partial (im\omega_2)} = -\frac{c^2 k_2^2 + \omega_2^2}{\omega_2^2 c} + \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2 (-\Omega_{2,\alpha} \omega_2 - (\Omega_{2,\alpha} - \omega_{H,\alpha} \eta_2 / m) \bar{v}_{z,\alpha} k_2)}{\omega_2^2 c \bar{\gamma}_{\alpha} (m\Omega_{2,\alpha} - \omega_{H,\alpha} \eta_2)^2}, \\
D_{2,m} &= \frac{im}{c\omega_2} \left(k_2^2 c^2 - \omega_2^2 + \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2 \Omega_{2,\alpha} (m\Omega_{2,\alpha} + \eta_2 \omega_{H,\alpha})}{m \bar{\gamma}_{\alpha} ((m\Omega_{2,\alpha})^2 - (\omega_{H,\alpha})^2)} \right), \\
K_{3,m}^p &= \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2}{c \bar{\gamma}_{\alpha}^2} \frac{e}{m_e} \left[\frac{\Omega_{1,\alpha} k_3}{\bar{\gamma}_{\alpha}^2 m \Omega_{3,\alpha}^2 \omega_1 (\omega_{H,\alpha} \eta_1 - m\Omega_{1,\alpha})} + \frac{(\omega_{H,\alpha} \eta_1 + m\Omega_{2\alpha})}{(\omega_{H\alpha})^2 - (m\Omega_{2\alpha})^2} \times \right. \\
&\times \left. \left(\frac{(-1)}{m\Omega_{3,\alpha}} \left(\frac{\bar{v}_{z,\alpha}}{c^2} \frac{\Omega_{1,\alpha}}{\omega_1} + \frac{k_1}{\bar{\gamma}_{\alpha}^2 \omega_1} \right) + \frac{\Omega_{1,\alpha} (\bar{v}_{z,\alpha} (m\Omega_{3,\alpha} + \omega_{H,\alpha} \eta_1) - mk_1 c^2 / \bar{\gamma}_{\alpha}^2)}{\omega_2 c^2 m \Omega_{3,\alpha} (\omega_{H,\alpha} \eta_1 - m\Omega_{1,\alpha})} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$C_{2,m} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{3,m}}{\partial (im\omega_3)^2} = - \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2 (1 + 3k_3 \bar{v}_{z,\alpha} / \Omega_{3,\alpha})}{c \bar{\gamma}_{\alpha}^3 (im\Omega_{3,\alpha})^3},$$

$$C_{1,m} = \frac{\partial D_{3,m}}{\partial (im\omega_3)} = -\frac{1}{c} + \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2 (1 + 2k_3 \bar{v}_{z,\alpha} / \Omega_{3,\alpha})}{c \bar{\gamma}_{\alpha}^3 (im\Omega_{3,\alpha})^2},$$

$$D_{3,m} = \frac{-im\omega_3}{c} \left(1 + \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2}{\Omega_{3,\alpha}^2 (im)^2 \bar{\gamma}_{\alpha}^3} \right),$$

$$C_{3,m} = \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{e}{m_e c^3} \frac{\omega_{\alpha}^2 \omega_3 (1 + \eta_1 \eta_2)}{m \Omega_{3,\alpha}^2 \bar{\gamma}_{\alpha}^2 \omega_2 \omega_1} \left[\frac{\Omega_{1,\alpha} (-c^2 k_2 - \omega_2 \bar{v}_{z,\alpha})}{(\omega_{H,\alpha} \eta_1 - m \Omega_{1,\alpha})} - \frac{\Omega_{2,\alpha} (c^2 k_1 - \omega_1 \bar{v}_{z,\alpha})}{(\omega_{H,\alpha} \eta_2 - m \Omega_{2,\alpha})} \right],$$

$$C_{4,m} = \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2}{c \bar{\gamma}_{\alpha}^4 \Omega_{3,\alpha}^3} \frac{e}{m_e} \left[\frac{2\bar{v}_{z,\alpha} k_3^2 + \omega_3 k_3}{\Omega_{3,\alpha} \bar{\gamma}_{\alpha}^2} - 3 \frac{\bar{v}_{z,\alpha} \omega_3}{c^2} \right], \quad C_{5,m} = \sum_{\alpha}^{b,p} \left[\frac{\omega_{\alpha}^2}{c \bar{\gamma}_{\alpha}^6} \frac{e}{m_e} \frac{k_3}{\Omega_{3,\alpha}^3} \right],$$

$$FX_{j,m} = \left\langle \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{4\pi e_{\alpha}}{c} \left(\bar{n}_{\alpha} u_{\nu_{x,\alpha},m}^{st(3)} + u_{n_{\alpha},m}^{(1)} u_{\nu_{x,\alpha},m}^{(2)} + u_{n_{\alpha},m}^{(2)} u_{\nu_{x,\alpha},m}^{(1)} \right) \right\rangle_{mp_j},$$

$$FY_{j,m} = \left\langle \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{4\pi e_{\alpha}}{c} \left(\bar{n}_{\alpha} u_{\nu_{y,\alpha},m}^{st(3)} + u_{n_{\alpha},m}^{(1)} u_{\nu_{y,\alpha},m}^{(2)} + u_{n_{\alpha},m}^{(2)} u_{\nu_{y,\alpha},m}^{(1)} \right) \right\rangle_{mp_j},$$

$$FZ_{3,m} = \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{4\pi e_{\alpha}}{c} \left\langle \left(\bar{n}_{\alpha} u_{\nu_{z,\alpha},m}^{st(3)} + u_{n_{\alpha},m}^{(1)} u_{\nu_{z,\alpha},m}^{(2)} + u_{n_{\alpha},m}^{(2)} u_{\nu_{z,\alpha},m}^{(1)} + u_{n_{\alpha},m}^{st(3)} \bar{v}_{z,\alpha} \right) \right\rangle_{mp_3},$$

$$u_{\nu_{x,q},m}^{st(3)} = \sum_{j=1}^3 u_{\nu_{x,q},m}^{st(3)(p_j)} e^{imp_j} + K.C., \quad u_{\nu_{y,q},m}^{st(3)} = \sum_{j=1}^3 u_{\nu_{y,q},m}^{st(3)(p_j)} e^{imp_j} + K.C.,$$

$$u_{\nu_{z,q},m}^{st(3)} = \sum_{j=1}^3 u_{\nu_{z,q},m}^{st(3)(p_j)} e^{imp_j} + K.C., \quad u_{n_q,m}^{st(3)} = \sum_{j=1}^3 u_{n_q,m}^{st(3)(p_j)} e^{imp_j} + K.C.$$

$$u_{\nu_{x,q},m}^{st(3)(p_j)} = \left(im\Omega_{j,q} V_{x,q,m}^{st(p_j)} + \omega_{H,q} V_{y,q,m}^{st(p_j)} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\Omega_{j,q})^2 \right),$$

$$u_{\nu_{y,q},m}^{st(3)(p_j)} = \left(im\Omega_{j,q} V_{y,q,m}^{st(p_j)} - \omega_{H,q} V_{x,q,m}^{st(p_j)} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\Omega_{j,q})^2 \right),$$

$$V_{y,q,m}^{st(p_j)} = \left\langle \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} B_z \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_q} u_{\gamma_q}^{(2)} - \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{\gamma_q}^{(1)} \right) u_{\nu_{x,q}}^{(1)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c^2} \left(-u_{v_{x,q}}^{(1)} E_x - u_{v_{y,q}}^{(1)} E_y - u_{v_{z,q}}^{(1)} E_z + \frac{1}{\bar{\gamma}_q} \bar{v}_{z,q} u_{\gamma_q}^{(1)} E_z \right) u_{v_{y,q}}^{(1)} + \\
& + \left(\frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} \left(u_{B_x}^{(2)} - \frac{1}{\bar{\gamma}_q} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{B_x}^{(1)} \right) + k_j \frac{\partial u_{v_{y,q}}^{(2)}}{\partial p_j} \right) u_{v_{z,q}}^{(1)} + \\
& + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2} \left(\frac{1}{c} u_{v_{x,q}}^{(2)} B_z - \frac{1}{c} \bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(2)} + \frac{1}{\bar{\gamma}_q} u_{\gamma_q}^{(1)} E_y + \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} \bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(1)} u_{\gamma_q}^{(1)} \right) u_{\gamma_q}^{(1)} - \\
& - \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c^2} \bar{v}_{z,q} E_z u_{v_{y,q}}^{(2)} + \left(\frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} u_{B_x}^{(1)} + k_j \frac{\partial u_{v_{y,q}}^{(1)}}{\partial p_j} \right) u_{v_{z,q}}^{(2)} - \\
& - \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2} \left(E_y + \frac{1}{c} \bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(1)} \right) u_{\gamma_q}^{(2)} \Bigg|_{mp_j},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{x,q,m}^{st(p_j)} = & \left\langle \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c^2} \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_q} \bar{v}_{z,q} u_{\gamma_q}^{(1)} E_z - u_{v_{x,q}}^{(1)} E_x - u_{v_{y,q}}^{(1)} E_y - u_{v_{z,q}}^{(1)} E_z \right) u_{v_{x,q}}^{(1)} + \right. \\
& + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2 c} B_z \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_q} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{\gamma_q}^{(1)} - u_{\gamma_q}^{(2)} \right) u_{v_{y,q}}^{(1)} + \\
& + \left. \left(\frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_q} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{B_y}^{(1)} - u_{B_y}^{(2)} \right) + k_j \frac{\partial u_{v_{x,q}}^{(2)}}{\partial p_j} \right) u_{v_{z,q}}^{(1)} + \right. \\
& + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2} \left(\frac{1}{c} \bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(2)} - \frac{1}{c} u_{v_{y,q}}^{(2)} B_z + \frac{1}{\bar{\gamma}_q} u_{\gamma_q}^{(1)} E_x - \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} \bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(1)} u_{\gamma_q}^{(1)} \right) u_{\gamma_q}^{(1)} + \\
& - \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c^2} \bar{v}_{z,q} E_z u_{v_{x,q}}^{(2)} + \left(k_j \frac{\partial u_{v_{x,q}}^{(1)}}{\partial p_j} - \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} u_{B_y}^{(1)} \right) u_{v_{z,q}}^{(2)} - \\
& \left. - \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2} \left(E_x - \frac{1}{c} \bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(1)} \right) u_{\gamma_q}^{(2)} \right\rangle_{mp_j},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{\nu_{z,q},m}^{st(3)(p_j)} = & \frac{1}{im\Omega_{j,q}} \left\langle \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} \left(u_{B_y}^{(2)} - \frac{1}{\bar{\gamma}_q} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{B_y}^{(1)} + \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} \bar{\nu}_{z,q} u_{\gamma_q}^{(1)} E_x - \frac{1}{c} u_{\nu_{z,q}}^{(1)} E_x \right) u_{\nu_{x,q}}^{(1)} + \right. \\
& + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} \left(-u_{B_x}^{(2)} + \frac{1}{\bar{\gamma}_q} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{B_x}^{(1)} + \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} u_{\gamma_q}^{(1)} \bar{\nu}_{z,q} E_y - \frac{1}{c} u_{\nu_{z,q}}^{(1)} E_y \right) u_{\nu_{y,q}}^{(1)} + \\
& + \left(\frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c^2} \left(-u_{\nu_{z,q}}^{(1)} E_z + \frac{1}{\bar{\gamma}_q} \bar{\nu}_{z,q} u_{\gamma_q}^{(1)} E_z + \frac{1}{\bar{\gamma}_q} \bar{\nu}_{z,q} u_{\gamma_q}^{(1)} E_z \right) + k_j \frac{\partial u_{\nu_{z,q}}^{(2)}}{\partial p_j} \right) u_{\nu_{z,q}}^{(1)} + \\
& + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q^3} \left(u_{\gamma_q}^{(1)} E_z - \frac{\bar{\nu}_{z,q}^2}{c^2} u_{\gamma_q}^{(1)} E_z \right) u_{\gamma_q}^{(1)} + \\
& + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} \left(u_{B_y}^{(1)} - \frac{1}{c} \bar{\nu}_{z,q} E_x \right) u_{\nu_{x,q}}^{(2)} - \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} \left(u_{B_x}^{(1)} + \frac{1}{c} \bar{\nu}_{z,q} E_y \right) u_{\nu_{y,q}}^{(2)} + \\
& + \left. \left(2 \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c^2} \bar{\nu}_{z,q} E_z + k_j \frac{\partial u_{\nu_{z,q}}^{(1)}}{\partial p_j} \right) u_{\nu_{z,q}}^{(2)} - \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2} \left(E_z - \frac{\bar{\nu}_{z,q}^2}{c^2} E_z \right) u_{\gamma_q}^{(2)} \right\rangle_{mp_j}, \\
u_{n_q,m}^{st(3)(p_j)} = & \frac{1}{im\Omega_{j,q}} \left\langle \frac{\partial u_{n_q}^{(2)}}{\partial p_j} k_j u_{\nu_{z,q}}^{(1)} + k_3 \frac{\partial u_{\nu_{z,q}}^{(2)}}{\partial p_3} u_{n_q}^{(1)} + \right. \\
& + \left. \frac{\partial u_{n_q}^{(1)}}{\partial p_j} k_j u_{\nu_{z,q}}^{(2)} + k_3 \frac{\partial u_{\nu_{z,q}}^{(1)}}{\partial p_3} u_{n_q}^{(2)} + \bar{n}_q k_3 \frac{\partial u_{\nu_{z,q}}^{(2)}}{\partial p_3} \right\rangle_{mp_j}.
\end{aligned}$$

У цих рівняннях $D_{1,m}$ є дисперсійною функцією електромагнітної хвилі сигналу; $D_{3,m}$ – дисперсійна функція електронної хвилі ХПЗ; $\eta_1 = E_{1y,m}/(iE_{1x,m}) = \pm 1$ – знакова функція, яка характеризує напрямок обертання вектора напруженості електричного поля циркулярно поляризованої хвилі сигналу; $\eta_2 = E_{2y,m}/(iE_{2x,m}) = \pm 1$ – знакова функція, яка характеризує напрямок обертання вектора напруженості електричного поля циркулярно поляризованої хвилі накачки; індексом “ b ” характеризуємо параметри пучка, індексом “ p ” –

параметри плазми; $\omega_{H,\alpha} = eH_0 / (\bar{\gamma}_\alpha m_e c)$, $\langle \dots \rangle_{mp_j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots \exp(im p_j)) dp_j$.

Зазначимо, що вищеописані функції $u_{v_{x,q},m}^{st(3)}$, $u_{v_{y,q},m}^{st(3)}$, $u_{v_{z,q},m}^{st(3)}$, $u_{n_q,m}^{st(3)}$ отримані з $u_{v_{x,q},m}^{(3)}$, $u_{v_{y,q},m}^{(3)}$, $u_{v_{z,q},m}^{(3)}$, $u_{n_q,m}^{(3)}$ шляхом виключення з них доданків з похідними від амплітуд поля $\frac{\partial^2 E_{j,x}}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 E_{j,y}}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 E_{j,z}}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 E_{j,z}}{\partial t^2}$, які входять складовою частиною до $C_{2,m}$ та $K_{2,m}$.

Розглянемо вираз для коефіцієнту $C_{3,m}$, яки характеризує параметрично-резонансну взаємодію хвиль в досліджуваній системі в квадратичному наближенні. З аналізу $C_{3,m}$ випливає, що він пропорційний $(1 + \eta_1 \eta_2)$. Це означає, що для реалізації параметричного резонансу в необхідно, щоб електромагнітні хвилі сигналу і накачки мали однаковий напрям обертання вектора напруженості електричного поля. Тобто обертання вектора напруженості електричного поля обох хвиль повинне бути направлене або за годинниковою стрілкою, якщо дивитися уздовж вектора напруженості магнітного поля, ($\eta_1 = +1$, $\eta_2 = +1$), або проти годинникової стрілки ($\eta_1 = -1$, $\eta_2 = -1$). Інакше $C_{3,m}$ буде дорівнювати нулю. Цей висновок повністю співпадає з висновками загальної теорії по відношенню до резонансної поляризації [2, 3].

3.3. Аналіз інкрементів зростання [34-38]

Використовуючи отриману кубічно-нелінійну систему рівнянь (3.59), проведемо дослідження інкрементів зростання у супергетеродинному плазмопучковому ЛВЕ доплертронного типу на слабосигнальному етапі розвитку нелінійних процесів. Зазначимо, що для розв'язання такої задачі достатньо урахування лише квадратично-нелінійних доданків, кубічними доданками у рівняннях (3.59) у цьому випадку можна знехтувати. Таке спрощення дозволяє

отримати інкременти зростання в аналітичному вигляді, що виконано далі у цьому підрозділі.

Проведемо наступні перетворення квадратично-нелінійної системи рівнянь, що отримана з (3.59). Для цього приймемо до уваги, що у робочій області плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ реалізується ефект плазмо-пучкової нестійкості. З математичної точки зору це означає, що деякі розв'язки дисперсійного рівняння для m -ої гармоніки хвилі просторового заряду

$$D_{3,m}(\omega'_{3,m}, mk_3) = 0 \quad (3.60)$$

є комплексними. Тобто, якщо хвильове число mk_3 відоме, використовуючи (3.60), знаходимо розв'язки для частот, значення яких є комплексними

$$\omega'_{3,m} = \omega_{3,m} - i \cdot \Gamma_m, \quad (3.61)$$

де $\omega_{3,m}$ – дійсна частина комплексної частоти $\omega'_{3,m}$;

Γ_m – інкремент зростання m -ої гармоніки хвилі ХПЗ за рахунок плазмо-пучкової нестійкості.

При цьому

$$\omega_{3,m} \approx mk_3 / v_{z0} = m\omega_3. \quad (3.62)$$

Бачимо, що для дійсної частини частоти зростаючої хвилі ХПЗ закон дисперсії є лінійним. Саме ця властивість і є причиною інтенсивної параметрично-резонансної взаємодії гармонік хвиль ХПЗ між собою.

З іншого боку, в умовах параметричного резонансу (3.1), а значить, і у системі отриманих рівнянь для амплітуд поля (3.59), використовуємо дійсні значення частоти хвилі ХПЗ ω_3 (а не комплексні). Саме це приводить до того,

що в системі рівнянь для амплітуд поля (3.59) дисперсійна функція, яка залежить від дійсних значень ω_3 та k_3 , не дорівнює нулю $D_{3,m}(m\omega_3, mk_3) \neq 0$. Ця обставина є характерною для систем, в яких реалізується нестійкість (плазмо-пучкова, двопотокова та інші).

Перетворимо $D_{3,m}(m\omega_3, mk_3) \neq 0$, розклавши вираз (3.60) у ряд Тейлора в області дійсних значень $m\omega_3, mk_3$

$$0 = D_{3,m}(\omega'_{3,m}, mk_3) = D_{3,m}(m\omega_{3,m}, mk_3) + \frac{\partial D_{3,m}}{\partial(m\omega_3)}(-i\Gamma_m) + \frac{\partial^2 D_{3,m}}{2\partial(m\omega_3)^2}(-i\Gamma_m)^2 + \dots$$

Звідси знаходимо

$$D_{3,m}(m\omega_{3,m}, mk_3) = -\frac{\partial D_{3,m}}{\partial(im\omega_3)}\Gamma_m - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{3,m}}{\partial(im\omega_3)^2}(\Gamma_m)^2 + \dots = -C_{1,m}\Gamma_m - C_{2,m}\Gamma_m^2 + \dots,$$

де коефіцієнти $C_{1,m}$ та $C_{2,m}$ такі самі, що і в рівнянні (3.59);

Γ_m – інкременти зростання плазмо-пучкової нестійкості для m -ої гармоніки.

Тоді система квадратично-нелінійних рівнянь, що отримана з (3.59), з урахуванням вищесказаного прийме вигляд

$$\begin{aligned} K_{1,m} \frac{\partial E_{1x,m}}{\partial t} + D_{1,m} E_{1x,m} &= K_{3,m} E_{3z,m} E_{2x,m}, \\ K_{1,m} \frac{\partial E_{1y,m}}{\partial t} + D_{1,m} E_{1y,m} &= K_{3,m} E_{3z,m} E_{2y,m}, \\ C_{1,m} \frac{\partial E_{3z,m}}{\partial t} - (C_{1,m}\Gamma_m + C_{2,m}\Gamma_m^2) E_{3z,m} &= \\ &= C_{3,m} E_{1x,m} E_{2x,m}^* + C_{4,m} \left\langle E_z \left(\int E_z dp_3 \right) \right\rangle_{mp3} + C_{5,m} \left\langle \left(\int E_z dp_3 \right)^2 \right\rangle_{mp3}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Проаналізуємо систему (3.63). Розглянемо найбільш простий випадок, коли в плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ реалізується монохроматичний режим роботи, вищі гармоніки хвилі ХПЗ на процеси, що протікають в системі, не впливають ($N=1$). Шукаємо розв'язки у вигляді $E_{1x,1}, E_{3z,1} \sim \exp(\alpha t)$ і з системи рівнянь (3.63) отримуємо для інкременту α співвідношення

$$\left(\frac{C_{2,1}}{C_{1,1}}(\alpha^2 - \Gamma_1^2) + (\alpha - \Gamma_1) \right) \cdot \alpha = \frac{C_{3,1}K_{3,1}}{C_{1,1}K_{1,1}} \cdot |E_{2x,1}|^2 \equiv \alpha_{par}^2. \quad (3.64)$$

В отриманому виразі через α_{par} позначено інкремент зростання за рахунок трихвильового параметричного резонансу між хвилею сигналу, накачки та хвилі ХПЗ.

Вважаючи, що інкремент зростання за рахунок плазмо-пучкової нестійкості є набагато більшим за інкремент зростання за рахунок параметричної взаємодії ($\Gamma_1 \gg \alpha_{par}$) знаходимо, що

$$\alpha = \Gamma_1 \left(1 + \frac{\alpha_{par}^2}{\Gamma_1^2 (1 + 2C_{2,1}\Gamma_1 / C_{1,1})} \right). \quad (3.65)$$

З співвідношення (3.65) випливає, що за математичною структурою інкремент супергетеродинного підсилення α співпадає з інкрементом [2,3], отриманим в рамках модельної задачі (без конкретизації механізму додаткового підсилення ХПЗ).

Також бачимо, що за умови $\Gamma_1 \gg \alpha_{par}$ інкремент зростання α хвиль в системі практично співпадає з інкрементом зростання плазмо-пучкової нестійкості Γ_1 . Використовуючи відоме співвідношення для Γ_1 у випадку, коли $k_3 \bar{v}_{z,b} = \omega_p$, [58] маємо

$$\alpha \approx \Gamma_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\bar{v}_{z,b}} \left(\frac{\omega_b^2 \bar{\gamma}_b^{-3}}{2\omega_p^2} \right)^{1/3} \omega_p. \quad (3.66)$$

Найближчим фізичним аналогом досліджуваного явища є ефект супергетеродинного підсилення в двопотокових супергетеродинних ЛВЕ [2]. Для ілюстрації переваг плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ над двопотоковим супергетеродинним ЛВЕ проведемо порівняння отриманого інкременту зростання α з максимальним інкрементом зростання еквівалентної двопотокової системи Γ_2 [2]

$$\Gamma_2 = \omega_b / (2 \cdot \bar{\gamma}_b^{3/2} \bar{v}_{z,b}). \quad (3.67)$$

Під еквівалентною двопотоковою системою в даному випадку розуміємо систему, в якій парціальний електронний пучок має такі ж параметри, як і пучок у випадку плазмо-пучкової системи.

Проведемо чисельні оцінки. Вважаємо, що $\omega_p \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\omega_b \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$, $\omega_H \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 \sim 5 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$, $\gamma = 3$. Використовуючи співвідношення (3.66) і (3.67) отримуємо, що $\alpha = 0,38 \text{ см}^{-1}$, $\Gamma_2 = 0,034 \text{ см}^{-1}$. Таким чином, інкремент зростання α в досліджуваній системі є вищим (а саме вдесятеро!), ніж у випадку еквівалентної двопотокової системи (Γ_2). При цьому, частота сигналу дорівнює $\omega_1 = 1,2 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$, за умови, що частота хвилі накачки дорівнює $\omega_2 \sim 5 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. Звідси можна зробити висновок, що ми маємо унікальну можливість створення відносно слаборелятивістського джерела ($\gamma = 3$) субміліметрового діапазону при використанні НВЧ накачки дециметрового діапазону ($\lambda_2 = 40 \text{ см}$).

3.4. Вплив вищих гармонік хвиль [37-38]

Аналіз нелінійної динаміки хвильових процесів в плазмо-пучкових супергетеродинних лазерах на вільних електронах з доплертронною накачкою проводимо з використанням стандартних чисельних методів. Розглядаємо плазмо-пучковий супергетеродинний ЛВЕ, параметри якого подані у таблиці 3.1. Параметри ЛВЕ підбираємо так, щоб хвиля ХПЗ мала максимальний інкремент зростання за рахунок плазмо-пучковою нестійкості. Приймаємо, що хвильове число першої гармоніки хвилі ХПЗ $k_3 = \omega_p / v_b = 38,5 \text{ см}^{-1}$. В цьому випадку довжина хвилі сигналу у вакуумі буде дорівнювати 1,8 мм, довжина хвилі накачки у вакуумі – 6,61 см. Обмежуємося вивченням моделі з монохроматичною хвилею накачки. Розрахунки проводимо для двох випадків. В одному випадку враховуються тільки перші гармоніки хвиль, що взаємодіють; в іншому – десять гармонік.

Таблиця 3.1

Параметри плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ доплертронного типу

Параметри	Значення
Довжина хвилі сигналу	1,8 мм
Ленгмюрівська частота плазми (ω_p)	$1,0 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$
Ленгмюрівська частота пучка (ω_b)	$2,0 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$
Значення релятивістського фактору пучка (γ_b)	2,0
Напруженість поздовжнього магнітного поля (H_0)	$2,8 \cdot 10^3 \text{ Э}$
Довжина хвилі накачки	6,61 см
Амплітуда напруженості 1-ої гармоніки електричного поля хвилі накачки	$2,0 \cdot 10^5 \text{ В/м}$

Спочатку проведемо аналіз впливу взаємодії вищих гармонік на динаміку хвиль у мультигармонічному супергетеродинному ЛВЕ. Ця взаємодія суттєво впливає на динаміку хвиль, не тільки коли амплітуди хвиль близькі до насичення, але навіть і у слабосигнальному наближенні, що описується системою рівнянь (3.63). У цьому підрозділі розглянемо саме слабосигнальний випадок, у наступному – вплив вищих гармонік на процеси насичення у плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ.

З аналізу структури рівнянь (3.63) бачимо, що врахування мультигармонічної взаємодії хвиль з математичної точки зору приводить до того, що в останньому з цих рівнянь з'являються доданки з коефіцієнтами $C_{4,m}$ та $C_{5,m}$. Врахування цих доданків кардинально впливає на характер взаємодії хвиль у плазмо-пучковому ЛВЕ з доплертронною накачкою. Це твердження ілюструють рис. 3.2 та 3.3.

На рис. 3.2 зображено залежності амплітуд перших 5-ти гармонік хвиль напруженості електричного поля хвилі ХПЗ $E_{3,m} = |E_{3z,m}|$ від нормованого часу $\tau = \delta\omega \cdot t$, де $\delta\omega = \Gamma_1 \cdot v_{b,z}$ (Γ_1 є інкрементом зростання плазмо-пучкової нестійкості і визначається формулою (3.66)). Залежність 2 на цьому рисунку отримана у результаті розрахунків, в яких враховано взаємодію тільки перших гармонік хвиль. Залежність 1 представляє результат розрахунку, у яких враховано вплив перших десяти гармонік хвиль, що беруть участь в нелінійному процесі взаємодії. Тут також представлено динаміку 2-ої ($m=2$), 3-ої ($m=3$), 4-ої ($m=4$) та 5-ої ($m=5$) гармонік ХПЗ. Бачимо, що в досліджуваній плазмо-пучковій системі генеруються вищі гармоніки, які мають сумірні амплітуди з основною гармонікою. Також мультигармонічний взаємодія вищих гармонік кардинально впливає на динаміку першої гармоніки: приводить не тільки до зменшення темпів її зростання, а і до появи насичення у квадратичному наближенні (залежність 1).

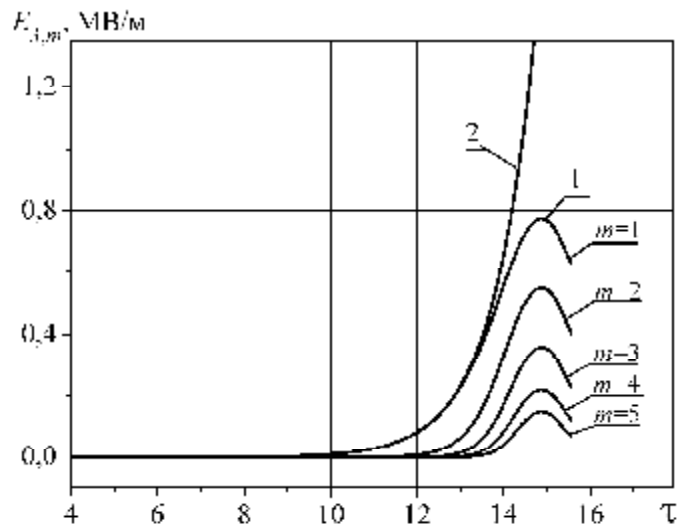


Рис. 3.2. Залежність амплітуд гармонік напруженості електричного поля ХПЗ $E_{3,m}$ від нормованого часу $\tau = (\delta\omega) \cdot t$

Аналогічний вплив мультигармонічної взаємодії спостерігаємо і на першу гармоніку хвилі сигналу. Так на рис. 3.3 зображено залежність амплітуди першої гармоніки хвилі сигналу $E_{1,1}$ від нормованого часу $\tau = (\delta\omega) \cdot t$. Залежність 1 на цьому рисунку отримана у результаті розрахунків, у яких враховано вплив перших десяти гармонік хвиль, що беруть участь в нелінійному процесі взаємодії. Залежність 2 представляє результат розрахунку,

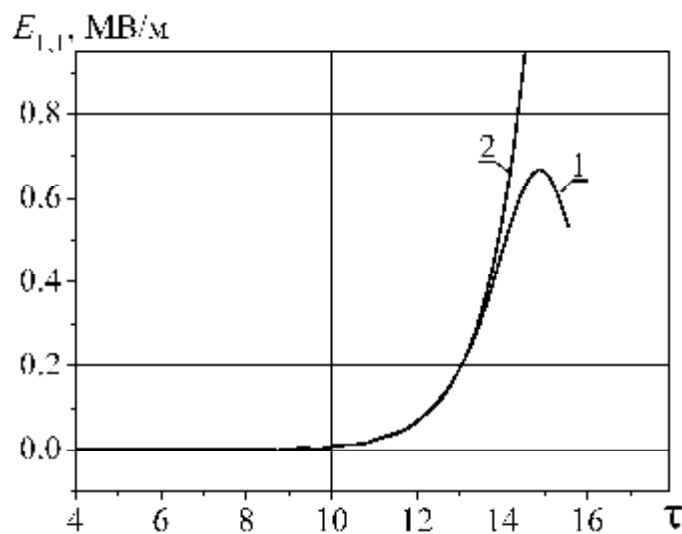


Рис. 3.3. Залежність амплітуди першої гармоніки хвилі сигналу $E_{1,1}$ від нормованого часу $\tau = (\delta\omega) \cdot t$

в якому враховано взаємодію тільки перших гармонік хвиль. Бачимо, що і тут врахування мультигармонічної взаємодії приводить до зміни динаміки хвилі сигналу: має місце зменшення темпів зростання аж до появи насичення у цьому наближенні.

Таким чином, врахування вищих гармонік є необхідним навіть при побудові слабосигнального наближення.

3.5. Рівні та механізми насичення [37-38]

Проаналізуємо рівні насичення та вплив на них параметрично резонансних взаємодій вищих гармонік. Дослідження проводимо з використанням стандартних чисельних методів на базі самоузгодженої системи кубічно-нелінійних рівнянь (3.59). Розглядаємо плазмо-пучковий супергетеродинний ЛВЕ, параметри якого подані у таблиці 3.1.

На рис. 3.4 зображена залежність амплітуди першої гармоніки хвилі сигналу $E_{1,1} = \sqrt{|E_{1x,1}|^2 + |E_{1y,1}|^2}$ від нормованого часу $\tau = (\delta\omega) \cdot t$, де $\delta\omega$ інкремент зростання плазмо-пучкової нестійкості (3.66). Залежність 1 на цьому рисунку отримана в результаті розрахунків, в яких врахований вплив перших десяти гармонік хвиль, що беруть участь в нелінійному процесі взаємодії. Залежність 2 представляє результат розрахунку, в якому врахована взаємодія тільки перших гармонік хвиль.

Аналізуючи рівень насичення хвилі сигналу в рамках кубічно-нелінійної теорії (рис. 3.4 залежність 1) неважко з'ясувати, що потужність електромагнітної хвилі в досліджуваній моделі плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ дорівнює 7,5 МВт, а коефіцієнт корисної дії – 32%. Потрібно звернути увагу, що при цьому використовувався електронний пучок з помірними параметрами для такого класу пристроїв ($\omega_b = 2 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$, $\gamma_b = 2$, сила струму 37 А). Зрозуміло, що використовуючи більш інтенсивні електронні пучки, наприклад кілоамперні, ми отримаємо суттєве збільшення вихідної

потужності електромагнітної хвилі. Таким чином, можна стверджувати, що плазмо-пучкові супергетеродинні ЛВЕ доплертронного типу здатні формувати інтенсивне електромагнітне випромінювання в міліметровому діапазоні довжин хвиль і тому є перспективними для створення нового типу потужних підсилювачів і генераторів цього діапазону.

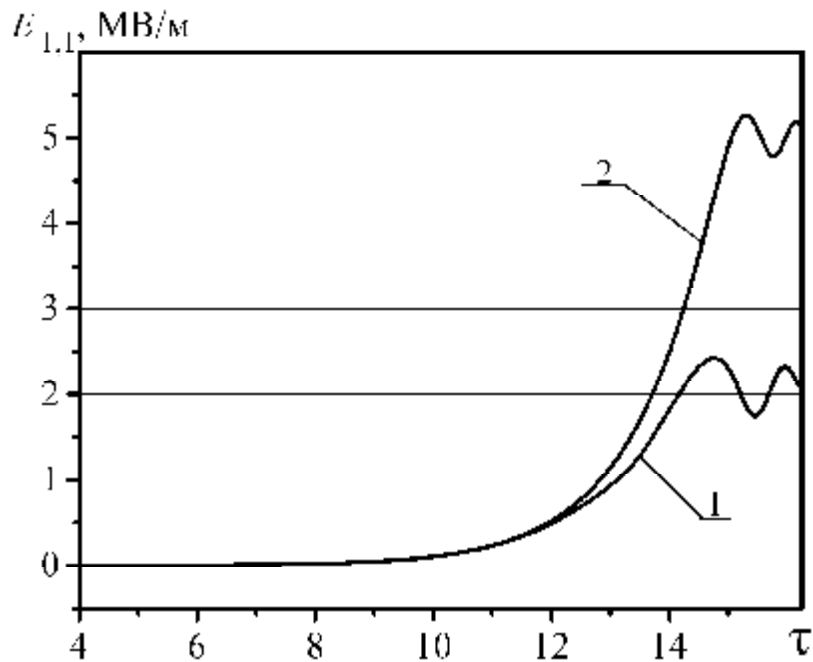


Рис. 3.4. Залежність амплітуди першої гармоніки хвилі сигналу від нормованого часу $\tau = \delta\omega \cdot t$

Порівнюючи залежності 1 та 2 на рис. 3.4 отримані з урахуванням (залежність 1) і без урахування впливу вищих гармонік хвиль (залежність 2) бачимо, що вплив вищих гармонік хвиль приводить до зменшення рівня насичення більш ніж в два рази. Останнє свідчить про те, що вищі гармоніки в нелінійних процесах в плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ відіграють важливу роль. Відповідно, урахування їх впливу в моделях обговорюваного типу є необхідним. Розглянемо цей вплив більш детально.

Як показують результати чисельного аналізу, вищі гармоніки в спектрі хвилі сигналу практично відсутні. Це, перш за все, можна пояснити особливостями моделі, що вивчається, де накачка вибрана строго монохроматичною. Також з даного спостереження можна зробити висновок про

те, що, принаймні, в кубічно-нелінійному наближенні процес супергетеродинної трансформації підсилення з поздовжньої хвилі просторового заряду (ХПЗ) в хвилю сигналу носить монохроматичний характер.

І це при тому, що сама ХПЗ, як показує аналіз, виявляється істотно мультигармонічною. Це наочно ілюструє рис. 3.5, де представлені залежності амплітуд перших гармонік напруженості електричного поля ХПЗ $E_{3,1} = |E_{3z,1}|$ від нормованого часу τ . Залежність 1 відповідає випадку, коли в розрахунках враховувався вплив наступних 9 вищих гармонік ХПЗ, залежність 2 - коли в розрахунках враховувалася тільки перша гармоніка ХПЗ. Бачимо, що рівень насичення першої гармоніки напруженості електричного поля хвилі ХПЗ при врахуванні впливу вищих гармонік зменшується приблизно на 25%.

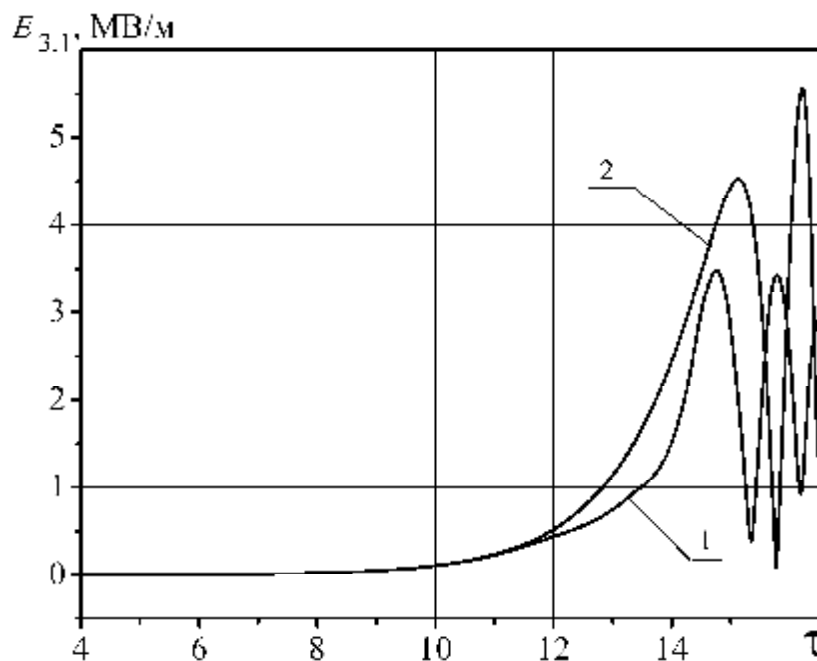


Рис. 3.5. Залежність амплітуди першої гармоніки напруженості електричного поля ХПЗ від нормованого часу $\tau = \delta\omega \cdot t$

Як вже згадувалося вище, збудження великого числа вищих гармонік ХПЗ у плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ пояснюється тим, що дисперсійна крива для хвилі ХПЗ (з якою здійснюється параметрична взаємодія

хвиль) є близькою до лінійної (рис. 3.6, залежність 1). Тому між гармоніками хвилі ХПЗ здійснюється достатньо інтенсивна параметрично-резонансна взаємодія. В результаті цього, не дивлячись на те, що рівень вищих гармонік при вибраному поєднанні параметрів виявляється помітно нижче за першу гармоніку, їх сукупний вплив на першу гармоніку призводить до зниження її рівня.

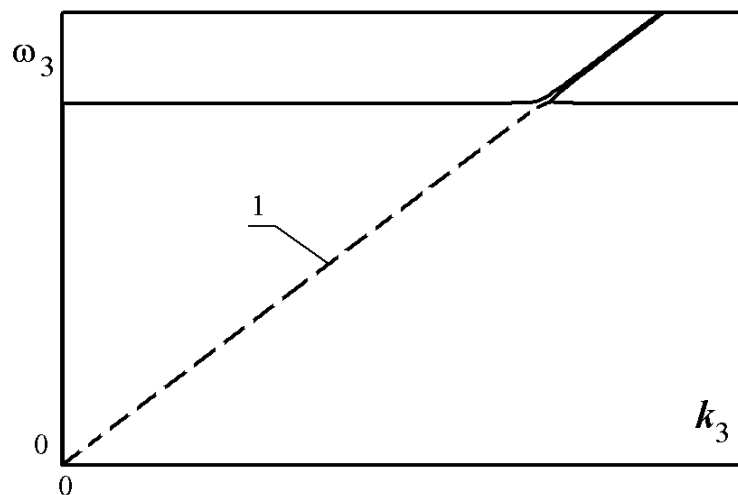


Рис. 3.6. Дисперсійні залежності для хвилі ХПЗ

Слід сказати, що при зміні співвідношення параметрів системи можливе істотне підвищення рівня вищих гармонік. Наприклад, при збільшенні плазмової частоти пучка вдесятеро амплітуди вищих гармоніки ХПЗ стають набагато інтенсивнішими. Більш того, можливі ситуації, коли амплітуди вищих гармонік виявляються навіть вищі за амплітуди першої гармоніки.

З'ясуємо тепер механізми насичення хвиль в плазмо-пучкових супергетеродинних лазерах на вільних електронах доплертронного типу. Для цього розглянемо поведінку амплітуди першої гармоніки концентрації плазми $n_{p3,1}$ (рис. 3.7, залежність 1), яка нормована на постійну складову концентрації електронів плазми, і амплітуди першої гармоніки хвилі концентрації пучка $n_{b3,1}$ (рис. 3.7, залежність 2), яка нормована на постійну складову концентрації електронів пучка, від нормованого часу $\tau = \delta\omega \cdot t$. На початковому етапі має

місце експоненціальне наростання обох амплітуд. Потім відбувається їх нелінійна стабілізація. При цьому амплітуда 1-ої гармоніки концентрації плазми здійснює регулярні коливання. Ці коливання обумовлені захопленням електронів пучка полем плазмової хвилі. Захоплення стає можливим завдяки, з одного боку, зниженню швидкості пучка електронів до швидкості близької до фазової швидкості плазмової хвилі, а з іншого боку, істотному збільшенню

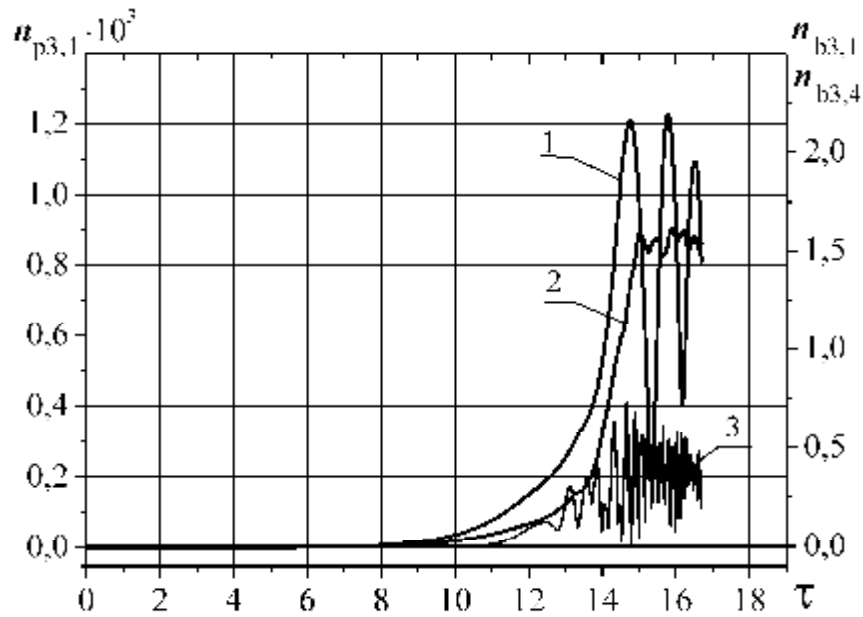


Рис. 3.7. Залежність амплітуди першої гармоніки концентрації електронів плазми $n_{p3,1}$ (залежність 1) нормованої на постійну складову концентрації електронів плазми, амплітуд першої $n_{b3,1}$ (залежність 2) і четвертою $n_{b3,4}$ (залежність 3) гармонік хвилі концентрації пучка нормованих на постійну складову концентрації електронів пучка від нормованого часу $\tau = \delta\omega \cdot t$

інтенсивності плазмової хвилі. В результаті захоплення електрони пучка формуються в згустки, які коливаються в межах квазіпотенціальної ями плазмової хвилі. Ці згустки то віддають плазмовій хвилі енергію, то відбирають назад. Характерною особливістю цього процесу – за одне коливання плазмової хвилі згустки двічі стикаються з краями квазіпотенціальної ями. Це приводить

до того, що осциляції амплітуди $n_{b3,1}$ відбуваються удвічі частіше за осциляції амплітуди плазмової хвилі $n_{p3,1}$ (рис. 3.7, залежності 1 та 2). При цьому рівень модуляції електронного пучка виявляється приблизно рівним одиниці. Таким чином, в даному випадку має місце повна модуляція пучка.

Аналізуючи поведінку вищих гармонік, можна знайти, що в даній системі, крім процесів типу захоплення, реалізуються також процеси типу нелінійного зсуву частоти [2, 58]. Так, крива 3 на рис. 3.7 представляє залежність амплітуди четвертої гармоніки хвилі концентрації пучка $n_{b3,4}$, яка нормована на постійну складову концентрації електронів пучка, від нормованого часу τ . Бачимо, що тут процеси насичення починаються до початку захоплення електронів пучка. Ці процеси насичення пов'язані з ефектом гальмування електронного пучка, як цілого, під дією пондеромоторного потенціалу. Останнє приводить до захоплення електронів в ямах потенційного рельєфу. Цікаво відзначити, що, як показав аналіз, на відміну від «звичайних» (параметричних) ЛВЕ, тут головний внесок до формування потенційного рельєфу вносять плазмові хвилі плазмо-пучкової нестійкості, як найбільш інтенсивні.

Аналогічні дослідження плазмо-пучкових систем [58-63] показують, що насичення плазмо-пучкової нестійкості обумовлене саме процесами, описаними вище. Тому (а також враховуючи вищесказане) можна стверджувати, що насичення підсилення в даній моделі плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ відбувається, перш за все, із-за насичення самої плазмо-пучкової нестійкості. При цьому, поведінка хвилі сигналу, як впливає із зіставлення відповідних графіків, повністю визначається динамікою хвилі просторового заряду.

3.6. Висновки до розділу 3

1. Вперше побудована самоузгоджена мультигармонічна кубічно-нелінійна теорія плазмо-пучкових супергетеродинних лазерів на вільних електронах з доплертронною накачкою, де у якості накачки використовується незвичайна електромагнітна хвиля, що розповсюджується в плазмо-пучковій системі, назустріч електронному пучку.

2. Вперше знайдені аналітичні вирази для інкрементів зростання хвиль. Показано, що плазмо-пучкові супергетеродинні ЛВЕ з доплертронною накачкою мають суттєво більші інкременти зростання, ніж еквівалентні двопотокові супергетеродинні ЛВЕ (більш ніж у 10 разів).

3. Проведено аналіз впливу параметрично-резонансних взаємодій вищих гармонік. Показано, що мультигармонічна взаємодія хвиль приводить до якісної зміни динаміки основних гармонік навіть у квадратичному наближенні: має місце не тільки зменшення темпів зростання, а і з'являється насичення амплітуд гармонік.

4. На основі аналізу механізмів насичення плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ встановлено, що механізми насичення цих пристроїв пов'язані з нелінійним зміщенням частоти і захопленням плазмовою хвилею електронів пучка.

5. Максимальна потужність електромагнітної хвилі в досліджуваній моделі ЛВЕ дорівнює 7,5 МВт при досить помірних параметрах для такого класу пристроїв ($\omega_b = 2 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$, $\gamma_b = 2$, сила струму 37 А). Це означає, що плазмо-пучкові супергетеродинні ЛВЕ доплертронного типу здатні формувати інтенсивне електромагнітне випромінювання в міліметровому діапазоні довжин хвиль і тому є перспективними для створення нового типу потужних підсилювачів і генераторів цього діапазону.

РОЗДІЛ 4

МУЛЬТИГАРМОНІЧНА НЕЛІНІЙНА ТЕОРІЯ ПЛАЗМО- ПУЧКОВОГО СУПЕРГЕТЕРОДИННОГО ЛАЗЕРА НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ З Н-УБІТРОННОЮ НАКАЧКОЮ

У розділі побудована нелінійна самоузгоджена мультигармонічна кубічно-нелінійна теорія плазмо-пучкового супергетеродинного лазера на вільних електронах з Н-убітронною накачкою. З'ясовано, що такі пристрої мають чотири різні режими роботи. Одні режими дозволяють підсилювати сигнали, які мають високий ступінь монохроматичності. Інші режими дозволяють формувати сигнал з досить широким мультигармонічним спектром сигналу. Проведено оцінку інкрементів зростання хвиль у таких приладах. Визначено, що досліджувані системи мають суттєво більші інкременти зростання, ніж еквівалентні двопотокові супергетеродинні ЛВЕ. Проаналізовано механізми та рівні насичення. Зроблено висновок, що плазмо-пучкові супергетеродинні лазери на вільних електронах з Н-убітронною накачкою є джерелами потужного мультигармонічного електромагнітного випромінювання в міліметровому-субміліметровому діапазоні.

4.1. Вихідні рівняння [39-43]

Модель. Модель плазмо-пучкового супергетеродинного лазера на вільних електронах з Н-убітронною накачкою представлена на рис. 4.1. Електронний релятивістський пучок 1 з ленгмюрівською частотою ω_b проходить через плазму 2, ленгмюрівська частота якої ω_p . Плазмо-пучкова система розміщена в поздовжньому фокусувальному магнітному полі з напруженістю H_0 . В якості накачки використовуємо спіральний магнітний ондулятор 3, який характеризується періодом ондуляції $\Lambda = 2\pi/k_2$ і

напруженістю магнітного поля H_2 . На вхід системи також подаємо електромагнітний сигнал з частотою ω_1 і хвильовим числом k_1 . Хвиля просторового заряду з частотою ω_3 і хвильовим числом k_3 збуджується в плазмо-пучковій системі у результаті параметричного резонансу електромагнітної хвилі сигналу $\{\omega_1, \vec{k}_1\}$ та магнітного поля ондулятора $\{k_2\}$.

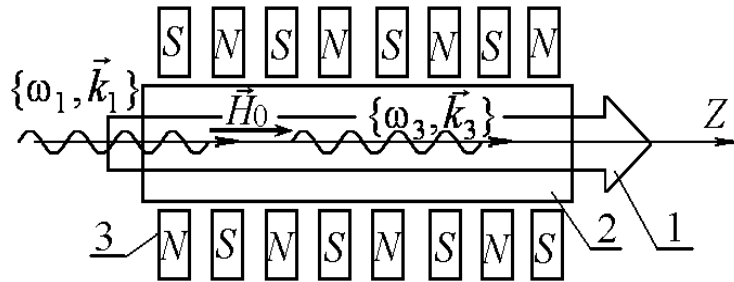


Рис. 4.1. Схема плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ з Н-убітронною накачкою

Для частот і хвильових чисел хвиль сигналу, ХПЗ і магнітного поля накачки виконується умова параметричного резонансу:

$$p_3 = p_1 + p_2 \text{ або } \omega_3 = \omega_1, k_3 = k_1 + k_2, \quad (4.1)$$

де $p_1 = \omega_1 t - k_1 z$ – фаза електромагнітної хвилі сигналу,

$p_2 = -k_2 z$ – фаза Н-убітронного поля;

$p_3 = \omega_3 t - k_3 z$ – фаза електронної хвилі ХПЗ.

Параметри системи вибираємо так, що б хвиля ХПЗ $\{\omega_3, k_3\}$ характеризувалася максимальним інкрементом зростання внаслідок реалізації плазмо-пучкової нестійкості. Завдяки цьому підсилення хвиль в досліджуваному лазері на вільних електронах відбувається за рахунок двох механізмів: ефекту плазмо-пучкової нестійкості та трихвильовому параметричному резонансу електромагнітної хвилі сигналу, хвилі ХПЗ і

Н-убітронного поля накачки. Як показують оцінки, інкременти зростання за рахунок за рахунок плазмо-пучкової нестійкості на декілька порядків є більшими за інкременти зростання, що характеризують параметричний резонанс хвиль. Тому роль параметричного резонансної взаємодії за участю Н-убітронного магнітного поля полягає у перетворенні енергії повздовжніх хвиль в енергію поперечних електромагнітних хвиль. В такій системі підсилення відбувається за рахунок додаткового механізму підсилення, що пов'язаний з плазмо-пучковою нестійкістю. У цьому полягає сутність роботи плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ Н-убітронного типу.

Щоб врахувати мультигармонічні особливості досліджуваного лазеру на вільних електронах електричні $\dot{\mathbf{E}}$ та магнітні $\dot{\mathbf{B}}$ компоненти полів записуємо у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \sum_{m=1}^N [(E_{1x,m} \mathbf{e}_x + E_{1y,m} \mathbf{e}_y) e^{imp_1} + \text{к.с.}], \quad \mathbf{B}_1 = \sum_{m=1}^N [(B_{1x,m} \mathbf{e}_x + B_{1y,m} \mathbf{e}_y) e^{imp_1} + \text{к.с.}], \\ \mathbf{B}_2 &= \sum_{m=1}^N [(B_{2x,m} \mathbf{e}_x + B_{2y,m} \mathbf{e}_y) e^{imp_2} + \text{к.с.}], \\ \mathbf{E}_3 &= \sum_{m=1}^N [E_{3z,m} e^{imp_3} + \text{к.с.}] \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де N – кількість гармонік, які враховуємо при розрахунках;

m – номер відповідної гармоніки.

Індекс «1» відповідає визначає величини, що характеризують електромагнітну хвилю сигналу, індекс «2» – Н-убітронне магнітне поле накачки, «3» – хвиля просторового заряду. Результуючі електричне та магнітне поля, в робочій області досліджуваної системи подамо у вигляді

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\mathbf{E}}_3; \quad \dot{\mathbf{B}} = \dot{\mathbf{B}}_1 + \dot{\mathbf{B}}_2. \quad (4.3)$$

Вихідні рівняння. У якості вихідних рівнянь використовуємо релятивістське квазігідродинамічне рівняння [2,58]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_q \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{v}{\gamma_q^2} \right) \mathbf{v}_q = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left\{ E + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_q \mathbf{B}] - \frac{\mathbf{v}_q}{c^2} (\mathbf{v}_q E) \right\} - \frac{v_T^2}{n_q \gamma_q} \left[\frac{\partial n_q}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\mathbf{v}_q}{c^2} \left(\mathbf{v}_q \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) n_q \right], \quad (4.4)$$

рівняння неперервності

$$\frac{\partial n_q}{\partial t} + \frac{\partial (n_q \mathbf{v}_q)}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (4.5)$$

та рівняння Максвелла

$$\text{rot}(\mathbf{B}) = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_q (en_q \mathbf{v}_q), \quad \text{rot}(E) = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (4.6)$$

У цих рівняннях індекс q приймає значення 1 для електронів пучка та 2 для електронів плазми; \mathbf{v}_q – вектор швидкості; v – частота зіткнення; γ_q – релятивістський фактор; n_q – концентрація частинок; v_T – середньоквадратична швидкість теплового руху частинок. Прийmemo до уваги, що маса іонів плазми набагато більша за масу електронів. Тому швидкість електронів набагато більша за швидкість іонів. Це дозволяє вважати іони плазми нерухомими.

Як і у випадку моделі з доплертронною накачкою у плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ з Н-убітронною накачкою використовуємо релятивістські електронні пучки з відносним енергетичним розкидом $\sim 10^{-4}$.

Тому тепловим розкидом електронів тут можемо знехтувати і прийняти, що швидкість теплового руху частинок дорівнює нулю ($v_T=0$).

Для плазмо-пучкових супергетеродинних лазерів на вільних електронах ленгмюрівська частота релятивістського електронного пучка ω_b є набагато меншою за ленгмюрівську частоту плазми ω_p . Тому частота зіткнень ν , яка визначається зіткненнями між електронами пучка та іонами плазми (див., наприклад, [175]), є набагато меншою за плазмову частоту ω_p . Для плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ с Н-убітронною накачкою, частота хвиль, перша гармоніка яких дорівнює ω_p , є набагато більшою за частоту зіткнень. В цьому випадку зіткненням частинок можна знехтувати (див., наприклад, [59, 175]) і прийняти $\nu=0$.

В експериментальних роботах з плазмо-пучковими системи використовують пучки, сила струму яких, як правило, дорівнює 0,1...15 кА, радіус яких складає приблизно 1,5 см [59]. Довжина хвилі першої гармоніки досліджуваного пристрою, як буде показано далі, дорівнює 1,8 мм. Тобто у плазмо-пучковому ЛВЕ є типовою ситуація, коли поперечні розміри системи є набагато більшими за довжини хвиль, які в цій системі розповсюджуються. У цьому випадку поперечною обмеженість пучка можна знехтувати і досліджувану систему в поперечній площині можемо вважати однорідною.

Таким чином з урахуванням вище обговорених припущень для "холодного" та поперечно однорідного релятивістського електронного пучка квазігідродинамічне рівняння для досліджуваної систем в проекціях на вісі координат може бути записано у наступній формі:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{z,q} \frac{\partial}{\partial z} \right) v_{x,q} = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_x + \frac{1}{c} (v_{y,q} B_z - v_{z,q} B_y) - \frac{v_{x,q}}{c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \right), \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{z,q} \frac{\partial}{\partial z} \right) v_{y,q} = \\ & = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_y - \frac{1}{c} (v_{x,q} B_z - v_{z,q} B_x) - \frac{v_{y,q}}{c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{z,q} \frac{\partial}{\partial z} \right) v_{z,q} = \\ & = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_z + \frac{1}{c} (v_{x,q} B_y - v_{y,q} B_x) - \frac{v_{z,q}}{c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Рівняння (4.5) – (4.9) описують фізичні процеси в плазмі-пучковому супергетеродинному ЛВЕ з Н-убітронною накачкою. Щоб їх розв'язати, використаємо метод усереднених характеристик та модернізований метод повільно змінних амплітуд.

4.2. Кубічно-нелінійні вкорочені рівняння [39-43]

Як відомо, загальну самоузгоджену задачу про підсилення електромагнітної хвилі у плазмі-пучковій системі можна розбити на три етапи: задачу руху, розв'язок рівняння неперервності та польову задачу. Знайдемо самоузгоджені розв'язки, які б узгоджено задовольняли усі вище вказані задачі.

Розв'язок задачі руху. Для знаходження розв'язку задачі руху електронів пучка і плазми застосовуємо описаний у розділі 2 метод усереднених характеристик. Згідно із загальною процедурою методу усереднених характеристик, на першому етапі даної обчислювальної процедури записуємо характеристики вихідних рівнянь (4.7) – (4.9):

$$\frac{dv_{x,q}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_x + \frac{1}{c} (v_{y,q} B_z - v_{z,q} B_y) - \frac{v_{x,q}}{c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \right), \quad (4.10)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{y,q}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_y - \frac{1}{c} (\mathbf{v}_{x,q} B_z - \mathbf{v}_{z,q} B_x) - \frac{\mathbf{v}_{y,q}}{c^2} (\mathbf{v}_{x,q} E_x + \mathbf{v}_{y,q} E_y + \mathbf{v}_{z,q} E_z) \right), \quad (4.11)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{z,q}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_z + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_{x,q} B_y - \mathbf{v}_{y,q} B_x) - \frac{\mathbf{v}_{z,q}}{c^2} (\mathbf{v}_{x,q} E_x + \mathbf{v}_{y,q} E_y + \mathbf{v}_{z,q} E_z) \right). \quad (4.12)$$

У рівняннях (4.10) – (4.12) фази коливань $p_{1,q}, p_{2,q}, p_{3,q}$ вважаємо параметрами, зміна яких визначається співвідношеннями:

$$\frac{dp_{1,q}}{dt} = \omega_1 - k_1 \mathbf{v}_{z,q} = \Omega_{1,q}, \quad \frac{dp_{2,q}}{dt} = -k_2 \mathbf{v}_{z,q} = \Omega_{2,q}, \quad \frac{dp_{3,q}}{dt} = \omega_3 - k_3 \mathbf{v}_{z,q} = \Omega_{3,q}. \quad (4.13)$$

Доповнимо систему (4.10) – (4.12) рівнянням для релятивістського фактору:

$$\frac{d\gamma_q}{dt} = \frac{e}{m_e c^2} (\mathbf{v}_{x,q} E_x + \mathbf{v}_{y,q} E_y + \mathbf{v}_{z,q} E_z). \quad (4.14)$$

Будемо формально вважати релятивістський фактор та компоненти вектора швидкості незалежними змінними.

Далі у відповідності з методом усереднених характеристик проводимо класифікацію змінних на швидкі та повільні. Для цього формуємо ряд великих параметрів задачі (3.17), вводимо поняття повільного часу (3.18) і отримуємо $x = \{\mathbf{v}_{x,q}, \mathbf{v}_{y,q}, \mathbf{v}_{z,q}, \gamma_q, \tau\}$ – вектор повільних змінних, $p = \{p_1, p_2, p_3\}$ – вектор швидких змінних.

Систему рівнянь (4.10)-(4.14) подамо стандартному вигляді:

$$\frac{d\mathbf{v}_{x,q}}{dt} = \frac{1}{\xi} X^{\mathbf{v}_{x,q}}, \quad \frac{d\mathbf{v}_{y,q}}{dt} = \frac{1}{\xi} X^{\mathbf{v}_{y,q}}, \quad \frac{d\mathbf{v}_{z,q}}{dt} = \frac{1}{\xi} X^{\mathbf{v}_{z,q}}, \quad \frac{d\gamma_q}{dt} = \frac{1}{\xi} X^{\gamma_q}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\xi} X^{\tau},$$

$$\frac{dp_{1,q}}{dt} = \Omega_{1,q} + \frac{1}{\xi} Y_1, \quad \frac{dp_{2,q}}{dt} = \Omega_{2,q} + \frac{1}{\xi} Y_2, \quad \frac{dp_{3,q}}{dt} = \Omega_{3,q} + \frac{1}{\xi} Y_3. \quad (4.15)$$

У рівняннях (4.15) позначено

$$\frac{1}{\xi} X^{v_{x,q}} \equiv \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_x + \frac{1}{c} (v_{y,q} B_z - v_{z,q} B_y) - \frac{v_{x,q}}{c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \right),$$

$$\frac{1}{\xi} X^{v_{y,q}} \equiv \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_y - \frac{1}{c} (v_{x,q} B_z - v_{z,q} B_x) - \frac{v_{y,q}}{c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \right),$$

$$\frac{1}{\xi} X^{v_{z,q}} \equiv \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(E_z + \frac{1}{c} (v_{x,q} B_y - v_{y,q} B_x) - \frac{v_{z,q}}{c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z) \right),$$

$$\frac{1}{\xi} X^{\gamma_q} \equiv \frac{e}{m_e c^2} (v_{x,q} E_x + v_{y,q} E_y + v_{z,q} E_z), \quad \frac{1}{\xi} X^\tau \equiv \frac{1}{\xi},$$

$$\Omega_{1,q} = \omega_1 - k_1 v_{z,q}, \quad \Omega_{2,q} = \omega_2 + k_2 v_{z,q}, \quad \Omega_{3,q} = \omega_3 - k_3 v_{z,q},$$

$$\frac{1}{\xi} Y_1 = \frac{1}{\xi} Y_2 = \frac{1}{\xi} Y_3 = 0.$$

У відповідності з загальною процедурою [1] розв'язок будемо шукати в вигляді (3.20), тобто суми повільно змінної величини (\bar{x}) та осциляторних функцій відповідного порядку малості ($u_x^{(n)}/\xi^n$). Динаміка повільно змінних величин описується рівняннями (3.21), де $\bar{\Omega}_{1,q}(\bar{v}_{z,q}) = \omega_1 - k_1 \bar{v}_{z,q}$, $\bar{\Omega}_{2,q}(\bar{v}_{z,q}) = -k_2 \bar{v}_{z,q}$, $\bar{\Omega}_{3,q}(\bar{v}_{z,q}) = \omega_3 - k_3 \bar{v}_{z,q}$.

Проведемо розрахунки для першого наближення, тобто коли порядок малості дорівнює $1/\xi$, використовуючи стандартну схему (3.22).

Визначимо функції $A_i^{(1)}$ та $B^{(1)}$:

$$A_{v_{x,q}}^{(1)} = \langle X^{v_{x,q}} \rangle = 0, \quad A_{v_{y,q}}^{(1)} = \langle X^{v_{y,q}} \rangle = 0,$$

$$A_{\nu_{z,q}}^{(1)} = \langle X^{\nu_{z,q}} \rangle = 0, \quad A_{\gamma_q}^{(1)} = \langle X^{\gamma_q} \rangle = 0, \quad A_{\tau}^{(1)} = \langle X^{\tau} \rangle = \frac{1}{\xi}, \quad (4.16)$$

$$B_{p_{1,q}}^{(1)} = \left\langle \left(\frac{\partial \Omega_{p_{1,q}}}{\partial x_i} u_i^{(1)} \right) \right\rangle = 0, \quad B_{p_{2,q}}^{(1)} = \left\langle \left(\frac{\partial \Omega_{p_{2,q}}}{\partial x_i} u_i^{(1)} \right) \right\rangle = 0,$$

$$B_{p_{3,q}}^{(1)} = \left\langle \left(\frac{\partial \Omega_{p_{3,q}}}{\partial x_i} u_i^{(1)} \right) \right\rangle = 0,$$

$$\text{де } \langle \dots \rangle = \frac{1}{T_1 T_2 T_3} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_0^{T_3} \dots d\bar{p}_1 d\bar{p}_2 d\bar{p}_3.$$

Розв'язуючи рівняння (3.22) і використовуючи (4.16) знаходимо осциляторні функції першого наближення:

$$\begin{aligned} u_{\nu_{x,q},m}^{(1)} &= u_{\nu_{x,q},m}^{(1)(\bar{p}_1)} e^{im\bar{p}_1} + u_{\nu_{x,q},m}^{(1)(\bar{p}_2)} e^{im\bar{p}_2} + \text{к.с.}, \\ u_{\nu_{x,q},m}^{(1)(\bar{p}_1)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{\bar{\Omega}_{1,q}}{\omega_1} \right) \left(im\bar{\Omega}_{1,q} E_{1x,m} + \omega_{H,q} E_{1y,m} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\bar{\Omega}_{1,q})^2 \right), \\ u_{\nu_{x,q},m}^{(1)(\bar{p}_2)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{\bar{\nu}_{z,q}}{c} \right) \left(-im\bar{\Omega}_{2,q} B_{2y,m} + \omega_{H,q} B_{2x,m} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\bar{\Omega}_{2,q})^2 \right), \\ u_{\nu_{y,q},m}^{(1)} &= u_{\nu_{y,q},m}^{(1)(\bar{p}_1)} e^{im\bar{p}_1} + u_{\nu_{y,q},m}^{(1)(\bar{p}_2)} e^{im\bar{p}_2} + \text{к.с.}, \\ u_{\nu_{y,q},m}^{(1)(\bar{p}_1)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{\bar{\Omega}_{1,q}}{\omega_1} \right) \left(im\bar{\Omega}_{1,q} E_{1y,m} - \omega_{H,q} E_{1x,m} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\bar{\Omega}_{1,q})^2 \right), \\ u_{\nu_{y,q},m}^{(1)(\bar{p}_2)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{\bar{\nu}_{z,q}}{c} \right) \left(im\bar{\Omega}_{2,q} B_{2x,m} + \omega_{H,q} B_{2y,m} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\bar{\Omega}_{2,q})^2 \right), \\ u_{\nu_{z,q},m}^{(1)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \bar{\Omega}_{3,q}} \frac{E_{3z,m}}{im} e^{im\bar{p}_3} + \text{к.с.}, \quad u_{\gamma_q,m}^{(1)} = \frac{e \bar{\nu}_{z,q}}{m_e c^2 \bar{\Omega}_{3,q}} \frac{E_{3z,m}}{im} e^{im\bar{p}_3} + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$u_{\tau,m}^{(1)} = 0, \quad v_{p_{1,q}}^{(1)} = \frac{ek_1}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \bar{\Omega}_{3,q}^2 m^2} E_{3z,m} e^{im\bar{p}_3} + \text{к.с.},$$

$$v_{p_{2,q}}^{(1)} = -\frac{ek_2}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \bar{\Omega}_{3,q}^2 m^2} E_{3z,m} e^{im\bar{p}_3} + \text{к.с.}, \quad v_{p_{3,q}}^{(1)} = \frac{ek_3}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \bar{\Omega}_{3,q}^2 m^2} E_{3z,m} e^{im\bar{p}_3} + \text{к.с.}.$$

Проведемо розрахунки для другого наближення за порядком малості $1/\xi$ [1]. Для цього використовуємо схеми розрахунків (3.25) та (3.26). Осциляторні функції другого наближення будуть мати наступний вигляд

$$u_{v_{x,q},m}^{(2)(\bar{p}_j)} = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_z \right) u_{v_{x,q}}^{(1)} + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{B_z}{c} u_{v_{y,q}}^{(1)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{1}{c} B_y \right) u_{v_{z,q}}^{(1)} - \right.$$

$$\left. -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_x - \frac{v_{z,q}}{c} B_y \right) u_{\gamma_q}^{(1)} + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{1x} - \frac{v_{z,q}}{c} B_{1y} \right) v_{p_{1,q}}^{(1)} + \right.$$

$$\left. + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(-\frac{v_{z,q}}{c} B_{2y} \right) v_{p_{2,q}}^{(1)} - \frac{\partial u_{v_{x,q}}^{(1)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}, \quad (4.18)$$

$$u_{v_{y,q},m}^{(2)(\bar{p}_j)} = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{B_z}{c} u_{v_{x,q}}^{(1)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_z \right) u_{v_{y,q}}^{(1)} + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{B_x}{c} \right) u_{v_{z,q}}^{(1)} - \right.$$

$$\left. -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_y + \frac{1}{c} \bar{v}_{z,q} B_x \right) u_{\gamma_q}^{(1)} + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{1y} + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{1x} \right) v_{p_{1,q}}^{(1)} + \right.$$

$$\left. + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{1y} + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{1x} \right) v_{p_{2,q}}^{(1)} - \frac{\partial u_{v_{y,q}}^{(1)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}, \quad (4.19)$$

$$u_{v_{z,q},m}^{(2)(\bar{p}_j)} = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{1}{c} B_y - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_x \right) u_{v_{x,q}}^{(1)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{1}{c} B_x + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_y \right) u_{v_{y,q}}^{(1)} - \right.$$

$$\left. -2 \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_z u_{v_{z,q}}^{(1)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_z - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_z \right) u_{\gamma_q}^{(1)} + \right.$$

$$\left. \right\rangle_{mp_j}, \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{3z} - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_{3z} \right) v_{p_{3,q}}^{(1)} - \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(1)}}{\partial t} \Bigg\rangle_{mp_j}, \\
u_{\gamma_q, m}^{(2)(\bar{p}_j)} &= \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle \frac{e}{m_e c^2} E_z u_{v_{z,q}}^{(1)} + i \frac{em}{m_e c^2} \bar{v}_{z,q} E_{3z} v_{p_{3,q}}^{(1)} - \frac{\partial u_{\gamma_q}^{(1)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}, \quad (4.21)
\end{aligned}$$

$$u_{\tau}^{(2)} = 0, \quad (4.22)$$

$$v_{p_{1,q}, m}^{(2)(\bar{p}_j)} = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{\partial v_{p_{1,q}}^{(1)}}{\partial t} + k_1 u_{v_{z,q}}^{(2)} \right\rangle_{mp_j}, \quad (4.23)$$

$$v_{p_{2,q}, m}^{(2)(\bar{p}_j)} = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{\partial v_{p_{2,q}}^{(1)}}{\partial t} + k_2 u_{v_{z,q}}^{(2)} \right\rangle_{mp_j}, \quad (4.24)$$

$$v_{p_{3,q}, m}^{(2)(\bar{p}_j)} = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{\partial v_{p_{3,q}}^{(1)}}{\partial t} + k_3 u_{v_{z,q}}^{(2)} \right\rangle_{mp_j}, \quad (4.25)$$

де вираз $\langle \dots \rangle_{mp_j} = \frac{1}{T_1 T_2 T_3} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_0^{T_3} \dots e^{-imp_j} \cdot d\bar{p}_1 d\bar{p}_2 d\bar{p}_3$, як і раніше, визначає

процедуру виділення m -ої гармоніки.

Для функцій, що визначають динаміку повільно змінних величин, знаходимо

$$\begin{aligned}
A_{v_{x,q}}^{(2)} &= 0, A_{v_{y,q}}^{(2)} = 0, A_{v_{z,q}}^{(2)} = 0, A_{\gamma_q}^{(2)} = 0, A_{\tau}^{(2)} = 0, \\
B_{p_{1,q}}^{(2)} &= 0, B_{p_{2,q}}^{(2)} = 0, B_{p_{3,q}}^{(2)} = 0. \quad (4.26)
\end{aligned}$$

Знайдемо відповідні функції третього наближення. Використовуючи (3.34) та (3.35) знаходимо для осциляторних функцій третього наближення наступні співвідношення

$$\begin{aligned}
u_{v_{x,q},m}^{(3)(\bar{p}_j)} = & \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{e}{m_e\bar{\gamma}_q} \left(\frac{E_x}{c^2} \right) \left(u_{v_{x,q}}^{(1)} \right)^2 + \frac{e}{m_e\bar{\gamma}_q^3} \left(E_x - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_y \right) \left(u_{\gamma_q}^{(1)} \right)^2 - \right. \\
& - \frac{1}{2} \frac{em^2}{m_e\bar{\gamma}_q} \left(E_{1x} - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{1y} \right) \left(v_{p_{1,q}}^{(1)} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{em^2}{m_e\bar{\gamma}_q} \left(-\frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{2y} \right) \left(v_{p_{2,q}}^{(1)} \right)^2 - \\
& - i \frac{em}{m_e\bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} B_{1y} u_{v_{z,q}}^{(1)} v_{p_{1,q}}^{(1)} - i \frac{em}{m_e\bar{\gamma}_q^2} \left(E_{1x} - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{1y} \right) u_{\gamma_q}^{(1)} v_{p_{1,q}}^{(1)} - \\
& - i \frac{em}{m_e\bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} B_{2y} u_{v_{z,q}}^{(1)} v_{p_{2,q}}^{(1)} - i \frac{em}{m_e\bar{\gamma}_q^2} \left(-\frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{2y} \right) u_{\gamma_q}^{(1)} v_{p_{2,q}}^{(1)} - \quad (4.27) \\
& - i \frac{em}{m_e\bar{\gamma}_q} \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_{3z} u_{v_{x,q}}^{(1)} v_{p_{3,q}}^{(1)} - \frac{e}{m_e\bar{\gamma}_q} \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_z u_{v_{x,q}}^{(2)} + \frac{e}{m_e\bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} B_z u_{v_{y,q}}^{(2)} - \\
& - \frac{e}{m_e\bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} B_y u_{v_{z,q}}^{(2)} - \frac{e}{m_e\bar{\gamma}_q^2} \left(E_x - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_y \right) u_{\gamma_q}^{(2)} + i \frac{em}{m_e\bar{\gamma}_q} \left(E_{1x} - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{1y} \right) v_{p_{1,q}}^{(2)} + \\
& \left. + i \frac{em}{m_e\bar{\gamma}_q} \left(-\frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{2y} \right) v_{p_{2,q}}^{(2)} - \frac{\partial u_{v_{x,q}}^{(2)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{v_{y,q},m}^{(3)(\bar{p}_j)} = & \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{e}{m_e\bar{\gamma}_q} \frac{E_y}{c^2} \left(u_{v_{y,q}}^{(1)} \right)^2 + \frac{e}{m_e\bar{\gamma}_q^3} \left(E_y + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_x \right) \left(u_{\gamma_q}^{(1)} \right)^2 - \right. \\
& - \frac{1}{2} \frac{em^2}{m_e\bar{\gamma}_q} \left(E_{1y} + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{1x} \right) \left(v_{p_{1,q}}^{(1)} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{em^2}{m_e\bar{\gamma}_q} \left(\frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{2x} \right) \left(v_{p_{2,q}}^{(1)} \right)^2 + \\
& + i \frac{em}{m_e\bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} B_{1x} u_{v_{z,q}}^{(1)} v_{p_{1,q}}^{(1)} - i \frac{em}{m_e\bar{\gamma}_q^2} \left(E_{1y} + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{1x} \right) u_{\gamma_q}^{(1)} v_{p_{1,q}}^{(1)} + \\
& + i \frac{em}{m_e\bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} B_{2x} u_{v_{z,q}}^{(1)} v_{p_{2,q}}^{(1)} - i \frac{em}{m_e\bar{\gamma}_q^2} \left(\frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{2x} \right) u_{\gamma_q}^{(1)} v_{p_{2,q}}^{(1)} - \quad (4.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_{3z} u_{v_{y,q}}^{(1)} v_{p_{3,q}}^{(1)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} B_z u_{v_{x,q}}^{(2)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_z u_{v_{y,q}}^{(2)} + \\
& + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} B_x u_{v_{z,q}}^{(2)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_y + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_x \right) u_{\gamma}^{(2)} + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{1y} + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{1x} \right) v_{p_{1,q}}^{(2)} + \\
& + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{\bar{v}_{z,q}}{c} B_{2x} \right) v_{p_{2,q}}^{(2)} - \left. \frac{\partial u_{v_{y,q}}^{(2)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}, \\
u_{v_{z,q},m}^{(3)(\bar{p}_j)} &= \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{E_z}{c^2} \left(u_{v_{z,q}}^{(1)} \right)^2 + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^3} \left(E_z - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_z \right) \left(u_{\gamma_q}^{(1)} \right)^2 - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{em^2}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{3z} - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_{3z} \right) \left(v_{p_{3,q}}^{(1)} \right)^2 + \right. \\
& + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(B_{1y} - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} E_{1x} \right) u_{v_{x,q}}^{(1)} v_{p_{1,q}}^{(1)} - i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(B_{1x} + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} E_{1y} \right) u_{v_{y,q}}^{(1)} v_{p_{1,q}}^{(1)} + \\
& \quad + i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(B_{2y} \right) u_{v_{x,q}}^{(1)} v_{p_{2,q}}^{(1)} - i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(B_{2x} \right) u_{v_{y,q}}^{(1)} v_{p_{2,q}}^{(1)} - \\
& - 2i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_{3z} u_{v_{z,q}}^{(1)} v_{p_{3,q}}^{(1)} - i \frac{em}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_{3z} - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_{3z} \right) u_{\gamma_q}^{(1)} v_{p_{3,q}}^{(1)} + \quad (4.29) \\
& + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(B_y - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} E_x \right) u_{v_{x,q}}^{(2)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(B_x + \frac{\bar{v}_{z,q}}{c} E_y \right) u_{v_{y,q}}^{(2)} - \\
& - 2 \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} E_z u_{v_{z,q}}^{(2)} - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} \left(E_z - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_z \right) u_{\gamma_q}^{(2)} + \\
& + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(E_{3z} - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_{3z} \right) v_{p_{3,q}}^{(2)} - \left. \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(2)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}, \\
u_{\gamma_q,m}^{(3)(\bar{p}_j)} &= \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{1}{2} \frac{em^2}{m_e c^2} \bar{v}_{z,q} E_{3z} \left(v_{p_{3,q}}^{(1)} \right)^2 + i \frac{em}{m_e c^2} E_{3z} u_{v_{z,q}}^{(1)} v_{p_{3,q}}^{(1)} + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{e}{m_e c^2} E_z u_{v_{z,q}}^{(2)} + i \frac{em}{m_e c^2} \bar{v}_{z,q} E_{3z} v_{p_{3,q}}^{(2)} - \frac{\partial u_{\gamma_q}^{(2)}}{\partial t} \Bigg\rangle_{mp_j}, \quad (4.30)$$

$$v_{p_{1,q},m}^{(3)}(\bar{p}_j) = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{\partial v_{p_{1,q}}^{(2)}}{\partial t} + k_1 u_{v_{z,q}}^{(3)} \right\rangle_{mp_j}, \quad (4.31)$$

$$v_{p_{2,q},m}^{(3)}(\bar{p}_j) = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{\partial v_{p_{2,q}}^{(2)}}{\partial t} - k_2 u_{v_{z,q}}^{(3)} \right\rangle_{mp_j}, \quad (4.32)$$

$$v_{p_{3,q},m}^{(3)}(\bar{p}_j) = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle -\frac{\partial v_{p_{3,q}}^{(2)}}{\partial t} + k_3 u_{v_{z,q}}^{(3)} \right\rangle_{mp_j}. \quad (4.33)$$

Далі відповідно до алгоритму методу усереднених характеристик проводимо зворотні перетворення (див. розділ 2). Після проведення процедури зворотних перетворень отримуємо наступні значення для осциляторних функцій другого порядку:

$$\begin{aligned} u_{v_{x,q},m}^{(2)} &= u_{v_{x,q},m}^{(2)}(p_1) e^{imp_1} + u_{v_{x,q},m}^{(2)}(p_2) e^{imp_2} + \text{к.с.}, \\ u_{v_{x,q},m}^{(2)}(p_j) &= \left(im\bar{\Omega}_{j,q} V_{x,q,m}^{(p_j)} + \omega_{H,q} V_{y,q,m}^{(p_j)} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\bar{\Omega}_{j,q})^2 \right), \\ u_{v_{y,q},m}^{(2)} &= u_{v_{y,q},m}^{(2)}(p_1) e^{imp_1} + u_{v_{y,q},m}^{(2)}(p_2) e^{imp_2} + \text{к.с.}, \\ u_{v_{y,q},m}^{(2)}(p_j) &= \left(im\bar{\Omega}_{j,q} V_{y,q,m}^{(p_j)} - \omega_{H,q} V_{x,q,m}^{(p_j)} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\bar{\Omega}_{j,q})^2 \right), \\ V_{x,q,m}^{(p_j)} &= \left\langle \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{1}{c} \left(-\bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(2)} - u_{v_{z,q}}^{(1)} u_{B_y}^{(1)} \right) - \frac{1}{c^2} \left(u_{v_{x,q}}^{(1)} \bar{v}_{z,q} E_z \right) \right) + \right. \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$+ \left\langle -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{u_{\gamma_q}^{(1)}}{\bar{\gamma}_q} \left(E_x + \frac{1}{c} (u_{v_{y,q}}^{(1)} B_z - \bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(1)}) \right) \right) - \frac{\partial u_{v_{x,q}}^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial u_{v_{x,q}}^{(1)}}{\partial p_j} (k_j u_{v_{z,q}}^{(1)}) \right\rangle_{mp_j},$$

$$V_{y,q,m}^{(p_j)} = \left\langle \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(-\frac{1}{c} (-\bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(2)} - u_{v_{z,q}}^{(1)} u_{B_x}^{(1)}) - \frac{1}{c^2} (u_{v_{y,q}}^{(1)} \bar{v}_{z,q} E_z) \right) + \right.$$

$$\left. \left(-\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{u_{\gamma_q}^{(1)}}{\bar{\gamma}_q} \left(E_y - \frac{1}{c} (u_{v_{x,q}}^{(1)} B_z - \bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(1)}) \right) \right) - \frac{\partial u_{v_{y,q}}^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial u_{v_{y,q}}^{(1)}}{\partial p_j} (k_j u_{v_{z,q}}^{(1)}) \right) \right\rangle_{mp_j},$$

$$u_{v_{z,q},m}^{(2)} = \sum_{j=1}^3 u_{v_{z,q},m}^{(2)(p_j)} e^{imp_j} + \text{K.C.},$$

$$u_{v_{z,q},m}^{(2)(p_j)} = \frac{1}{im\Omega_{j,q}} \left\langle \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{1}{c} (u_{v_{x,q}}^{(1)} u_{B_y}^{(1)} - u_{v_{y,q}}^{(1)} u_{B_x}^{(1)}) - \frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} (u_{v_{x,q}}^{(1)} E_x + u_{v_{y,q}}^{(1)} E_y + 2u_{v_{z,q}}^{(1)} E_z) \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \left(\frac{u_{\gamma_q}^{(1)}}{\bar{\gamma}_q} \right) E_z \left(1 - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} \right) + \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(1)}}{\partial p_3} (k_3 u_{v_{z,q}}^{(1)}) - \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(1)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}, \quad (4.35)$$

$$u_{\gamma_q,m}^{(2)} = \sum_{j=1}^3 u_{\gamma_q,m}^{(2)(p_j)} e^{imp_j} + \text{K.C.},$$

$$u_{\gamma_q,m}^{(2)(p_j)} = \frac{1}{im\Omega_{j,q}} \left\langle \frac{e}{m_e c^2} E_z u_{v_{z,q}}^{(1)} + \frac{\partial u_{\gamma_q}^{(1)}}{\partial p_j} (k_j u_{v_{z,q}}^{(1)}) - \frac{\partial u_{\gamma_q}^{(1)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}. \quad (4.36)$$

Осциляторні функції третього порядку після проведення процедури зворотних перетворень будуть виглядати наступним чином

$$u_{v_{x,q},m}^{(3)} = u_{v_{x,q},m}^{(3)(p_1)} e^{imp_1} + u_{v_{x,q},m}^{(3)(p_2)} e^{imp_2} + \text{K.C.},$$

$$u_{v_{x,q},m}^{(3)(p_j)} = \left(im\bar{\Omega}_{j,q} V_{x,q,m}^{(p_j)} + \omega_{H,q} V_{y,q,m}^{(p_j)} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\bar{\Omega}_{j,q})^2 \right),$$

$$u_{\nu_{y,q},m}^{(3)} = u_{\nu_{y,q},m}^{(3)(p_1)} e^{imp_1} + u_{\nu_{y,q},m}^{(3)(p_2)} e^{imp_2} + K.C.,$$

$$u_{\nu_{y,q},m}^{(3)(p_j)} = \left(im\bar{\Omega}_{j,q} V'_{y,q,m}^{(p_j)} - \omega_{H,q} V'_{x,q,m}^{(p_j)} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\bar{\Omega}_{j,q})^2 \right), \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} V'_{x,q,m}^{(p_j)} = & \left\langle \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(-\bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(3)} - u_{\nu_{z,q}}^{(1)} u_{B_y}^{(2)} - u_{\nu_{z,q}}^{(2)} u_{B_y}^{(1)} \right) - \right. \\ & - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q c^2} \left(u_{\nu_{x,q}}^{(1)} u_{\nu_{x,q}}^{(1)} E_x + u_{\nu_{x,q}}^{(1)} u_{\nu_{y,q}}^{(1)} E_y + u_{\nu_{x,q}}^{(1)} u_{\nu_{z,q}}^{(1)} E_z + u_{\nu_{x,q}}^{(2)} \bar{v}_{z,q} E_z \right) - \\ & - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} u_{\gamma_q}^{(1)} \left(\frac{1}{c} \left(u_{\nu_{y,q}}^{(2)} B_z - \bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(2)} - u_{\nu_{z,q}}^{(1)} u_{B_y}^{(1)} \right) - \frac{1}{c^2} \left(u_{\nu_{x,q}}^{(1)} \bar{v}_{z,q} E_z \right) \right) - \\ & - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} u_{\gamma_q}^{(2)} \left(E_x + \frac{1}{c} \left(u_{\nu_{y,q}}^{(1)} B_z - \bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(1)} \right) \right) + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^3} \left(u_{\gamma_q}^{(1)} \right)^2 \left(E_x + \frac{1}{c} \left(u_{\nu_{y,q}}^{(1)} B_z - \bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(1)} \right) \right) + \\ & \left. + \frac{\partial u_{\nu_{x,q}}^{(1)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{\nu_{z,q}}^{(2)} \right) + \frac{\partial u_{\nu_{x,q}}^{(2)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{\nu_{z,q}}^{(1)} \right) - \frac{\partial u_{\nu_{x,q}}^{(2)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} V'_{y,q,m}^{(p_j)} = & \left\langle -\frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(-\bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(3)} - u_{\nu_{z,q}}^{(1)} u_{B_x}^{(2)} - u_{\nu_{z,q}}^{(2)} u_{B_x}^{(1)} \right) - \right. \\ & - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q c^2} \left(u_{\nu_{y,q}}^{(1)} u_{\nu_{x,q}}^{(1)} E_x + u_{\nu_{y,q}}^{(1)} u_{\nu_{y,q}}^{(1)} E_y + u_{\nu_{y,q}}^{(2)} \bar{v}_{z,q} E_z + u_{\nu_{y,q}}^{(1)} u_{\nu_{z,q}}^{(1)} E_z \right) - \\ & - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} u_{\gamma_q}^{(1)} \left(-\frac{1}{c} \left(u_{\nu_{x,q}}^{(2)} B_z - \bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(2)} - u_{\nu_{z,q}}^{(1)} u_{B_x}^{(1)} \right) - \frac{1}{c^2} \left(u_{\nu_{y,q}}^{(1)} \bar{v}_{z,q} E_z \right) \right) - \\ & - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} u_{\gamma_q}^{(2)} \left(E_y - \frac{1}{c} \left(u_{\nu_{x,q}}^{(1)} \bar{B}_z - \bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(1)} \right) \right) + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^3} \left(u_{\gamma_q}^{(1)} \right)^2 \left(E_y - \frac{1}{c} \left(u_{\nu_{x,q}}^{(1)} \bar{B}_z - \bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(1)} \right) \right) + \\ & \left. + \frac{\partial u_{\nu_{y,q}}^{(1)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{\nu_{z,q}}^{(2)} \right) + \frac{\partial u_{\nu_{y,q}}^{(2)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{\nu_{z,q}}^{(1)} \right) - \frac{\partial u_{\nu_{y,q}}^{(2)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}, \end{aligned}$$

$$u_{\nu_{z,q},m}^{(3)} = \sum_{j=1}^3 u_{\nu_{z,q},m}^{(3)(p_j)} e^{imp_j} + K.C.,$$

$$\begin{aligned}
u_{\nu_{z,q},m}^{(3)(p_j)} = & \frac{1}{im\Omega_{j,q}} \left\langle \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c} \left(u_{\nu_{x,q}}^{(1)} u_{B_y}^{(2)} + u_{\nu_{x,q}}^{(2)} u_{B_y}^{(1)} - u_{\nu_{y,q}}^{(1)} u_{B_x}^{(2)} - u_{\nu_{y,q}}^{(2)} u_{B_x}^{(1)} \right) - \right. \\
& - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c^2} \left(\bar{v}_{z,q} u_{\nu_{x,q}}^{(2)} E_x + \bar{v}_{z,q} u_{\nu_{y,q}}^{(2)} E_y + \bar{v}_{z,q} u_{\nu_{z,q}}^{(2)} E_z + u_{\nu_{z,q}}^{(1)} u_{\nu_{x,q}}^{(1)} E_x \right) - \\
& - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \frac{1}{c^2} \left(u_{\nu_{z,q}}^{(1)} u_{\nu_{y,q}}^{(1)} E_y + u_{\nu_{z,q}}^{(2)} \bar{v}_{z,q} E_z + u_{\nu_{z,q}}^{(1)} u_{\nu_{z,q}}^{(1)} E_z \right) - \\
& - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2 c} u_{\gamma_q}^{(1)} \left(u_{\nu_{x,q}}^{(1)} u_{B_y}^{(1)} - u_{\nu_{y,q}}^{(1)} u_{B_x}^{(1)} \right) + \\
& + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2 c^2} u_{\gamma_q}^{(1)} \left(\bar{v}_{z,q} u_{\nu_{x,q}}^{(1)} E_x + \bar{v}_{z,q} u_{\nu_{y,q}}^{(1)} E_y + \bar{v}_{z,q} u_{\nu_{z,q}}^{(1)} E_z + u_{\nu_{z,q}}^{(1)} \bar{v}_{z,q} E_z \right) - \\
& - \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^2} u_{\gamma_q}^{(2)} \left(E_z - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_z \right) + \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q^3} \left(u_{\gamma_q}^{(1)} \right)^2 \left(E_z - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} E_z \right) + \\
& + \frac{\partial u_{\nu_{z,q}}^{(1)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{\nu_{z,q}}^{(2)} \right) + \frac{\partial u_{\nu_{z,q}}^{(2)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{\nu_{z,q}}^{(1)} \right) - \frac{\partial u_{\nu_{z,q}}^{(2)}}{\partial t} \left. \right\rangle_{mp_j}, \tag{4.39}
\end{aligned}$$

$$u_{\gamma_q,m}^{(3)} = \sum_{j=1}^3 u_{\gamma_q,m}^{(3)(p_j)} e^{imp_j} + \text{к.с.},$$

$$\begin{aligned}
u_{\gamma_q,m}^{(3)(p_j)} = & \frac{1}{im\Omega_{j,q}} \left\langle \frac{e}{m_e c^2} E_z u_{\nu_{z,q}}^{(2)} + \frac{\partial u_{\gamma_q}^{(1)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{\nu_{z,q}}^{(2)} \right) + \right. \\
& + \frac{\partial u_{\gamma_q}^{(2)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{\nu_{z,q}}^{(1)} \right) - \frac{\partial u_{\gamma_q}^{(2)}}{\partial t} \left. \right\rangle_{mp_j}. \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Розв'язок рівняння неперервності. Як вихідне рівняння для знаходження концентрації використаємо рівняння неперервності (4.5). До цього рівняння застосуємо метод усереднених характеристик. Спочатку записуємо рівняння характеристик для (4.5), аналогічно як і випадку (3.49):

$$\frac{dn_q}{dt} = \frac{1}{\xi} X^{n_q}, \quad (4.41)$$

$$\text{де } \frac{1}{\xi} X^{n_q} \equiv -n_q \frac{\partial v_{z,q}}{\partial z}.$$

Необхідно відзначити, що на даному етапі вирішення задачі вважаємо задачу руху вже вирішеною, тут використовуємо розв'язки, що отримані вище. Доповнимо (4.41) рівняннями для фаз коливань $p_{1,q}, p_{2,q}, p_{3,q}$ (4.13) і отримаємо систему, яку будемо розв'язувати аналогічно як і розділі 4.

У відповідності до загальної процедури розв'язок будемо шукати в наступному вигляді:

$$n_q = \bar{n}_q + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{n_q}^{(n)}(\bar{x}, \bar{p}). \quad (4.42)$$

Повільно змінні величини будемо визначати наступним чином:

$$\frac{d\bar{n}_q}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{n_q}^{(n)}(\bar{x}), \quad (4.43)$$

де $x = \{n_q, v_x, v_y, v_z, \gamma_q, \tau\}$ - вектор повільних змінних;

$p = \{p_1, p_2, p_3\}$ - вектор швидких змінних.

В першому наближенні використовуючи (3.52) і те, що:

$$A_n^{(1)} = \langle X^{n_q} \rangle = 0. \quad (4.44)$$

Знаходимо:

$$u_{n_q, m}^{(1)} = \frac{e\bar{n}_q}{m_e \bar{\gamma}_q^3} \frac{k_3}{\Omega_{3,q}^2} \left(\frac{E_{3z, m}}{im} e^{im\bar{p}_3} + \text{к.с.} \right). \quad (4.45)$$

Використовуючи відому схему розрахунку [1] у другому наближенні отримуємо:

$$u_{n_q, m}^{(2)(\bar{p}_j)} = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle \frac{ek_3}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \bar{\Omega}_{3,q}^2} E_z u_n^{(1)} - 3 \frac{e\bar{n}_q k_3}{m_e \Omega_{3,q}^2 \bar{\gamma}_q^4} E_z u_\gamma^{(1)} + \right. \\ \left. + i \frac{e\bar{n}k_3 m}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \Omega_{3,q}^2} E_{3z} v_{p_{3,q}}^{(1)} - A_{n_q}^{(2)} - \frac{\partial u_{n_q}^{(1)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}, \quad (4.46)$$

$$A_n^{(2)} = 0. \quad (4.47)$$

Використовуючи стандартну схему розрахунку для третього наближення (3.34) знаходимо:

$$u_{n_q, m}^{(3)(\bar{p}_j)} = \frac{1}{im\bar{\Omega}_{j,q}} \left\langle 6 \frac{e\bar{n}_q k_3}{m_e \bar{\gamma}_q^5 \Omega_{3,q}} E_z (u_\gamma^{(1)})^2 - \frac{1}{2} \frac{em^2 \bar{n} k_3}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \Omega_{3,q}} E_z (v_{p_3}^{(1)})^2 + \right. \\ \left. + i \frac{emk_3}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \Omega_{3,q}} E_{3z} u_{n_q}^{(1)} v_{p_3}^{(1)} - 3i \frac{e\bar{n}k_3 m}{m_e \bar{\gamma}_q^4 \Omega_{3,q}} E_{3z} u_{\gamma_q}^{(1)} v_{p_{3,q}}^{(1)} + \frac{ek_3}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \Omega_{3,q}} E_z u_n^{(2)} - \right. \\ \left. - 3 \frac{e\bar{n}k_3}{m_e \bar{\gamma}_q^4 \Omega_{3,q}} E_z u_\gamma^{(2)} + i \frac{e\bar{n}mk_3}{m_e \bar{\gamma}_q^3 \Omega_{3,q}} E_{3z} v_{p_3}^{(2)} - \frac{\partial u_{n_q}^{(2)}}{\partial t} \right\rangle_{mp_j}. \quad (4.48)$$

Далі виконуємо зворотні перетворення:

$$u_{n_q, m}^{(2)} = \sum_{j=1}^3 u_{n_q, m}^{(2)(p_j)} e^{imp_j} + \text{к.с.},$$

$$u_{n_q,m}^{(2)(p_j)} = \frac{1}{im\Omega_{j,q}} \left\langle -\bar{n}_q \left[\frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(2)}}{\partial z} \right] - \left(u_{n_q}^{(1)} \right) \left[\frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(1)}}{\partial z} \right] - \frac{\partial u_{n_q}^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial u_{n_q}^{(1)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{v_{z,q}}^{(1)} \right) \right\rangle_{mp_j}, \quad (4.49)$$

$$u_{n_q,m}^{(3)} = \sum_{j=1}^3 u_{n_q,m}^{(3)(p_j)} e^{imp_j} + \text{к.с.},$$

$$u_{n_q,m}^{(3)(p_j)} = \frac{1}{im\Omega_{j,q}} \left\langle \bar{n}_q \left[k_3 \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(2)}}{\partial p_3} \right] + \left(u_{n_q}^{(1)} \right) \left[k_3 \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(2)}}{\partial p_3} \right] + \left(u_{n_q}^{(2)} \right) \left[k_3 \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(1)}}{\partial p_3} \right] - \frac{\partial u_{n_q}^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial u_{n_q}^{(1)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{v_{z,q}}^{(2)} \right) + \frac{\partial u_{n_q}^{(2)}}{\partial p_j} \left(k_j u_{v_{z,q}}^{(1)} \right) \right\rangle_{mp_j}. \quad (4.50)$$

Польова задача. Далі отримані розв'язки для швидкостей і концентрації підставляємо у рівняння Максвелла. Застосовуємо модернізований метод повільно змінних амплітуд. Проводимо перетворення, в результаті яких отримуємо для амплітуд гармонік напруженості електричного поля електромагнітної хвилі $\{\omega_1, \mathbf{k}_1\}$ та електронної хвилі ХПЗ $\{\omega_3, \mathbf{k}_3\}$ систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} K_{2,m} \frac{\partial^2 E_{1x,m}}{\partial t^2} + K_{1,m} \frac{\partial E_{1x,m}}{\partial t} + D_{1,m} E_{1x,m} &= K_{3,m} E_{3z,m} B_{2y,m}^* + FX_{1,m}, \\ K_{2,m} \frac{\partial^2 E_{1y,m}}{\partial t^2} + K_{1,m} \frac{\partial E_{1y,m}}{\partial t} + D_{1,m} E_{1y,m} &= K_{3,m} E_{3z,m} B_{2x,m}^* + FY_{1,m}, \\ C_{2,m} \frac{\partial^2 E_{3z,m}}{\partial t^2} + C_{1,m} \frac{\partial E_{3z,m}}{\partial t} + D_{3,m} E_{3z,m} &= C_{3,m} E_{1x,m} B_{2y,m} + \\ + C_{4,m} \left\langle \int E_z \left(\int E_z dp_3 \right) dp_3 \right\rangle_{mp_3} &+ C_{5,m} \left\langle \left(\int E_z dp_3 \right)^2 \right\rangle_{mp_3} + FZ_{3,m}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

В рівняннях (4.51) позначено:

$$\begin{aligned}
K_{2,m} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{1,m}}{\partial (im\omega_1)^2} = \frac{ck_1^2}{im\omega_1^3} + \\
&+ \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2 \left(\Omega_{1,\alpha} \omega_1^2 - \left(\Omega_{1,\alpha} - \frac{\omega_{H,\alpha} \eta_1}{m} \right) \bar{v}_{z,\alpha} k_1 \left(\omega_1 + \left(\Omega_{1,\alpha} - \frac{\omega_{H,\alpha} \eta_1}{m} \right) \right) \right)}{i\omega_1^3 c \bar{\gamma}_{\alpha} (m\Omega_{1,\alpha} - \omega_{H,\alpha} \eta_1)^3}, \\
K_{1,m} &= \frac{\partial D_{1,m}}{\partial (im\omega_1)} = -\frac{c^2 k_1^2 + \omega_1^2}{\omega_1^2 c} - \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2 \left(\Omega_{1,\alpha} \omega_1 + (\omega_{H,\alpha} \eta_1 - m\Omega_{1,\alpha}) \bar{v}_{z,\alpha} k_1 / m \right)}{\omega_1^2 c \bar{\gamma}_{\alpha} (\omega_{H,\alpha} \eta_1 - m\Omega_{1,\alpha})^2}, \\
D_{1,m} &= \frac{im}{c\omega_1} \left(k_1^2 c^2 - \omega_1^2 + \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2 \Omega_{1,\alpha} (m\Omega_{1,\alpha} + \eta_1 \omega_{H,\alpha})}{m \bar{\gamma}_{\alpha} ((m\Omega_{1,\alpha})^2 - (\omega_{H,\alpha})^2)} \right), \\
K_{3,m} &= -\frac{1}{c} \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2}{cm} \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_{\alpha}^2 \Omega_{3\alpha}} \times \\
&\times \left(\frac{(m\Omega_{1\alpha} - \eta_2 \omega_{H,\alpha})}{(\omega_{H\alpha})^2 - (m\Omega_{1\alpha})^2} \left(\left(1 - 2 \frac{\bar{v}_{z,\alpha}^2}{c^2} \right) + \frac{\bar{v}_{z,\alpha}^2}{c^2} \frac{(m\Omega_{3\alpha} - \eta_2 \omega_{H,\alpha})}{(m\Omega_{2\alpha} - \eta_2 \omega_{H,\alpha})} \right) \right) + \\
&+ \frac{1}{c} \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2 k_3}{\bar{\gamma}_{\alpha}^2 \Omega_{3\alpha}^2} \left(1 - \frac{\bar{v}_{z,\alpha}^2}{c^2} \right) \frac{e}{m_e} \frac{\bar{v}_{z,\alpha}}{cm} \frac{(m\Omega_{2\alpha} + \eta_2 \omega_{H,\alpha})}{(\omega_{H,\alpha})^2 - (m\Omega_{2\alpha})^2}, \\
C_{2,m} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{3,m}}{\partial (im\omega_3)^2} = -\sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2 (1 + 3k_3 \bar{v}_{z,\alpha} / \Omega_{3,\alpha})}{c \bar{\gamma}_{\alpha}^3 (im\Omega_{3,\alpha})^3}, \\
C_{1,m} &= \frac{\partial D_{3,m}}{\partial (im\omega_3)} = -\frac{1}{c} + \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2 (1 + 2k_3 \bar{v}_{z,\alpha} / \Omega_{3,\alpha})}{c \bar{\gamma}_{\alpha}^3 (im\Omega_{3,\alpha})^2}, \\
D_{3,m} &= \frac{-im\omega_3}{c} \left(1 + \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2}{\Omega_{3,\alpha}^2 (im)^2 \bar{\gamma}_{\alpha}^3} \right), \\
C_{3,m} &= \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{e}{m_e} \frac{\omega_{\alpha}^2 \omega_3 (1 + \eta_1 \eta_2)}{c^2 \bar{\gamma}_{\alpha}^2 im \Omega_{3\alpha}^2} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\left[\frac{\Omega_{1\alpha}}{\omega_{1\alpha}} \frac{im\Omega_{1\alpha} + i\eta_1 \omega_{H,\alpha}}{(im\Omega_{1\alpha})^2 + (\omega_{H,\alpha})^2} + \left(\frac{ck_1}{\omega_1} - \frac{\bar{v}_{z,\alpha}}{c} \right) \frac{\bar{v}_{z,\alpha}}{c} \frac{im\Omega_{2\alpha} + i\eta_2 \omega_{H,\alpha}}{(im\Omega_{2\alpha})^2 + (\omega_{H,\alpha})^2} \right] \right), \\
C_{4,m} &= \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{\omega_{\alpha}^2}{c\bar{\gamma}_{\alpha}^4 \Omega_{3\alpha}^3} \frac{e}{m_e} \left[\frac{2\bar{v}_{z,\alpha} k_3^2 + \omega_3 k_3}{\Omega_{3,\alpha} \bar{\gamma}_{\alpha}^2} - 3 \frac{\bar{v}_{z,\alpha} \omega_3}{c^2} \right], \quad C_{5,m} = \sum_{\alpha}^{b,p} \left[\frac{\omega_{\alpha}^2}{c\bar{\gamma}_{\alpha}^6} \frac{e}{m_e} \frac{k_3}{\Omega_{3,\alpha}^3} \right], \\
FX_{1,m} &= \left\langle \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{4\pi e_{\alpha}}{c} \left(\bar{n}_{\alpha} u_{v_{x,\alpha},m}^{st(3)} + u_{n_{\alpha},m}^{(1)} u_{v_{x,\alpha},m}^{(2)} + u_{n_{\alpha},m}^{(2)} u_{v_{x,\alpha},m}^{(1)} \right) \right\rangle_{mp_1}, \\
FY_{1,m} &= \left\langle \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{4\pi e_{\alpha}}{c} \left(\bar{n}_{\alpha} u_{v_{y,\alpha},m}^{st(3)} + u_{n_{\alpha},m}^{(1)} u_{v_{y,\alpha},m}^{(2)} + u_{n_{\alpha},m}^{(2)} u_{v_{y,\alpha},m}^{(1)} \right) \right\rangle_{mp_1}, \\
FZ_{1,m} &= \sum_{\alpha}^{b,p} \frac{4\pi e_{\alpha}}{c} \left\langle \left(\bar{n}_{\alpha} u_{v_{z,\alpha},m}^{st(3)} + u_{n_{\alpha},m}^{(1)} u_{v_{z,\alpha},m}^{(2)} + u_{n_{\alpha},m}^{(2)} u_{v_{z,\alpha},m}^{(1)} + u_{n_{\alpha},m}^{st(3)} \bar{v}_{z,\alpha} \right) \right\rangle_{mp_3}, \\
u_{v_{x,q},m}^{st(3)} &= \sum_{j=1}^3 u_{v_{x,q},m}^{st(3)(p_j)} e^{imp_j} + K.C., \quad u_{v_{y,q},m}^{st(3)} = \sum_{j=1}^3 u_{v_{y,q},m}^{st(3)(p_j)} e^{imp_j} + K.C., \\
u_{v_{x,q},m}^{st(3)(p_j)} &= \left(im\Omega_{j,q} V_{x,q,m}^{st(p_j)} + \omega_{H,q} V_{y,q,m}^{st(p_j)} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\Omega_{j,q})^2 \right), \\
u_{v_{y,q},m}^{st(3)(p_j)} &= \left(im\Omega_{j,q} V_{y,q,m}^{st(p_j)} - \omega_{H,q} V_{x,q,m}^{st(p_j)} \right) / \left((\omega_{H,q})^2 - (m\Omega_{j,q})^2 \right), \\
V_{y,q,m}^{st(p_j)} &= \left\langle -\frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c^2} u_{v_{x,q}}^{(1)} u_{v_{y,q}}^{(1)} E_x + \frac{e}{m_e} \left(-\frac{1}{\bar{\gamma}_q c^2} u_{v_{y,q}}^{(1)} u_{v_{y,q}}^{(1)} + \frac{1}{\bar{\gamma}_q^3} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{\gamma_q}^{(1)} - \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2} u_{\gamma_q}^{(2)} \right) E_y + \right. \\
& \quad + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c^2} \left(-u_{v_{y,q}}^{(1)} u_{v_{z,q}}^{(1)} + \frac{1}{\bar{\gamma}_q} \bar{v}_{z,q} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{v_{y,q}}^{(1)} - \bar{v}_{z,q} u_{v_{y,q}}^{(2)} \right) E_z + \\
& \quad + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2 c} \left(u_{\gamma_q}^{(2)} u_{v_{x,q}}^{(1)} - \frac{1}{\bar{\gamma}_q} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{v_{x,q}}^{(1)} + u_{v_{x,q}}^{(2)} u_{\gamma_q}^{(1)} \right) B_z + \\
& \quad \left. + \left(\frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} \left(u_{B_x}^{(2)} - \frac{1}{\bar{\gamma}_q} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{B_x}^{(1)} \right) + k_j \frac{\partial u_{v_{y,q}}^{(2)}}{\partial p_j} \right) u_{v_{z,q}}^{(1)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2 c} \left(-\bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(2)} + \frac{1}{\bar{\gamma}_q} \bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(1)} u_{\gamma_q}^{(1)} \right) u_{\gamma_q}^{(1)} + \\
& + \left(\frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} u_{B_x}^{(1)} + k_j \frac{\partial u_{v_{y,q}}^{(1)}}{\partial p_j} \right) u_{v_{z,q}}^{(2)} - \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2} \left(\frac{1}{c} \bar{v}_{z,q} u_{B_x}^{(1)} \right) u_{\gamma_q}^{(2)} \Bigg\rangle_{mp_j}, \\
V_{x,q,m}^{st(p_j)} = & \left\langle \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q} \left(-\frac{1}{c^2} u_{v_{x,q}}^{(1)} u_{v_{x,q}}^{(1)} + \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{\gamma_q}^{(1)} - \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2} u_{\gamma_q}^{(2)} \right) E_x - \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c^2} u_{v_{x,q}}^{(1)} u_{v_{y,q}}^{(1)} E_y + \right. \\
& + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c^2} \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_q} \bar{v}_{z,q} u_{v_{x,q}}^{(1)} u_{\gamma_q}^{(1)} - u_{v_{x,q}}^{(1)} u_{v_{z,q}}^{(1)} - \bar{v}_{z,q} u_{v_{x,q}}^{(2)} \right) E_z + \\
& + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2 c} \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_q} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{v_{y,q}}^{(1)} - u_{\gamma_q}^{(2)} u_{v_{y,q}}^{(1)} - u_{v_{y,q}}^{(2)} u_{\gamma_q}^{(1)} \right) B_z + \\
& + \left(\frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_q} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{B_y}^{(1)} - u_{B_y}^{(2)} \right) + k_j \frac{\partial u_{v_{x,q}}^{(2)}}{\partial p_j} \right) u_{v_{z,q}}^{(1)} + \\
& + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2} \left(\frac{1}{c} \bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(2)} - \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} \bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(1)} u_{\gamma_q}^{(1)} \right) u_{\gamma_q}^{(1)} + \\
& \left. + \left(k_j \frac{\partial u_{v_{x,q}}^{(1)}}{\partial p_j} - \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} u_{B_y}^{(1)} \right) u_{v_{z,q}}^{(2)} + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2} \left(\frac{1}{c} \bar{v}_{z,q} u_{B_y}^{(1)} \right) u_{\gamma_q}^{(2)} \right\rangle_{mp_j}, \\
u_{v_{z,q},m}^{st(3)} = & \sum_{j=1}^3 u_{v_{z,q},m}^{st(3)(p_j)} e^{imp_j} + \kappa.c., \\
u_{v_{z,q},m}^{st(3)(p_j)} = & \frac{1}{im\Omega_{j,q}} \left\langle \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c^2} \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_q} \bar{v}_{z,q} u_{v_{x,q}}^{(1)} u_{\gamma_q}^{(1)} - u_{v_{x,q}}^{(1)} u_{v_{z,q}}^{(1)} - \bar{v}_{z,q} u_{v_{x,q}}^{(2)} \right) E_x + \right. \\
& + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c^2} \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_q} \bar{v}_{z,q} u_{v_{y,q}}^{(1)} u_{\gamma_q}^{(1)} - u_{v_{y,q}}^{(1)} u_{v_{z,q}}^{(1)} - \bar{v}_{z,q} u_{v_{y,q}}^{(2)} \right) E_y + \\
& \left. + \frac{e}{m_e} \left[\frac{1}{\bar{\gamma}_q c^2} \left(-u_{v_{z,q}}^{(1)} u_{v_{z,q}}^{(1)} + 2\bar{v}_{z,q} u_{v_{z,q}}^{(2)} \right) + \frac{1}{\bar{\gamma}_q^2} \left(2\frac{\bar{v}_{z,q}}{c^2} u_{v_{z,q}}^{(1)} u_{\gamma_q}^{(1)} + \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} u_{\gamma_q}^{(2)} - u_{\gamma_q}^{(2)} \right) \right] \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\bar{\gamma}_q^3} \left(u_{\gamma_q}^{(1)} u_{\gamma_q}^{(1)} - \frac{\bar{v}_{z,q}^2}{c^2} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{\gamma_q}^{(1)} \right) \Big] E_z + \\
& + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} \left(u_{B_y}^{(2)} - \frac{1}{\bar{\gamma}_q} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{B_y}^{(1)} \right) u_{v_{x,q}}^{(1)} + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} \left(-u_{B_x}^{(2)} + \frac{1}{\bar{\gamma}_q} u_{\gamma_q}^{(1)} u_{B_x}^{(1)} \right) u_{v_{y,q}}^{(1)} + \\
& + k_j \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(2)}}{\partial p_j} u_{v_{z,q}}^{(1)} + \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} \left(u_{B_y}^{(1)} \right) u_{v_{x,q}}^{(2)} - \frac{e}{m_e} \frac{1}{\bar{\gamma}_q c} \left(u_{B_x}^{(1)} \right) u_{v_{y,q}}^{(2)} + k_j \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(1)}}{\partial p_j} u_{v_{z,q}}^{(2)} \Bigg\rangle_{mp_j},
\end{aligned}$$

$$u_{n_q, m}^{st(3)} = \sum_{j=1}^3 u_{n_q, m}^{st(3)}(p_j) e^{imp_j} + \text{K.C.},$$

$$\begin{aligned}
u_{n_q, m}^{st(3)}(p_j) = \frac{1}{im\Omega_{j,q}} \left\langle \frac{\partial u_{n_q}^{(2)}}{\partial p_j} k_j u_{v_{z,q}}^{(1)} + k_3 \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(2)}}{\partial p_3} u_{n_q}^{(1)} + \right. \\
\left. + \frac{\partial u_{n_q}^{(1)}}{\partial p_j} k_j u_{v_{z,q}}^{(2)} + k_3 \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(1)}}{\partial p_3} u_{n_q}^{(2)} + \bar{n}_q k_3 \frac{\partial u_{v_{z,q}}^{(2)}}{\partial p_3} \right\rangle_{mp_j}.
\end{aligned}$$

У цих рівняннях $D_{1,m}$ є дисперсійною функцією електромагнітної хвилі сигналу; $D_{3,m}$ – дисперсійна функція електронної хвилі ХПЗ; $\eta_1 = E_{1y,m} / (iE_{1x,m}) = \pm 1$ – знакова функція, яка характеризує напрямок обертання вектора напруженості електричного поля циркулярно поляризованої хвилі сигналу; $\eta_2 = B_{2y,m} / (iB_{2x,m}) = \pm 1$ – знакова функція, яка характеризує напрямок обертання спірального Н-убітронного поля накачки; індексом “ b ” характеризуємо параметри пучка, індексом “ p ” – параметри плазми;

$$\omega_{H,\alpha} = eH_0 / (\bar{\gamma}_\alpha m_e c), \quad \langle \dots \rangle_{mp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots \cdot \exp(impr)) dp. \quad \text{Зазначимо, що}$$

вищеписані функції $u_{v_{x,q},m}^{st(3)}$, $u_{v_{y,q},m}^{st(3)}$, $u_{v_{z,q},m}^{st(3)}$, $u_{n_q,m}^{st(3)}$ отримані з $u_{v_{x,q},m}^{(3)}$, $u_{v_{y,q},m}^{(3)}$,

$u_{v_{z,q},m}^{(3)}$, $u_{n_q,m}^{(3)}$ шляхом виключення з них доданків з похідними від амплітуд поля

$\frac{\partial^2 E_{j,x}}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 E_{j,y}}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 E_{j,z}}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 E_{j,z}}{\partial t^2}$, які входять складовою частиною до $C_{2,m}$ та $K_{2,m}$.

Розглянемо вираз для коефіцієнту $C_{3,m}$, який характеризують параметрично-резонансну взаємодію хвиль в плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ з Н-убітронною накачкою в квадратичному наближенні. Бачимо, що він пропорційний $(1 + \eta_1 \eta_2)$. Це означає, що для реалізації параметричного резонансу необхідно, щоб напрями обертання вектора напруженості електричного поля сигналу \dot{E}_1 і вектора індукції магнітного поля накачки \dot{B}_2 були однаковими. Тобто напрямки обертання цих векторів повинні бути направлені або за годинниковою стрілкою ($\eta_1 = +1$, $\eta_2 = +1$), або проти годинникової стрілки ($\eta_1 = -1$, $\eta_2 = -1$). Інакше $C_{3,m}$ буде дорівнювати нулю. Цей висновок повністю співпадає з висновками загальної теорії по відношенню до резонансної поляризації [2, 3]. Ця властивість також має місце, як зазначалось вище, і для плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ з доплертронною накачкою.

4.3. Режими роботи [39-43]

Розглянемо лінійну стадію підсилення хвиль у плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ з Н-убітронною накачкою. Дисперсійні рівняння в цьому випадку для електромагнітної хвилі сигналу $\{\omega_1, k_1\}$ та хвилі просторового заряду $\{\omega_3, k_3\}$ мають наступний вигляд:

$$k_1^2 c^2 - \omega_1^2 + \frac{\omega_p^2 \omega_1}{(\omega_1 - \eta \omega_H)} + \frac{\omega_b^2 (\omega_1 - k_1 v_b)}{\gamma_b (\omega_1 - k_1 v_b - \eta \omega_H / \gamma_b)} = 0, \quad (4.52)$$

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_3^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega_3 - k_3 v_b)^2 \gamma_b^3} = 0. \quad (4.53)$$

Для аналізу особливостей резонансної взаємодії хвиль в досліджуваному плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ побудуємо залежності (рис. 4.2) частоти хвилі сигналу і ХПЗ від хвильового числа, використовуючи формули (4.52) – (4.53). Параметри плазмо-пучкової системи супергетеродинного ЛВЕ з Н-убітронною накачкою, для якої проводились розрахунки, подані у табл. 4.1. На рисунку 4.2 суцільна лінія відповідає залежності $\omega = \omega(k)$ для хвиль ХПЗ, штрихові для електромагнітних хвиль. Залежність 1 відповідає звичайній електромагнітній хвилі, залежність 2 - незвичайній електромагнітній хвилі [58], залежності 3 та 4 відповідають ліво - та правополяризованим електромагнітним хвилям, в розповсюдженні яких істотну роль відіграють електрони пучка.

Таблиця 4.1

**Параметри плазмо-пучкової системи супергетеродинного ЛВЕ з
Н-убітронною накачкою**

Параметр	Значення
Ленгмюрівська частота плазми (ω_p)	$1,0 \cdot 10^{12} \text{ c}^{-1}$
Ленгмюрівська частота пучка (ω_b)	$2,0 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$
Значення релятивістського фактора пучка (γ_b)	2,0
Напруженість поздовжнього магнітного поля (H_0)	$2,8 \cdot 10^3 \text{ Э}$

Як вже згадувалося вище, хвильове число k_3 та частоту ω_3 хвилі ХПЗ вибираємо таким чином, що б хвиля ХПЗ мала максимальний інкремент зростання унаслідок плазмо-пучкової нестійкості. Цій умові, як відомо, (див., наприклад [58]) відповідає значення хвильового числа $k_3 = \omega_p / v_b$. Такому значенню хвильового числа k_3 та частоти ω_3 відповідає точка O дисперсійної кривої ХПЗ (рис. 4.2). Відповідно до умови параметричного резонансу (4.1) частоти хвиль ХПЗ і електромагнітного сигналу повинні бути однаковими $\omega_1 = \omega_3$. Проведемо через точку O горизонтальну лінію $\omega = \omega_3 = const$ (штрих

пунктирна лінія AD). Точки A, B, C, D , які отримуємо у результаті перетину прямої AD з дисперсійними залежностями електромагнітних хвиль, характеризують частоти і хвильові числа електромагнітних хвиль, які можуть брати участь в параметрично-резонансній взаємодії хвиль у досліджуваній системі. Таким чином, в плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ, який розглядається, може бути реалізовано чотири типи резонансних хвильових взаємодій, які позначимо A, B, C, D , відповідно до точок A, B, C, D на рис. 4.2.

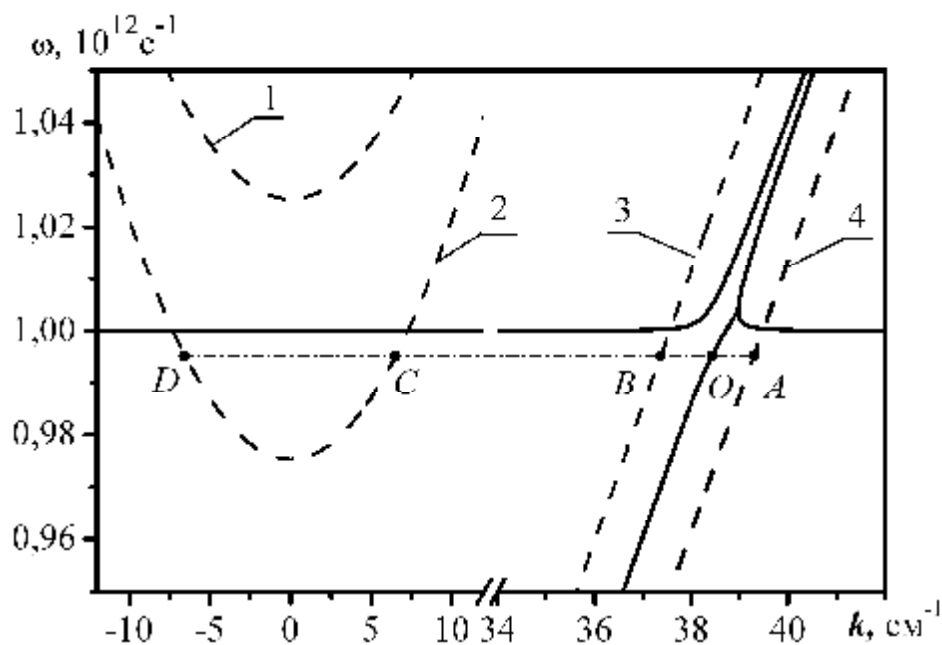


Рис. 4.2. Дисперсійні залежності хвиль ХПЗ, електромагнітного сигналу в плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ з Н-убітронною накачкою

Ці точки характеризують частоти і хвильові числа електромагнітних хвиль, що беруть участь в параметричному резонансі. Проведемо аналіз таких взаємодій хвиль більш детально.

Для плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ з Н-убітронною накачкою, параметри якого подані в таблиці 4.1, неважко знайти довжину хвилі сигналу. У вакуумі вона буде дорівнювати 1,8 мм. Розв'язуючи систему рівнянь (4.1), (4.52), (4.53), неважко знайти для кожного типу параметричного

резонансу період ондулятора: $\Lambda_A = 7,47$ см; $\Lambda_B = 5,79$ см; $\Lambda_C = 0,20$ см; $\Lambda_D = 0,14$ см (індекс відповідає відповідному типу параметричного резонансу). Бачимо, що найбільш цікавими з погляду практичної реалізації приладу є випадки A та B . З'ясуємо, які параметри системи визначають період ондулятора у випадках A та B . Як вже визначалося раніше, криві 3 і 4 відповідають електромагнітним хвилям, в розповсюдженні яких істотну роль відіграють електрони пучка. З математичної точки зору, ці хвилі в рівнянні (4.52) визначаються третім доданком. Він стає істотним, у випадку коли знаменник цього доданку наближається до нуля:

$$\omega_1 - k_1 v_b - \eta \omega_H / \gamma_b \approx 0. \quad (4.54)$$

Для хвилі ХПЗ може бути застосована наступна рівність

$$k_3 = \omega_p / v_b \approx \omega_3 / v_b. \quad (4.55)$$

Враховуючи умови параметричного резонансу (4.1) нескладно знайти параметри ондулятора

$$k_2 = k_3 - k_1 \approx \frac{\omega_3}{v_b} - \frac{\omega_1}{v_b} + \frac{\eta \omega_H}{\gamma_b} = \frac{\eta \omega_H}{\gamma_b}. \quad (4.56)$$

Звідси витікає, що хвильове число ондулятора у випадках A та B визначається величиною індукції магнітного поля (ω_H), релятивістським фактором пучка (γ_b) та поляризацією циркулярно-поляризованої електромагнітної хвилі сигналу (η). Таким чином, напруженість поздовжнього фокусувального магнітного поля є визначальним чинником для періоду ондуляції Н-убітронного магнітного поля системи.

Ще однією особливістю параметричного резонансу хвиль у цій системі, яка впливає з формули (4.52), є те, що хвильове число k_2 не залежить від частоти хвиль сигналу і ХПЗ. До цього ж висновку можна прийти, аналізуючи рис. 4.2. Тут криві 3, 4 і відповідні залежності ХПЗ є практично паралельними, що свідчить про те, що «відстань» між ними для різних частот залишається практично незмінною. З цього отримуємо, що умова параметричного зв'язку виконуватиметься не тільки для основних гармонік хвиль сигналу і ХПЗ, але і для вищих гармонік. Тобто у разі реалізації параметричних резонансів A та B можуть мати місце мультигармонічні взаємодії, генерація вищих гармонік. Це відкриває нові можливості формування електромагнітних сигналів із складним мультигармонічним спектром [27].

Для параметричних резонансів C та D , як впливає з вище приведених оцінок ($\Lambda_C = 0,20$ см; $\Lambda_D = 0,14$ см), необхідно використовувати мікроондулятори. Аналізуючи залежності 1 і 2 на рис. 4.2, можна зробити висновок, що у випадку C і D реалізовуватимуться монохроматичні режими роботи.

Інкременти зростання. Проведемо аналіз інкрементів зростання у супергетеродинному плазмо-пучковому ЛВЕ з Н-убітронною накачкою на слабосигнальному етапі розвитку нелінійних процесів. Для цього розглянемо систему (4.51), у якій знехтуємо кубічно-нелінійними доданками. Далі проведемо перетворення аналогічні до тих, що виконані у підрозділі 3.3. У результаті отримаємо подібну до (3.63) систему квадратично-нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{1x,m}}{\partial t} + D_{1,m} E_{1x,m} &= K_{3,m} E_{3z,m} B_{2y,m}^*, \\ K_{1,m} \frac{\partial E_{1y,m}}{\partial t} + D_{1,m} E_{1y,m} &= K_{3,m} E_{3z,m} B_{2x,m}^*, \\ C_{1,m} \frac{\partial E_{3z,m}}{\partial t} - (C_{1,m} \Gamma_m + C_{2,m} \Gamma_m^2) E_{3z,m} &= \end{aligned}$$

$$= C_{3,m} E_{1x,m} B_{2y,m} + C_{4,m} \left\langle E_z \left(\int E_z dp_3 \right) \right\rangle_{mp3} + C_{5,m} \left\langle \left(\int E_z dp_3 \right)^2 \right\rangle_{mp3}. \quad (4.57)$$

У цій системі рівнянь коефіцієнти $K_{1,m}$, $D_{1,m}$, $K_{3,m}$, $C_{1,m}$, $C_{2,m}$, $C_{3,m}$, $C_{4,m}$, $C_{5,m}$ подані у явному вигляді у коментарях до формули (4.51); Γ_m – інкремент зростання m -ої гармоніки хвилі ХПЗ за рахунок плазмо-пучкової нестійкості.

Виходячи з системи рівнянь (4.57) знайдемо інкремент зростання першої гармоніки на слабосигнальному етапі розвитку нелінійних процесів, тобто коли вищі гармоніки на динаміку першої гармоніки практично не впливають. Шукаємо розв'язки у вигляді $E_{1x,1}$, $E_{3z,1} \sim \exp(\alpha t)$. Тоді з системи рівнянь (4.57) отримуємо для інкременту α співвідношення

$$\left(\frac{C_{2,1}}{C_{1,1}} (\alpha^2 - \Gamma_1^2) + (\alpha - \Gamma_1) \right) \cdot \alpha = \frac{C_{3,1} K_{3,1}}{C_{1,1} K_{1,1}} \cdot |B_{2x,1}|^2 \equiv \alpha_{par}^2, \quad (4.58)$$

де α_{par} – інкремент зростання за рахунок трихвильового параметричного резонансу між хвилею сигналу, полем ондулятора та хвилею ХПЗ.

Беручи до уваги те, що зазвичай $\Gamma_1 \gg \alpha_{par}$, знаходимо

$$\alpha = \Gamma_1 \left(1 + \frac{\alpha_{par}^2}{\Gamma_1^2 (1 + 2C_{2,1}\Gamma_1 / C_{1,1})} \right). \quad (4.59)$$

Як бачимо співвідношення (4.59) подібне до (3.65). Зрозуміло, що інкремент (4.59), як і (3.65) за математичною структурою співпадає з інкрементом супергетеродинного підсилення [2,3], отриманим в рамках модельної задачі.

Проведемо аналіз інкременту (4.59). З цього виразу випливає, що за умови, коли інкремент зростання за рахунок плазмо-пучкової нестійкості є

набагато більшим за інкремент зростання за рахунок параметричної взаємодії $\Gamma_1 \gg \alpha_{par}$, то інкремент зростання хвиль в досліджуваній системі співпадає з інкрементом зростання плазмо-пучкової нестійкості. Тоді використовуючи співвідношення (3.66), можемо записати

$$\alpha \approx \Gamma_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot \omega_b^{2/3} \cdot \omega_p^{1/3}}{\sqrt[3]{16} \cdot \gamma_b}. \quad (4.60)$$

Найближчим фізичним аналогом досліджуваного явища, як наголошувалося вище, є ефект супергетеродинного підсилення в двопотокових супергетеродинних лазерах на вільних електронах [2]. Для ілюстрації переваги плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ по відношенню до двопотокового супергетеродинного ЛВЕ проведемо порівняння отриманого інкременту зростання α з максимальним інкрементом зростання еквівалентної двопотокової системи α_2 [2]

$$\alpha_2 = \frac{\omega_b}{2 \cdot \gamma_b^{3/2}}. \quad (4.61)$$

Аналізуючи співвідношення (4.60) і (4.61) можемо зробити висновок, що інкремент зростання плазмо-пучкової системи α істотно більше за інкремент зростання еквівалентної двопотокової системи α_2 . Це пов'язано з тим, що, по-перше, інкремент плазмо-пучкової системи $\alpha \sim (\omega_p)^{1/3} (\omega_b)^{2/3}$, тоді як $\alpha_2 \sim \omega_b$. Завдяки тому, що ленгмюрівська частота плазми ω_p у реальних приладах може бути набагато більшою ніж ленгмюрівська частота пучка ω_b , інкремент α є більшим, ніж α_2 . По-друге, залежність інкрементів наростання від релятивістських чинників є різною:

$$\alpha \sim 1/(\gamma_b), \alpha_2 \sim 1/(\gamma_b)^{3/2}. \quad (4.62)$$

Це означає, що релятивізм пучка у разі плазмо-пучкової системи менше зменшує інкремент наростання, чим у разі двопотокової системи.

Для ілюстрації вище сказаного проведемо чисельні оцінки. Для параметрів, які представлені в таблиці 4.1, отримаємо, використовуючи співвідношення (4.60) і (4.61), що $\alpha = 5,46 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_2 = 0,35 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. Таким чином, інкремент наростання в досліджуваній системі набагато більший (а саме, більш ніж вдесятеро!), ніж у разі еквівалентної двопотокової системи. Звідси випливає можливість створення потужних пристроїв міліметрового і субміліметрового діапазонів хвиль на базі плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з Н-убітронною накачкою.

4.4. Аналіз нелінійної динаміки хвильових процесів [40-43]

Аналіз нелінійної динаміки хвильових процесів в плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з Н-убітронною накачкою, які описуються системою нелінійних рівнянь (4.51), проводимо з використанням стандартних чисельних методів. Розглядаємо систему, параметри якої представлені в таблиці 4.1. Напруженість магнітного поля ондулятора при цьому вибираємо такою, що дорівнює $1,0 \cdot 10^3 \text{ Э}$. Властивості системи підбираємо так, щоб хвиля ХПЗ мала максимальний інкремент зростання за рахунок плазмо-пучкової нестійкості. Тому хвильове число першої гармоніки хвилі ХПЗ приймаємо таким, що дорівнює $k_3 = \omega_p / v_b = 38,5 \text{ см}^{-1}$. Тоді довжина хвилі сигналу у вакуумі буде дорівнювати 1,8 мм, період ондуляції – 5,79 см. Зазначимо, що в цьому випадку реалізується мультигармонічний режим роботи. Щоб проаналізувати окремо мультигармонічні особливості хвилі сигналу та хвилі ХПЗ, вибираємо магнітне поле накачки монохроматичним. Тобто вищі гармоніки Н-убітронного поля приймаємо такими, що дорівнюють нулю.

Спочатку проведемо аналіз впливу взаємодії вищих гармонік на динаміку хвиль у мультигармонічному супергетеродинному ЛВЕ з Н-убітронною накачкою у слабосигнальному наближенні. Зрозуміло, що у цьому випадку кубічними доданками в (4.51) потрібно знехтувати і перейти до системи (4.57).

Проаналізуємо рівняння (4.57). Бачимо, що тут як і у випадку плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ з доплертронною накачкою врахування мультигармонічної взаємодії хвиль з математичної точки зору приводить до того, що в останньому з цих рівнянь з'являються доданки з коефіцієнтами $C_{4,m}$ та $C_{5,m}$. Врахування цих доданків кардинально впливає на характер взаємодії хвиль у плазмо-пучковому ЛВЕ з Н-убітронною накачкою. Це ілюструють рис. 4.3 та 4.4.

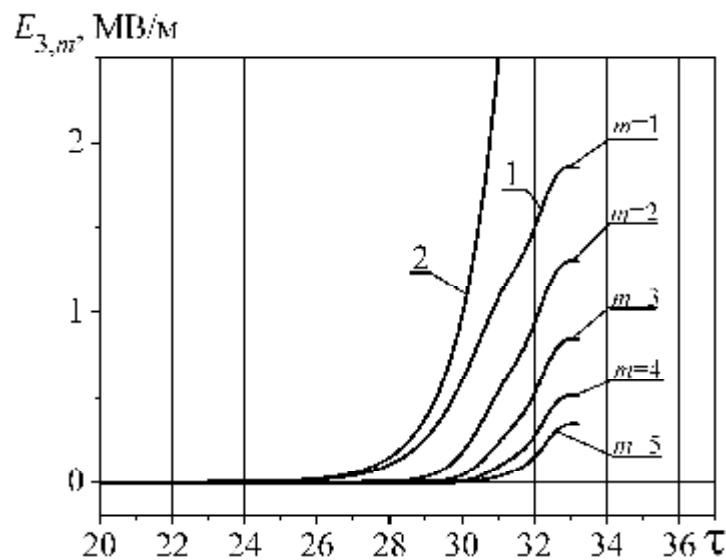


Рис. 4.3. Залежність амплітуд гармонік напруженості електричного поля ХПЗ $E_{3,m}$ від нормованого часу $\tau = (\delta\omega) \cdot t$

На рис. 4.3 зображено залежності амплітуд перших 5-ти гармонік хвиль напруженості електричного поля хвилі ХПЗ $E_{3,m} = |E_{3z,m}|$ від нормованого часу $\tau = \delta\omega \cdot t$, де $\delta\omega = \alpha$ ((4.60)) інкремент зростання плазмо-пучкової нестійкості. Розрахунки проводились для двох випадків. Залежність 2 на цьому рисунку отримана у результаті розрахунків, у яких враховано взаємодію тільки перших гармонік хвиль. Залежність 1 представляє результат розрахунку, у яких

враховано вплив перших десяти гармонік хвиль, що беруть участь в нелінійному процесі взаємодії. Тут також представлено динаміку 2-ої ($m=2$), 3-ої ($m=3$), 4-ої ($m=4$) та 5-ої ($m=5$) гармонік ХПЗ. Бачимо, що в досліджуваному плазмо-пучковому ЛВЕ з Н-убітронною накачкою генеруються вищі гармоніки хвилі ХПЗ, які мають сумірні амплітуди з основною гармонікою. Також мультигармонічний взаємодія вищих гармонік кардинально впливає на динаміку першої гармоніки: приводить не тільки до зменшення темпів її зростання, а і до появи насичення у квадратичному наближенні (залежність 1).

Подібний вплив мультигармонічної взаємодії спостерігаємо і на першу гармоніку хвилі сигналу. Так на рис. 4.4 зображено залежність амплітуди першої гармоніки хвилі сигналу $E_{1,1}$ від нормованого часу $\tau = (\delta\omega) \cdot t$. Залежність 1 на цьому рисунку отримана у результаті розрахунків, у яких

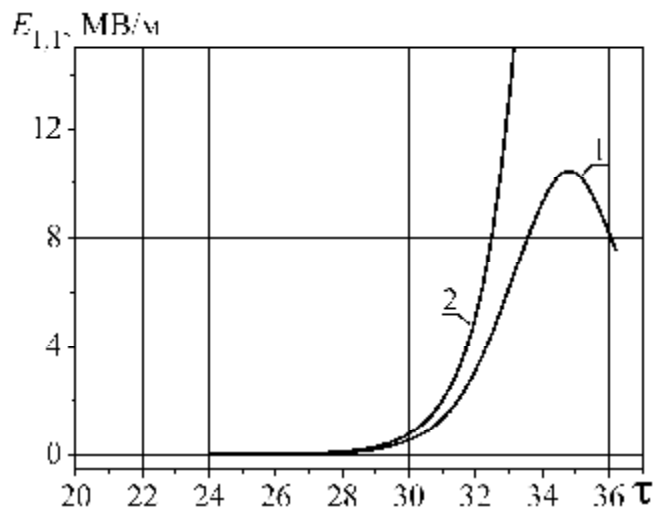


Рис. 4.4. Залежність амплітуди першої гармоніки хвилі сигналу $E_{1,1}$ від нормованого часу $\tau = (\delta\omega) \cdot t$

враховано вплив перших десяти гармонік хвиль, що беруть участь в нелінійному процесі взаємодії. Залежність 2 представляє результат розрахунку, в якому враховано взаємодію тільки перших гармонік хвиль. Бачимо, що і тут врахування мультигармонічної взаємодії приводить до зміни динаміки хвилі

сигналу: має місце зменшення темпів зростання аж до появи насичення у цьому наближенні.

Коли ми порівнюємо поведінку хвиль на слабосигнальному етапі розвитку нелінійних процесів у плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з Н-убітронною (рис. 4.3, 4.4) та доплертронною накачкою (рис. 3.2, 3.3), то слід зазначити наступне. За своїм характером поведінка цих хвиль є подібною. З математичної точки зору це є зрозумілим, тому що системи рівнянь (4.57) та (3.63) слабосигнального наближення мають однакову структуру. З фізичної точки зору це означає, що на початковому етапі взаємодії визначальними є процеси, що пов'язані з хвилями просторового заряду, які в обох випадках протікають однаково.

Тепер проаналізуємо вплив вищих гармонік сигналу та хвиль просторового заряду на рівні насичення. Для цього розглянемо розрахунки, які представлені у вигляді графіків на рис. 4.5 – 4.7.

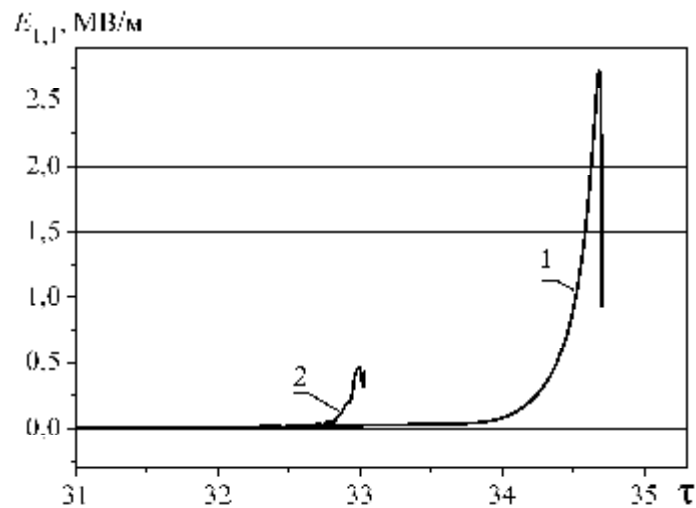


Рис. 4.5. Залежність амплітуди першої гармоніки хвилі сигналу $E_{1,1}$ від нормованого часу $\tau = \delta\omega \cdot t$

На рис. 4.5 подана залежність амплітуди першої гармоніки хвилі сигналу $E_{1,1} = \sqrt{|E_{1x,1}|^2 + |E_{1y,1}|^2}$ від нормованого часу $\tau = (\delta\omega) \cdot t$. Розрахунки проводились для двох випадків. У одному випадку (залежність 2)

враховувалися тільки перші гармоніки хвиль, в іншому випадку (залежність 1) приймалися до уваги 10 гармонік кожної із хвиль (вищі гармоніки циркулярно-поляризованого ондулятора при цьому приймалися такими, що дорівнюють нулю). З рис. 4.5, бачимо, що рівень насичення у разі врахування вищих гармонік (залежність 1) більш ніж в п'ять разів менше у порівнянні з варіантом розрахунків, коли вищі гармоніки не бралися до уваги (залежність 2).

Для з'ясування причини такого зниження розглянемо залежність амплітуд вищих гармонік хвилі сигналу $E_{1,m}$ від нормованого часу (рис. 4.6). На рисунку 4.6 залежність 1 характеризує динаміку першої гармоніки, залежність 2 – третьої, залежність 3 – п'ятої, залежність 4 – сьомої, залежність 5 – дев'ятої гармоніки. Амплітуди парних гармонік, як виявилось, дорівнюють нулю. Причина цього полягає в особливостях трихвильового параметричного резонансу циркулярно поляризованих хвиль. Аналізуючи вищі гармоніки сигналу (рис. 4.6), можемо переконатися, що непарні гармоніки мають амплітуди, величина яких сумірна, а деяких навіть вища, за амплітуду першої гармоніки. Зазначимо, що при цьому параметрична взаємодія сигналу з хвилями просторового заряду на вищих гармоніках не відбувається через те,

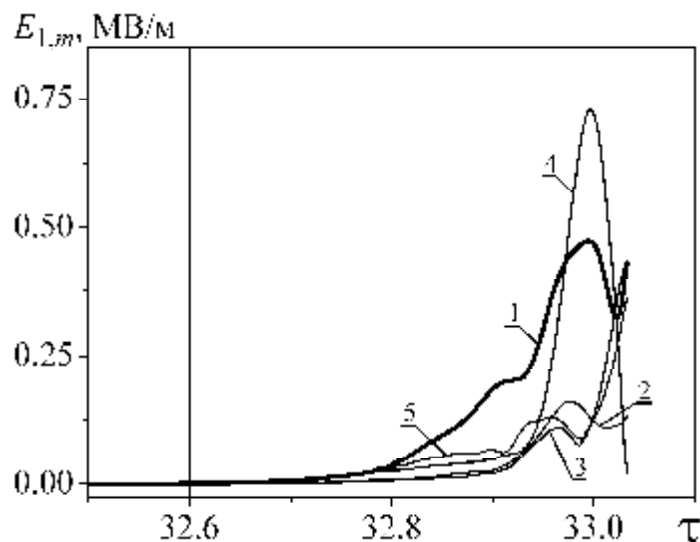


Рис. 4.6. Залежність амплітуд вищих гармонік хвилі сигналу $E_{1,m}$ від нормованого часу $\tau = \delta\omega \cdot t$

що вищі гармоніки магнітного поля накачки у моделі, яка розглядається, дорівнюють нулю. Таким чином, генерація вищих гармонік сигналу відбувається виключно за рахунок взаємодії гармонік електромагнітної хвилі між собою. Причиною інтенсивної взаємодії гармонік хвилі сигналу між собою пов'язана з тим, що дисперсійна залежність для електромагнітних хвиль, які приймають участь у трихвильовому параметричному резонансі у плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ, є лінійною (залежність 3 на рис. 4.2). Подібні мультигармонічні взаємодії, як відомо, мають місце для хвиль, що розповсюджуються у середовищах без дисперсії [166]. Енергія, яка витрачається на генерацію вищих гармонік, передається від першої гармоніки. Саме через цю причину рівень насичення амплітуди першої гармоніки у п'ять разів менше у порівнянні з варіантом розрахунків, коли вищі гармоніки не бралися до уваги (залежність 1 на рис. 4.5).

На рис. 4.7 подані залежності амплітуд перших гармонік напруженості електричного поля ХПЗ від нормованого часу $\tau = (\delta\omega) \cdot t$. Залежність 1 на цьому рисунку відповідає випадку, коли в розрахунках враховувався вплив 10 перших гармонік хвиль, які взаємодіють, а залежність 2 – коли в розрахунках враховувалася тільки перші гармоніки хвиль. Із зіставлення цих залежностей випливає, що при врахуванні впливу вищих гармонік рівень насичення 1-ої гармоніки ХПЗ зменшується більш ніж в 2 рази, час насичення також зменшується. При цьому, як показують дослідження, амплітуди вищих гармонік хвилі ХПЗ є сумірними з амплітудою першої гармоніки ХПЗ. Така поведінка гармонік хвилі ХПЗ пояснюється також тим, що дисперсійна крива (рис. 3.6) для неї є близькою до лінійної. Тому між гармоніками хвилі ХПЗ має місце достатньо інтенсивна параметрично-резонансна взаємодія. Результат такої взаємодії приводить, з одного боку, до генерації вищих гармонік ХПЗ, а з іншого боку, до зменшення амплітуди першої гармоніки ХПЗ у порівнянні з випадком, коли врахування вищих гармонік не проводився. Зменшення рівня насичення першої гармоніки ХПЗ є також одним із чинників, які приводять до зниження рівня насичення першої гармоніки хвилі сигналу.

Підсумовуючи викладене вище, можемо стверджувати, що врахування взаємодії вищих гармонік у плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ з Н-убітронною накачкою є обов'язковим.

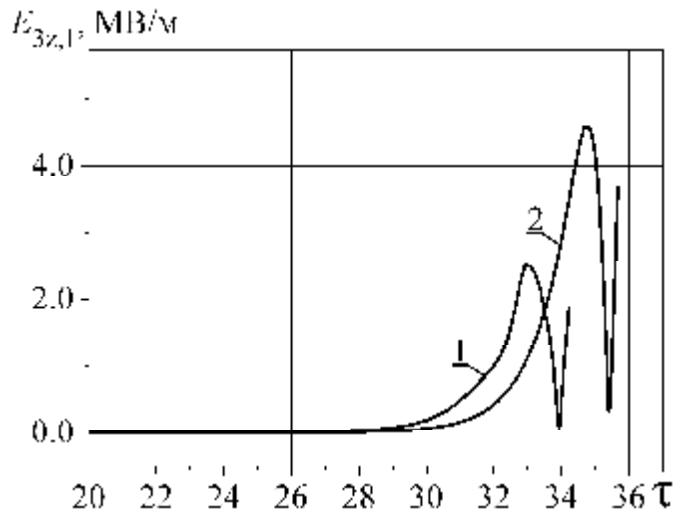


Рис. 4.7. Залежність амплітуди першої гармоніки напруженості електричного поля ХПЗ $E_{3z,1}$ від нормованого часу $\tau = \delta\omega \cdot t$

Порівняємо рівень насичення сигналу у плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з доплетронною накачкою та Н-убітронною накачкою, які використовують однакові за параметрами плазмо-пучкові системи (залежність 1 на рис. 4.5 та залежність 1 на рис. 3.4). Бачимо, що для плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з доплетронною накачкою рівень насичення є більшим майже у п'ять разів. З іншого боку у ЛВЕ доплетронного типу вищі гармоніки практично відсутні. Тобто тут реалізується монохроматичний режим взаємодії. Причина цього полягає у використанні у трихвильовому параметричному резонансі незвичайної електромагнітної хвилі [174] (залежність 2 на рис. 4.2), яка характеризується достатньо сильною дисперсією. На відміну від доплетронної моделі у Н-убітронній генеруються інтенсивні вищі гармоніки електромагнітної хвилі з амплітудами сумірними з амплітудою першої гармоніки. Це означає, що в цьому випадку енергія електромагнітної хвилі розподіляється за мультигармонічним спектром сигналу. Незважаючи на те, що перша гармоніка сигналу в Н-убітронній моделі

є меншою за аналогічну у доплертронній моделі, сукупна потужність усіх гармонік є досить значною. Так для досліджуваного випадку було отримано, що потужність мультигармонічної електромагнітної хвилі дорівнює 2,5 МВт. Звернемо увагу, що при цьому використовувався електронний пучок з помірними параметрами для такого класу пристроїв ($\omega_b = 2 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$, $\gamma_b = 2$, сила струму 37 А). Зрозуміло, що використовуючи більш інтенсивні електронні пучки, наприклад кілоамперні, ми отримаємо суттєве збільшення вихідної потужності мультигармонічної електромагнітної хвилі. Таким чином, можна стверджувати, що плазмо-пучкові супергетеродинні ЛВЕ з Н-убітронною накачкою здатні формувати інтенсивне мультигармонічне електромагнітне випромінювання в міліметровому діапазоні довжин хвиль і тому є перспективними для створення нового типу потужних підсилювачів і генераторів цього діапазону. Їх можна використовувати для формування потужних сигналів з широким мультигармонічним спектром.

4.5. Висновки до розділу 4

1. Вперше побудована нелінійна самоузгоджена мультигармонічна кубічно-нелінійна теорія плазмо-пучкового супергетеродинного лазера на вільних електронах з Н-убітронною накачкою. Отримано систему кубічно-нелінійних вкорочених рівнянь для амплітуд гармонік напруженості електричного поля електромагнітної хвилі та електронної хвилі ХПЗ.

2. Знайдені аналітичні вирази для інкрементів зростання хвиль. Показано, що плазмо-пучкові супергетеродинні ЛВЕ з Н-убітронною накачкою мають інкременти зростання, які на порядок перевищують інкременти зростання еквівалентних двопотокових супергетеродинних ЛВЕ.

3. Вперше встановлено, що плазмо-пучкові супергетеродинні ЛВЕ з Н-убітронною накачкою мають чотири різні режими роботи. Одні режими дозволяють підсилювати сигнали, які мають високий ступінь

монохроматичності. Інші режими дозволяють формувати сигнал з досить широким мультигармонічним спектром сигналу.

4. Проаналізовано вплив параметрично-резонансних взаємодій вищих гармонік на динаміку основних гармонік сигналу та хвилі ХПЗ в Н-убітронних плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ. Показано, що мультигармонічна взаємодія хвиль приводить до якісної зміни динаміки основних гармонік навіть у квадратичному наближенні: має місце не тільки зменшення темпів зростання, а і з'являється насичення амплітуд гармонік. З'ясовано, що початковому етапі мультигармонічної взаємодії хвиль визначальними є процеси, які пов'язані з хвилями просторового заряду.

5. Встановлено, що сукупна потужність усіх гармонік електромагнітної хвилі в досліджуваній моделі плазмо-пучкові супергетеродинні ЛВЕ з Н-убітронною накачкою дорівнює 2,5 МВт при досить помірних параметрах для такого класу пристроїв ($\omega_b = 2 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$, $\gamma_b = 2$, сила струму 37 А). Це дозволяє зробити висновок, що плазмо-пучкові супергетеродинні ЛВЕ з Н-убітронною накачкою здатні формувати інтенсивне мультигармонічне електромагнітне випромінювання в міліметровому діапазоні довжин хвиль і тому є перспективними для створення нового типу потужних підсилювачів і генераторів цього діапазону.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі на основі методу усереднених характеристик побудована нелінійна теорія нового джерела потужного електромагнітного випромінювання в міліметровому-субміліметровому діапазоні хвиль – мультигармонічного плазмо-пучкового супергетеродинного лазера на вільних електронах. Найбільш важливі результати дисертації полягають у такому.

1. Уперше отримано систему квадратично-нелінійних рівнянь для амплітуд гармонік хвиль у плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ як з доплертронною, так і Н-убітронною накачкою з урахуванням мультигармонічної взаємодії. З'ясовано, що завдяки врахуванню мультигармонічної взаємодії хвиль просторового заряду у системі квадратично-нелінійних рівнянь з'являються додаткові доданки. Чисельний аналіз системи рівнянь показав, що мультигармонічна взаємодія хвиль приводить до якісної зміни динаміки хвиль: у рамках слабосигнального наближення має місце насичення основних гармонік.

2. Отримано аналітичні вирази для інкрементів зростання електромагнітного сигналу в плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ як з доплертронною, так і Н-убітронною накачкою. Так, для плазмо-пучкової системи з ленгмюрівськими частотами плазми $\omega_p \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$ та пучка $\omega_b \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$, енергією електронів пучка 1 МеВ інкремент зростання хвиль має значення $0,38 \text{ см}^{-1}$, коли для еквівалентного параметричного ЛВЕ його значення дорівнює $0,034 \text{ см}^{-1}$. З аналізу інкрементів зростання з'ясовано, що у плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ суттєво вищі (більш ніж у 10 разів) у порівнянні з інкрементами еквівалентних двопотокових супергетеродинних ЛВЕ.

3. Вперше з'ясовано, що плазмо-пучкові супергетеродинні лазери на вільних електронах з Н-убітронною накачкою можуть працювати у чотирьох

різних режимах. Ці режими відрізняються типом електромагнітної хвилі, яка бере участь у трихвильовому параметричному резонансі з хвилею ХПЗ та магнітним Н-убітронним полем накачки. Два режими дозволяють підсилювати сигнали, що мають високий ступінь монохроматичності. Два інших режими завдяки використанню лінійних ділянок дисперсійних залежностей дозволяють формувати сигнал з широким мультигармонічним спектром. У цьому випадку умова трихвильового параметричного резонансу виконується не тільки для основних, але і для вищих гармонік.

4. На основі методу усереднених характеристик отримано самоузгоджені системи кубічно-нелінійних рівнянь для амплітуд гармонік хвиль супергетеродинного плазмо-пучкового лазера на вільних електронах як з доплертронною, так і Н-убітронною накачками. Кубічно-нелінійні рівняння дозволяють проводити дослідження динаміки амплітуд хвиль з урахуванням параметрично-резонансних взаємодій як між гармоніками одного і того самого типу хвилі, так і між гармоніками різних типів хвиль, визначити рівні та механізми насичення.

5. Встановлено, що нехтування взаємодією вищих гармонік у супергетеродинних плазмо-пучкових лазерах на вільних електронах приводить до збільшення рівня насичення у два та більше разів, чим підтверджено, що врахування мультигармонічної взаємодії у теорії плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ є обов'язковим. З'ясовано, що основні механізми насичення у цих приладах пов'язані з нелінійним зміщенням частоти та захопленням плазмовою хвилею електронів пучка.

6. Аналіз рівнів насичення показав, що плазмо-пучкові супергетеродинні ЛВЕ як з доплертронною, так з Н-убітронною накачкою характеризуються високими потужностями. Так, для системи з помірними для такого класу пристроїв параметрами ($\omega_b = 2 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$, $\gamma_b = 2$, сила струму 37 А) потужність дорівнює одиницям мегават. Використовуючи більш інтенсивні електронні пучки, наприклад кілоамперні, ці прилади будуть мати вихідну потужність електромагнітної хвилі тероватного рівня. Це означає, що плазмо-пучкові

супергетеродинні ЛВЕ є перспективними для створення потужного електромагнітного випромінювання в міліметровому-субміліметровому діапазоні довжин хвиль.

7. Подальшого розвитку набула загальна методика застосування методу усереднених характеристик у частині спряження її з методом повільно змінних амплітуд у задачах нелінійної теорії супергетеродинних лазерів на вільних електронах.

ПРИМІТКИ

На завершення автор висловлює подяку науковому керівнику, кандидату фізико-математичних наук, доценту кафедри загальної та теоретичної фізики СумДУ Лисенку Олександровичу за постійну увагу і керівництво під час роботи над дисертацією, доктору фізико-математичних наук, професору кафедри теоретичної фізики Національного авіаційного університету Кулішу Віктору Васильовичу за консультування та постійну допомогу у наукових дослідженнях за темою дисертаційної роботи, доктору фізико-математичних наук, професору кафедри наноелектроніки СумДУ Воробйову Г.С. за підтримку та участь в обговоренні результатів дисертаційної роботи.

Також хочу висловити глибоку подяку колективу кафедри загальної та теоретичної фізики за участь в обговоренні результатів дисертаційної роботи та моральну підтримку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Kulish V.V. Hierarchical methods: Hierarchy and Hierarchic Asymptotic Methods in Electrodynamics, V.1 / V.V. Kulish. – Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 2002. – 380 p.
2. Kulish V.V. Hierarchical methods: Undulative electrodynamic system, V.2 / V.V. Kulish. – Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 2002. – 396 p.
3. Kulish V.V. Methods of averaging in nonlinear problem of relativistic electrodynamics / Kulish V.V. – Tampa, Atlanta: World Federation Published Company, Inc., 1996. – 263 p.
4. Маршалл Т. Лазеры на свободных электронах / Т. Маршалл [пер. с англ.] – М.: Мир, 1987. – 240 с.
5. Brau C. Free electron laser / C. Brau. – Boston: Academic Press, 1990. – 420 p.
6. Freund H.P. Principles of free-electron lasers / H.P.Freund, T.M.Antonsen – London : Chapman & Hall, 1996. – 576 p.
7. Генераторы когерентного излучения на свободных электронах: [Сб. статей. Пер. с англ. / Под ред. А.А. Рухадзе] – М.: Мир, 1983. – 282 с.
8. Болонин О.Н. Супергетеродинное усиления электромагнитных волн в системе двух релятивистских электронных потоков / О.Н. Болонин, В.В. Кулиш, В.П. Пугачев // УФЖ. – 1988. – Т. 33, № 10. – С. 1465–1468.
9. Патент SU 1809934 A9 / Кулиш В. В., Сторишко В. Е. Приоритет от 18.07.90. // Опубликовано в бюллетене изобретений СССР, № 14, 15.04.93.
10. Кулиш В.В. К теории релятивистских электронно-волновых лазеров на свободных электронах / В.В. Кулиш // УФЖ. – 1991. – Т. 36, № 5. – С. 686–693.
11. Kulish V.V. Superheterodyne electron-wave free electron laser / V.V. Kulish // The International Journal of Infrared and Millimeter Waves. – 1993. – Vol. 14(3). – P. 415–450.

12. Bekefi G. Two-stream, free-electron lasers / G. Bekefi, K.D. Jacobs // *J.Appl.Phys.* – 1982. – Vol. 53, Issue 6. – P. 4113–4121.
13. Botton K. Two-stream instability in free electron lasers / K. Botton, A. Ron // *IEEE Transactions on Plasma Science.* – 1990. – Vol. 18, Issue 3. – P. 416–423.
14. Lashmore-Davies C.N. Two-stream instability, wave energy, and the energy principle / C.N. Lashmore-Davies // *Phys. Plasmas* – 2007. – Vol. 14, N9. – P. 092101.1–092101.5.
15. Wilhelmsson H. Double beam free electron laser / H. Wilhelmsson // *Physica Scripta.* – 1991. – Vol. 44. – P. 603-605.
16. Кулиш В.В. Кубически-нелинейная теория электронно-волновых двухпоточковых лазеров на свободных электронах с Н-убитронной накачкой / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, М.Ю. Ромбовский // *Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-физические исследования.* – 2010. – № 54. – С. 111–120.
17. Патент 87750 (Україна) Супергетеродинний параметричний лазер на вільних електронах з повздожнім електричним ондулятором. / В.В. Куліш, О.В. Лисенко, І.В. Губанов, А.Ю. Бруснік. // *Опубл. в Б.В.*, 2009, №15.
18. Коцаренко Н.Я. Об эффекте супергетеродинного усиления электромагнитных волн в системе плазма-пучок / Н.Я. Коцаренко, В.В. Кулиш // *Радиотехника и электроника.* – 1980. – Т. 25, № 11. – С. 2470–2471.
19. Коцаренко Н.Я. О возможности супергетеродинного усиления электромагнитных волн в электронных потоках / Н.Я. Коцаренко, В.В. Кулиш // *ЖТФ.* – 1980. – Т. 50, № 17. – С. 220–222.
20. Кулиш В.В. Физика двухпучкового лазера на свободных электронах. / В.В. Кулиш // *Вестник МГУ. Серия: Физика и Астрономия.* – 1992. – Т. 33, № 3. – С. 64–78.
21. Кулиш В.В. К теории супергетеродинных лазеров на свободных электронах клистронного типа / В.В. Кулиш // *УФЖ.* – 1991. – Т. 36, № 1. – С. 28–33.
22. Kulish V.V. Two-Stream Free Electron Lasers: General Properties / V.V. Kulish,

- A.V. Lysenko, V.I. Savchenko // *The International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. – 2003. – Vol. 24(2). – P. 129–172.
23. Kulish V.V. Two-Stream Free Electron Lasers: Physical Analysis of the Systems with Monochromatic Pumping / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, V.I. Savchenko // *The International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. – 2003. – Vol. 24(3). – P. 285–309.
24. Кулиш В.В. К теории эффекта супергетеродинного усиления электромагнитных волн в плазме двухпучковой релятивистской электронной системы / В.В. Кулиш, В.П. Пугачев // *Физика плазмы*. – 1991. – Т. 17, № 6. – С. 696–705.
25. Kulish V.V. Nonlinear self-consistent theory of two stream superheterodyne free electron lasers / V.V. Kulish, S.A. Kuleshov, A.V. Lysenko // *The International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. – 1994. – Vol. 15(1). – P. 77–120.
26. Куліш В.В. Нелінійна мультигармонічна теорія ефекту супергетеродинного підсилення у моделях клістронного типу / В.В. Куліш, О.В. Лисенко, В.І. Савченко // *Вісник Київського університету: Серія “фізико-математичні науки”*. – 2002. – № 5. – С. 61–70.
27. The Two-Stream Free Electron Laser as a Source of Electromagnetic Femto-Second Wave Packages / [Kulish V.V., Lysenko O.V., Savchenko V.I., Majornikov I.G.] // *Laser Physics*. – 2005. – Vol. 15, № 12. – P. 1629–1633.
28. Kulish V.V. The two-stream multi-harmonic FEL as a powerful source of femto-second wave package / V.V. Kulish, O.V. Lysenko, I.G. Majornikov // *Proceedings of the National Aviation University*. – Kiev: National Aviation University, 2005. – P. 126-130.
29. The Two-Stream Free Electron Laser as a Source of Electromagnetic Femto-Second Wave Packages / [V.V. Kulish, O.V. Lysenko, V.I. Savchenko, I.G. Majornikov] // *Proceeding of the International Workshop "Microwave, Radar and Remote Sensing" MRRS 2005*. – Kiev, 2005. – P. 304-309.
30. Кулиш В.В. Активные ЛСЭ-клистроны как формирователи фемтосекундных кластеров электромагнитного поля. Общее описание

- / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, А.Ю. Брусник // Журнал нано- та електронної фізики. – 2010. – № 2(2). – С. 50–78.
31. Kulish V.V. Two-Stream Free Electron Lasers: Physical and Project Analysis of the Multiharmonical Models / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, V.I. Savchenko // The International Journal of Infrared and Millimeter Waves. – 2003. – Vol. 24(4). – P. 501–524.
 32. Куліш В.В. Застосування методу усередненого квазігідродинамічного рівняння у нелінійних задачах теорії двопотокових лазерів на вільних електронах / В.В. Куліш, О.В. Лисенко, В.І. Савченко // Вісник Київського університету: Серія “фізико-математичні науки”. – 2000. – № 4. – С. 471–480.
 33. Куліш В.В. Нелінійна ієрархічна теорія двопотокової нестійкості у релятивістських плазмоподібних системах / В.В. Куліш, О.В. Лисенко, В.І. Савченко // Вісник Сумського державного університету. Серія: Фізика, математика, механіка. – 2001. – № 3(24)–4(25). – С. 12–17.
 34. Куліш В.В. До теорії плазмопучкового супергетеродинного лазера на вільних електронах / В.В. Куліш, О.В. Лисенко, В.В. Коваль // Вісник Сумського державного університету. Серія: Фізика, математика, механіка. – 2007. – № 2. – С. 112–119.
 35. Кулиш В.В. К теории супергетеродинного усиления электромагнитных волн в плазма-пучковой системе / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, В.В. Коваль // 17-я Международная Крымская конференция "СВЧ – техника и телекоммуникационные технологии" (КрыМиКо'2007). – Севастополь: "Вебер", 2007. – С. 621–623.
 36. Kulish V.V. Quadratic nonlinear theory of superheterodyne electromagnetic waves amplification in plasma beam system / V.V. Kulish, O.V. Lysenko, V.V. Koval // 8-th International Young Scientists Conference Optics and High Technology Material Science SPO 2007. – Kiev: National University, 2007. – P. 130.
 37. Кулиш В.В. Мультигармоническая кубически-нелинейная теория

- супергетеродинных плазменно-пучковых лазеров на свободных электронах с доплертронной накачкой / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, В.В. Коваль // Прикладная физика. – 2009. – №. 5. – С. 76–81.
38. Кулиш В.В. Кубически-нелинейная теория супергетеродинных плазма-пучковых лазеров на свободных электронах с доплертронной накачкой / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, В.В. Коваль // 18-я Международная Крымская конференция "СВЧ – техника и телекоммуникационные технологии" (КрыМиКо'2008). – Севастополь: "Вебер", 2008. – С. 650–651.
39. Kulish V.V. On the theory of a plasma-beam superheterodyne free electron laser with H-ubitron pumping / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, V.V. Koval // Technical Physics Letters. – 2009. – V.35, N8. – P. 696–699.
40. Кулиш В.В. Нелинейная теория плазма-пучкового супергетеродинного лазера на свободных электронах с H-убитронной накачкой / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, В.В. Коваль // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. – 2009. – № 24. – С. 108–114.
41. Кулиш В.В. Теория плазма-пучкового супергетеродинного лазера на свободных электронах с H-убитронной накачкой / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, В.В. Коваль // 19-я Международная Крымская конференция "СВЧ – техника и телекоммуникационные технологии" (КрыМиКо'2009). – Севастополь: "Вебер", 2009. – С. 677–678.
42. Кулиш В.В. Нелинейная теория плазма-пучкового супергетеродинного лазера на свободных электронах с H-убитронной накачкой / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, В.В. Коваль // Міжнародна конференція молодих учених і аспірантів ІЕФ-2009. – Ужгород: Інститут експериментальної фізики НАН України. – 2009. – С. 41.
43. Кулиш В.В. Кубически-нелинейная теория супергетеродинных плазма-пучковых лазеров на свободных электронах с H-убитронной накачкой / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, В.В. Коваль // Радиофизика и электроника. – : Харьков: Институт радиофизики и электроники НАН Украины. – 2009. – Т. 14, № 3, – С. 383–388.

44. Kulish V.V. Coupled parametric resonances / V.V. Kulish, O.N. Bolonin, S.S. Kochmanski // *Acta Phys.Polonica* – 1989. – Vol. A76, №3. – P. 455-472.
45. Патент SU 835259 / Перекупко В.А., Силивра А.А., Коцаренко Н.Я., Кулиш В.В. Приоритет от 28.01.80.
46. Патент SU 1837722 / Кулиш В.В., Сторишко В.Е. Приоритет от 15.02.91.
47. Tarakanov V.P. Dynamics of beam instability in a finite plasma volume: Numerical experiment / V.P. Tarakanov, E.G. Shustin // *Plasma Physics Reports*. – 2007. – Vol. 33, № 2. – P. 130–137.
48. Mehdian H. Two-stream instability in free electron lasers with a planar wiggler and an axial guide magnetic field / H. Mehdian, S. Saviz, A. Hasanbeigi // *Phys. Plasmas* – 2008. – Vol. 15, N4. – P. 043103.1–043103.4.
49. Davidova T.A, Resonant and nonresonant wave excitation in a double beam free electron laser / T.A. Davidova, H. Wilhelmsson // *Physica Scripta*. – 1992. – Vol. 45. – P. 607-610.
50. Bekefi G. Double-stream cyclotron maser / G. Bekefi, // *J.Appl.Phys.* – 1992. – Vol. 71, Issue 9. – P. 4128–4131.
51. Гуляев Ю.В. Супергетеродинное усиление электромагнитных волн / Ю.В. Гуляев, П.Е. Зильберман // *ФТТ*. – 1971. – Т. 13, № 4. – С. 955–957.
52. Давидсон Р. Теория заряженной плазмы: / Р. Давидсон [пер. с англ.] – М.: Мир, 1978. – 204 с.
53. Вильгельмсон Х. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме / Х. Вильгельмсон, Я. Вейланд. [пер. с англ.] – М.: Энергоиздат, 1981. – 224 с.
54. Ахиезер А.И. О взаимодействии пучков заряженных частиц с электронной плазмой / А.И. Ахиезер, Я.Б. Файнберг // *ДАН СССР*. – 1949. – Т. 69, № 4. – С. 555–556.
55. Bohm D. Theory of Plasma Oscillations. A. Origin of Medium-Like Behavior / D. Bohm, E.P. Gross // *Phys. Rev.* – 1949. – Vol. 75 – P. 1851-1864.
56. Демирханов Р.А. Взаимодействие пучка заряженных частиц с плазмой //Р.А. Демирханов, А.К. Геворков, А.Ф. Попов / *ЖТФ*. – 1960. – Т. 30,

вып. 3. – С. 315–319.

57. Взаимодействие электронного пучка с плазмой // И.Ф. Харченко, Я.Б. Файнберг, Р.М. Николаев [и др.] / ЖЭТФ. – 1960. – Т. 38, вып. 3. – С. 685–691.
58. Кузелев М.В. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, П.С. Стрелков. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002. – 544 с.
59. Кузелев М.В. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 336 с.
60. Рухадзе А.А. Физика сильноточных релятивистских электронных пучков / [А.А. Рухадзе, Л.С. Богданкевич, С.Е. Росинский, В.Г. Рухлин]. – М.: Атомиздат, 1980. – 167 с.
61. Шматько А.А. Электронно-волновые системы миллиметрового диапазона. Том I. / А.А. Шматько. – Харьков: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2008. – 464 с.
62. Liu Z.J. Self-organization of plasma due to electron beam instability / Z.J. Liu, L.H. Cao, C.Y. Zheng // Phys. Plasmas – 2006. – Vol. 13, N5. – P. 053103.1–053103.5.
63. Кондратенко А.Н. Основы плазменной электроники / Кондратенко А.Н., Куклин В.М.. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.
64. Kartashov I.N. Electromagnetic beam-plasma interactions in a magnetic field / I.N. Kartashov, M.V. Kuzelev, A.A. Rukhadze // Plasma Physics Reports. – 2009. – Vol. 35, № 2. – P. 169–176.
65. Бобылев Ю.В. К нелинейной теории коллективного черенковского взаимодействия плотного релятивистского пучка с плазмой / Ю.В. Бобылев, М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе // Физика плазмы. – 2009. – Т. 35, № 6. – С. 533–541.
66. Бобылев Ю.В. Нелинейная теория релятивистских пучково-плазменных неустойчивостей в режиме коллективного эффекта Черенкова / Ю.В. Бобылев, М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе // Физика плазмы. – 2008. –

- Т. 34, № 2. – С. 122–139.
67. Кузелев М.В. Спонтанное и вынужденное излучение электрона, электронного сгустка и электронного пучка в плазме / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе // УФН. – 2008. – Т. 178, № 10. – С. 1025–1055.
 68. Progress in theory of instabilities in a rotating plasma / [A.B. Mikhailovskii, J.G. Lominadze, A.P. Churikov, V.D. Pustovitov] // Plasma Physics Reports. – 2009. – Vol. 35, № 4. – P. 273–314.
 69. Bret A. Electromagnetic instabilities for relativistic beam-plasma interaction in whole k space: Nonrelativistic beam and plasma temperature effects / A. Bret, M.C. Firpo, C. Deutsch // Phys. Rev. E. – 2005. – Vol. 72, N1. – P. 695–709.
 70. Mohsenpour T. Instability of wave modes in a free-electron laser with a helical wiggler and ion-channel guiding / T. Mohsenpour, V. Maraghechi // Phys. Plasmas – 2008. – Vol. 15, N4. – P. 113101.1–113101.10.
 71. Лотов К.В. О насыщении двухпоточковой неустойчивости электронного пучка в плазме / К.В. Лотов, А.В. Терехов, И.В. Тимофеев // Физика плазмы. – 2009. – Т. 35, № 6. – С. 567–574.
 72. Красовицкий В.Б. Электромагнитная волна в релятивистской магнитоактивной плазме / В.Б. Красовицкий // Физика плазмы. – 2009. – Т. 35, № 12. – С. 1126–1132.
 73. Babaei S. Plasma-loaded free-electron laser with thermal electron beam and background plasma / S. Babaei, V. Maraghechi // Phys. Plasmas – 2008. – Vol. 15, N1. – P. 013102.1–013102.10.
 74. Рагозин Е.Н. Продвижение лазеров на свободных электронах в рентгеновскую область спектра / Е.Н. Рагозин, И.И. Собельман // УФН. – 2004. – Т. 174, № 2. – С. 207–208.
 75. Joshi C. The development of laser- and beam-driven plasma accelerators as an experimental field / C. Joshi // Phys. Plasmas – 2007. – Vol. 14, N5. – P. 055501.1–055501.14.
 76. GeV electron beams from a centimetre-scale accelerator / W.P. Leemans, B. Nagler, A.J. Gonsalves [et al.] // Nature Physics. – 2006. – V.2. – P. 696–699.

77. Honda M. Two-dimensional particle-in-cell simulation for magnetized transport of ultra-high relativistic currents in plasma / M. Honda, J. Meyer-ter-Vehn, A. Pukhov // *Phys. Plasmas* – 2000. – Vol. 7, N4. – P. 1302.1–1302.7.
78. Кузелев М.В. Современное состояние исследований в области плазменной релятивистской СВЧ-электроники в ИОФ РАН / Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* – 2001. – Т. 9, № 2. – С. 3–26.
79. Terahertz free-electron lasers with bragg structures based on the coupling between traveling and quasicritical waves / N.S. Ginzburg, V.Yu. Zaslavskii, I.V. Zotova [et al.] // *JETP Letters.* – 2009. – V.91, N6. – P. 266–270.
80. Кузелев М.В. Релятивистская плазменная СВЧ-электроника / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, П.С. Стрелков // *УФН.* – 1985. – Т. 146, № 4. – С. 709–713.
81. Гайдук В.И. Физические основы электроники СВЧ / В.И. Гайдук, К.И. Палатов, Д.Н. Петров – М.: Советское радио, 1971. – 340 с.
82. Мирошниченко В. И. Вынужденное когерентное рассеяние электромагнитной волны релятивистским электронным пучком в магнитном поле / Мирошниченко В. И. // *Физика плазмы.* – 1976. – т. 2, № 5. – С.789 – 794.
83. Мирошниченко В. И. Вынужденное когерентное рассеяние электромагнитных волн релятивистским электронным пучком в магнитном поле / Мирошниченко В. И. // *Письма в ЖТФ.* – 1975. – т. 1, № 23. – С. 1057 – 1060.
84. Sprangle P. Stimulated cyclotron resonance scattering and production of powerful submillimeter radiation / Sprangle P., Granatstein V.L. // *Appl. Phys. Lett.* – 1974. – Vol. 25, № 7. – P. 377-379.
85. Buts V.A. Free Electron Lasers with Slow Waves / V.A. Buts, A.M. Yegorov, A.P. Tolstoluzhsky // *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear Physics Investigations.* – 2008. – № 5. – P. 111–115.
86. Sprangle P. Stimulated collective scattering from a magnetized relativistic electron beam / Sprangle P., Granatstein V.L., Baker L. // *Phys. Rev. A.* – 1975.

– Vol. 12, N4. – P. 1697–1701.

87. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей Т.1. / А.Б. Михайловский. – М.: Атомиздат, 1975. – 272 с.
88. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей Т.2. / А.Б. Михайловский. – М.: Атомиздат, 1977. – 360 с.
89. Куліш В.В. Метод асимптотичного інтегрування систем нелінійних диференційних рівнянь в частинкових похідних та застосування в задачах руху заряджених частинок в заданих електромагнітних полях / В.В. Куліш, О.В. Лисенко, В.І. Савченко // Вісник Сумського державного університету. Серія: Фізика, математика, механіка. – 2001. – № 3(24)–4(25). – С. 5–12.
90. Marshall T.C. Free electron laser / T.C. Marshall. – New York, London: Mac Millan, 1985. – 60 p.
91. Шарма Б.С. Численное исследование влияния геометрических параметров на неустойчивость в лазере на свободных электронах / Б.С. Шарма, Н.К. Джайман // Физика плазмы. – 2009. – Т. 35, № 2. – С. 179–184.
92. Freund H.P. Principles of Free Electron Lasers / H.P. Freund, T.M. Antonsen. – Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer, 1996. – 541 p.
93. Saldin E.L. The physics of Free Electron Lasers / E.L. Saldin, E.V. Scheidmiller, M.V. Yurkov. – Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer, 2000. – 464 p.
94. Shiozawa T. Classical Relativistic Electrodynamics: Theory of Light Emission and Application to Free Electron Lasers / T. Shiozawa. – Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer, 2004. – 233 p.
95. Kulish V.V. Nonlinear self-consistent theory of superheteronyne and parametric electron laser / V.V. Kulish, S.A. Kuleshov, A.V. Lysenko // The International Journal of Infrared and Millimeter Waves. – 1993. – Vol. 14(3). – P. 451–568.
96. Кулиш В.В. Нелинейная самосогласованная теория лазеров на свободных электронах. Изохронные модели / В.В. Кулиш, С.А. Кулешов // УФЖ. – 1993. – Т. 38, № 1. – С. 9–19.
97. Кулиш В.В. Нелинейная самосогласованная теория лазеров на свободных электронах. Эффект нелинейной генерации продольного электрического

- поля / В.В. Кулиш, С.А. Кулешов // УФЖ. – 1993. – Т. 38, № 2. – С. 198–206.
98. Кулиш В.В. Применение метода усредненного кинетического уравнения в задачах теории трех волнового параметрического резонанса в плазме релятивистских электронных пучков / В.В. Кулиш, С.А. Кулешов, А.В. Лысенко // Физика плазмы. – 1993. – Т. 19, № 2. – С. 199–216.
99. Кулиш В.В. Метод усредненного кинетического уравнения и его применение в нелинейных задачах электродинамики плазмы / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, С.А. Кулешов // Физика плазмы. – 1993. – Т. 19, № 2. – С. 216–227.
100. Куліш В.В. Теорія електронно-хвильових двопотокових лазерів на вільних електронах з Н-убітронною накачкою / В.В. Куліш, О.В. Лисенко, М.Ю. Ромбовський // Вісник Сумського державного університету. Серія: Фізика, математика, механіка. – 2005. – № 4. – С. 58–70.
101. Кулиш В.В. Параметрический резонанс пучковых волн в двухскоростном электронном пучке / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, М.Ю. Ромбовский // Прикладная физика. – 2009. – № 1. – С. 71–78.
102. Ахманов А.А. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов / А.А. Ахманов, В.А. Вислоух, А.С. Чиркин. – Москва: Наука, 1988. – 312 с.
103. Крюков П.Г. Нелінійна мультигармонічна теорія ефекту супергетеродинного підсилення у моделях клістронного типу / П.Г. Крюков // Квантовая Электроника. – 2001. – № 2. – С. 95–118.
104. Kulish V.V. Effect of parametric resonance on the formation of waves with a broad multiharmonic spectrum during the development of two-stream instability / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, M.Yu. Rombovsky // Plasma Physics Reports. – 2010. – Vol. 36, № 7. – P. 594–600.
105. Соколов А.А. Релятивистский электрон / А.А. Соколов, И.М. Тернов. – Н.: Москва, 1974. – 342 с.
106. Федоров М.В. Взаимодействие электронов с электромагнитным полем в лазерах на свободных электронах / М.В. Федоров // УФН. – 1981. – Т. 135,

№ 2. – С. 213–236.

107. Федоров М.В. Электрон в сильном световом поле / М.В. Федоров – М.: Наука, 1991. – 240 с.
108. Кулиш В.В. Физика лазеров на свободных электронах. Общие положения / ХПИ Сумский филиал. – Сумы, 1990. – 192 с. – Рус. - Деп. в УкрНИИТИ 5.09.90, №1526 – Ук90. - Реф. в: Гос. респ. научн.-техн. библи. УССР.- 1990.
109. Последние достижения в исследованиях по лазерам на свободных электронах / Н.И. Карбушев, В.П. Попонин, А.А. Рухадзе // Генераторы когерентного излучения на свободных электронах / Под ред. проф. Рухадзе А.А. – М.: Мир, 1983. – С. 224–258.
110. Datolli G. Free electron lasers / G. Datolli, A. Reieri, A. Torre // A short review of the theory and experiments. CERN. – 1987. – Vol. 3-2. – P. 792–816.
111. Torre A. Free electron laser theory / A. Torre, G. Datolli // CERN Sci. Rept. – 1989. – Vol. 3. – P. 1–60.
112. Pantell R.H. Stimulated photon-electron scattering / R.H. Pantell, G. Soncini, H.E. Puthoff // IEEE Journal of Quantum Electronics. – 1968. – Vol. QE-4. – P. 905–908.
113. Madey J.M.J. Stimulated emission of bremsstrahlung in a periodic magnetic field / J.M.J. Madey // Journal of Applied Physics. – 1971. – Vol. 42, Issue 5. – P. 1906–1913.
114. Бункин Ф.В. Взаимодействие интенсивного оптического излучения со свободными электронами / Ф.В. Бункин, А.Б. Казаков, М.В. Федоров // УФН. – 1972. – Т. 107, № 4. – С. 559–593.
115. Зельдович Я.Б. Рассеяние и излучение квантовой системой в сильной электромагнитной волне / Я.Б. Зельдович // УФН. – 1973. – Т. 110, № 4. – С. 139–151.
116. Colson W.B. One-body analysis of free electron lasers / W.B. Colson // Physics of Quantum Electronics. – 1977. – Vol. 5. – P. 152–196.
117. Strong-Signal Theory of a Free-Electron Laser / [F.A. Hopf, P. Meystre, M.O. Scully, W.H. Louisell] // Phys. Rev. Lett. – 1976. – Vol. 37. –

- P. 1342-1345.
118. Colson W.B. Fundamental free electron laser theory and new principles for advanced devices / W.B. Colson // Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. – 1987. – Vol. 738. – P. 2–27.
119. Colson W.B. Лазеры на свободных электронах: уравнения Максвелла с одночастичными токами / W.B. Colson, S.K. Ride // Генераторы когерентного излучения на свободных электронах / Под ред. проф. Рухадзе А.А. – М.: Мир, 1983. – С. 42–68.
120. McMullin W.A. Stochastic particle instability for electron motion in combined helical wiggler, radiation, and longitudinal wave fields / W.A. McMullin, R.C. Davidson // Phys. Rev. A – 1982. – Vol. 26. – P. 410-422.
121. Colson W.B. Free-electron lasers operating in higher harmonics / W.B. Colson // Phys. Rev. A – 1981. – Vol. 24. – P. 639-641.
122. Дзедолик И.В. Нелинейная теория параметрически-резонансного взаимодействия электромагнитных волн в плазме релятивистского электронного потока. / И.Н. Дзедолик, В.П. Захаров, В.В. Кулиш // Радиотехника и электроника. – 1988. – Т. 33, № 6. – С. 1255–1264.
123. Дзедолик И.В. Самосогласованный нелинейный анализ параметрически-резонансного взаимодействия двух электромагнитных волн в плазме релятивистского электронного потока. / И.Н. Дзедолик, В.П. Захаров, В.В. Кулиш // Радиотехника и электроника. – 1988. – Т. 33, № 6. – С. 1264–1271.
124. Захаров В.П. Генерация статического поперечного периодического магнитного поля в плазме релятивистского электронного потока. / В.П. Захаров, А.В. Кислицев, В.В. Кулиш // Физика плазмы. – 1986. – Т. 12, № 1. – С. 77–80.
125. Кулиш В.В. Генерация продольного электрического поля при трехволновом параметрическом резонансе электромагнитных волн в плазме релятивистского электронного потока / В.В. Кулиш, С.А. Кулешов – Сумы, 1992. – 48 с. – Рус. - Деп. в УкрИНТЭИ 19.03.92, №360 – Ук92.

126. Kulish V.V. Effect of non-linear generation of intrinsic electric field at the parametric-resonance interaction of two electromagnetic wave in plasma of relativistic electron beam / V.V. Kulish, S.A. Kuleshev // In book: Contributed papers. Workshop on turbulence and non-linear processes in plasma. – Kiev, Ukraine, April 13-29 – 1981. – P. 76-80.
127. Кулиш В.В. Движение релятивистского электрона в периодически реверсивных электромагнитных полях – Киев, 1985. – 110 с. – Рус. - Деп. в УкрНИИНТИ 23.07.85, №1490 – Ук90.
128. Kwan T. Free electron laser / T Kwan, J.M. Dawson, A.T. Lin // Physics of Fluids. – 1977. – Vol. 20, Issue 4. – P. 581–589.
129. Олдер Б. Вычислительные методы в физике плазмы / Б. Олдер, С. Фернбах, М. Ротенберг. – М.: Мир, 1974. – 334 с.
130. Хокни Р. Численное моделирование методом крупных частиц / Р. Хокни, Дж. Иствуд [пер. с англ.]. – М.: Мир, 1987. – 640 с.
131. Днестровский Ю.Н. Математическое моделирование плазмы / Ю.Н. Днестровский, Д.П. Костомаров. – М.: Наука, 1982. – 319 с.
132. Братман В.Л. Убитроны и скаттроны / В.Л. Братман, Н.С. Гинзбург, М.И. Петелин // В кн.: Релятивистская высокочастотная электроника – Горький, – 1979. – С. 217–248.
133. Горшкова Н.А. Теория убитрона – усилителя типа «О» с ультрарелятивистским электронным пучком / Н.А. Горшкова, А.В. Сморгонский // Изв. вузов, Радиофизика. – 1975. – Т. 18. – С. 1201–1205.
134. Братман В.Л. Нелинейная теория вынужденного рассеяния волн на релятивистских электронных пучках / В.Л. Братман, Н.С. Гинзбург, М.И. Петелин // ЖЭТФ. – 1979. – Т. 76, № 3. – С. 930–943.
135. Кулиш В.В. Нелинейная самосогласованная теория лазера на свободных электронах. Метод исследования / В.В. Кулиш // УФЖ. – 1991. – Т. 36, № 9. – С. 1318–1325.
136. Богданкевич Л.С. Плазменная СВЧ-электроника / Л.С. Богданкевич,

- М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе // УФН. – 1981. – Т. 133, № 1. – С. 3–33.
137. Калмыков А.М. Возможность параметрической генерации и усиления электромагнитных волн с частотами, выше частоты накачки в электронных потоках / А.М. Калмыков, Н.Я. Коцаренко, В.В. Кулиш // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1977. – № 10. – С. 76–78.
138. Калмыков А.М. Возможность преобразования частоты лазерного излучения в электронных потоках / А.М. Калмыков, Н.Я. Коцаренко, В.В. Кулиш // Письма в ЖТФ. – 1978. – Т. 4, № 14. – С. 820–822.
139. Калмыков А.М. К теории параметрического преобразования частоты в электронных потоках / А.М. Калмыков, Н.Я. Коцаренко, В.В. Кулиш // Радиотехника и электроника. – 1979. – № 10. – С. 2084–2088.
140. Кулиш В.В. К теории параметрических электронных лазеров / В.В. Кулиш, Р.А. Силин // Электронная техника. Электроника СВЧ. – 1980. – № 4. – С. 3–12.
141. Exact Relativistic Kinetic Theory of an Electron-Beam-Plasma System: Hierarchy of the Competing Modes in the System-Parameter Space / [A. Bret, L. Gremillet, D. Bénisti, E. Lefebvre] // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 100. – P. 205008.1-205008.4.
142. Takayuki U. Vlasov simulation of amplitude-modulated Langmuir waves / U. Takayuki // Phys. Plasmas – 2006. – Vol. 13, N9. – P. 092304.1–092304.5.
143. Silin I. Electron beam-plasma interaction: Linear theory and Vlasov-Poisson simulations/ I. Silin, R. Sydora, K. Sauer // Phys. Plasmas – 2007. – Vol. 14, N1. – P. 012106.1–012106.9.
144. Бережной И.А. О взрывной неустойчивости релятивистских электронных потоков в поле поперечных электромагнитных волн / И.А. Бережной, В.В. Кулиш, В.П. Захаров // ЖТФ. – 1981. – Т. 51, № 17. – С. 660–662.
145. Kochmanski S. Towards classical single particle theory of the free electron laser / S Kochmanski, V. Kulish // Acta Physica Polonica. – 1984. – Vol. A66, № 6. – P. 713–740.
146. Classical theory of a free-electron laser / [F.A. Hopf, P. Meystre, M.O. Scully,

- W.H. Louisell] // Optics Communications – 1976. – Vol. 18. – P. 413-416.
147. Лазер на свободных электронах с точки зрения лазерной техники / F.A. Hopf, T.G. Kuper, M.O. Scully // Генераторы когерентного излучения на свободных электронах / Под ред. проф. Рухадзе А.А. – М.: Мир, 1983. – С. 7–41.
148. Davidson R.C. Helically distorted relativistic electron beam equilibria for free electron laser applications / R.C. Davidson, H.S. Uhm // Journal of Applied Physics. – 1982. – Vol. 53. – P. 2910–2919.
149. Kroll N.V. Stimulated emission from relativistic electrons passing through a spatially periodic transverse magnetic field / N.V. Kroll, W.A. McMullin // Phys. Rev. A – 1978. – Vol. 17 – P. 300-308.
150. Sprangle P. Theory of free-electron lasers / P. Sprangle, R.A. Smith // Phys. Rev. A – 1980. – Vol. 21 – P. 293-301.
151. Kulish V.V. Hierarchical theory of oscillations and waves and its application for nonlinear problems of relativistic electrodynamics. In Causality and locality in modern physics / Kulish V.V. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 270 p.
152. Kulish V.V. Hierarchical oscillations and averaging methods in nonlinear problems of relativistic electronics / V.V. Kulish // The International Journal of Infrared and Millimeter Waves. – 1997. – Vol. 18(5). – P. 1053–1117.
153. Kulish V.V. New acceleration principle of charged particles for electronic applications. The general hierarchic description/ V.V. Kulish, P.B. Kosel, A.G. Kailyuk // The International Journal of Infrared and Millimeter Waves. – 1998. – Vol. 19(1). – P. 33–93.
154. Куліш В.В. Ієрархічний метод та технічні особливості його застосування у нелінійних задачах електродинаміки. Загальна теорія / В.В. Куліш// УФЖ. – 1998. – Т. 43, № 4. – С. 483–499.
155. Куліш В.В. Ієрархічний підхід до нелінійно-резонансних проблем електродинаміки / В.В. Куліш // Вісник Сумського державного університету. – 1997. – № 6. – С. 2–10.

156. Куліш В.В. Застосування ієрархічного підходу до нелінійної теорії релятивістських гірорезонансних приладів. Одночастинкова модель мазеру на циклотронному резонансі / В.В. Куліш, О.Г. Кайлюк // Вісник Сумського державного університету. – 1997. – № 6. – С. 11–20.
157. Ієрархічний метод та технічні особливості його застосування у нелінійних задачах електродинаміки. Теорія ЕН-убітронного прискорювача заряджених частинок / [В.В. Куліш, П.Б. Козел, О.Б. Крутько, І.В. Губанов] // УФЖ. – 1998. – Т. 43, № 2. – С. 133–138.
158. Nicolis J.S. Dynamics of Hierarchical Systems. An Evolutionary Approach / J.S. Nicolis. – Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag, 1986. – 486 p.
159. Куліш В.В. Метод усереднених характеристик в нелінійній теорії двопотокової нестійкості / В.В. Куліш, В.І. Савченко // Вісник Сумського державного університету. Серія: Фізика, математика, механіка. – 2002. – № 5(38)–6(39). – С. 5–14.
160. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
161. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1969. – 380 с.
162. Kulish V.V. Application technique of the method of averaged characteristics to relativistic electronics problems / V.V. Kulish, V.I. Savchenko // Four International Young Scientist Conference “Problems of Optics and High Technology Material Science”. – Kiev: National University, 2003. – P. 153.
163. Куліш В.В. Метод усереднених характеристик для асимптотичного інтегрування нелінійних диференційних рівнянь з частинними похідними із осцилюючими правими частинами / В.В. Куліш, В.І. Савченко // Вісник Сумського державного університету. Серія: Фізика, математика, механіка. – 2002. – № 5(38)–6(39). – С. 14–20.
164. Гребенников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах / Е.А. Гребенников. – М.: Наука, 1986. – 256 с.

165. Сухоруков А.П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике / А.П. Сухоруков. – М.: Наука, 1988. – 231 с.
166. Рабинович М.И. Введение в теорию колебаний и волн / М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 560 с.
167. Бломберген Н. Нелинейная оптика: / Н. Бломберген [пер. с англ.] – М.: Мир, 1966. – 424 с.
168. Леонтович М.А. Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли / М.А. Леонтович. // Изв. АН СССР. Сер. физ. – 1944. – Т. 8. – С. 16.
169. Хохлов Р.В. О распространении волн в нелинейных диспергирующих линиях / Р.В. Хохлов. // Радиотехника и электроника. – 1961. – Т. 6, № 7. – С. 1116–1127.
170. Литвак А.Г. Применение параболического уравнения к расчету полей в диспергирующих нелинейных средах / А.Г. Литвак, В.И. Таланов. // Изв. вузов, Радиофизика. – 1967. – Т. 10, № 1. – С. 539.
171. Гапонов А.В. Одномерные волны в нелинейных средах с дисперсией / А.В. Гапонов, Л.А. Островский, М.И. Рабинович // Изв. вузов, Радиофизика. – 1970. – Т. 13, № 2. – С. 169–213.
172. Рабинович М.И. Об асимптотическом методе в теории колебаний распределенных систем / М.И. Рабинович // ДАН СССР. – 1971. – Т. 191, № 6. – С. 1253–1255.
173. Рабинович М.И. Четыре лекции по основам теории нелинейных волн и волновых взаимодействий / М.И. Рабинович, В.И. Таланов. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. – 58 с.
174. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме / В.Л. Гинзбург. – М.: Наука, 1967. – 684 с.
175. Блиох Ю.П. Взаимодействие релятивистского электронного пучка с неоднородной столкновительной плазмой / Ю.П. Блиох, И.И. Онищенко, И.П. Панченко // УФЖ. – 1981. – Т. 26, № 2. – С.271-275.