

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

СУМСЬКИЙ  
ДЕРЖАВНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ



НАЦІОНАЛЬНИЙ  
ТЕХНІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ  
УКРАЇНИ «КІП»

*О. С. Цибенко, М. Т. Крищук,  
Ю. Я. Парасевич*

**ЗБІРНИК ЗАДАЧ  
З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ**

Навчальний посібник

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*

Суми  
Сумський державний університет  
2013

Навчальне видання

**Цибенко** Олександр Сергійович,  
**Крищук** Микола Георгійович,  
**Тарасевич** Юлія Ярославівна

# **ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ**

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки Ю. Я. Тарасевич  
Редактор Н. З. Ключко  
Комп'ютерне верстання Ю. Я. Тарасевич

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 12,32. Обл.-вид. арк. 9,25. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач  
Сумський державний університет,  
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007  
Свідцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.

УДК 519.21 (075.8)  
ББК 34.445+22.12  
Ц 56

Рецензенти:

*В. В. Астанін* – доктор технічних наук, професор (Національний авіаційний університет);  
*Ю. Б. Гнучій* – доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет біоресурсів та природокористування України);  
*Е. В. Штефан* – доктор технічних наук, професор (Національний університет харчових технологій)

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів,  
які навчаються за напрямками підготовки  
«Прикладна механіка» та «Інженерна механіка»  
(лист № 1/11-11553 від 15.07.2013 р.)*

**Цибенко О. С.**

Ц 56 Збірник задач з теорії ймовірностей : навч. посіб. /  
О. С. Цибенко, М. Г. Крищук, Ю. Я. Тарасевич. – Суми : Сумський  
державний університет, 2013. – 210 с.  
ISBN 978-966-657-498-8

Збірник задач розрахований на студентів спеціальностей „Динаміка і міцність машин”, «Комп’ютерна механіка», а також на студентів, аспірантів та інженерів, які займаються ймовірнісними розрахунками механічних систем.

Посібник містить у стислій довідковій формі основні поняття теорії ймовірностей, що пов’язані з випадковими подіями, випадковими величинами і способами їх описання, а також випадковими процесами. Наведено ілюстративні приклади розв’язання різних типових завдань, що полегшують вивчення та освоєння матеріалу.

**УДК 519.21 (075.8)**  
**ББК 34.445+22.12**

ISBN 978-966-657-498-8

© Цибенко О. С., Крищук М. Г.,  
Тарасевич Ю. Я., 2013  
© Сумський державний університет, 2013

## ВСТУП

Під час вивчення курсу теорії ймовірностей значну частину матеріалу студентам доводиться опрацьовувати самостійно. Самостійна робота студентів набуває особливої актуальності у зв'язку зі скороченням аудиторних годин. Тому на цей час є нагальна потреба в навчальних посібниках, які полегшують сприйняття теоретичних розділів курсу та допомагають студентам навчитися застосовувати теорію під час розв'язання практичних задач.

Фахівці зі спеціальностей «Динаміка і міцність машин» та «Комп'ютерна механіка» повинні мати глибокі знання та розуміти причини, що зумовлюють ймовірнісний характер поведінки механічних систем; мати навички застосування ймовірнісних законів, що описують випадкові процеси та вміти використовувати їх при конструюванні машин та прогнозуванні характеристик їх міцності та надійності.

Цей збірник задач містить шість розділів, у яких викладено основні поняття та теореми теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів (як одновимірних, так і багатовимірних); інтегрування та диференціювання випадкових процесів (функцій), а також основи теорії кореляційного та спектрального аналізу. Викладений у збірнику задач матеріал відповідає першій частині курсу «Статистична динаміка та надійність», а також основним темам курсу «Теорія ймовірностей». Обсяг та розміщення матеріалу у збірнику дають можливість студентам використовувати його у практичних розрахунках динаміки та надійності машин з урахуванням випадкової зміни їх характеристик. Усі розділи посібника супроводжуються прикладами розв'язування задач, що, як вважають автори, сприяє кращому засвоєнню матеріалу та є наочною ілюстрацією практичного застосування викладених теоретичних положень.

Збірник задач може використовуватися під час проведення практичних занять, а також самостійної роботи студентів із відповідних курсів лекцій при підготовленні фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напрямків “Прикладна механіка”, „Механіка”, а також фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня «спеціаліст» та «магістр» напрямів підготовки «Динаміка і міцність машин» і «Комп’ютерна механіка».

Автори сподіваються, що викладений матеріал буде корисним не лише студентам, а й інженерам та науковим співробітникам, які цікавляться питаннями ймовірнісних розрахунків механічних систем довільної фізичної природи.

## РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

### 1.1. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ТЕОРЕМИ

*Подія* – явище, що характеризується деяким якісним чи кількісним результатом. Теорія ймовірностей розглядає події, що відбуваються при деякому постійному комплексі умов, – однорідних та таких, що можуть бути порівнянними.

Під *ймовірністю*  $P(A)$  настання події  $A$  розуміють об'єктивну чисельну нормовану ( $0 \leq P(A) \leq 1$ ) міру, що характеризує настання даної події:

- при  $P(A) = 0$  подія  $A$  *неможлива*;
- при  $P(A) = 1$  вона обов'язково відбудеться (*достовірна подія*);
- при  $0 < P(A) < 1$  подія є *випадковою*.

За відомим  $n_A$  – числом ситуацій (результатів), що сприяють настанню події  $A$ , і  $n$  – загальним числом ситуацій *ймовірність*  $P(A)$  *безпосередньо* може бути визначена у вигляді відношення

$$P(A) = n_A / n . \quad (1.1)$$

Для багаторазово відтворюваних в однорідних умовах подій з випадковим результатом відношення числа проявів події  $A$  до загального числа дослідів  $n_A / n$  характеризує *емпіричну (статистичну) частоту*; при цьому справедливим є *закон великих чисел* (у формі Бернуллі):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| P(A) - \frac{n_A}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.2)$$

При *геометричному визначенні ймовірності* вважається, що потрапляння характеристичної точки – індикатора події до якої-небудь підобласті  $g$  в області  $G$  не залежить ні від її форми, ні від її розміщення у межах  $G$ , а пропорційно мірі  $g$ . Тоді ймовірність

влучення випадкової характеристичної точки  $M$  до заданої підобласті може бути визначена у вигляді відношення параметрів вимірів областей (довжин відрізків, площ, об'ємів)

$$P(M \in g) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G}. \quad (1.3)$$

### **Теорема додавання ймовірностей**

**Сумою** двох несумісних подій  $A$  і  $B$  є така складна подія, яка полягає у тому, що відбудеться або подія  $A$ , або  $B$ . Ймовірність **суми двох несумісних** подій дорівнює

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1.4)$$

Ймовірність **суми  $n$  несумісних подій**  $A_k$  дорівнює сумі ймовірностей настання цих подій

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k), \quad (1.5)$$

де  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Сума ймовірностей несумісних протилежних подій

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (1.6)$$

Ймовірність **суми двох подій, що перетинаються (сумісних),**

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB), \quad (1.7)$$

**трьох подій, що перетинаються,**

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Для  $n$  подій, що перетинаються,

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n).$$

### **Теорема множення ймовірностей**

**Добутком** подій  $A$  і  $B$  є така складна подія  $AB$  (або  $A \cdot B$ ), яка полягає у тому, що відбувається і подія  $A$ , і подія  $B$ , при цьому:

а) для **залежних** подій  $A$  і  $B$

$$P(AB) = P(A)P(B/A), \quad (1.8)$$

де  $P(A/B)$  – **умовна ймовірність** або ймовірність настання події  $A$  за умови настання події  $B$ ;

б) у випадку **незалежних** подій  $A$  і  $B$ :

$$P(AB) = P(A)P(B); \quad (1.9)$$

в) при  $n$  **незалежних** подіях  $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P\left(\prod_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k). \quad (1.10)$$

### **Формула повної ймовірності**

На підставі теореми додавання ймовірностей та теореми множення ймовірностей імовірність події  $A$ , яка залежить від  $n$  несумісних подій  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , визначається за формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A/B_k)P(B_k). \quad (1.11)$$

### **Формула Байєса (формула статистичної перевірки гіпотез)**

Із теореми множення (1.8) та очевидної рівності  $P(AB) = P(BA)$  випливає, що

$$P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A),$$

звідси

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}, \quad P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)}. \quad (1.12)$$

Формула Байєса дозволяє переоцінити ймовірності гіпотез  $B_1, B_2, \dots, B_n$  після того, як стає відомим результат випробування, під час якого відбулася подія  $A$ , тобто дозволяє розрахувати ймовірності гіпотез після досліду.



**Теорема про повторення дослідів**

Ймовірність настання *хоча б однієї* із множини подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$  у серії  $n$  незалежних випробувань, які відбуваються відповідно з імовірностями  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , дорівнює

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n, \quad (1.13)$$

де  $q_i$  – ймовірність протилежної події  $\bar{A}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):  $q_i = 1 - p_i$ .

Якщо події  $A_1, A_2, \dots, A_n$  відбуваються з однаковою ймовірністю, яка дорівнює  $p$ , то ймовірність настання хоча б однієї з них дорівнює

$$P(A) = 1 - q^n. \quad (1.14)$$

Ймовірність *m проявів* події  $A$  у серії  $n$  незалежних випробувань визначається за *біноміальною формулою Бернуллі*

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (1.15)$$

де  $p$  – ймовірність події  $A$  в одному досліді;  $q = 1 - p$  – ймовірність протилежної події;  $C_n^m$  - число поєднань із  $n$  елементів за  $m$ ,

$$C_n^m = A_n^m / P_n = [(n - m + 1) \dots (n - 1) n] / [m(m - 1) \dots 2 \cdot 1],$$

де  $A_n^m = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - m + 1)$  – число розміщень з  $n$  елементів за  $m$ ;  $P_n = n!$  – число можливих перестановок  $n$  елементів.

## 1.2. Розв'язання типових задач за розділом 1

### Задача 1.1

Із урни з  $n$  пронумерованими кульками навмання витягують одну за одною усі кульки, що у ній знаходяться.

Знайти ймовірність того, що номери витягнутих кульок будуть йти по порядку  $1, 2, \dots, n$ .

### Розв'язання

Подія  $A$  – коли витягнуті з урни кульки йдуть по порядку  $(1, 2, \dots, n)$  є єдиною з можливих результатів, що дорівнює числу перестановок  $P_n$  із  $n$  елементів:  $P_n = n!$ . Тоді

$$P(A) = \frac{n_A}{n_{\text{заг}}} = \frac{1}{n!}.$$

### Задача 1.2

Одночасно кидають дві гральні кісточки (кожна має 6 граней). Знайти ймовірність такий подій:

- $A$  – сума очок, що випали, дорівнює 8;
- $B$  – добуток очок, що випали, дорівнює 8;
- $C$  – сума очок, що випали, більша за їх добуток.

### Розв'язання

Подія  $A$

Варіанти	1	2	3	4	5
Очки (1-ша кісточка)	6	2	5	3	4
Очки (2-га кісточка)	2	6	3	5	4

Як бачимо, число ситуацій, що сприяють події  $A$ , дорівнює  $n_A = 5$ .  
Загальне число варіантів випадання очок на двох кісточках дорівнює

$$n_{\text{заг}} = 6^2 = 36. \text{ Таким чином } P(A) = \frac{n_A}{n_{\text{заг}}} = \frac{5}{36}.$$

Подія  $B$

Варіанти	1	2
Очки (1-ша кісточка)	2	4
Очки (2-га кісточка)	4	2

Як бачимо, число ситуацій, що сприяють настанню події  $B$ , дорівнює  $n_B = 2$ . Таким чином,  $P(B) = \frac{n_B}{n_{\text{заг}}} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ .

Подія  $C$

Варіанти	1	2	3	4	5	6
Очки (1 -ша кісточка)	1	1	1	1	1	1
Очки (2 -га кісточка)	1	2	3	4	5	6

Варіанти	7	8	9	10	11	12
Очки (1-ша кісточка)	1	2	3	4	5	6
Очки (2-га кісточка)	1	1	1	1	1	1

Ураховуючи тотожність варіантів 1 і 7, число ситуацій, що сприяють події  $C$ , дорівнює  $n_C = 11$ . Таким чином,  $P(C) = \frac{n_C}{n_{\text{заг}}} = \frac{11}{36}$ .

### Задача 1.3

Кругла мішень обертається із сталою кутовою швидкістю:  $\omega = const$ . П'ята частина мішені зафарбована у чорний колір, інша частина – біла. Влучення у мішень є достовірною подією. Визначити ймовірність влучення у чорний сектор.

**Розв'язання**

Площі зафарбованої та білої частин мішені відповідно дорівнюють

$$S_{кр} = \frac{\pi D^2}{4}, \quad S_{сект} = \frac{1}{5} S_{кр}.$$

За визначенням геометричної ймовірності (1.3)

$$P(A) = \frac{S_{сект}}{S_{кр}} = \frac{1}{5}.$$

**Задача 1.4**

У прямокутник  $5 \times 4$  см<sup>2</sup> вписано коло радіусом 1,5 см. Якою є ймовірність того, що точка, випадково поставлена у прямокутник, виявиться у середині кола?

**Розв'язання**

За визначенням геометричної ймовірності (1.3) шукана ймовірність дорівнює відношенню площі кола (у яке точка повинна потрапити) до площі прямокутника (у якому ставлять точку), тобто

$$P = \frac{S_{коло}}{S_{прям}} = \frac{\pi \cdot 1,5^2}{5 \cdot 4} = 0,353.$$

**Задача 1.5**

Точку навмання поставили на відрізок  $[0; 2]$ . Якою є ймовірність влучення точки на менший відрізок:  $[0,5; 1,4]$ ?

**Розв'язання**

У цій задачі простір елементарних результатів – більший відрізок  $\Omega = [0; 2]$ , а множина результатів, що сприяють, – менший відрізок

$g = [0,5; 1,4]$ , при цьому довжини відрізків відповідно дорівнюють  $l(\Omega) = 2$  і  $l(g) = 0,9$ . Внаслідок цього згідно з формулою (1.3)

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{0,9}{2} = 0,45.$$

### Задача 1.6 (про зустріч)

Два студенти  $A$  і  $B$  домовилися зустрітись у визначеному місці між 12-ю та 13-ю годинами. Той, хто прийшов першим, чекає на другого упродовж 20 хвилин, після чого йде. Якою є ймовірність зустрічі студентів  $A$  і  $B$ , якщо: 1) прихід кожного з них може відбутися навмання упродовж зазначеної години; 2) моменти часу їх приходу є незалежними ?

### Розв'язання

Позначимо відповідні моменти часу приходу студента  $A$  через  $x$  і студента  $B$  – через  $y$ . Для зустрічі студентів необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова  $|x-y| \leq 20$  хвилин. Зобразимо  $x$  і  $y$  як координати на площині. При цьому як одиницю масштабу виберемо хвилину. Усі можливі результати розглядуваної ситуації представлені точками квадрата зі сторонами 60, а ті, що сприяють зустрічі, розміщені у заштрихованій області (рис. 1.1). Шукана ймовірність дорівнює відношенню площі заштрихованої фігури до площі квадрата:

$$P(A) = (60^2 - 40^2)/60^2 = 5/9.$$

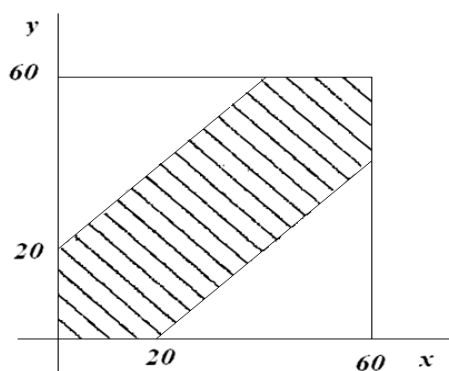


Рисунок 1.1

**Задача 1.7 (Бюффона)**

Площина розграфлена паралельними прямими, що віддалені одна від одної на відстань  $2a$ . На площину навмання кидають голку довжиною  $2\ell$  ( $\ell < a$ ). Знайти ймовірність того, що голка перетне будь-яку з прямих.

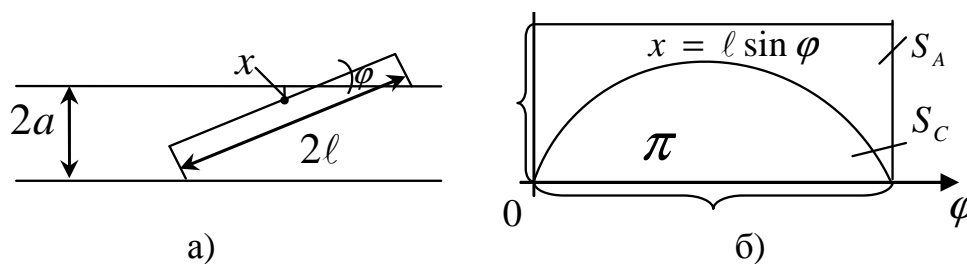


Рисунок 1.2

**Розв'язання**

Візьмемо незалежні змінні (рис. 1.2 а):

$x$  – відстань від центра голки до найближчої паралелі.

$\varphi$  – кут, що утворений голкою з цією паралеллюю.

Область визначення цих змінних така:  $0 < x < a$ ,  $0 < \varphi < \pi$ .

Для визначення координат центра голки, що перетинає будь-яку з паралельних ліній, скористаємося очевидною умовою:  $x \leq \ell \sin \varphi$ .

Покажемо на графіку (рис. 1.2 б) у межах прямокутника  $S_A = \pi \cdot a$  площу фігури, що обмежена кривою  $x = \ell \sin \varphi$ . Відношення площ визначає геометричну ймовірність (1.3) перетинання голкою однієї з прямих:

$$P = \frac{S_C}{S_A} = \frac{\int_0^{\pi} \ell \sin \varphi d\varphi}{\pi \cdot a} = \frac{2\ell}{\pi \cdot a}.$$

**Задача 1.8**

У сигналізатор надходять сигнали від двох пристроїв. Кожен із сигналів є можливим у будь-який момент часу на інтервалі  $[0; T]$ . Моменти надходження сигналів є незалежними. Сигналізатор спрацьовує, якщо часова різниця між сигналами є меншою за  $t$ , де  $t < T$ . Знайти ймовірність того, що сигналізатор спрацює за час  $T$ , якщо кожен із пристроїв надішле по одному сигналу.

**Розв'язання**

Уведемо незалежні змінні  $x$  і  $y$ , що відповідають моментам часу надходження сигналів від першого та другого пристроїв. Області визначення часу кожного із сигналів відповідно дорівнюють  $0 \leq x \leq T$  і  $0 \leq y \leq T$ .

Згідно з умовами задачі сигналізатор спрацьовує, якщо різниця між моментами надходження сигналів є меншою за  $t$ :  $y - x < t$ , якщо  $y > x$ ;  $x - y < t$ , якщо  $y < x$  (рис. 1.3). Таким чином, умова спрацьовування сигналізатора у змінних  $x$  і  $y$  визначається як

$$\begin{cases} y < t + x; \\ y > x - t, \end{cases}$$

а ймовірність спрацьовування сигналізатора за час  $T$  за умови, що кожний з пристроїв надішле по одному сигналу, дорівнює

$$P = \frac{T^2 - 2S}{T^2} = \frac{T^2 - \frac{2(T-t)^2}{2}}{T^2} = \frac{t(2T-t)}{T^2}.$$

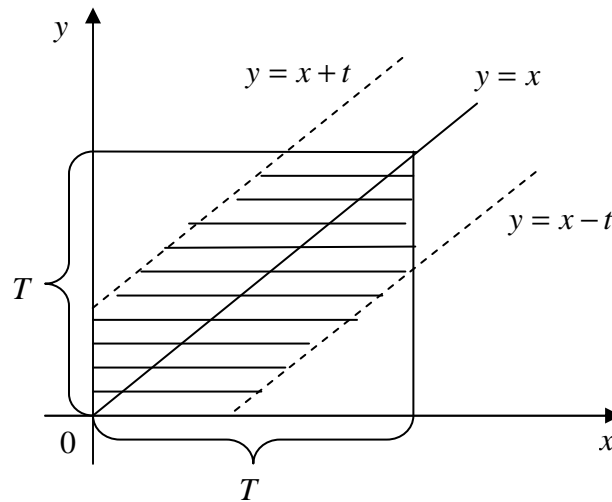


Рисунок 1.3

### Задача 1.9

Майстер, маючи 10 деталей, з яких 3 нестандартні, перевіряє деталі одну за одною доки йому не потрапить стандартна. Якою є ймовірність, що він перевірить рівно дві деталі?

### Розв'язання

Подія  $A = \{\text{майстер перевірів дві деталі}\}$  означає, що при такій перевірці перша деталь виявилася нестандартною, а друга – стандартною. Отже,  $A = A_1 A_2$ , де  $A_1 = \{\text{перша деталь виявилася нестандартною}\}$  і  $A_2 = \{\text{друга деталь є стандартною}\}$ . Очевидно, що ймовірність події  $A_1$  дорівнює  $P(A_1) = 3/10$ , крім того, умовна ймовірність  $P(A_2 | A_1) = 7/9$ , оскільки перед тим, як узяти другу деталь, у майстра залишилося 9 деталей, з яких лише 2 нестандартні, а 7 стандартних. За теоремою множення ймовірностей (1.8)

$$P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = 7/30.$$



**Задача 1.10**

З урни, де  $a$  білих ( $b$ ) та  $b$  чорних ( $c$ ) кульок, послідовно виймають дві кульки без повернення їх до урни. Визначити ймовірність того, що ці кульки: а) будуть обидві білі ( $b_1, b_2$ ); б) різних кольорів ( $b_1, c_2$ ) або ( $c_1, b_2$ ).

**Розв'язання**

Згідно з теоремою про множення ймовірностей (1.8)

$$P(b_1, b_2) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1}.$$

Можливі два варіанти настання подій, які є несумісними: ( $b_1, c_2$ ) або ( $c_1, b_2$ ). Тоді згідно з теоремою про додавання ймовірностей (1.4) маємо

$$\begin{aligned} P(b, c) &= P(b_1, c_2) + P(b_2, c_1) = \\ &= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1} = \frac{2ab}{(a+b-1)(a+b)}. \end{aligned}$$

**Задача 1.11**

Із повної колоди карт (52 шт.) виймають дві карти. Одна з них виявилася дамою. Після цього дві карти, що були вийняті, перемішують та беруть одну з них навмання. Визначити ймовірність того, що ця карта є тузом.

**Розв'язання**

Для того, щоб подія  $A$  – виявлення туза при другому вийманні з двох карт – відбулася, необхідно, щоб витягнули не ту карту (не даму), яка була вийнята першого разу. Ймовірність цієї події дорівнює  $\frac{1}{2}$ . Крім

того, необхідно, щоб друга карта виявилася тузом будь-якої масті.

Ймовірність цієї події дорівнює  $\frac{4}{51}$ . Остаточно за теоремою множення

ймовірностей знаходимо

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{51} = \frac{2}{51}.$$

### Задача 1.12

Із повної колоди карт із  $n$  штук виймають одну карту ( $n = 36$  або  $n = 52$ ). Витягнута карта виявилася тузом. Визначити ймовірність того, що під час другого виймання карти також буде туз.

### Розв'язання

За умовами задачі можливі дві незалежні події:

$A_1$  – поява того самого туза під час другого виймання карти;

$A_2$  – поява іншого туза.

Під час першого виймання карти ймовірність витягнути туза з  $n$  узятих карт дорівнює  $P(A_1) = \frac{4}{n}$ . Оскільки після першого виймання

карта, що була вийнята, повертається до колоди, то ймовірність

витягнути її повторно не змінюється, тобто  $P(A_2) = P(A_1) = \frac{4}{n}$ .

Зазначимо: якщо б карту, яку виймають, не повертали до колоди, то під час другого виймання загальна кількість карт становила  $(n - 1)$ , а тих,

що сприяють події  $A_2$ , – тобто у цьому випадку  $P(A_2) = \frac{3}{n - 1}$ .

Остаточно згідно з теоремою про додавання ймовірностей

$$P(A) = \frac{4}{n} + \frac{3}{n - 1} = \frac{7n - 4}{n(n - 1)}.$$

Так, при  $n = 36$  шукана ймовірність дорівнює  $P(A) = 0,197$ , а при  $n = 52 - P(A) = 0,135$ .

### Задача 1.13

Настання події  $A$  є рівноможливим у будь-який момент на відріжку часу  $T$ . Ймовірність того, що подія  $A$  на заданому часовому інтервалі відбудеться, дорівнює  $p$ . Відомо, що за час  $t < T$  ця подія не відбулася. Визначити ймовірність  $P(A)$  того, що подія  $A$  відбудеться у проміжок часу, що залишився.

### Розв'язання

Ймовірність  $p$  настання події за час  $T$  дорівнює ймовірності  $\frac{t}{T}p$  виявлення цієї події за час  $t$  плюс добуток ймовірності  $\left(1 - \frac{t}{T}p\right)$  того, що подія не відбудеться за час  $t$ , на умовну ймовірність  $P(A)$  появи події за час  $(T - t)$ , який залишився, якщо раніше до моменту часу  $t$  вона не відбулася. У зв'язку з цим має місце рівність  $p = \frac{t}{T}p + \left(1 - \frac{t}{T}p\right)P(A)$ . Звідки знаходимо

$$P(A) = p \left(1 - \frac{t}{T}\right) / \left(1 - \frac{t}{T}p\right).$$

### Задача 1.14

В одному ящику лежить 3 білих і 5 чорних кульок, у другому ящику – 6 білих і 4 чорних кульки. Знайти ймовірність того, що хоча б із одного ящика витягнуть білу кульку, якщо з кожного ящика витягнуто по одній кульці.

**Розв'язання**

Подія  $A = \{\text{хоча б із одного ящика витягнуто білу кульку}\}$  може бути подана у вигляді суми:  $A = A_1 + A_2$ , де події  $A_1$  і  $A_2$  означають появу білої кульки з першого і другого ящика відповідно. Імовірність витягнути білу кульку з першого ящика дорівнює:  $P(A_1) = 3/8$ , а ймовірність витягнути білу кульку з другого ящика –  $P(A_2) = 6/10$ . Крім того, внаслідок незалежності подій  $A_1$  і  $A_2$  згідно з теоремою множення ймовірностей маємо

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{40}.$$

За теоремою про додавання ймовірностей отримуємо

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = 3/8 + 6/10 - 9/40 = 3/4.$$

**Задача 1.15**

Є дві однакових урни з кульками. У першій урні знаходиться 3 білих і 1 чорна кулька. У другій урні – 2 білих і 2 чорних кульки. Із однієї з урн витягнули одну кульку. Якою є ймовірність того, що: 1) витягнута кулька буде білою, 2) при повторному вийманні з'явиться біла кулька, якщо перша витягнута кулька також є білою.

**Розв'язання**

Введемо такі гіпотези:  $A_1$  – припущення про те, що кульку дістали з 1-ї урни;  $A_2$  – припущення про те, що кульку дістали з 2-ї урни;  $A$  – діставання білої кулі для 1-го випадку,  $B$  – при повторному вийманні з'явиться біла кулька, якщо перша витягнута кулька також є білою.

Ймовірності відповідних гіпотез:

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}; \quad P(A_1) + P(A_2) = 1;$$

$$P(A/A_1) = \frac{3}{4}; \quad P(A/A_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

За формулою повної ймовірності для першого випадку, отримуємо:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n=2} P(H_i)P(A/H_i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

Розглянемо випадок повторного виймання білої кульки з урни, якщо першу кульку не повернули до тієї самої урни. Скористаємося теоремою множення ймовірностей для залежних подій  $A$  і  $B$ :

$$P(A \cdot B) = P(A)P(B), \quad P(A) = \frac{5}{8}, \quad P(B) = \sum_{i=1}^{n=2} P(A_i)P(B/A_i),$$

$$P(B/A_1) = \frac{2}{3}, \quad P(B/A_2) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \quad P(AB) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16}.$$

### Задача 1.16

Студент прийшов на залік, знаючи лише 30 питань із 50. Якою є ймовірність отримати залік, якщо після відмови відповідати на запитання викладач задає лише одне додаткове запитання?

### Розв'язання

Ймовірність того, що студент отримав залік, знаючи відповідь на перше задане викладачем питання, дорівнює  $P(A_1) = 30/50$ .

Ймовірність того, що викладач задав студенту запитання, на яке він не знає відповіді (подія  $A_2$ ) дорівнює  $P(A_2) = 20/50$ . Знайдемо ймовірність того, що на друге запитання викладача студент знає відповідь (подія  $B$ ) за умови, що відповіді на перше запитання студент

не знав. Це умовна ймовірність, оскільки подія  $A$  вже відбулася. Звідси  $P(B / A_2) = 30/49$ .

Шукану ймовірність отримати залік (подія  $A$ ) визначимо, використовуючи теорему додавання та теорему множення ймовірностей залежних подій:

$$P(A) = P(A_1) + P(B / A_2)P(A_2) = 30/50 + (20/50)(30/49) = 0,84.$$

### Задача 1.17

Для сигналізації про аварію встановлені два незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії сигналізатор спрацює дорівнює 0,95 для першого сигналізатора та 0,9 – для другого. Знайти ймовірність того, що під час аварії спрацює лише один сигналізатор.

### Розв'язання

Розглянемо незалежні події:  $A1$  = (під час аварії спрацює перший сигналізатор);  $A2$  = (під час аварії спрацює другий сигналізатор). За умовами задачі:  $P(A1) = 0,95$ ;  $P(A2) = 0,9$ . Подія  $X$  = (під час аварії спрацює лише один сигналізатор) матиме місце, якщо під час аварії спрацює перший сигналізатор і не спрацює другий, або навпаки: спрацює другий сигналізатор і не спрацює перший, тобто  $X = A1 \cdot \overline{A2} + \overline{A1} \cdot A2$ .

Ймовірність події  $X$  згідно з теоремами про множення та додавання ймовірностей, дорівнює

$$\begin{aligned} P(X) &= P(A1 \cdot \overline{A2} + \overline{A1} \cdot A2) = P(A1)P(\overline{A2}) + P(\overline{A1})P(A2) = \\ &= 0,95 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 0,9 = 0,14. \end{aligned}$$

**Задача 1.18**

Є дві партії деталей, причому в одній партії усі деталі задовольняють технічні умови, а в іншій – 25 % бракованих. Деталь, що взята з довільно обраної партії, виявилася якісною. Визначити ймовірність того, що друга деталь з тієї сам партії виявиться бракованою, якщо першу деталь повернули до партії.

**Розв'язання**

Візьмемо такі гіпотези:  $A$  – деталь бракована;  $B_1$  – деталь знаходиться у першій партії;  $B_2$  – деталь знаходиться у другій партії. Відповідні ймовірності дорівнюватимуть:

$$P(B_1) = \frac{1}{2}, \quad P(B_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A/B_1) = 0, \quad P(A/B_2) = \frac{1}{4}.$$

За формулою повної ймовірності маємо

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5 \% .$$

**Задача 1.19**

Три автомати штамнують однотипні деталі, які надходять до загального конвеєра. Продуктивності роботи автоматів співвідносяться як 2: 3: 5. Кожен з автоматів штампує нестандартних деталей у середньому 2,5 %; 2 % і 1,5 % відповідно. Знайти ймовірність того, що навмання узята з конвеєра деталь виявиться стандартною (подія  $A$ ).

**Розв'язання**

Нехай  $B_1$  – гіпотеза, яка полягає у тому, що навмання взята деталь виготовлена першим автоматом;  $B_2$  – другим;  $B_3$  – третім. Очевидно,

що ймовірності здійснення гіпотез пропорційні продуктивності самих автоматів. Тому

$$P(B_1) = \frac{2}{2+3+5} = 0,2, \quad P(B_2) = 0,3, \quad P(B_3) = 0,5.$$

Ймовірність того, що деталь стандартна за умови, що вона виготовлена першим автоматом, дорівнює  $P(A/B_1) = 0,975$  (оскільки перший автомат виробляє у середньому 97,5 % стандартних деталей). За аналогією  $P(A/B_2) = 0,98$ ,  $P(A/B_3) = 0,985$ .

Тобто ймовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь є стандартною і такою, що виготовлена першим автоматом, за теоремою про множення ймовірностей для незалежних подій дорівнює

$$P(B_1) \cdot P(A/B_1) = 0,2 \cdot 0,975 = 0,195.$$

За аналогією

$$P(B_2) \cdot P(A/B_2) = 0,3 \cdot 0,98 = 0,294;$$

$$P(B_3) P(A/B_3) = 0,5 \cdot 0,985 = 0,493.$$

Ймовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь є стандартною визначимо за теоремою про повну ймовірність:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i) P(A/B_i) = 0,195 + 0,294 + 0,493 = 0,982.$$

### Задача 1.20

Деталі йдуть на перевірку стандартності до одного з двох контролерів. Ймовірність того, що деталь потрапить до першого контролера, дорівнює 0,7; відповідно до другого – 0,3. Ймовірність того, що придатна деталь буде визнана стандартною першим контролером, дорівнює 0,94; другим – 0,98. Придатна деталь при перевірці була визнана стандартною (подія  $A$ ). Знайти ймовірність того, що її перевіряв перший контролер.



**Розв'язання**

Візьмемо 2 гіпотези:  $B_1$  – деталь перевіряв перший контролер;  $B_2$  – деталь перевіряв другий контролер. За умовою задачі  $P(B_1) = 0,7$ ,  $P(B_2) = 0,3$ . Відповідні умовні ймовірності дорівнюють  $P(A/B_1) = 0,94$ ,  $P(A/B_2) = 0,98$ .

Ймовірність того, що визнану стандартною деталь перевіряв перший контролер, згідно з формулою Байєса дорівнює

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A)},$$

де  $P(A)$  згідно з формулою повної ймовірності визначається як

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2).$$

Тобто шукана ймовірність

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{0,94 \cdot 0,7}{0,94 \cdot 0,7 + 0,98 \cdot 0,3} = 0,69.$$

**Задача 1.21**

Два гравці домовились, що виграш отримає той, хто виграє певну кількість  $k$  партій. Гра була зупинена, коли першому гравцю до виграшу залишалось  $k - m$  партій, а другому –  $k - n$ .

Визначити, як розподілити ставку, якщо ймовірність виграшу будь-якої партії для кожного з гравців дорівнює  $0,5$  ?

**Розв'язання**

Візьмемо гіпотези:  $H_1$  – виграв перший гравець;  $H_2$  – виграв другий гравець;  $A$  – виграв перший  $m$  разів;  $B$  – виграв другий  $n$  разів.

Відповідні ймовірності дорівнюватимуть:

$$P(H_1) = \frac{1}{2}, \quad P(H_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A/H_1) = \frac{m}{m+n}, \quad P(B/H_2) = \frac{n}{n+m}.$$

За формулою Байєса визначаємо умовні ймовірності  $P(H_1/A)$  і  $P(H_2/B)$ , які характеризують пропорції розподілу ставки:

$$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{n+m}}{\frac{1}{2} \left( \frac{m}{n+m} + \frac{n}{n+m} \right)} = \frac{m}{m+n}.$$

Тут  $P(A)$  згідно з формулою повної ймовірності визначається як

$$P(A) = P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2).$$

За аналогією знаходимо

$$P(H_2/B) = \frac{n}{m+n}.$$

Таким чином, якщо ставка дорівнює  $C$ , то відповідні пропорції виграшу будуть:

$$C \frac{m}{m+n} \text{ – для першого гравця (виграв } m \text{ разів);}$$

$$C \frac{n}{m+n} \text{ – для другого гравця (виграв } n \text{ разів).}$$

### Задача 1.22

В ящику лежить  $a$  білих і  $c$  чорних кульок. Після кожного виймання кульку, що було вийнято, повертають до ящика з додатковою кулькою такого самого кольору. Визначити ймовірність того, що при  $n$  дослідах такого роду  $m$  білих кульок будуть вийняті.

### Розв'язання

Візьмемо гіпотези:  $H_1$  – дістали білу кульку;  $H_2$  – дістали чорну кульку;  $A$  – дістали  $m$  білих кульок у  $n$  дослідах;  $B$  – дістали  $n-m$  чорних кульок у  $n$  дослідах.

Відповідні ймовірності дорівнюють

$$P(H_1) = \frac{a}{a+b}, \quad P(H_2) = \frac{b}{a+b}.$$

Згідно з формулою Байєса

$$P(A/H_1) = \frac{a+m}{a+b+n}, \quad P(A/H_2) = \frac{a+n-m}{a+b+n},$$

$$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2)} = \frac{a^2 + ma}{a^2 + ab + m(a-b) + nb}.$$

### Задача 1.23

У ящику знаходяться фрукти: 5 апельсинів і 4 яблука. Навмання обирають 3 фрукти. Якою є ймовірність, що усі вони будуть апельсини?

### Розв'язання

Елементарними результатами тут є набори, що містять 3 фрукти. Оскільки порядок фруктів є неважливим, будемо вважати їх вибір неупорядкованим (та неповторним). Загальне число елементарних результатів  $n = |\Omega|$  дорівнює числу способів вибору 3 фруктів із 9, тобто числу поєднань  $C_9^3$ . Число результатів, що сприяють  $m = |A|$ , дорівнює числу способів вибору 3 апельсинів із наявних 5, тобто  $C_5^3$ . Тоді шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = (5!/2!3!)/(9!/3!6!) = 0,12.$$

### Задача 1.24

У кожному досліді подія  $A$  відбувається з ймовірністю  $p = 0,75$ . Скільки дослідів необхідно провести, щоб з ймовірністю не меншою за 0,99 бути впевненими у тому, що подія  $A$  відбудеться хоча б один раз?

**Розв'язання**

За умовами задачі ймовірність того, що подія відбудеться хоча б один раз у  $n$  незалежних дослідах, дорівнює

$$P(A) = 1 - q^n \geq 0,99,$$

де  $q = 1 - p = 0,25$ .

Звідси  $1 - 0,25^n \geq 0,99$  або  $\frac{1}{4^n} \leq 0,01$ .

Розв'язуючи показове рівняння, отримаємо найменше число дослідів:  $n = 4$ .

**Задача 1.25**

У партії, що складається з  $k$  виробів, є  $l$  дефектних. Із партії навмання обирається для контролю  $r$  виробів. Знайти ймовірність події  $A$ , яка відповідає тому, що з вибраних  $r$  рівно  $s$  виробів будуть дефектними.

**Розв'язання**

Загальне число  $n$  випадків можливого вибору  $r$  виробів із  $k$  дорівнює  $C_k^r$ . Число випадків, що сприяють події  $A$ , дорівнює

$$n_A = C_l^s C_{k-l}^{r-s}.$$

$$\text{Тоді } p = \frac{n_A}{n} = \frac{C_l^s C_{k-l}^{r-s}}{C_k^r}.$$

**Задача 1.26**

Визначити ймовірність того, що партія зі 100 деталей, серед яких 5 бракованих, буде прийнята при випробуваннях навмання узятій

половини усієї партії, якщо умовами прийому допускається бракованих деталей не більше однієї з п'ятдесяти.

### Розв'язання

Візьмемо такі позначення:

$A$  – подія, яка полягає у тому, що при випробуванні 50 деталей не виявлено жодної бракованої;

$B$  – подія, яка полягає у тому, що при випробуванні 50 деталей одна виявилася бракованою.

Для несумісних подій  $A$  і  $B$  скористаємося формулою додавання ймовірностей

$$P_{\text{прийняття}} = P(A) + P(B).$$

Із 100 деталей 50 можна вибрати  $C_{100}^{50}$  способами, а із 95 якісних деталей 50 можна вибрати  $C_{95}^{50}$  способами. Тому згідно з (1.1)

$$P(A) = \frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}.$$

За аналогією

$$P(B) = \frac{C_5^1 C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}.$$

Тоді

$$P_{\text{прийняття}} = P(A) + P(B) = \frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}} + \frac{C_5^1 C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}} = \frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}} (1 + C_5^1) = 0,181.$$

### Задача 1.27

Із  $n$  акумуляторів за один рік зберігання  $k$  виходить з ладу. Навмання обирають  $m$  акумуляторів ( $m < n$ ). Визначити ймовірність того, що серед них  $l$  є справними при  $n = 100$ ,  $k = 7$ ,  $m = 5$ ,  $l = 3$ .

**Розв'язання**

Маємо схему Бернуллі з такими параметрами  $p = k/n = 7/100=0,07$  (ймовірність того, що акумулятор вийде з ладу),  $m = 5$  (число випробувань),  $k = m-l = 5-3 = 2$  (число «успіхів» – несправних акумуляторів). Скористаємося формулою Бернуллі (ймовірність того, що у  $n$  випробуваннях подія відбудеться  $k$  разів) :

$$P_m(k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k} .$$

Отримуємо ймовірність несправних 2 із 5 акумуляторів, що дорівнює ймовірності справних 3 з 5:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,07^2 \cdot (1-0,07)^3 = \frac{5!}{2!3!} 0,07^2 \cdot 0,93^3 = 0,0394 .$$

**Задача 1.28**

Пристрій, що складається з п'яти незалежно працюючих елементів, вмикається за час  $T$ . Ймовірність відмови кожного з них за цей час дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що відмовлять: а) три елементи; б) не менше чотирьох елементів; в) хоча б один елемент.

**Розв'язання**

Маємо схему Бернуллі з такими параметрами:  $p = 0,2$  (ймовірність того, що елемент відмовить),  $n = 5$  (число випробувань, тобто число елементів),  $k$  (число «успіхів» – елементів, що відмовили). Скористаємося формулою Бернуллі (ймовірність того, що для  $n$  елементів відмова відбудеться у  $k$  елементах):

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} . \text{ Отримуємо:}$$

а)  $P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 = 0,0512$  – ймовірність того, що відмовлять три елементи з п'яти;

б)  $P_5(\geq 4) = P_5(4) + P_5(5) = C_5^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^1 + C_5^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^0 = 0,00672$  – ймовірність того, що відмовлять не менше чотирьох елементів з п'яти (тобто відмовлять чотири або п'ять);

в)  $P_5(\geq 0) = 1 - P_5(0) = 1 - C_5^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^5 = 1 - 0,327 = 0,672$  – ймовірність того, що відмовить хоча б один елемент (дорівнює ймовірності протилежної події – жоден елемент не відмовить).

### Задача 1.29

Ймовірність хоча б одного влучення у ціль під час чотирьох пострілів дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність влучення у ціль під час одного пострілу.

### Розв'язання

Нехай  $p$  – ймовірність влучення у ціль під час одного пострілу. Розглянемо подію  $X = \{\text{під час чотирьох пострілів є хоча б одне влучення у ціль}\}$  і протилежну подію  $\bar{X} = \{\text{під час чотирьох пострілів жодного разу не влучили}\}$ .

Ймовірність події  $\bar{X}$  дорівнює  $P(\bar{X}) = (1-p)^4$ , тоді ймовірність події  $X$  дорівнює  $P(X) = 1 - (1-p)^4$ . За умовою задачі ця ймовірність дорівнює 0,9984, звідси отримуємо рівняння відносно шуканої ймовірності  $p$ :

$$1 - (1-p)^4 = 0,9984, (1-p)^4 = 0,0016, (1-p) = 0,2, p = 0,8.$$

**1.3. ДОДАТКОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

**Завдання 1.** Із  $n$  виробів, серед яких  $r$  бракованих, навмання беруть  $m$  виробів. Якою є ймовірність того, що всі взяті вироби браковані?

**Завдання 2.** Два гравці домовились, що виграш отримає той, що виграє певну кількість партій. Гра була зупинена, коли першому гравцю залишалося до виграшу  $m$ , а другому  $n$  партій. Визначити, як розподілити ставку, якщо ймовірність виграшу будь-якої партії для обох гравців дорівнює  $0,5$ ?

**Завдання 3.** У ящику є  $a$  білих і  $b$  чорних кульок. Після кожного виймання кульку повертають до ящика з однією додатковою кулькою того самого кольору. Визначити ймовірність того, що при  $n$  дослідах такого роду буде вийнято  $m$  білих кульок.

**Завдання 4.** Визначити ймовірність того, що корені квадратного рівняння  $x^2 + 2ax + b = 0$  будуть: а) дійсними; б) додатними, якщо значення коефіцієнтів у прямокутнику  $|a| < N$ ,  $|b| < M$  є рівноможливими.

**Завдання 5.** У лотереї з сорока тисяч білетів цінні виграші випадають на три білети. Визначити: а) ймовірність отримання хоча б одного цінного виграшу на тисячу білетів; б) кількість білетів, що забезпечують ймовірність отримання цінного виграшу не меншу ніж  $0,5$ .

**Завдання 6.** У двох урнах знаходяться однакові кульки, що відрізняються лише кольором; причому у першій урні 5 білих кульок, 11 чорних і 8 червоних, а у другій відповідно 10, 8 і 6. З обох урн навмання



беруть по одній кульці. Визначити ймовірність того, що обидві кульки будуть однакового кольору.

**Завдання 7.** Характеристика матеріалу, взятого для виготовлення продукції з ймовірностями 0,09; 0,16; 0,25; 0,25; 0,16 і 0,09 може знаходитися у шести різних інтервалах. Залежно від властивостей матеріалу ймовірності отримання першосортної продукції дорівнюють відповідно 0,2; 0,3; 0,4; 0,4; 0,3 і 0,2. Визначити ймовірність отримання першосортної продукції.

**Завдання 8.** Із ємності, що містить  $N$  кульок, вийняли  $m+k$  кульок, із яких  $m$  кульок білого кольору. Знайти ймовірність того, що до виймання у ємності було  $M$  кульок білого кольору.

**Завдання 9.** Визначити ймовірність появи хоча б одного "щасливого" білету у випадку, коли у трамваї купують поспіль  $n$  білетів,  $1 < n < 9$ .

**Завдання 10.** В урні п'ять кульок білого та чорного кольорів. Із урни виймають чотири рази кульку, причому потім її повертають до урни. Одного разу кулька була білою, а інші три рази – чорною. Визначити ймовірності різних припущень про кількість білих кульок в урні, якщо до досліду білий та чорний кольори кульки є рівноможливими (кількість білих кульок за припущеннями дорівнює 1, 2, 3, 4).

**Завдання 11.** Є дві однакові урни з кульками. У першій урні знаходиться три білих кульки та одна чорна. У другій – дві білі та дві чорні кульки. З однієї урни вийняли кульку, яка виявилася білою. Якою є ймовірність, що при повторному вийманні з тієї самої урни з'явиться біла кулька, якщо першу кульку повернули у ту саму урну, та якщо кулька не була повернута до урни?

**Завдання 12.** Кусок дроту довжиною 20 см зігнули у навмання обраній точці (точка згинання є рівномірно розподіленою). Після цього, перегнувши дріт ще у двох місцях (не ламаючи його), зробили прямокутну рамку. Знайти ймовірність того, що площа отриманої рамки не перевищує  $21 \text{ см}^2$ .

**Завдання 13.** Куб, грані якого зафарбовані, був розпилений на 64 кубики, однакові за розміром. Маленькі кубики ретельно перемішали. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний маленький кубик буде мати: 1) одну зафарбовану грань; 2) дві зафарбовані грані; 3) три зафарбовані грані.

**Завдання 14.** Із ящика, що містить  $n$  білетів із номерами 1, 2, ...,  $n$  виймають по одному всі білети. Припускають, що усі послідовності білетів мають однакові ймовірності. Визначити ймовірність того, що хоча б номер одного білета збіжиться з його власним.

**Завдання 15.** Для передачі повідомлення шляхом подачі сигналів "крапка" і "тире" використовують телеграфні системи. Статистичні властивості перешкод є такими, що спотворюються у середньому  $2/3$  повідомлень "крапка" і  $1/3$  повідомлень "тире". Відомо, що серед сигналів, що передаються, "крапка" і "тире" спостерігаються у співвідношенні 5 : 3. Визначити ймовірність того, що при прийомі сигналів "крапка" - "тире" дійсно були передані саме ці сигнали.

**Завдання 16.** Є дві партії деталей, причому відомо, що в одній партії всі деталі задовольняють технічні умови, а у другій партії 25 % є неякісними. Деталь, що взята із довільно обраної партії, виявилася якісною. Визначити ймовірність того, що друга деталь з цієї самої партії виявиться неякісною, якщо першу деталь після перевірки повернули до партії.

**Завдання 17.** Є  $n$  урн. У кожній урні  $m$  білих та  $k$  чорних кульок. Із першої урни вийняли одну кульку і поклали її до другої урни. Потім із другої урни вийняли одну кульку і поклали її до третьої урни і т. д. Якою є ймовірність того, що з останньої урни виймуть білу кульку?

**Завдання 18.** На групу з  $N$  чоловік дістали  $M < N$  квитків у театр. Для розподілу квитків заготовили урну з  $M$  білими і  $N-M$  чорними кульками. Кульки по черзі виймають, і той, хто витягує білу кульку, отримує квиток. Чи є справедливим такий розподіл квитків?

**Завдання 19.** Два стрільці по черзі стріляють по мішені. Імовірності влучення під час перших пострілів для них дорівнюють відповідно  $0,4$  і  $0,5$ , а ймовірності влучення під час наступних пострілів для кожного збільшуються на  $0,05$ . Якою є ймовірність, що першим зробив постріл перший стрілець, якщо під час п'ятого пострілу було влучення у ціль?

**Завдання 20.** Із 33 карток із літерами українського алфавіту навмання вибирають 7 карток. Якою є ймовірність, що ці п'ять літер у порядку виймання складуть слово КАФЕДРА.

**Завдання 21.** Кожна із літер Т, М, Р, О, Ш написана на одній із п'яти карток. Картки перемішують і розкладають у ряд. Якою є ймовірність того, що утвориться слово ШТОРМ.

**Завдання 22.** Якою є ймовірність влучити, не цілячись, пулею нескінченно малої величини, до квадратної решітки, що має товщину прутків решітки  $t$ , а відстань між їх середніми лініями дорівнює  $b$ ?

**Завдання 23.** У колі радіусом  $R$  навмання поставили точку. Знайти ймовірність того, що ця точка виявиться усередині цього вписаного рівностороннього трикутника.

**Завдання 24.** Кидають  $n$  гральних кісточок. Якою є ймовірність того, що хоча б на одній з них випаде шестірка?

**Завдання 26.** Задача де Мере. У 1654 році кавалером де Мере була запропонована Паскалю задача: скільки разів потрібно кинути пару гральних кісточок, щоб із імовірністю не менше  $1/2$  можна було стверджувати, що хоча б один раз випаде дванадцять очок?

**Завдання 27.** Задача де Мере у загальному вигляді. Скільки разів потрібно провести досліди, щоб із імовірністю, не меншою за  $r$ , можна було стверджувати, що хоча б один раз відбудеться подія, ймовірність якої при кожному досліді дорівнює  $p$ ?

**Завдання 28.** Знайти ймовірності проходження струму через ланцюг при послідовному з'єднанні, якщо ймовірність справної роботи елементів дорівнює  $P_1$  і  $P_2$ . Елементи працюють незалежно один від одного.

**Завдання 29.** Знайти ймовірності проходження струму через ланцюг при паралельному з'єднанні елементів, якщо ймовірність справної роботи елементів дорівнює  $P_1$  і  $P_2$ . Елементи працюють незалежно один від одного.

**Завдання 30.** Серед деталей, що надходять до збірки з 1-го станка, 0,1 % бракованих, із 2-го – 0,2 %, із 3-го – 0,25 %, із 4-го – 0,5 %. Продуктивності станків співвідносяться відповідно як 4 : 3 : 2 : 1. Узята навмання деталь виявилася стандартною. Визначити, на якому станку ймовірніше за все вона була виготовлена.

#### 1.4. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називають подією? Яка подія називається достовірною, неможливою, випадковою? Наведіть приклади таких подій.
2. Чи може подія бути одночасно і неможливою і достовірною?
3. Що називають імовірністю події? Яких значень може набувати ймовірність події?
4. Виходячи з визначення ймовірності, поясніть, чому значення ймовірності знаходиться у межах від 0 до 1.
5. Якою є різниця між класичним та статистичним визначенням ймовірності?
6. Дайте визначення сумісних та несумісних подій.
7. Дайте визначення геометричної ймовірності. Наведіть приклади.
8. Які події називають протилежними?
9. Що називають сумою подій? Сформулюйте теорему про додавання ймовірностей несумісних та сумісних подій.
10. Дайте визначення залежних та незалежних подій. Наведіть поняття та приклади умовної ймовірності.
11. Сформулюйте теорему про множення (добуток двох залежних подій).
12. Сформулюйте теорему про множення (добуток двох незалежних подій).
13. Наведіть формулу повної ймовірності.
14. Формула Байєса.
15. Послідовність незалежних однорідних випробувань. Формула Бернуллі.

## РОЗДІЛ 2. СПОСОБИ ОПИСУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

### 2.1. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

**Випадковою** називають змінну величину, яка у результаті досліджу набуває того чи іншого значення, заздалегідь невідомого, якого саме.

**Випадкові величини** прийнято позначати великими латинськими літерами:  $X, Y, Z, \dots$ , а їх можливі значення – відповідними малими:  $x, y, z, \dots$

Випадкова величина називається **дискретною**, якщо її можливі значення є такими, що можна обчислити, але не обов'язково скінченні, і **неперервною**, якщо її можливі значення безперервно заповнюють деякий інтервал на числовій осі.

Для опису випадкових величин використовують два основних способи. *Перший спосіб* передбачає введення так званих характеристик розподілу: *функцій розподілу та щільностей імовірності*. *Другий спосіб* полягає у заданні *числових характеристик*, або *моментів*.

### 2.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ РОЗПОДІЛІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Випадкова величина буде повністю визначена з імовірнісної точки зору, якщо заданий закон розподілу випадкової величини, тобто точно зазначена ймовірність, з якою можлива поява кожного зі значень, яких набуває випадкова величина.

**Законом розподілу** випадкової величини називають будь-яке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними ймовірностями.

Закон розподілу може бути заданий у вигляді таблиці, що складається з двох рядків, у першому з яких перелічені можливі значення випадкової величини  $X$ , а у другому – відповідні ймовірності.

$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$P$	$P_1$	$P_2$	$\dots$	$P_n$

Така таблиця має назву **ряд розподілу**, а її графічне зображення – **багатокутник розподілу**. Рядом розподілу можуть бути задані лише дискретні випадкові величини.

**Функція розподілу** випадкової величини  $X$  визначається як

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X < x) . \quad (2.1)$$

Із геометричної точки зору  $F(x)$  характеризує ймовірність того, що випадкова величина  $X$  знаходиться лівіше від точки (значення)  $x$  на числовій осі (рис. 2.1).

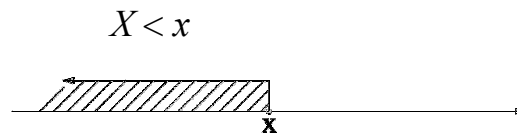


Рисунок 2.1

Функція розподілу – універсальна характеристика випадкової величини. Вона існує для усіх без винятку випадкових величин: як дискретних, так і неперервних, і повністю характеризує їх з імовірнісної точки зору.

**Властивості функції  $F(x)$ :**

- $0 \leq F(x) \leq 1$ , причому  $F(-\infty) = 0$ , оскільки  $(X < -\infty)$  – неможива подія;  $F(+\infty) = 1$ , оскільки  $(X < +\infty)$  – достовірна подія.
- $F(x)$  – неспадна функція, тобто  $F(x_2) \geq F(x_1)$  при  $x_2 > x_1$ .

Функція розподілу дискретної випадкової величини  $X$  (рис. 2.2) визначається як

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X < x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x_k < X} P_k , \quad (2.2)$$

де нерівність під знаком суми вказує, що підсумовування поширюється на усі значення  $x_k$ , які менші за  $X$ .

При цьому стрибок  $F(x)$  у точці  $x_k$  дорівнює ймовірності потрапляння у цю точку:

$$P(x_k) = P(X = x_k) = P_k. \quad (2.3)$$

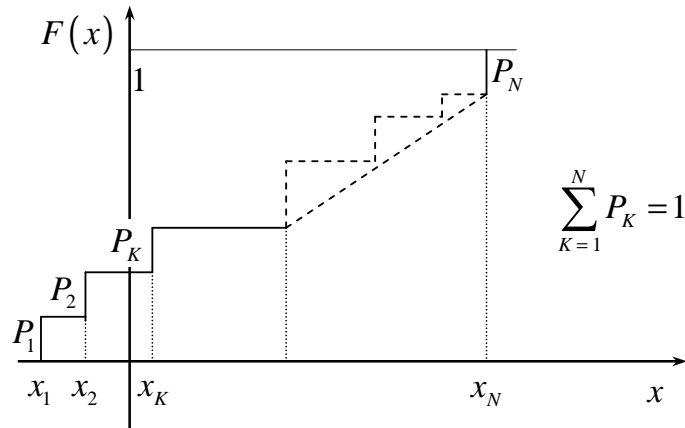


Рисунок 2.2

Для безперервно розподілених випадкових величин  $F(x)$  – неперервна неспадна монотонна функція (рис. 2.3).

Функція розподілу  $F(x)$  є диференційовною

$$p(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x}, \quad (2.4)$$

де  $p(x)$  – функція щільності ймовірності, яка характеризує ймовірність потрапляння випадкової величини  $X$  у малий окіл точки  $x$ ,

$$p(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} P(x < X < x + dx).$$

Величина  $p(x)dx$  має назву елемента ймовірності і геометрично є площею елементарного прямокутника, що спирається на відрізок  $dx$ . Ймовірність потрапляння випадкової величини  $X$  на скінченний інтервал  $[a; b]$  дорівнює інтегралу від щільності ймовірності або приросту функції розподілу на цьому інтервалі (рис. 2.3):

$$P(a \leq x \leq b) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b p(x)dx = F(b) - F(a). \quad (2.5)$$



Ймовірність того, що  $X$  набуде одного визначеного значення (тобто ймовірність потрапляння  $X$  у точку  $x_k$ ), дорівнює нулю.

Властивості щільності ймовірності  $p(x)$ :

1.  $p(x) \geq 0$  – невід’ємна функція.

2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$  (умова нормування).

Функція розподілу  $F(x)$ , як будь-яка ймовірність, є величиною безрозмірною. Розмірність щільності ймовірності  $p(x)$  є зворотною до розмірності випадкової величини.

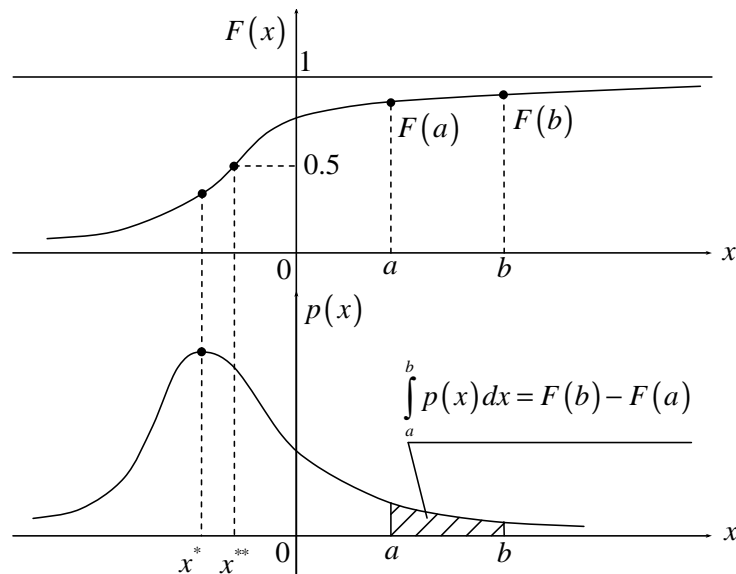


Рисунок 2.3

Щільність імовірності випадкової величини  $p(x)$  так само, як і функція розподілу  $F(x)$ , є однією з форм закону розподілу. Однак на відміну від функції розподілу ця форма не є універсальною, а існує лише для безперервно розподілених випадкових величин.

### 2.3. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Поряд із характеристиками розподілу (п. 2.1) для опису випадкової величини можуть бути задані її числові характеристики (моменти).

**Математичне сподівання:**

– для дискретно розподіленої випадкової величини  $X$

$$\langle X \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n x_k P(x_k); \quad (2.6)$$

– для безперервно розподіленої випадкової величини  $X$

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx. \quad (2.7)$$

Математичне сподівання існує, якщо ряд або відповідно інтеграл у правій частині формул (2.6), (2.7) збігається.

**Властивості математичного сподівання:**

1.  $\langle C \rangle = C$ , де  $C$  – детерміністична константа;
2.  $\langle CX \rangle = C\langle X \rangle$ ;
3.  $\langle X + Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$  – для будь-яких випадкових величин  $X$  і  $Y$ ;
4.  $\langle XY \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle$  – для стохастично незалежних випадкових величин  $X$  і  $Y$ .

**Початкові моменти  $k$ -го порядку:**

– для дискретно розподіленої випадкової величини  $X$

$$\langle X^k \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n x_j^k p(x_j); \quad (2.8)$$

– для безперервно розподіленої випадкової величини  $X$

$$\langle X^k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)dx. \quad (2.9)$$

**Центрована випадкова величина** визначається різницею власне випадкової величини та її математичного сподівання:  $\tilde{X} = X - \langle X \rangle$ . Центрування відповідає перенесенню початку координат у точку математичного сподівання (рис. 2.4), тобто точку найбільш ймовірного прояву випадкової величини.

**Центральний момент  $k$ -го порядку:**

– для дискретно розподілених величин

$$\langle \tilde{X}^k \rangle \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^n (x_j - \langle X \rangle)^k P(x_j). \quad (2.10)$$

– для безперервно розподілених величин

$$\langle (x - \langle X \rangle)^k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle X \rangle)^k p(x) dx. \quad (2.11)$$

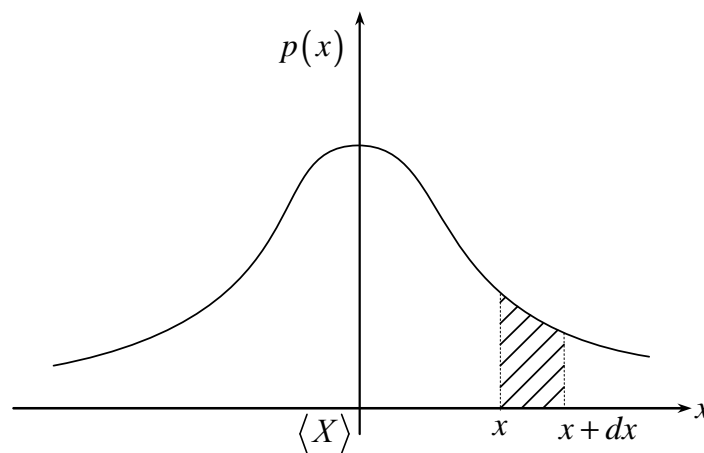


Рисунок 2.4

Математичне сподівання центрованої випадкової величини  $X$  дорівнює нулю:

$$\begin{aligned} \langle x - \langle X \rangle \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle X \rangle) p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx - \langle X \rangle \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \\ &= \langle X \rangle \left( 1 - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

**Дисперсія випадкової величини** (центральный момент 2-го порядку):

– для дискретно розподілених випадкових величин

$$D_X \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n (x_j - \langle X \rangle)^2 p(x_j); \quad (2.13)$$

– для безперервно розподілених випадкових величин

$$\begin{aligned} D_X &= \langle (x - \langle X \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle X \rangle)^2 p(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2x\langle X \rangle + \langle X \rangle^2) p(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - 2\langle X \rangle^2 + \langle X \rangle^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Тобто **дисперсія дорівнює середньому квадрата без квадрата середнього**.

Дисперсія існує, якщо ряд (інтеграл) у правій частині рівності (2.13), (2.14) збігається.

Властивості дисперсії:

1.  $D_C = 0$ , де  $C$  – детерміністична константа.
2.  $D_Y = C^2 D_X$ , де  $Y = CX$ .
3.  $D_Z = D_X$ , де  $Z = X \pm C$ .
4.  $D_Z = D_X + D_Y$ , де  $Z = X + Y$ , а  $X, Y$  – стохастично незалежні

випадкові величини.

**Середньоквадратичне відхилення випадкової величини**

$$\sigma_X = \sqrt{D_X}. \quad (2.15)$$

**Коефіцієнт асиметрії** – нормований центральний момент 3-го порядку. Цей коефіцієнт характеризує асиметрію графіка  $p(x)$  щодо точки математичного сподівання:

$$\alpha = \frac{\langle (x - \langle X \rangle)^3 \rangle}{\sigma^3}. \quad (2.16)$$

*Коефіцієнт ексцесу* – нормований центральний момент 4-го порядку

$$\varepsilon = \frac{\langle (x - \langle X \rangle)^4 \rangle}{\sigma^4} - 3. \quad (2.17)$$

Він характеризує ступінь відхилення закону розподілу випадкової величини  $X$  від нормального (гасового), для якого  $\alpha = \varepsilon = 3$ .

На практиці розглядом моментів порядку вищим за четвертий нехтують. Найбільша інформація про імовірнісні характеристики випадкової величини міститься у перших двох моментах.

## 2.4. ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

*Характеристична функція*  $f(\xi)$  – це комплексне перетворення Фур'є від щільності ймовірності випадкової величини  $X$  :

$$f(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) e^{i\xi x} dx, \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad (2.18)$$

де  $\xi$  – дійсний аргумент.

Обернене (2.16) перетворення Фур'є має вигляд

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \quad (2.19)$$

Характеристична функція містить усю інформацію про випадкову величину, оскільки похідна  $k$ -го порядку для характеристичної функції у точці  $\xi = 0$  і  $k$ -й момент випадкової величини пропорційні:

$$\frac{d^k f(0)}{d\xi^k} = (i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx = (i)^k \langle X^k \rangle,$$

або

$$\langle X^k \rangle = (-i)^k \left. \frac{d^k f}{d\xi^k} \right|_{\xi=0}. \quad (2.20)$$

Характеристична функція визначає математичне сподівання випадкової величини  $e^{i\xi X}$ .

Для дискретної випадкової величини  $X$ , яка набуває значень  $x_1, x_2, x_3, \dots$  з імовірностями  $P_k = P(X = x_k)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , характеристична функція визначається за формулою

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\xi x_k} P_k. \quad (2.21)$$

### Властивості характеристичної функції.

1. Якщо випадкові величини зв'язані лінійною детерміністичною залежністю вигляду  $Y = aX + b$ , де  $a$  і  $b$  – постійні, то

$$f_Y(\xi) = e^{i\xi b} f_X(a\xi). \quad (2.22)$$

2. Характеристична функція суми двох незалежних випадкових величин  $X$  і  $Y$  дорівнює добутку їх характеристичних функцій [4]

$$f_{X+Y}(\xi) = f_X(\xi) \cdot f_Y(\xi) \quad (2.23)$$

**2.5. Розв'язання типових задач за розділом 2****Задача 2.1**

Ряд розподілу дискретної випадкової величини має вигляд

$x$	1	2	3
$p$	0,3	0,5	0,2

Знайти функцію розподілу  $F(x)$  та побудувати її графік.

**Розв'язання**

Для  $x < 1$   $F(x) = P(X < x) = 0$ , оскільки значення  $x < 1$  випадкової величини  $X$  неможливі.

При  $1 \leq x < 2$   $F(x) = P(X < 2) = 0,3$ , оскільки випадкова величина  $X$  набуває єдиного значення  $x = 1$  з імовірністю 0,3.

При  $2 \leq x < 3$   $F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,3 + 0,5 = 0,8$ .

При  $x \geq 3$ ,  $F(x) = p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 0,3 + 0,5 + 0,2 = 1$ , оскільки подія  $X < 3$  є достовірною.

Шукана функція розподілу має вигляд (рис.2.5)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 0,3, & 1 \leq x < 2; \\ 0,8, & 2 \leq x < 3; \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

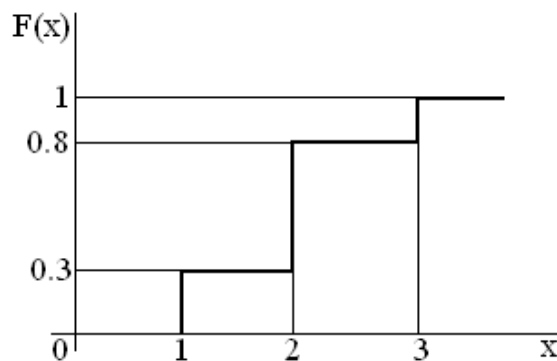


Рисунок 2.5

### Задача 2.2

Побудувати функцію розподілу для заданого ряду розподілу:

$x_i$	10	20	30	40	50
$P_i$	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

### Розв'язання

1.  $x < 10$        $F(x) = \sum P_i(x < 10) = 0$  ;
2.  $x < 20$        $F(x) = \sum P_i(x < 20) = 0,2$  ;
3.  $x < 30$        $F(x) = \sum P_i(x < 30) = 0,2 + 0,3 = 0,5$  ;
4.  $x < 40$        $F(x) = \sum P_i(x < 40) = 0,5 + 0,35 = 0,85$  ;
5.  $x < 50$        $F(x) = \sum P_i(x < 50) = 0,85 + 0,1 = 0,95$  ;
6.  $x \geq 50$        $F(x) = \sum P_i(x \geq 50) = 0,95 + 0,05 = 1$ .

Шукана функція розподілу показана на рис. 2.6.

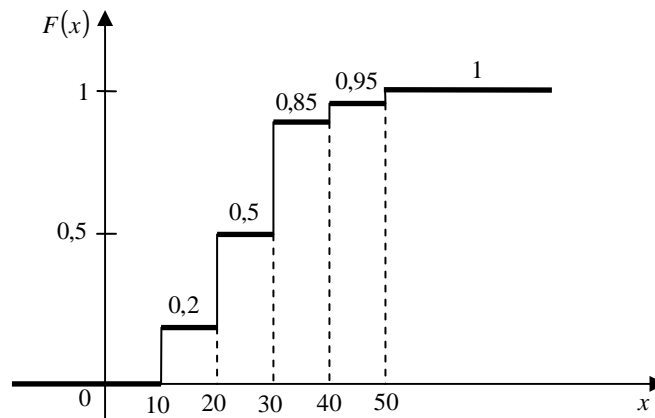


Рисунок 2.6

### Задача 2.3

Знайти функцію розподілу дискретної випадкової величини

$x_i$	0	1	2	3	4
$p_i$	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

та визначити ймовірності подій:  $X < 3$ ,  $1 \leq X \leq 4$ ,  $1 \leq X \leq 3$ .



**Розв'язання**

1.  $x < 0$       $F(x) = \sum P_i(x < 0) = 0$  ;
2.  $x < 1$       $F(x) = \sum P_i(x < 1) = 0,0016$  ;
3.  $x < 2$       $F(x) = \sum P_i(x < 2) = 0,0016 + 0,0256 = 0,0272$  ;
4.  $x < 3$       $F(x) = \sum P_i(x < 3) = 0,0272 + 0,1536 = 0,1808$  ;
5.  $x < 4$       $F(x) = \sum P_i(x < 4) = 0,1808 + 0,4096 = 0,5904$  ;
6.  $x \geq 4$       $F(x) = \sum P_i(x \geq 4) = 0,5904 + 0,4096 = 1$  ;
7.  $P(X < 3) = F(3) = 0,1808$  ;
8.  $P(1 \leq X < 4) = F(4) - F(1) = 0,5904 - 0,0016 = 0,5888$  ; ;
9.  $P(1 \leq X \leq 3) = F(3) - F(1) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (F(3 + \Delta x) - F(3)) = 0,1808 - 0,0016 = 0,1792$ .

**Задача 2.4**

Задана функція

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \sin(x), & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Визначити, чи є функція  $F(x)$  функцією розподілу випадкової величини  $X$  ? Для випадку позитивної відповіді знайти ймовірність

$$P\left(\frac{\pi}{6} \leq X < \frac{\pi}{3}\right).$$

**Розв'язання**

Необхідною та достатньою умовою для функції розподілу  $F(x)$  є задоволення таких властивостей:

1.  $F(x)$  – неспадна функція;

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

На рис. 2.7 показано графік заданої функції. Як бачимо з рисунку, виконання цих умов для заданої функції  $F(x)$  очевидне. Отже, можна стверджувати, що  $F(x)$  є функцією розподілу випадкової величини  $X$ .

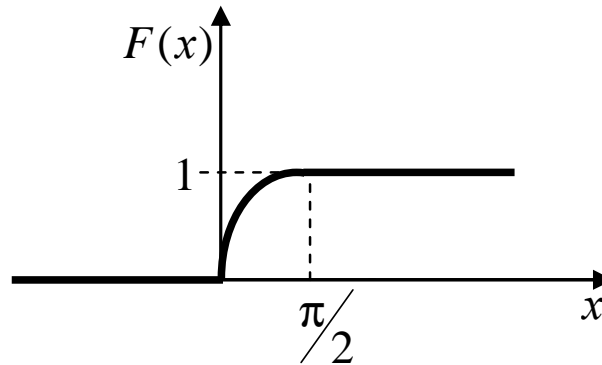


Рисунок 2.7

Тоді шукана ймовірність

$$P(\pi/6 \leq X < \pi/3) = F(\pi/3) - F(\pi/6) = \sin(\pi/3) - \sin(\pi/6) = (\sqrt{3} - 1) / 2.$$

### Задача 2.5

Задана функція

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,2, & 0 \leq x < 7; \\ 0,01x, & 7 \leq x < 15; \\ 1, & x \geq 15. \end{cases}$$

Перевірити, чи є функція  $F(x)$  функцією розподілу випадкової величини  $X$ ?

### Розв'язання

За визначенням функція розподілу випадкової величини повинна бути неспадною, тобто повинна виконуватись умова

$$F(x_2) \geq F(x_1) \text{ при } x_2 > x_1.$$

Для заданої функції  $F(x)$  маємо

$$F(15) = 0,15 < F(6) = 0,2.$$

Відповідно  $F(x)$  не є неспадною функцією, тому не може бути функцією розподілу випадкової величини  $X$  (рис. 2.8). Необхідно зазначити, що інші властивості функції розподілу випадкової величини для заданої функції  $F(x)$  справедливі.

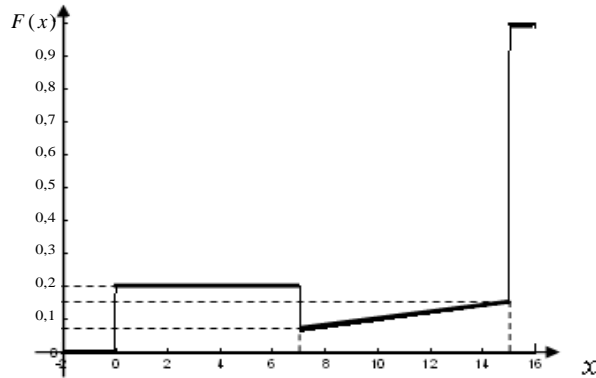


Рисунок 2.8

### Задача 2.6

Щільність імовірності неперервної випадкової величини  $X$  має вигляд:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ Cx^2, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Визначити константу  $C$ , побудувати функцію розподілу  $F(x)$  і знайти ймовірність  $P\{-1 \leq X \leq 1\}$ .

### Розв'язання

Константу  $C$  знайдемо із умови нормування  $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_0^2 Cx^2 dx = C \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{8C}{3}, \quad \text{звідки } C = 3/8.$$

Для побудови функції розподілу  $F(x)$ , зазначимо, що інтервал  $[0; 2]$  ділить область значень аргументу  $x$  (числову вісь) на три частини:  $(-\infty; 0)$ ,  $[0; 2]$ ,  $(2; \infty)$ . Розглянемо кожний із цих інтервалів. У першому випадку (при  $X < 0$ ) ймовірність події ( $X < x$ ):

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0,$$

через те, що щільність імовірності  $p(x)$  на напівосі  $(-\infty; 0)$  дорівнює нулю. У другому випадку

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt = \int_{-\infty}^0 p(t)dt + \int_0^x p(t)dt = 0 + \frac{3}{8} \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{8}.$$

Нарешті, в останньому випадку при  $X > 2$ ,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt = \int_{-\infty}^0 p(t)dt + \int_0^2 p(t)dt + \int_2^x p(t)dt = 0 + \frac{3}{8} \int_0^2 t^2 dt = 0 + 1 + 0 = 1,$$

через те, що щільність  $p(x)$  перетворюється на нуль в інтервалі  $(2; \infty)$ .

Функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x^3}{8}, & 0 \leq x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Тобто  $P\{-1 \leq X \leq 1\} = F(1) - F(-1) = 1/8 - 0 = 1/8$ .

### Задача 2.7

Для випадкової величини  $X$  із задачі 2.6 знайти математичне сподівання та дисперсію.

**Розв'язання**

За визначенням для безперервно розподіленої випадкової величини математичне сподівання (2.7) дорівнює

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0dx + \frac{3}{8} \int_0^2 x \cdot x^2 dx + \int_2^{\infty} x \cdot 0dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{3}{2}.$$

Другий початковий момент (2.9)

$$\langle X^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = \frac{3}{8} \int_0^2 x^2 \cdot x^2 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{12}{5}.$$

Дисперсія (середнє квадрата без квадрата середнього) дорівнює

$$D_X = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = 0,15.$$

**Задача 2.8**

Щільність імовірності безперервно розподіленої випадкової величини задана формулою

$$p(x) = \frac{C}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Знайти: а) значення константи  $C$ ; б) вигляд функції розподілу  $F(x)$ ; в) імовірність потрапляння випадкової величини  $X$  в інтервал  $-1 < x < 1$ .

**Розв'язання**

Значення сталої  $C$  знайдемо з умови нормування щільності ймовірності випадкової величини

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{1+x^2} dx = C \operatorname{arctg}(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = C \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

Звідси  $C = \frac{1}{\pi}$ .

Вираз для функції розподілу має вигляд

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(x) \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \left( \operatorname{arctg}(x) + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{2}.$$

Ймовірність потрапляння випадкової величини у заданий інтервал дорівнює

$$P(-1 < x < 1) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(x) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = 0,5.$$

### Задача 2.9

Знайти математичне сподівання та дисперсію для дискретно розподіленої випадкової величини:

$x$	0	1	2	3	4	5
$p$	0,2373	0,3955	0,2637	0,0879	0,0146	0,0010

### Розв'язання

За визначенням для дискретно розподіленої випадкової величини математичне сподівання (2.6) дорівнює

$$\langle X \rangle = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot p_i = 0,3955 + 2 \cdot 0,2637 + 3 \cdot 0,0879 + 4 \cdot 0,0146 + 5 \cdot 0,0010 = 1,25.$$

Згідно з формулою (2.13) маємо

$$\begin{aligned} D_X = \sum_{i=1}^5 (x_i - \langle X \rangle)^2 \cdot p_i &= (0 - 1,25)^2 \cdot 0,2373 + (1 - 1,25)^2 \cdot 0,3955 + \\ &+ (2 - 1,25)^2 \cdot 0,2637 + (3 - 1,25)^2 \cdot 0,0879 + \\ &+ (4 - 1,25)^2 \cdot 0,0146 + (5 - 1,25)^2 \cdot 0,0010 = 0,938. \end{aligned}$$

**Задача 2.10**

Дискретна випадкова величина  $X$  задана законом розподілу:

$X$	1	3
$p$	0,4	0,6

Знайти початкові моменти першого, другого та третього порядків.

**Розв'язання**

Початковий момент першого порядку

$$\langle X^{k=1} \rangle = \sum_{j=1}^{n=2} x_j p(x_j) = 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,6 = 2,2 .$$

Початковий момент другого порядку

$$\langle X^{k=2} \rangle = \sum_{j=1}^{n=2} x_j^2 p(x_j) = 1 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,6 = 5,8 .$$

Початковий момент третього порядку

$$\langle X^{k=3} \rangle = \sum_{j=1}^{n=2} x_j^3 p(x_j) = 1 \cdot 0,4 + 27 \cdot 0,6 = 16,6 .$$

**Задача 2.11**

Випадкова величина  $\xi$  задана рядом розподілу:

$\xi$	-1	0	2
$P$	1/4	1/4	1/2

Визначити математичне сподівання  $\langle \xi \rangle$ , дисперсію  $D_\xi$  та середнє квадратичне відхилення  $\sigma_\xi$ .

**Розв'язання**

За визначенням математичне сподівання випадкової величини  $\xi$  дорівнює

$$\langle \xi \rangle = \sum_{i=1}^3 \xi_i p_i = -1 \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/4 = 1/4.$$

Визначимо середнє квадрата випадкової величини:

$$\langle \xi^2 \rangle = \sum_{i=1}^3 \xi_i^2 p_i = (-1)^2 \cdot 1/4 + 0^2 \cdot 1/4 + 2^2 \cdot 1/4 = 5/4,$$

Враховуючи, що дисперсія випадкової величини дорівнює середньому квадрата без квадрата середнього (2.14), маємо

$$D_\xi = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{16} = \frac{19}{16}.$$

Середнє квадратичне відхилення  $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} = \sqrt{\frac{19}{4}}$ .

### Задача 2.12

Точкова маса  $m$  (рис. 2.9) здійснює сталі коливання під дією горизонтально прикладеної гармонічної сили. Визначити щільність імовірності події, яка полягає у тому, що у випадковий момент часу точка виявиться на відстані  $x$  від положення рівноваги.

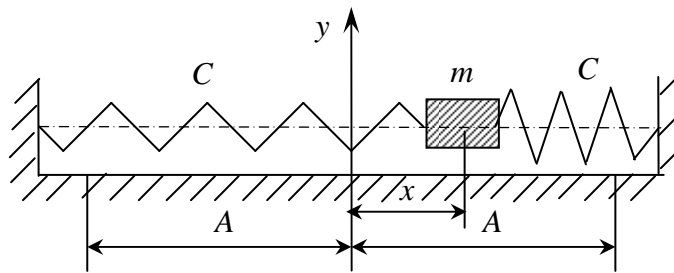


Рисунок 2.9

### Розв'язання

У випадку гармонічних сталих коливань зміщення маси  $m$  у довільний момент часу визначається законом  $x = A \sin \omega t$ , де  $A$  – амплітуда коливань,  $\omega$  – частота. Імовірність перебування маси  $m$  у довільний момент часу в інтервалі  $(x; x+dx)$  пропорційна довжині



інтервалу  $dx$  та зворотно пропорційна швидкості руху  $\frac{dx}{dt}$ , тобто  
можемо записати

$$dP(x \leq X \leq x + dx) = k dx / \left( \frac{dx}{dt} \right) = k dt,$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності. З іншого боку, за визначенням елемент ймовірності  $dP = p(x)dx$ , тоді, враховуючи попередній вираз для  $dP$ , маємо

$$p(x) = k \frac{dt}{dx}.$$

Використовуючи закон руху, виключимо із  $p(x)$  час  $t$ . Маємо

$$\frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t = A\omega \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = A\omega \sqrt{1 - \left( \frac{x}{A} \right)^2} = \omega \sqrt{A^2 - x^2}.$$

Відповідно шукана щільність ймовірності  $p(x) = \frac{k}{\omega \sqrt{A^2 - x^2}}$ .

Величину  $k$  визначимо із умови нормування

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \int_{-A}^A p(x) dx = 1.$$

Звідки отримуємо  $k = \frac{\omega}{\pi}$ . Остаточний вираз для щільності ймовірності  
набирає вигляду

$$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}}.$$

Відповідна функція розподілу

$$F(x) = \int_{-A}^x p(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \arcsin \frac{x}{A} + \frac{\pi}{2} \right).$$

Ймовірність перебування маси  $m$  у довільний момент часу в інтервалі  $(x_1; x_2)$  дорівнює

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{\pi} \left( \arcsin \frac{x_2}{A} - \arcsin \frac{x_1}{A} \right).$$

### Задача 2.13

Випадкова величина  $X$  задана щільністю розподілу ймовірності  $p(x) = 2 \cos(2x)$  на інтервалі  $(0, \pi/4)$ . Поза цим інтервалом  $p(x) = 0$ . Знайти: а) моду; б) медіану випадкової величини  $X$ .

### Розв'язання

Легко впевнитися, що функція  $p(x) = 2 \cos(2x)$  на інтервалі  $(0; \pi/4)$  не має екстремуму, тому випадкова величина  $X$  моди не має.

Медіану  $M_e(X) = m_e$  випадкової величини  $X$  знайдемо виходячи з її визначення  $P(X < m_e) = P(X > m_e)$ , яке еквівалентне умові

$$P(X < m_e) = 1/2.$$

Враховуючи задані за умовами задачі значення, маємо

$$P(0 < X < m_e) = 1/2, \text{ або } \int_0^{m_e} 2 \cos(2x) dx = \sin 2m_e = 1/2.$$

Відповідно  $2m_e = \arcsin(0,5) = \pi/6$ , а шукане значення медіани  $m_e = \pi/12$ .

### Задача 2.14

Випадкова величина  $X$  задана щільністю розподілу ймовірності  $p(x) = 0,5x$  на інтервалі  $(0; 2)$ . Поза цим інтервалом  $p(x) = 0$ . Знайти початкові та центральні моменти від першого до четвертого порядків включно.

### Розв'язання

Застосовуючи загальну формулу для початкових моментів

$$\langle X^K \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx$$

знайдемо:

$$\langle X^{K=1} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot (0,5x) dx = \frac{4}{3}, \quad \langle X^{K=2} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot (0,5x) dx = 2,$$

$$\langle X^{K=3} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot (0,5x) dx = 3,2, \quad \langle X^{K=4} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot (0,5x) dx = \frac{16}{3}.$$

Як було зазначено раніше, центральний момент першого порядку будь-якої випадкової величини  $\langle \tilde{X}^{K=1} \rangle = 0$ .

Використовуючи формули, що виражають центральні моменти через початкові, отримаємо

$$\langle \tilde{X}^{K=2} \rangle = \langle X^{K=2} \rangle - \langle X^{K=1} \rangle^2;$$

$$\langle \tilde{X}^{K=3} \rangle = \langle X^{K=3} \rangle - \langle X^{K=1} \rangle \cdot \langle X^{K=2} \rangle + \langle X^{K=1} \rangle^3;$$

$$\langle \tilde{X}^{K=4} \rangle = \langle X^{K=4} \rangle - 4 \langle X^{K=1} \rangle \cdot \langle X^{K=3} \rangle + 6 \langle X^{K=1} \rangle^2 \cdot \langle X^{K=3} \rangle - 3 \langle X^{K=1} \rangle^4.$$

Підставляючи в останні формули раніше знайдені значення відповідних початкових моментів, маємо

$$\langle \tilde{X}^{K=2} \rangle = 2/9, \quad \langle \tilde{X}^{K=3} \rangle = -8/135, \quad \langle \tilde{X}^{K=4} \rangle = 16/135.$$

### Задача 2.15

Закон розподілу випадкової величини  $X$  заданий функцією щільності ймовірності  $p(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$ . Знайти: а) числові характеристики випадкової величини  $\langle X \rangle$  і  $D_X$ ; б) функцію розподілу; в) інтервал, в який з імовірністю 0,96 потрапляє випадкова величина у результаті випробувань.

**Розв'язання**

Із вигляду функції щільності ймовірності можна зробити висновок, що випадкова величина  $X$  підлягає нормальному закону розподілу з математичним сподіванням  $\langle X \rangle = 2$  і середнім квадратичним відхиленням  $\sigma_X = 3$  ( $D_X = \sigma_X^2 = 9$ ).

Інтегруючи щільність імовірності  $p(x)$ , знайдемо функцію розподілу:

$$F(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{(t-2)^2}{18}} dt.$$

Знайдемо інтервал, у який з імовірністю 0,96 потрапляє випадкова величина  $X$ . Візьмемо, що межі інтервалу  $\alpha = \langle X \rangle - \Delta$ ,  $\beta = \langle X \rangle + \Delta$ .

Тоді

$$\begin{aligned} P(2 - \Delta \leq X \leq 2 + \Delta) &= \Phi\left(\frac{2 + \Delta - 2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2 - \Delta - 2}{3}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\Delta}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{\Delta}{3}\right) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{3}\right) = 0,96. \end{aligned}$$

Звідси  $\Phi\left(\frac{\Delta}{3}\right) = 0,48$ . За таблицями значень функції Лапласа

$\Phi(x) = 0,48$  знайдемо аргумент  $x$ :

$$x = 2,054, \quad \frac{\Delta}{3} = x, \quad \Delta = 6,162.$$

Остаточно отримаємо інтервал  $[-4,162; 8,162]$ , в який з імовірністю 0,96 потрапляє випадкова величина  $X$  у результаті випробування.

**Задача 2.16**

Потяг складається з 100 вагонів. Маса кожного вагона – випадкова величина, яка підлягає нормальному закону розподілу з математичним сподіванням  $\langle m \rangle = 65$  т і середнім квадратичним відхиленням  $\sigma_x = 0,9$  т. Локомотив може везти потяг масою не більшою за 6600 т, інакше необхідно чіпляти другий локомотив. Знайти ймовірність того, що другий локомотив буде непотрібний.

**Розв'язання**

Другий локомотив не знадобиться, якщо відхилення маси потяга від очікуваного ( $100 \cdot 65 = 6500$ ) не перевищує  $6600 - 6500 = 100$  т. Оскільки маса кожного вагона має нормальний розподіл, то і маса всього потяга також буде підлягати нормальному закону розподілу (як сума незалежних величин із заданим законом розподілу).

Отримуємо

$$P(|X - \langle X \rangle| < 100) = 2\Phi\left(\frac{100}{100 \cdot \sigma_x}\right) = 2\Phi(1,111) = 2 \cdot 0,3665 = 0,733.$$

**Задача 2.17**

Балка постійної згинальної жорсткості  $EJ$  та геометрії навантажена випадковою поперечною силою  $P$  із відомим математичним сподіванням  $\langle P \rangle$  та дисперсією  $D_P$  (рис. 2.10). Визначити математичне сподівання та дисперсії опорних реакцій, прогинання у точці прикладання сили  $P$  та максимального нормального напруження.

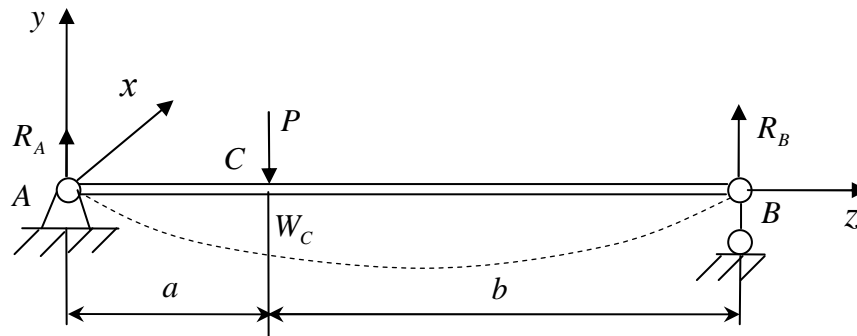


Рисунок 2.10

### Розв'язання

За відомими формулами опору матеріалів [12] для детерміністичної сили  $P$  маємо:

$$R_A = \frac{b}{a+b}P, \quad R_B = \frac{a}{a+b}P, \quad w_c = \frac{a^2b^2}{3EJ(a+b)}P, \quad \sigma_c^{\max} = \frac{ab}{(a+b)W}P,$$

де  $W$  – момент опору при вигинанні.

При випадковій силі  $P$  математичні сподівання даних величин відповідно дорівнюватимуть:

$$\begin{aligned} \langle R_A \rangle &= \frac{b}{a+b} \langle P \rangle, \quad \langle R_B \rangle = \frac{a}{a+b} \langle P \rangle, \\ \langle w_c \rangle &= \frac{a^2b^2}{3EJ(a+b)} \langle P \rangle, \quad \langle \sigma_c^{\max} \rangle = \frac{ab}{(a+b)W} \langle P \rangle. \end{aligned}$$

Дисперсія опорної реакції у точці А

$$D_{R_A} = \langle (R_A - \langle R_A \rangle)^2 \rangle = \left( \frac{b}{a+b} \right)^2 \langle (P - \langle P \rangle)^2 \rangle = \left( \frac{b}{a+b} \right)^2 D_P.$$

Аналогічно знаходимо дисперсії опорної реакції у точці В, прогинання та максимального нормального напруження у точці С прикладання сили  $P$ :

$$D_{R_B} = \frac{a^2}{(a+b)^2} D_P, \quad D_{w_c} = \left( \frac{a^2 b^2}{3EJ(a+b)} \right)^2 D_P, \quad D_{\sigma_c^{\max}} = \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2 W^2} D_P.$$

### Задача 2.18

Випадкова величина  $X$  задана щільністю ймовірності:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ a \sin x, & 0 < x < \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Визначити коефіцієнт  $a$ , ймовірність  $P\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ . Побудувати графіки щільності ймовірності  $p(x)$  і функції розподілу  $F(x)$ .

### Розв'язання

Коефіцієнт  $a$  визначимо з умови нормування:

$$\int_0^{\pi} a \sin x dx = 1, \Rightarrow -a(\cos \pi - \cos 0) = 1,$$

звідси  $a = \frac{1}{2}$ .

Знаходимо ймовірність  $P$  потрапляння випадкової величини в заданий інтервал  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ :

$$P\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin x dx = -\frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = \frac{1}{2}.$$

За визначенням функція розподілу  $F(x) = \int_{-\infty}^x p(x') dx'$ , тобто

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2} \sin x dx = -\frac{1}{2} (\cos x - \cos 0) = \frac{1}{2} (1 - \cos x).$$

Остаточно маємо

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2} (1 - \cos x), & 0 < x < \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Графіки щільності ймовірності  $p(x)$  і функції розподілу  $F(x)$  наведені на рис. 2.11 а, б.

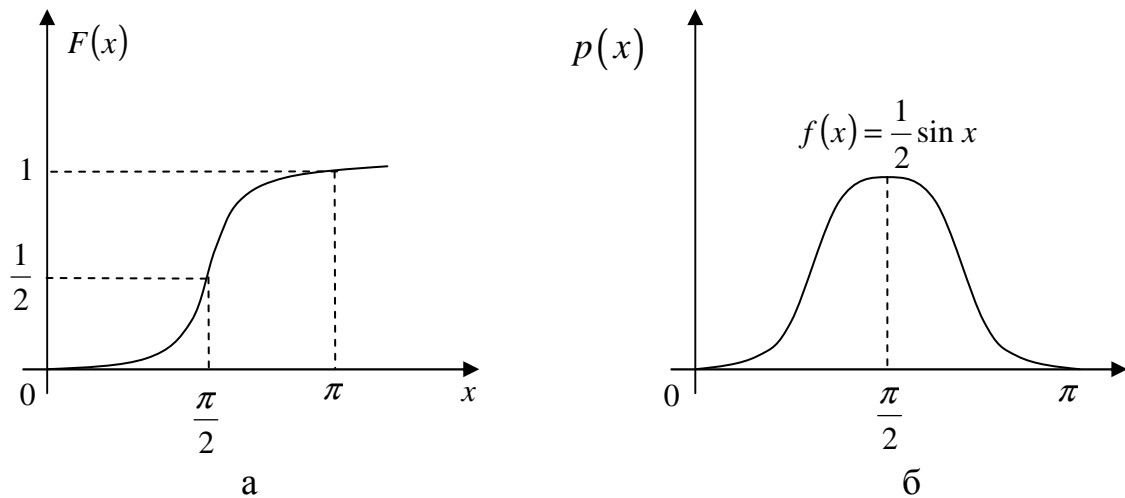


Рисунок 2.11

### Задача 2.19

Проводять вимірювання діаметра деталі. Похибки вимірювання беруть як випадкову величину  $X$ , яка підлягає нормальному закону розподілу з параметрами: математичне сподівання  $\langle X \rangle = 0$ , середнє квадратичне відхилення  $\sigma_X = 1$  мм. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде зроблено з похибкою, яка не перевищує за абсолютним значенням величини 2 мм.

### Розв'язання

Для якісної оцінки похибки вимірювань, як правило, використовують так звані довірчі інтервали та відповідні їм довірчі ймовірності.

За умовами задачі випадкова похибка вимірювання знаходиться у середині деякого інтервалу  $\delta = \pm 2$  мм, тобто потрібно знайти ймовірність виконання нерівності  $|X - \langle X \rangle| < \delta$ . Невідоме істинне



значення вимірюваної величини знаходиться в інтервалі  $|X - \delta; X + \delta|$  з довірчою ймовірністю

$$P(|X - 0| \leq 2) = 2\Phi(\delta / \sigma_x) = 2\Phi(2/1) = 2\Phi(2,0) = 0,4772.$$

Ймовірність того, що вимірювання буде зроблене з похибкою, яка не перевищує за значенням 2 мм, дорівнює

$$P(|X| \leq \delta) = P(|X| \leq 2) = 2 \cdot 0,4772 = 0.9544.$$

### Задача 2.20

Знайти характеристичну функцію випадкової величини  $X$ , розподіленої за біноміальним законом. Визначити математичне сподівання  $\langle X \rangle$  і дисперсію  $D_X$ .

### Розв'язання

Біноміальний закон розподілу випадкової величини  $X$  має вигляд

$$P_k = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Характеристична функція дискретно розподіленої випадкової величини  $X$  визначаємо за формулою (2.21)

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^n e^{i\xi k} p_k = \sum_{k=1}^n e^{i\xi k} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{i\xi} p)^k q^{n-k}.$$

З урахуванням формули бінома Ньютона  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ ,

отримуємо

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{i\xi} p)^k (q)^{n-k} = (e^{i\xi} p + q)^n.$$

Математичне сподівання і дисперсію випадкової величини  $X$  знаходимо за допомогою похідних у точці  $\xi = 0$ :

$$\langle X \rangle = (-i) \frac{df}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = -i \left( n (e^{i\xi} p + q)^{n-1} \cdot p e^{i\xi} \cdot i \right) \Big|_{\xi=0} = np,$$

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle &= -\frac{d^2 f}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} = \left( n p e^{i\xi} (e^{i\xi} p + q)^{n-1} + n p^2 e^{2i\xi} (e^{i\xi} p + q)^{n-2} (n-1) \right) \Big|_{\xi=0} = \\ &= np(p+q)^{n-1} + n p^2 (n-1) (p+q)^{n-2} = np + n^2 p^2 - n p^2. \end{aligned}$$

Отже, дисперсія випадкової величини  $X$  дорівнює

$$D_X = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = np + n^2 p^2 - n p^2 - n^2 p^2 = npq.$$

### Задача 2.21

Випадкова величина  $X$  рівномірно розподілена на відрізку  $|x| \leq a$ . Знайти характеристичну функцію  $f(\theta)$  випадкової величини  $X$ , а також її математичне сподівання  $\langle X \rangle$  і дисперсію  $D_X$ .

### Розв'язання

Щільність імовірності випадкової величини  $X$  (рис. 2. 12)

$$p(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a; \\ \frac{1}{2a}, & |x| \leq a. \end{cases}$$

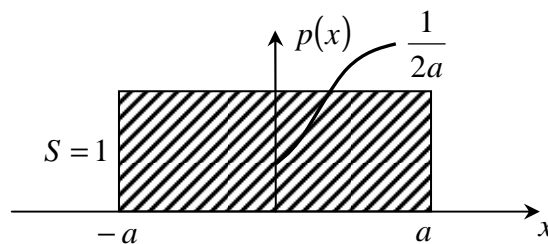


Рисунок 2.12

Характеристична функція випадкової величини є перетворенням Фур'є від щільності ймовірності:

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{i\xi x} dx.$$

Для заданого рівномірного закону розподілу з урахуванням формули Ейлера  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , маємо

$$f(\xi) = \int_{-a}^a \frac{1}{2a} e^{i\xi x} dx = 2 \int_0^a \frac{1}{2a} \cos(\xi x) dx = \frac{\sin(\xi a)}{\xi a}.$$

Перший початковий момент (математичне сподівання) випадкової величини  $X$  знаходимо за формулою (2.20)

$$\langle X \rangle = -i \left. \frac{df(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = -i \left[ \frac{\cos(\xi a)}{\xi} - \frac{\sin(\xi a)}{\xi^2 a} \right]_{\xi=0}.$$

Введемо змінну  $x = \xi a$ , тоді

$$\langle X \rangle = -ia \left[ \frac{\cos(x)x}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x^2} \right]_{x=0}.$$

Застосовуючи правило Лопіталя, отримаємо

$$\langle X \rangle = -ia \left[ \frac{\cos(x) - x \sin(x) - \cos(x)}{2x} \right]_{x=0} = 0,$$

тобто  $\langle X \rangle = 0$ , і випадкова величина є центрованою. Для центрованої випадкової величини дисперсія дорівнює другому початковому моменту:

$$\begin{aligned} D_X = \langle X^2 \rangle &= (-i)^2 \left. \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \right|_{\xi=0} = - \left. \frac{d^2}{d\xi^2} \left( \frac{\sin(\xi a)}{\xi a} \right) \right|_{\xi=0} = \\ &= \left. \frac{2 \sin(\xi a) - a^2 \xi^2 \sin(\xi a) - 2a \xi \cos(\xi a)}{a \xi^3} \right|_{\xi=0}. \end{aligned}$$

Проводячи далі заміну змінних ( $x = \xi a$ ), матимемо

$$D_X = \left. \frac{-a^2 \left[ (2 - x^2) \sin(x) - 2x \cos(x) \right]}{x^3} \right|_{x=0}.$$

Застосовуючи правило Лопіталя, остаточно отримаємо

$$D_X = -a^2 \left. \frac{-x^2 \cos(x)}{3x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{a^2 \cos(x)}{3} \right|_{x=0} = \frac{a^2}{3}.$$

## 2.6. ДОДАТКОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

**Завдання 1.** Функція розподілу ймовірності випадкової величини  $X$  має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ ax^2, & 0 \leq x < 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Визначити коефіцієнт  $a$ . Знайти ймовірність того, що величина  $X$  знаходиться у межах інтервалів  $(3; 6)$  і  $(1; 2)$ . Побудувати графіки функції розподілу  $F(x)$  і щільності ймовірності  $p(x)$ .

**Завдання 2.** Здійснюють  $n$  незалежних дослідів, у кожному з яких з імовірністю  $p$  з'являється подія  $A$ . Записати вираз для ряду розподілу випадкової величини  $X$  – числа проявів події  $\overline{A}$  у  $n$  дослідах і знайти її математичне сподівання та дисперсію.

**Завдання 3.** Випадкова точка  $A$  підлягає нормальному розподілу у колі радіусом  $R$ . Знайти математичне сподівання  $\langle \xi \rangle$  і дисперсію  $D_\xi$  випадкової величини  $\xi$ , яка є відстанню від точки  $A$  до центра кола.

**Завдання 4.** Визначити математичне сподівання, середнє квадратичне відхилення, дисперсію та центральні моменти третього і четвертого порядків випадкової величини  $X$ , щільність імовірності якої має вигляд

$$p(x) = \begin{cases} 1/2l(|x-a| \leq l); \\ 0 & (|x-a| > l). \end{cases}$$

**Завдання 5.** Під час гри у городки залишився невібитим один городок, а у гравця залишилося  $n$  бітів. Побудувати ряд розподілу невикористаних бітів  $X$ , що залишаються у гравця після того, як останній городок буде вибитий, якщо ймовірність вибити городок при кожному киданні дорівнює  $p$ .

**Завдання 6.** У групі навчається 25 студентів. Вважається, що дні народження студентів є незалежними і рівномірно розподілені за 12 місяцями року. Знайти математичне сподівання та дисперсію місяців, в яких немає жодного дня народження.

**Завдання 7.** Знайти абсолютний (за модулем) центральний момент  $k$ -го порядку нормально розподіленої випадкової величини  $X$ , середнє квадратичне відхилення якої дорівнює  $\sigma$ , а математичне сподівання  $\langle X \rangle = 0$ .

**Завдання 8.** Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини  $X$ , яка рівномірно розподілена на інтервалі  $(2; 6)$ .

**Завдання 9.** Невід'ємна випадкова величина  $\xi$ , має функцію розподілу  $F(x) = P(\xi \leq x)$ . Довести, що

$$\langle \xi \rangle = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx .$$

**Завдання 10.** Деяка випадкова величина може набути одного із таких значень:  $-2, -1, 0, 1, 2$ . Знайти відповідні цим значенням ймовірності  $p_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ), якщо  $\langle X \rangle = \langle X^3 \rangle = 0$ ,  $\langle X^2 \rangle = 1$ ,  $\langle X^4 \rangle = 2$ .

**Завдання 11.** Випадкова величина  $X$  має щільність імовірності вигляду  $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ . Довести справедливості рекурентної

формули для визначення центральних моментів цієї випадкової величини:  $\langle (X - \langle X \rangle)^{k+2} \rangle = (k+1)\sigma^2 \langle (X - \langle X \rangle)^k \rangle$ .

**Завдання 12.** Дискретна випадкова величина  $X$  може набувати будь-яких цілих додатних значень з імовірностями, що спадають у геометричній прогресії. Вибрати перший член та знаменник прогресії так, щоб математичне сподівання випадкової величини  $X$  дорівнювало 10, і визначити за цієї умови ймовірність того, що  $X \leq 10$ .

**Завдання 13.** Знайти характеристичну функцію та моменти  $k$ -го порядку рівномірно розподіленої випадкової величини  $X$ , щільність імовірності якої задана функцією

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}; & a \leq x \leq b; \\ 0, & x < a, x > b. \end{cases} \quad \text{Побудувати}$$

графіки  $p(x)$  і  $F(x)$  при  $a < 0$ ,  $b > 0$ ,  $b = 3|a|$ .

**Завдання 14.** Випадкова величина  $X$  підлягає закону Сімсона (за законом “рівнобедреного трикутника”) на інтервалі  $(-a; a)$ . Визначити функцію розподілу  $F(x)$  і записати вираз для щільності ймовірності  $p(x)$  випадкової величини  $X$ . Побудувати графіки  $p(x)$  і  $F(x)$ . Знайти ймовірність  $P\left(-\frac{a}{2} < x < a\right)$ .

**Завдання 15.** Випадкова величина  $X$  має щільність імовірності:  $p(x) = ae^{\lambda|x|}$ ,  $\lambda > 0$  (закон Лапласа). Визначити коефіцієнт  $a$  і функцію розподілу  $F(x)$ . Побудувати графіки  $p(x)$  і  $F(x)$ .

**Завдання 16.** Проводиться вимірювання діаметра вала без систематичних (одного знака) похибок. Випадкові похибки вимірювання  $X$  підлягають нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням 10 мм. Знайти ймовірність того, що

вимірювання буде проведене з похибкою, яка за абсолютною величиною не перевищує 15 мм.

**Завдання 17.** Випадкова величина  $X$  задана щільністю ймовірності  $p(x) = 2x$  на інтервалі  $(0; 1)$ . Поза цим інтервалом  $p(x) = 0$ . Знайти математичне сподівання, дисперсію, моду та медіану.

**Завдання 18.** Випадкова величина  $X$  на інтервалі  $(-c; c)$  задана щільністю ймовірності  $p(x) = \frac{A}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}$ . Поза цим інтервалом  $p(x) = 0$ . Знайти дисперсію та другий центральний момент.

**Завдання 19.** Випадкова величина  $X$  підлягає нормальному закону розподілу з математичним сподіванням  $\langle X \rangle = 30$  і середнім квадратичним відхиленням  $\sigma_X = 10$ . Знайти інтервал, в який з імовірністю 0,95 потрапляє випадкова величина у результаті випробувань.

**Завдання 20.** Знайти дисперсію та математичне сподівання випадкової величини  $X$ , щільність розподілу якої визначена показовим законом розподілу  $p(x) = 1 - e^{-x}$  в інтервалі  $(2; 6)$ .

**Завдання 21.** Ціна поділки шкали амперметра дорівнює  $0,1 A$ . Покази округлюють до найближчого цілого шкали ділення. Знайти ймовірність того, що при розрахунках буде зроблена помилка, яка перевищує  $0,02 A$ .

**Завдання 22.** Задана щільність ймовірності випадкової величини  $X$

$$p(x) = \begin{cases} -4x + 9, & -2 \leq x \leq 0; \\ 0, & x < -2, x > 0. \end{cases}$$

Знайти характеристичну функцію випадкової величини  $X$ .

**Завдання 23.** Визначити характеристичну функцію випадкової величини  $X$ , рівномірно розподіленої на відрізок  $[15; 25]$ .

**Завдання 24.** Знайти характеристичну функцію неперервної випадкової величини  $X$ , що має щільність розподілу Коші  $p(x) = 1/(\pi(1+x^2))$ .

**Завдання 25.** Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини  $X$ , для якої характеристична функція має вигляд

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t}, & t \neq 0; \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

**Завдання 26.** Знайти закон розподілу випадкової величини  $X$ , характеристична функція якої має вигляд  $f(t) = e^{-|t|}$ .

**Завдання 27.** Знайти характеристичну функцію і за нею математичне сподівання та дисперсію дискретно розподіленої випадкової величини  $X$ , яка підлягає закону розподілу Паскаля

$$P_m = \frac{a^m}{(1+a)^{m+1}}, \quad a > 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

**Завдання 28.** Випадкова функція має щільність імовірності  $p(x) = 0,5e^{-|x|}$ . Визначити відповідну характеристичну функцію, а за допомогою неї математичне сподівання та дисперсію.

**Завдання 29.** Знайти характеристичну функцію випадкової

величини  $X$ , яка має щільність імовірності  $p(x) = \begin{cases} \frac{a-|x|}{a^2}, & |x| < a; \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases}$

**Завдання 30.** У партії, яка містить  $n$  виробів,  $m$  виробів є дефектними. Для перевірки якості проводять вибірку  $r$  виробів (без їх повернення). Знайти характеристичну функцію числа дефектних виробів.



## 2.7. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які величини називають випадковими? Як позначаються випадкові величини та їх можливі значення?
2. Які величини називають дискретними, неперервними?
3. Наведіть існуючі способи описання випадкових величин. Яка характеристика випадкових величин є універсальною і чому?
4. Що називають законом розподілу випадкової величини?
5. Що характеризує функція розподілу випадкової величини? Наведіть її властивості.
6. Дайте визначення елемента ймовірності. Наведіть властивості щільності ймовірності випадкової величини.
7. Як визначається і що характеризує математичне сподівання випадкової величини? Наведіть його властивості.
8. Як визначаються початкові та центральні моменти випадкової величини довільного порядку? Які моменти (якого порядку) містять найбільшу інформацію про ймовірнісні властивості випадкової величини.
9. Як визначається і що характеризує дисперсія випадкової величини? Наведіть властивості дисперсії.
10. Як визначаються і що характеризують: середнє квадратичне відхилення, мода, медіана, коефіцієнт асиметрії та ексцесу випадкової величини?
11. Чи є правильним твердження, що математичне сподівання, медіана та мода нормально розподіленої випадкової величини збігаються? Доведіть або спростуйте це твердження.
12. Дайте визначення характеристичної функції. Наведіть її властивості. Для чого вводять характеристичні функції?

### РОЗДІЛ 3. ВЕКТОРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Сукупність випадкових величин  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , що розглядаються сумісно, може бути подана векторною випадковою величиною, або  $n$ -вимірним випадковим вектором:

$$\vec{X} \stackrel{def}{=} (X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.1)$$

Прикладом векторної випадкової величини може бути положення центра ваги літака під час польоту  $X^T = (X_1, X_2, X_3)$ , випадкові сигнали, що вимірюються, на вході  $X^T = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  та виході  $Y^T = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  системи автоматичного керування, наприклад, станка ЧПП і т. д.

#### 3.1. Характеристики розподілу векторної випадкової величини

Для системи дискретних випадкових величин закон розподілу подається таблицею значень сумісної ймовірності сукупності випадкових подій.

Закон розподілу системи  $(X, Y)$  двох випадкових величин  $X$  і  $Y$

$$P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m \quad (3.2)$$

може бути заданий у вигляді табл. 3.1.

Таблиця 3.1

$x_i \backslash y_j$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_m$
$x_1$	$P_{11}$	$P_{12}$	$\dots$	$P_{1m}$
$x_2$	$P_{21}$	$P_{22}$	$\dots$	$P_{2m}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_n$	$P_{n1}$	$P_{n2}$	$\dots$	$P_{nm}$

Причому  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$  – умова нормування.

Функція сумісного розподілу випадкових величин  $(X, Y)$  визначається ймовірністю одночасного виконання двох нерівностей  $X < x, Y < y$ :

$$F(x, y) = P(X < x_i, Y < y_j), \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.3)$$

За сумісним розподілом можуть бути знайдені розподіли кожної з випадкових величин  $X$  і  $Y$ . Якщо суму ймовірностей  $i$ -ї строки та  $j$ -го стовпчика позначити  $p'_i = \sum_{j=1}^m p_{ij}$  і  $p''_j = \sum_{i=1}^n p_{ij}$ , то закони розподілу кожної

з випадкових величин  $X$  і  $Y$  можна подати відповідними табл. 3.2 і 3.3.

Таблиця 3.2 – Розподіл імовірності випадкової величини  $X$

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$P$	$p'_1$	$p'_2$	...	$p'_n$

Таблиця 3.3 – Розподіл імовірності випадкової величини  $Y$

$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_m$
$P$	$p''_1$	$p''_2$	...	$p''_m$

Випадкові величини  $X$  і  $Y$  незалежні, якщо закон розподілу однієї величини не залежить від того, якого значення набула інша випадкова величина. Для незалежності випадкових величин  $X$  і  $Y$  необхідно і достатньо виконання умови

$$p_{ij} = p'_i \cdot p''_j, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.4)$$

Для опису ймовірнісних властивостей безперервно розподіленої векторної випадкової величини до розгляду вводять дві основні характеристики розподілу:

а) сумісну функцію розподілу компонент випадкового вектора, яка визначається ймовірністю сукупності випадкових подій

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} P \left( \begin{array}{l} X_1 < x_1 \\ X_2 < x_2 \\ \dots \\ X_n < x_n \end{array} \right); \quad (3.5)$$

б) сумісну щільність імовірності компонент  $n$ -вимірного випадкового вектора

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (3.6)$$

для диференційовної функції розподілу  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Умова нормування для сумісної щільності ймовірності має вигляд

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1. \quad (3.7)$$

Умова узгодженості щільності ймовірності  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  за будь-яким аргументом  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , наприклад за  $x_j$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_j = p(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), \quad (3.8)$$

або за будь-яким поєднанням аргументів  $x_j, x_{j+1}, \dots, x_k$ , наприклад,  $x_3, x_4, \dots, x_n$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_3 dx_4, \dots dx_n}_{n-2} = p(x_1, x_2) \quad (3.9)$$

і т.д.

Як окремий випадок, для системи двох неперервних випадкових величин  $X$  і  $Y$  функцію сумісного розподілу системи, а саме: ймовірність влучення вектора  $(X, Y)$  у безкінечний квадрант (область

$\Omega$ ), тобто частину площини, обмеженої осями (рис. 3.1), можна задати за допомогою функції щільності ймовірності  $p(x, y)$  як

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(x, y) dx dy . \quad (3.10)$$

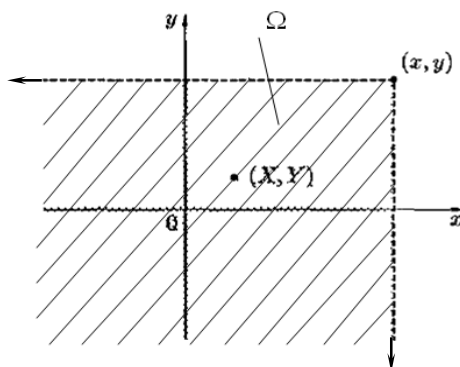


Рисунок 3.1

Щільність імовірності сумісного розподілу  $p(x, y)$  задовольняє умови:

1.  $p(x, y) > 0$
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = 1$  – умова нормування.

Ймовірність влучення випадкової точки  $(X, Y)$  до довільної області  $D$  знаходиться за формулою

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D p(x, y) dx dy . \quad (3.11)$$

Щільності ймовірності розподілу компонент  $X, Y$ , що входять до системи  $(X, Y)$ , за умовою узгодженості (3.8) виражаються через щільність імовірності сумісного розподілу як

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy, \\ p(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.2. Умовні закони розподілу систем випадкових величин

Умовним законом розподілу випадкової величини, що входить до системи векторних аргументів, називають її закон розподілу, який визначається за умови, що інша випадкова величина набула певного значення. Умовні щільності ймовірності розподілу двох безперервно розподілених випадкових величин  $X$  і  $Y$ , що входять до системи, позначаються як  $p_1(x/y)$  і  $p_2(y/x)$ .

Умовні щільності ймовірності розподілу системи зв'язані зі щільністю ймовірності сумісного розподілу такими співвідношеннями (аналог формул Байєса):

$$p(x, y) = p_1(x)p_2(y/x) = p_2(y)p_1(x/y),$$

$$p_1(x/y) = \frac{p(x, y)}{p_2(y)}, \quad p_2(y) \neq 0, \quad (3.13)$$

$$p_2(y/x) = \frac{p(x, y)}{p_1(x)}, \quad p_1(x) \neq 0.$$

Для стохастично незалежних випадкових величин

$$p_1(x/y) = p_1(x);$$

$$p_2(y/x) = p_2(y); \quad (3.14)$$

$$p(x, y) = p_1(x)p_2(y).$$

Функція сумісного розподілу системи  $F(x, y)$  і функції розподілу  $F_1(x)$ ,  $F_2(y)$  стохастично незалежних компонент  $x$  і  $y$  зв'язані співвідношенням

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y). \quad (3.15)$$

### 3.3. Числові характеристики випадкових векторів

Числовими характеристиками випадкових векторів є:

– вектор математичного сподівання або моментів першого порядку

$$\langle \bar{X} \rangle^T = \{ \langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle \}, \quad (3.16)$$

де

$$\langle X_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_k p(x_k) dx_k, \quad k = \overline{1, n}; \quad (3.17)$$

– математичне сподівання  $k$ -ї компоненти вектора  $\vec{X}$ ;

– моменти другого порядку:

$$\langle X_j X_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k p(x_j, x_k) dx_j dx_k, \quad j, k = \overline{1, n}, \quad (3.18)$$

які є компонентами квадратної матриці  $n \times n$ , де  $p(x_j, x_k)$  – сумісна щільність імовірності  $j$ -ї та  $k$ -ї компонент  $n$ -вимірного випадкового вектора;

– моменти третього порядку:

$$\langle X_j X_k X_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k x_m p(x_j, x_k, x_m) dx_j dx_k dx_m, \quad (3.19)$$

які утворюють кубічну матрицю і т. д.

Найбільш значущий внесок в опис випадкового вектора роблять моменти його компонент порядку, не вищі за четвертий.

Вектор із не випадковими координатами  $\{\langle X_1 \rangle, \langle X_1 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle\}$  також називають центром розсіювання випадкового вектора.

На практиці зручно використовувати центральні моменти 2-го порядку, які називають кореляційними (коваріаційними) моментами і які утворюють симетричну кореляційну матрицю:

$$\begin{aligned} K_{jk} &\stackrel{def}{=} \langle (x_j - \langle X_j \rangle)(x_k - \langle X_k \rangle) \rangle \stackrel{def}{=} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \langle X_j \rangle)(x_k - \langle X_k \rangle) p(x_j, x_k) dx_j dx_k \stackrel{def}{=} \langle \tilde{X}_j \tilde{X}_k \rangle \end{aligned} \quad (3.20)$$

Діагональні елементи кореляційної матриці дорівнюють дисперсіям відповідних компонент випадкового вектора ( $K_{jj} = D_j$ ).

**Коваріацією** компонент випадкової величини називають недіагональні елементи її кореляційної матриці:  $K_{jk}$  ( $j \neq k$ ).

Якщо компоненти  $X_j$  або  $X_k$  є детерміністичними, то відповідний елемент кореляційної матриці  $K_{jk} = 0$ .

Безрозмірною характеристикою зв'язку між  $j$ -ю та  $k$ -ю випадковими компонентами є **коефіцієнти кореляції**, числові значення яких визначаються відношенням кореляційного моменту до добутку середніх квадратичних відхилень:

$$\rho_{jk} = \frac{K_{jk}}{\sqrt{(K_{jj}K_{kk})}} = \frac{K_{jk}}{\sigma_{X_j} \sigma_{X_k}}. \quad (3.21)$$

При цьому  $|\rho_{jk}| \leq 1$ ;  $\rho_{jk} = \rho_{kj}$ ;

$\rho_{jk} = 1$  – якщо випадкові компоненти  $j$  і  $k$  зв'язані лінійною залежністю з додатним кутовим коефіцієнтом ;

$\rho_{jk} = -1$  – якщо випадкові компоненти зв'язані між собою лінійною залежністю з від'ємним кутовим коефіцієнтом;

$\rho_{jk} = 0$  – якщо  $X_k$  і  $X_j$  є стохастично незалежними.



**3.4. Розв'язання типових задач за розділом 3****Задача 3.1**

Два стрільці незалежно один від одного роблять по одному пострілу, кожний по своїй мішені. Випадкова величина  $X$  – число влучань першого стрільця,  $Y$  – другого стрільця. Ймовірність влучення у ціль для першого стрільця дорівнює  $P_1 = 0,8$ , для другого –  $P_2 = 0,9$ . Побудувати функцію розподілу системи випадкових величин  $(X, Y)$ .

**Розв'язання**

Оскільки випадкові величини  $X$  і  $Y$  за умовами задачі є незалежними, то їх сумісна функція розподілу дорівнює добутку функцій розподілу  $F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$ . Випадкові величини  $X$  і  $Y$  є дискретними і можуть набувати лише двох значень: 0, якщо стрілець не влучив, і 1, якщо він влучив у ціль. Для кожної випадкової величини можна побудувати свою функцію розподілу:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 0,2 & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad F_2(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ 0,1 & 0 \leq y < 1; \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

Знайдені значення сумісної функції розподілу їх імовірностей зведені до таблиці

$x \backslash y$	$x < 0$	$0 \leq x < 1$	$x \geq 1$
$y < 0$	0	0	0
$0 \leq y < 1$	0	0,02	0,1
$y \geq 1$	0	0,2	1

### Задача 3.2

Заданий закон розподілу двовимірної випадкової величини  $(X, Y)$ .

$Y$	$X$		
	- 2	3	6
- 0,8	0,1	0,3	0,1
- 0,5	0,15	0,25	0,1

Знайти закони розподілу ймовірностей компонент  $X$  та  $Y$ .

### Розв'язання

Якщо скласти наведені в таблиці ймовірності за стовпцями, отримаємо ряд розподілу для змінної  $X$ .

$X$	- 2	3	6
$p$	0,25	0,55	0,2

Сума ймовірностей за рядками дасть ряд розподілу для змінної  $Y$ .

$Y$	- 0,8	-0,5
$p$	0,5	0,5

### Задача 3.3

Задана функція сумісного розподілу двох випадкових величин

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - 3^{-x_1} - 3^{-x_2} + 3^{-x_1 - x_2}, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 0, & x_1 < 0, x_2 < 0. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей  $p(x_1, x_2)$ .

### Розв'язання

Для визначення щільності ймовірності компонент випадкового вектора для диференційовної функції розподілу  $F(x_1, x_2)$ , знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = (3^{-x_1} - 3^{-x_1-x_2}) \cdot \ln 3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1 \partial x_2} = 3^{-x_1-x_2} \cdot \ln^2 3.$$

Шукана функція розподілу сумісної щільності ймовірності визначається як

$$p(x_1, x_2) = \frac{\partial F}{\partial x_1 \partial x_2} = \begin{cases} 3^{-x_1-x_2} \cdot \ln^2 3, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 0, & x_1 < 0, x_2 < 0. \end{cases}$$

### Задача 3.4

Сумісна функція розподілу неперервної двовимірної випадкової величини  $(X, Y)$  має вигляд

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \left( \arctg \frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} \right) \left( \arctg \frac{y}{a} + \frac{\pi}{2} \right), \quad a > 0, b > 0.$$

Знайти сумісну щільність розподілу ймовірності.

### Розв'язання

За визначенням сумісної щільності розподілу ймовірності

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

отримаємо

$$p(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{\pi^2} \left( \arctg \frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} \right) \left( \arctg \frac{y}{a} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{ab}{\pi^2 (a^2 + x^2)(b^2 + y^2)}.$$

### Задача 3.5

Для заданого у задачі 3.2 закону розподілу двовимірної випадкової величини  $(X, Y)$  знайти закон розподілу випадкової величини  $X$  за умови, що випадкова величина  $Y = -0,8$  та закон розподілу для  $Y$  за умови, що  $X = 3$ .

**Розв'язання**

$$P(x_1 / y_1) = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5} = 0,20, \quad P(x_2 / y_1) = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5} = 0,60,$$

$$P(x_3 / y_1) = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5} = 0,20,$$

$$P(y_1 / x_2) = \frac{0,3}{0,55} = \frac{6}{11} = 0,55, \quad P(y_2 / x_2) = \frac{0,25}{0,55} = \frac{5}{11} = 0,46.$$

**Задача 3.6**

Розподіл імовірностей векторної випадкової величини  $(X, Y)$  заданий таблицею

	$X$	-1	0	1
$Y$	0	0,1	0,3	0,1
	1	0,2	0	0
	2	0	0,1	0,2

Визначити математичні сподівання випадкових величин  $X$  та  $Y$ .

**Розв'язання**

$$\langle X \rangle = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i p_{ij} = -1 \cdot (0,1 + 0,2 + 0) + 0 \cdot (0,3 + 0 + 0,1) + 1 \cdot (0,1 + 0 + 0,2) = 0,$$

$$\langle Y \rangle = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 y_j p_{ij} = 0 \cdot (0,1 + 0,2 + 0,1) + 1 \cdot (0,2 + 0 + 0) + 2 \cdot (0 + 0,1 + 0,2) = 0,8.$$

**Задача 3.7**

Задана функція щільності ймовірності двовимірного випадкового вектора  $(X, Y)$

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6\pi}, & \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1; \\ 0, & \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} > 1. \end{cases}$$

Знайти щільності ймовірностей випадкових компонент  $X$  і  $Y$ .

### Розв'язання

Очевидно, що для  $|x| > 3$  одновимірна щільність імовірності  $p(x) = 0$ . Для  $|x| \leq 3$  згідно з умовою узгодженості (3.12) маємо

$$p(x) = \frac{1}{6\pi} \int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dy = \frac{2}{6\pi} \int_0^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} dy = \frac{2}{9\pi} \sqrt{9-x^2}.$$

Отже, одновимірна щільність імовірності випадкової компоненти  $X$  має вигляд

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2}{9\pi} \sqrt{9-x^2}, & |x| \leq 3; \\ 0, & |x| > 3. \end{cases}$$

Аналогічно знаходимо щільність імовірності випадкової компоненти  $Y$ :

$$p(y) = \frac{1}{6\pi} \int_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}} dx = \frac{2}{6\pi} \int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}} dx = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-y^2}.$$

Остаточно

$$p(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-y^2}, & |y| \leq 2; \\ 0, & |y| > 2. \end{cases}$$

**Задача 3.8**

Сумісний закон розподілу компонент випадкового вектора  $\xi$  і  $\eta$  заданий у вигляді таблиці

$\xi \backslash \eta$	1	2
-1	1/16	3/16
0	1/16	3/16
1	1/8	3/8

Знайти закони розподілу відповідно  $\xi$  і  $\eta$ . Визначити, чи є вони залежними. Розрахувати ймовірність  $P(\xi + \eta \geq 2)$ .

**Розв'язання**

Розподіл для випадкової компоненти  $\xi$  отримаємо додаванням ймовірностей у рядках:

$$P(\xi = -1) = P(\xi = -1, \eta = 1) + P(\xi = -1, \eta = 2) = 1/16 + 3/16 = 1/4,$$

$$P(\xi = 0) = P(\xi = 0, \eta = 1) + P(\xi = 0, \eta = 2) = 1/16 + 3/16 = 1/4,$$

$$P(\xi = 1) = P(\xi = 1, \eta = 1) + P(\xi = 1, \eta = 2) = 1/8 + 3/8 = 1/2.$$

За аналогією розподіл для  $\eta$  знайдемо додаванням ймовірностей у стовпчиках:

$$P(\eta = 1) = 1/16 + 1/16 + 1/8 = 1/4,$$

$$P(\eta = 2) = 3/16 + 3/16 + 3/8 = 3/4.$$

Отримані ймовірності можна записати до тієї самої таблиці навпроти відповідних значень випадкових величин:

$\eta \backslash \xi$	1я	2я	$p_{\xi}$
-1я	1/16я	3/16я	1/4я
0я	1/16я	3/16я	1/4я
1я	1/8я	3/8я	1/2я
$p_{\eta}$	1/4я	3/4я	1я

Для відповіді на запитання про незалежність випадкових величин  $\xi$  і  $\eta$  для кожної клітинки таблиці сумісного розподілу визначимо добуток  $P(\xi = x_i)P(\eta = y_j)$  (тобто суму за відповідним рядком та стовпчиком) і порівняємо його зі значенням імовірності  $P(\xi = x_i, \eta = y_j)$  у цій клітинці. Наприклад, у клітинці таблиці для значень  $\xi = -1$  і  $\eta = 1$  стоїть імовірність 1/16, а добуток відповідних окремих імовірностей  $1/4 \cdot 1/4$  дорівнює 1/16, тобто збігається із сумісною ймовірністю. Ця умова також перевіряється для інших п'яти клітинок таблиці і задовольняється для усіх значень випадкових величин. Таким чином, випадкові компоненти  $\xi$  і  $\eta$  є незалежними.

Значимо, якщо ця умова не виконувалася хоча б для однієї клітинки, то компоненти  $\xi$  і  $\eta$  необхідно було б визнати залежними.

Для розрахунку ймовірності  $P(\xi + \eta \geq 2)$  позначимо клітинки, для яких виконується умова  $\xi + \eta \geq 2$ . Таких клітинок у таблиці усього три (обведені колом), і відповідні ймовірності у цих клітинках дорівнюють 1/8, 3/16, 3/8. Їх сума дорівнює 11/16, що і є шуканою ймовірністю. Формулу для визначення цієї ймовірності можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta \geq 2) &= P(\xi = 1, \eta = 1) + P(\xi = 0, \eta = 2) + P(\xi = 1, \eta = 2) = \\ &= 1/8 + 3/16 + 3/8 = 11/16. \end{aligned}$$

**Задача 3.9**

Двовимірна випадкова величина  $(X, Y)$  задана сумісним законом розподілу:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ або } y \leq 0; \\ 1 - e^{-x^2} - e^{-2y} + e^{-x^2-2y} & x > 0, y > 0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність подій:

$$P(-2 \leq X < 2, 1 \leq Y < 3), P(X \geq 0, Y \geq 1), P(X < 1, Y \geq 2).$$

**Розв'язання**

За визначенням сумісного закону розподілу, шукані ймовірності дорівнюватимуть

$$\begin{aligned} P(-2 \leq X < 2, 1 \leq Y < 3) &= F(2, 3) - F(2, 1) - F(-2, 3) + F(-2, 1) = \\ &= 1 - e^{-4} - e^{-6} + e^{-10} - (1 - e^{-4} - e^{-2} + e^{-6}) - 0 + 0 = e^{-2} - 2e^{-6} + e^{-10}. \end{aligned}$$

Подія  $(X \geq 0, Y \geq 1)$  являє собою потрапляння двовимірної випадкової величини  $(X, Y)$  у квадрант  $x \geq 0, y \geq 1$ , тому ймовірність такої події дорівнює

$$\begin{aligned} P(X \geq 0, Y \geq 1) &= F(+\infty, +\infty) - F(+\infty, 1) - F(0, +\infty) + F(0, 1) = \\ &= 1 - (1 - e^{-2}) - 0 + 0 = e^{-2}. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} P(X < 1, Y \geq 2) &= F(1, +\infty) - F(1, 2) - F(-\infty, +\infty) + F(-\infty, 2) = \\ &= 1 - e^{-1} - (1 - e^{-1} - e^{-4} + e^{-5}) - 0 + 0 = e^{-4} - e^{-5}. \end{aligned}$$

**Задача 3.10**

Для пари випадкових величин із задачі 3.8 знайти математичне сподівання добутку  $\langle \xi \eta \rangle$ .



**Розв'язання**

Для визначення математичного сподівання добутку випадкових величини, скористаємося формулою

$$\langle \xi \eta \rangle = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}.$$

Тобто у кожній клітинці таблиці виконаємо множення відповідних значень  $x_i$  і  $y_j$ , а результат помножимо на ймовірності  $p_{ij}$  та просумуємо за усіма клітинками таблиці.

Остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} \langle \xi \eta \rangle &= -1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} + (-1) \cdot 2 \cdot \frac{3}{16} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} + 0 \cdot 2 \cdot \frac{3}{16} + \\ &+ 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} = -\frac{1}{16} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

**Задача 3.11**

Розподіл двовимірної випадкової величини заданий у вигляді таблиці

$\eta \backslash \xi$	1	3	4	8
3	0,15	0,06	0,25	0,04
6	0,30	0,10	0,03	0,07

Знайти умовний розподіл та умовне математичне сподівання  $\eta$  при  $\xi=1$ .

**Розв'язання**

Умовне математичне сподівання визначаємо за формулою

$$\langle \eta / \xi = 1 \rangle = \eta_1 P_{\xi/\eta}(\eta_1 / \xi = 1) + \eta_2 P_{\xi/\eta}(\eta_2 / \xi = 1).$$

За умовами задачі запишемо розподіл компонент  $\eta$  і  $\xi$  (останній стовпчик та останній рядок).

$\eta \backslash \xi$	1	3	4	8	$P_\eta$
3	0,15	0,06	0,25	0,04	0,50
6	0,30	0,10	0,03	0,07	0,50
$P_\xi$	0,45	0,16	0,28	0,11	1

Оскільки

$$P_\xi(\xi = 1) = P(\xi = 1, \eta_1) + P(\xi = 1, \eta_2) = 0,15 + 0,30 = 0,45,$$

то умовні ймовірності знаходяться за формулами

$$P_{\xi/\eta}(\eta_1 / \xi = 1) = \frac{P(\xi = 1, \eta_1)}{P_\xi(\xi = 1)} = \frac{0,15}{0,45} = \frac{1}{3},$$

$$P_{\xi/\eta}(\eta_2 / \xi = 1) = \frac{P(\xi = 1, \eta_2)}{P_\xi(\xi = 1)} = \frac{0,30}{0,45} = \frac{2}{3},$$

а шукане умовне математичне сподівання дорівнює

$$\langle \eta / \xi = 1 \rangle = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = 5.$$

### Задача 3.12

Для пари випадкових величин із задачі 3.8 знайти коваріацію  $K_{\xi\eta}$ .

### Розв'язання

Коваріація двокомпонентної випадкової величини  $(\xi, \eta)$  є недіагональним елементом кореляційної матриці:

$$K_{\xi\eta} \stackrel{def}{=} \langle (\xi - \langle \xi \rangle)(\eta - \langle \eta \rangle) \rangle = \langle \xi\eta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle.$$

У задачі 3.5 наведений розрахунок математичного сподівання добутку випадкових величин:  $\langle \xi\eta \rangle = \frac{7}{16}$ . Необхідно визначити

відповідні математичні сподівання компонент  $\langle \xi \rangle$  і  $\langle \eta \rangle$ .

Використовуючи отримані при розв'язанні задачі 3.8 частинні закони розподілу, отримуємо

$$\langle \xi \rangle = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \quad \langle \eta \rangle = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{4},$$

а отже,

$$K_{\xi\eta} = \langle \xi\eta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle = \frac{7}{16} - \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4} = 0,$$

чого і варто було очікувати внаслідок установленної при розв'язанні задачі 3.8 незалежності розглядуваних випадкових величин  $\xi$  і  $\eta$ .

### Задача 3.13

Випадковий вектор  $(\xi, \eta)$  набуває значень  $(0; 0)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(0; 1)$  і  $(0; -1)$  рівноймовірно. Визначити коваріацію випадкових величин  $\xi$  і  $\eta$ . Показати, що вони є залежними.

### Розв'язання

Згідно з умовами задачі

$$P(\xi = 0) = 3/5, P(\xi = 1) = 1/5, P(\xi = -1) = 1/5,$$

$$P(\eta = 0) = 3/5, P(\eta = 1) = 1/5, P(\eta = -1) = 1/5,$$

а відповідні математичні сподівання дорівнюють

$$\langle \xi \rangle = 3/5 \cdot 0 + 1/5 \cdot 1 + 1/5 \cdot (-1) = 0, \quad \langle \eta \rangle = 0.$$

Момент другого порядку

$$\langle \xi\eta \rangle = 0 \cdot 0 \cdot 1/5 + 1 \cdot 0 \cdot 1/5 - 1 \cdot 0 \cdot 1/5 + 0 \cdot 1 \cdot 1/5 - 0 \cdot 1 \cdot 1/5 = 0.$$

Коваріація

$$K_{\xi\eta} = \langle \xi\eta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle = 0.$$

Отже, випадкові величини є некорельованими. Проте вони є стохастично залежними. Нехай  $\xi = 1$ , тоді умовна ймовірність події

$\{\eta = 0\}$  дорівнює  $P(\eta = 0 / \xi = 1) = 1$  і не дорівнює безумовній  $P(\eta = 0) = 3/5$ , або ймовірність  $(\xi = 0, \eta = 0)$  не дорівнює добутку ймовірностей:

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = 1/5 \neq P(\xi = 0) P(\eta = 0) = 9/25.$$

Відповідно випадкові величини  $\xi$  і  $\eta$  є стохастично залежними.

### Задача 3.14

Випадкові прирости навантаження  $\xi$  і  $\eta$  двох балок моста за день задані сумісним розподілом у вигляді таблиці

	$\xi$		
$\eta$		-1	+1
-1	0,3	0,2	
+1	0,1	0,4	

Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин  $\xi$  і  $\eta$ .

### Розв'язання

Змішаний момент дорівнює

$$\langle \xi \eta \rangle = 0,3 - 0,2 - 0,1 + 0,4 = 0,4.$$

Знаходимо частинні закони розподілу для  $\xi$  і  $\eta$ :

	$\xi$			
$\eta$		-1	+1	$P_\xi$
-1	0,3	0,2	0,5	
+1	0,1	0,4	0,5	
$P_\eta$	0,4	0,6		

Визначаємо

$$\langle \xi \rangle = 0,5 - 0,5 = 0; \quad \langle \eta \rangle = 0,6 - 0,4 = 0,2;$$

Відповідні коефіцієнти кореляційної матриці дорівнюють

$$D_{\xi} = K_{\xi\xi} = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2 = 1,$$

$$D_{\eta} = K_{\eta\eta} = \langle \eta^2 \rangle - \langle \eta \rangle^2 = 1 - 0,2^2 = 0,96,$$

$$K_{\xi\eta} = \langle \xi\eta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle = 0,4.$$

Звідси знаходимо

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{0,4}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{0,96}} \approx 0,408.$$

### Задача 3.15

Двовимірна випадкова величина  $(X, Y)$  задана щільністю ймовірності сумісного розподілу

$$p(x, y) = \begin{cases} Cxy, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

де  $D$  – область на площині, яка задана координатними нерівностями  $-\infty < x < 0, -x < y < 2$ .

Знайти безумовний та умовний розподіли компоненти  $X$ .  
Визначити, чи є випадкові компоненти  $X$  і  $Y$  залежними.

### Розв'язання

Графічне зображення області  $D$  показано на рис. 3.2.

Із умови нормування функції щільності ймовірності визначаємо коефіцієнт  $C$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Cxy dx dy = \int_{-2}^0 dx \int_{-x}^2 Cxy dy = C \int_{-2}^0 x dx \left( \frac{y^2}{2} \Big|_{-x}^2 \right) =$$

$$= C \int_{-2}^0 x \left( 2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = C \left( x^2 - \frac{x^4}{8} \right) \Big|_{-2}^0 = -2C.$$

Звідси  $C = -\frac{1}{2}$ .

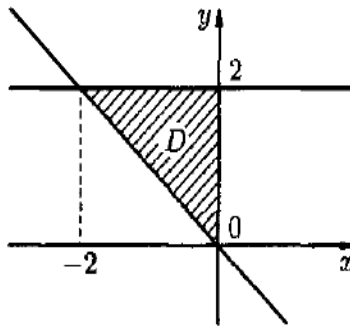


Рисунок 3.2

Функції щільності ймовірності для кожної випадкової компоненти  $X$  і  $Y$  знайдемо за умовою узгодженості:

$$p_1(x) = \int_{-x}^2 p(x, y) dy = \int_{-x}^2 \left( -\frac{1}{2} xy \right) dy = -\frac{1}{2} x \frac{y^2}{2} \Big|_{-x}^2 = \frac{x^3 - 4x}{4}, \quad x \in (-2, 0).$$

Перевіримо виконання умови нормування для щільності ймовірності випадкової компоненти  $X$  :

$$\int_{-2}^0 p_1(x) dx = \int_{-2}^0 \frac{x^3 - 4x}{4} dx = \frac{1}{4} \left( \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^0 = \frac{1}{4} (-4 + 8) = 1.$$

Тоді

$$p_2(y) = \int_{-y}^0 p(x, y) dx = \int_{-y}^0 \left( -\frac{1}{2} xy \right) dx = -\frac{1}{2} y \frac{x^2}{2} \Big|_{-y}^0 = -\frac{1}{2} y \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{-y}^0 = \frac{y^3}{4},$$

$$y \in (0, 2).$$

Умовні щільності розподілу випадкових компонент  $X$  і  $Y$  зв'язані із щільністю ймовірності сумісного розподілу співвідношенням

$$p(x, y) = p_1(x) p_2(y/x) = p_2(y) p_1(x/y).$$

Тоді

$$p(x/y) = p(x, y) / p_2(y) = -\frac{1}{2}xy / \frac{1}{4}y^3 = -2x \frac{1}{y^2}, \quad (x, y) \in D.$$

$$\int_{-y}^0 p(x/y) dx = \int_{-y}^0 -2x \frac{1}{y^2} dx = -\frac{2}{y^2} \frac{x^2}{2} \Big|_{-y}^0 = -\frac{1}{y^2} (0 - y^2) = 1.$$

Безумовна щільність імовірності випадкової величини  $X - p_1(x)$  не співпадає з умовною щільністю  $p(x/y)$ . Таким чином, випадкові величини  $X$  і  $Y$  є залежними.

### Задача 3.16

Заданий двовимірний вектор випадкових величин  $(X_1, X_2)$ , сумісна щільність розподілу ймовірності якого має вигляд

$$p(x_1, x_2) = 1, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1,$$

$$p(x_1, x_2) = 0, \quad 1 < x_1 < 0, 1 < x_2 < 0.$$

Визначити, чи є випадкові величини  $X_1$  і  $X_2$  незалежними.

### Розв'язання

$$p_1(x_1) = \int_0^1 p(x_1, x_2) dx_2 = \int_0^1 1 dx_2 = 1,$$

$$p_2(x_2) = \int_0^1 p(x_1, x_2) dx_1 = \int_0^1 1 dx_1 = 1,$$

$$p_1(x) = p_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1]; \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

У цьому випадку сумісна щільність розподілу  $p(x_1, x_2)$  для всіх  $x_1$  і  $x_2$  є добутком одновимірних щільностей імовірності  $p_1(x_1)$  і  $p_2(x_2)$ . Отже, випадкові величини  $X_1$  і  $X_2$  є незалежними.

### 3.5. ДОДАТКОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

**Завдання 1.** Закон розподілу компонент випадкового вектора  $(X, Y)$  заданий у вигляді таблиці

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$1/9$	$1/9$	$1/9$
2	0	$1/6$	$1/6$
3	0	0	$1/3$

Визначити умовне математичне сподівання  $\langle X / Y = 2 \rangle$  і дисперсію  $D_{X/Y=2}$ . Знайти центр розсіювання випадкового вектора  $(X, Y)$ . Побудувати кореляційну матрицю.

**Завдання 2.** Координати  $X, Y$  випадкового положення точки на площині мають сумісний рівномірний розподіл у межах  $G = \{(x, y), -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$ . Записати загальний вираз для щільності ймовірності і функції розподілу ймовірності випадкового вектора  $(X, Y)$ . Знайти центр розсіювання  $\langle X \rangle, \langle Y \rangle$  та визначити дисперсію координат  $D_X, D_Y$  сумісного розподілу. Побудувати кореляційну матрицю.

**Завдання 3.** Заданий закон сумісного розподілу системи дискретних випадкових величин  $(X, Y)$ :

$Y \backslash X$	16	25	39	52
2,2	0,05	0,12	0,08	0,04
2,6	0,09	0,30	0,11	0,21

Знайти закони розподілу компонент  $X$  і  $Y$  та їх математичні сподівання.



**Завдання 4.** Знайти закон сумісного розподілу системи незалежних випадкових величин  $(X, Y)$ , якщо компоненти  $X$  і  $Y$  мають такі закони розподілу:

$X$	-2	3	6
$P$	0,45	0,33	0,22

$Y$	2	4
$P$	0,65	0,35

**Завдання 5.** По мішені роблять один постріл. Імовірність влучення для одного пострілу дорівнює  $p$ . Розглядаються дві випадкові величини  $X$  – кількість влучень і  $Y$  – кількість промахів. Побудувати функцію розподілу ймовірностей цієї системи.

**Завдання 6.** В ящику дві кульки, на кожній з яких написана цифра 1, і три кульки, на кожній з яких написана цифра 2. Навмання одну за одною кульки виймають. Нехай випадкові величини  $X$  – цифра 1 на кульці, а  $Y$  – цифра 2, знайти сумісний закон розподілу величин  $(X, Y)$ .

**Завдання 7.** Є жетон, на одному боці якого стоїть цифра 2, а на іншому – 0 і є кубик, у якого на протилежних гранях написані цифри 1, 2, 3 відповідно. Жетон та кубик кидають на стіл. Нехай  $X$  – випадкова величина, яка дорівнює сумі очок на жетоні та кубіку. Побудувати закон розподілу випадкової величини  $X$ .

**Завдання 8.** Задана функція сумісного розподілу системи випадкових величин

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-6x})(1 - e^{-4y}), & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Знайти щільність імовірності сумісного розподілу системи та одновимірні щільності ймовірності її компонент.

**Завдання 9.** Задана щільність імовірності двовимірної випадкової величини  $(X, Y)$ :

$$p(x, y) = A \cos(x - y), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Визначити значення коефіцієнта  $A$  та знайти одновимірні щільності ймовірності  $p_1(x)$  і  $p_2(y)$ .

**Завдання 10.** Задана щільність імовірності двовимірної випадкової величини  $(X, Y)$ :

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & x^2 + y^2 < R; \\ 0, & x^2 + y^2 \geq R, R > 0. \end{cases}$$

Довести, що випадкові величини  $X$  і  $Y$  є стохастично залежними.

**Завдання 11.** Задана щільність імовірності системи  $(X, Y)$  випадкових величин  $p(x, y) = 0,5 \cdot \cos(x + y)$ ,  $0 \leq x \leq \pi/2$ ,  $0 \leq y \leq \pi/2$ .

Знайти: а) функцію розподілу системи; б) математичне сподівання компонент  $X$  і  $Y$ ; в) кореляційну матрицю.

**Завдання 12.** Точка  $(X, Y)$  рівномірно розподілена по площі трикутника з вершинами  $(0; 0)$ ,  $(2; 0)$  і  $(0; 2)$ . Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкових координат  $X$  і  $Y$ .

**Завдання 13.** Точка  $(X, Y)$  рівномірно розподілена по площі прямокутника з вершинами  $(0; 0)$ ,  $(1; 0)$  і  $(0; 1)$ ,  $(1; 1)$ . Знайти коефіцієнт кореляції випадкових координат  $X$  і  $Y$ .

**Завдання 14.** Підкидають два гральні кубики. Випадкова кількість очок на першому та другому кубиках у результаті кожного досліду дорівнює відповідно  $\xi > 2$  і  $\eta > 2$ . Знайти сумісний розподіл випадкових величин  $\xi$  і  $\eta$ . Визначити математичні сподівання та дисперсії, а також коефіцієнт кореляції  $\rho_{\xi\eta}$ .

**Завдання 15.** Знайти вектор математичних сподівань та кореляційну матрицю системи випадкових величин  $(X, Y)$ , якщо сумісна щільність імовірності має вигляд  $p(x, y) = \left(\pi(x^2 + y^2 + 1)\right)^{-1}$ .

**Завдання 16.** Є дві незалежні випадкові величини  $X$  і  $Y$ . Випадкова величина  $X$  розподілена за нормальним законом із параметрами:  $\langle X \rangle = 0$  і  $D_X = 0,5$ . Випадкова величина  $Y$  розподілена рівномірно на інтервалі  $(0; 1)$ . Визначити щільність сумісного розподілу  $p(x, y)$ .

**Завдання 17.** Є система випадкових величин  $X$  і  $Y$ . Випадкова величина  $X$  має показовий закон розподілу ймовірностей:  $p_1(x) = a \cdot e^{-ax}$  при  $x \geq 0$ ,  $p_1(x) = 0$  при  $x < 0$ . Випадкова величина  $Y$  має умовний закон розподілу ймовірностей  $p_2(y/x) = x \cdot e^{-xy}$  при  $y \geq 0$ ,  $p_2(y/x) = 0$  при  $y < 0$ . Визначити щільність сумісного розподілу  $p(x, y)$ , знайти щільність розподілу  $p_2(y)$  випадкової величини  $Y$ , а також умовну щільність розподілу  $p_1(x/y)$ .

**Завдання 18.** Сумісний розподіл ймовірностей випадкових величин  $\xi$  і  $\eta$  є рівномірним у квадраті  $\Omega = \{x, y\}: |x| + |y| \leq 2\}$ . Знайти ймовірність  $P\left(\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1, \frac{1}{2} \leq \eta \leq 1\right)$  та визначити, чи є випадкові величини  $\xi$  і  $\eta$  незалежними.

**Завдання 19.** Пара випадкових величин  $\xi$  і  $\eta$  рівномірно розподілена усередині трикутника:  $\Omega = \{(x, y): x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ . Визначити щільність імовірності  $\xi$  і  $\eta$ . Чи є ці випадкові величини незалежними? Обчислити ймовірність  $P(\xi \leq 3/4)$ .

**Завдання 20.** Двовимірна випадкова величина  $(\xi, \eta)$  рівномірно розподілена у квадраті з вершинами  $(2; 0)$ ,  $(0; 2)$ ,  $(-2; 0)$ ,  $(0; -2)$ . Знайти значення сумісної функції розподілу у точці  $(1, -1)$ .

**Завдання 21.** Випадковий вектор  $(\xi, \eta)$  рівномірно розподілений у межах кола, радіусом 3 см, з центром у початку координат. Записати вираз для сумісної функції розподілу компонент вектора. Визначити, чи є компоненти стохастично залежними. Обчислити ймовірність  $P(\xi > 0, \eta > 0)$ .

**Завдання 22.** Випадкова двовимірна величина  $(\xi, \eta)$  рівномірно розподілена усередині трапеції з вершинами у точках  $(-6; 0)$ ,  $(-3; 4)$ ,  $(3; 4)$ ,  $(6; 0)$ . Знайти сумісну щільність імовірності її компонент та щільності кожної з них. Чи є  $\xi$  і  $\eta$  стохастично залежними?

**Завдання 23.** Випадкова двовимірна величина  $(\xi, \eta)$  рівномірно розподілена усередині напівкола:  $K = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ . Знайти щільності ймовірності  $\xi$  та  $\eta$ . Дослідити їх залежність.

**Завдання 24.** Сумісна щільність імовірностей двох випадкових величини  $\xi$  і  $\eta$  задана у вигляді

$$p(x, y) = \begin{cases} 4e^{2y}, & y \leq 0, x \leq 0, y \leq x; \\ 0, & y > 0, x > 0, y > x. \end{cases}$$

Знайти щільності ймовірності  $\xi$  і  $\eta$  та дослідити питання про їх залежність.

**Завдання 25.** Випадкова двовимірна величина  $(\xi, \eta)$  рівномірно розподілена в області  $K = \{(x, y) : x \geq 0, 1 \geq y \geq x\}$ . Знайти щільності ймовірності  $\xi$  і  $\eta$ , дослідити питання про їх залежність. Обчислити математичне сподівання  $\langle \xi \eta \rangle$ .

**Завдання 26.** Визначити ймовірність потрапляння нормально розподіленої двовимірної величини  $(X, Y)$  в еліпс розсіювання з напівосями  $2\sigma_x$ ,  $2\sigma_y$ , якщо відомо, що величини  $X$  і  $Y$  стохастично незалежні.

**Завдання 27.** Двовимірний випадковий вектор  $(X, Y)$ , який є координатами випадкової точки на площині, розподілений за нормальним законом імовірності з вектором математичних сподівань  $(1; 2)$  і

кореляційною матрицею  $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & \frac{5}{36} \end{pmatrix}$ . Визначити ймовірність

потрапляння випадкової величини  $X$  до інтервалу  $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ ; ймовірність

потрапляння двовимірної випадкової величини  $(X, Y)$  в область  $D$ , обмежену еліпсом:  $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 18x - 36y + 41 = 0$ .

**Завдання 28.** Тривимірний випадковий вектор  $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$  має нормальний закон розподілу ймовірностей з вектором математичних

сподівань  $(2, 5; 1, 2)$  і кореляційною матрицею  $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0,5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0,5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Знайти

сумісну щільність імовірності випадкового вектора  $\vec{X}$ ; одновимірні щільності розподілу випадкових величин  $X_1, X_2, X_3$ .

**Завдання 29.** Система двох випадкових величин  $(\xi, \eta)$  рівномірно розподілена у трикутнику, який обмежений прямими:

$y = -\frac{xb}{a}$ ,  $y = 0$ ,  $x = -a$ , де  $a > 0, b > 0$ . Визначити математичні

сподівання та коваріацію випадкових величин  $\xi$  і  $\eta$ .

**Завдання 30.** Система двох випадкових величин  $(\xi, \eta)$  рівномірно розподілена в області, що обмежена прямими:

$y = 0$ ,  $y = 2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 6 - x$ . Визначити математичні сподівання,

дисперсії та коефіцієнти кореляційної матриці випадкових величин  $\xi$  і  $\eta$ .

### 3.6. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називають випадковим вектором? Наведіть приклади.
2. Які характеристики векторної випадкової величини ви знаєте?
3. Що називають сумісною щільністю компонент випадкового вектора? Які умови вона задовольняє?
4. Як за відомою сумісною щільністю ймовірності двовимірної випадкової величини визначити частинну функцію розподілу однієї з компонент?
5. Чи може одна компонента двовимірної випадкової величини бути безперервно розподіленою, а інша (-і) дискретно розподіленою (-ними) чи навпаки?
6. Що називають умовним законом розподілу випадкової величини?
7. Які випадкові величини називають стохастично незалежними? Як перевірити незалежність двох випадкових величин?
8. Чи завжди за відомими частинними функціями розподілу компонент можна визначити функцію сумісного розподілу двовимірної випадкової величини?
9. Чи є рівність нулю коефіцієнта кореляції свідомством про відсутність статистичного зв'язку між випадковими величинами?
10. Як визначаються коефіцієнти кореляційної матриці? Що таке коваріація?
11. Які числові характеристики випадкових векторів ви знаєте? Як вони визначаються? Які з них несуть найбільш значущу інформацію про ймовірнісні властивості випадкового вектора?

## РОЗДІЛ 4. НЕВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ АРГУМЕНТІВ

### 4.1. Невипадкові функції скалярних випадкових аргументів

Нехай дві випадкові величини  $X$  і  $Y$  зв'язані детерміністичною залежністю так, що кожному значенню  $X$  ставиться у відповідність за деяким законом величина  $Y$ . Говорять, що у цьому випадку задана *невипадкова функція випадкового аргументу* вигляду  $Y = f(X)$ , наприклад  $Y = X^3$  або  $Y = \sin X$  і т. ін.

1. *Функція  $f(X)$  монотонна*, випадковий аргумент  $X$  безперервно розподілений в інтервалі  $-\infty < x < \infty$ . Функція розподілу  $F_x(x)$  і відповідно щільність імовірності (у випадку неперервного розподілу)  $p_x(x)$  вважаються відомими.

Згідно з визначенням функції розподілу випадкової величини (2.1)

$$F_y(y) \stackrel{def}{=} P(Y < y), \quad (4.1)$$

де

$$P(Y < y) = P(f(X) < y) = \int_{f(X) < y} p_x(x) dx. \quad (4.2)$$

Для монотонної функції  $f(X)$  завжди існує однозначна обернена функція  $g(Y)$ , така, що

$$X = g(Y), \quad (4.3)$$

де  $g = f^{-1}$ . При цьому

$$p_x(x) = p_x[g(y)], \quad (4.4)$$

а згідно з (4.3) метрики просторів  $X$  і  $Y$  зв'язані співвідношенням

$$dx = |g'(y)| dy. \quad (4.5)$$

З урахуванням (4.4) і (4.5) інтеграл у виразі для функції розподілу (4.2) перетворюється до вигляду

$$F_y(y) = \int_{f(X) < y} p_x(x) dx = \int_{-\infty}^y p_x[g(y)] |g'(y)| dy, \quad (4.6)$$

при цьому відповідна щільність імовірності дорівнює

$$p_y(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dF_y(y)}{dy} = p_x[g(y)] |g'(y)|. \quad (4.7)$$

2. **Функція  $Y = f(X)$  – немонотонна.** У цьому випадку завжди можна знайти зліченне, не обов'язково скінченне, число ділянок монотонності в області її визначення  $-\infty \leq x \leq \infty$ :

$$Y = \sum_{k=1}^n f_k(X),$$

де  $f_k(X)$  – монотонна функція  $k$ -ї ділянки.

Для кожної  $k$ -ї ділянки монотонності  $f_k(X)$  існує однозначна обернена функція  $g_k(Y)$  і, очевидно, справедливими є отримані для попереднього випадку формули (4.3) – (4.5). Згідно з теоремою про додавання ймовірностей (1.5) можемо записати

$$p_y(y) = \sum_{k=1}^n p_x[g_k(y)] |g'_k(y)|, \quad (4.8)$$

де підсумовування проводиться за усіма ділянками монотонності.

Відповідна (4.8) функція розподілу  $F_y(y)$  знаходиться інтегруванням щільності ймовірності  $p_y(y)$ :

$$F_y(y) = \int_{-\infty}^y p_y(y) dy = \int_{-\infty}^y \sum_{k=1}^n p_x[g_k(y)] |g'_k(y)| dy. \quad (4.9)$$

Множник  $|g'(y)|$  у (4.6)–(4.9) називають якобіаном перетворення простору  $X$  у простір  $Y$  [2, 5].



## 4.2. Невипадкові функції векторних випадкових величин

Розглянемо  $n$ -вимірний випадковий вектор  $\vec{X}$  та  $m$ -вимірний випадковий вектор  $\vec{Y}$ , відповідність між компонентами яких встановлюється детерміністичними функціональними залежностями вигляду

$$Y_k = f_k(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (4.10)$$

або у векторній формі

$$\vec{Y} = f(\vec{X}). \quad (4.11)$$

Розмірності векторів  $\vec{X}$  і  $\vec{Y}$ , відповідно  $n$  і  $m$ , взагалі кажучи, можуть бути різними, при цьому у випадку  $m > n$  функції  $f_k$ , де  $k = n + 1, n + 2, \dots, m$ , є лінійно залежними.

1. **Функції  $f_k$  монотонні**, тоді обернені функції  $g_k$  є однозначними та диференційованими ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).

За аналогією з одновимірним скалярним варіантом сумісна функція розподілу компонент випадкового вектора  $F_y(y_1, y_2, \dots, y_m)$  може бути визначена  $n$ -кратним інтегруванням сумісної щільності ймовірності компонент вектора  $\vec{X}$ :

$$F_y(y_1, y_2, \dots, y_m) = P(Y_k < y_k) = \underbrace{\int \dots \int}_n p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (4.12)$$

$$k = 1, 2, \dots, m.$$

При цьому область інтегрування в (4.12) визначається сукупністю нерівностей:

$$f_k(X_1, X_2, \dots, X_n) < y_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (4.13)$$

Для випадку  $m < n$  припустимо, що серед  $n$  аргументів  $x_1, x_2, \dots, x_n$  завжди можна знайти такі  $m$  аргументів, для яких вирази

через обернені функції будуть однозначними та диференційованими, а сумісна функція розподілу  $F_y(y_1, y_2, \dots, y_m)$  може бути подана у вигляді

$$F_y(y_1, y_2, \dots, y_m) = \underbrace{\int_{-\infty}^{y_1} \dots \int_{-\infty}^{y_m}}_m \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-m} p_x(g_1, g_2, \dots, g_m; x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \times \quad (4.14)$$

$$\times |J| dy_1 dy_2 \dots dy_m dx_{m+1} dx_{m+2} \dots dx_n.$$

де якобіан перетворення  $J$  визначається як

$$|J| \stackrel{def}{=} \det \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \frac{\partial g_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}. \quad (4.15)$$

Тут враховано, що область визначення  $f_k(\vec{X}) < y_k$  (4.13) відповідає інтервалам  $[-\infty; y_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Сумісну щільність імовірності  $p_y(y_1, y_2, \dots, y_m)$  отримаємо диференціюванням функції розподілу (4.14) за аргументами  $y_1, y_2, \dots, y_m$ :

$$p_y(y_1, y_2, \dots, y_m) = |J| p_x^m[g_1, g_2, \dots, g_m] \stackrel{def}{=} \quad (4.16)$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-m} p_x[g_1, g_2, \dots, g_m; x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n] |J| dx_{m+1} dx_{m+2} \dots dx_n.$$

Інтегрування у (4.16) відповідає умові узгодженості за аргументами  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ .

В окремому випадку, коли  $m = n$ , розмірності векторів  $\vec{Y}$  і  $\vec{X}$  є однаковими, можемо записати

$$p_y(\vec{y}) = p_x[\vec{g}(\vec{y})] |J|. \quad (4.17)$$

2. **Функції  $f_k$  немонотонні.** Згідно з теоремою про додавання ймовірностей, підсумовуючи за ділянками монотонності  $\vec{f}$  або, що одне і те саме, за ділянками однозначності  $\vec{g}$ , маємо

$$p_y(\vec{y}) = \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_x[g_1, g_2, \dots, g_m; x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n] |J^k| dx_{m+1} dx_{m+2} \dots dx_n, \quad (4.18)$$

а у випадку  $m = n$

$$p_y(\vec{y}) = \sum_k p_x[\vec{g}^k(\vec{y})] |J^k|. \quad (4.19)$$

Формули (4.17) і (4.19) справедливі, якщо для всіх компонент вектора  $\vec{X}$  ділянки монотонності збігаються.

### 4.3. Числові характеристики невинпадкових функцій випадкових аргументів

Припустимо, що у процесі деяких  $n$  дослідів значення  $x_k$  відтворювалося  $n_k$  разів, де  $k = 1, 2, \dots, m$ , а  $n = \sum_{k=1}^m n_k$ . Тоді подібно до статистичного середнього випадкової величини можна визначити статистичне середнє детерміністичної функції  $f(X)$  випадкового аргументу  $X$ :

$$\bar{f}(X) = \frac{\sum_{k=1}^m f(x_k) n_k}{n} = \sum_{k=1}^m f(x_k) \frac{n_k}{n}. \quad (4.20)$$

Оскільки емпірична частота є аналогом імовірності, то можна від статистичних характеристик перейти до ймовірнісних. Так, для випадку неперервного розподілу

$$\langle f(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx. \quad (4.21)$$

Аналогічно

$$\langle f(X)^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^k p(x) dx, \quad (4.22)$$

$$\langle \tilde{f}(X)^k \rangle = \langle (f(X) - \langle f(X) \rangle)^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - \langle f(X) \rangle)^k p(x) dx, \quad (4.23)$$

де  $\tilde{f}(X)$  – центрована функція  $\tilde{f}(X) = f(X) - \langle f(X) \rangle$ .

Математичне сподівання невідповідної функції декількох випадкових величини  $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  визначається як

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle &= \langle f(X_1, X_2, \dots, X_n) \rangle = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n f(x_1, x_2, \dots, x_n) p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \end{aligned} \quad (4.24)$$

у свою чергу, дисперсія

$$D_Z = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n (f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \langle Z \rangle)^2 p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (4.25)$$

За аналогією з (4.22) і (4.23) можуть бути введені моменти більш високого порядку:

$$\langle Z^k \rangle = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n f(x_1, x_2, \dots, x_n)^k p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{Z}^k \rangle &= \langle (Z - \langle Z \rangle)^k \rangle = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n (f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \langle Z \rangle)^k p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (4.27)$$

#### 4.4. Лінеаризація функцій випадкових аргументів

У практичних застосуваннях досить часто трапляються випадки, коли досліджувана характеристика не є строго лінійною функцією

випадкових аргументів (або аналітичне знаходження оберненої функції є неможливим), але при розв'язанні таких задач ця функція може бути наближено замінена лінійним аналогом.

Нехай є система  $n$  випадкових величин

$$X_1, X_2, \dots, X_n,$$

числові характеристики якої відомі. Вважаємо, що задані математичні сподівання  $\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle$  і кореляційна матриця

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix},$$

де  $K_{ij} = \langle \tilde{X}_i \tilde{X}_j \rangle$ ,  $\tilde{X} = X - \langle X \rangle$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Розглянемо випадкову величину  $Y$ , яка є невідповідною функцією випадкових аргументів  $X_1, X_2, \dots, X_n$ :

$$Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (4.28)$$

Функція  $\varphi$  у загальному випадку **нелінійна**, але її можна замінити лінійним аналогом в околі точки математичного сподівання аргументів:  $(\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle)$ .

Для визначення числових характеристик випадкової величини  $Y$  розвинемо функцію (4.28) у ряд Тейлора в околі точки  $(\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle)$

$$Y \approx \varphi(\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle) + \sum_{i=1}^n (x_i - \langle X_i \rangle) \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_{x_i = \langle X_i \rangle} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - \langle X_i \rangle)(x_j - \langle X_j \rangle) \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x_{i,j} = \langle X_{i,j} \rangle} + O(x), \quad (4.29)$$

де  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_{x_i = \langle X \rangle}$  – значення похідної у точці математичного сподівання

$(\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle)$ ;  $O(x)$  – залишковий член розкладання більш високого порядку малості.

Тоді математичне сподівання

$$\langle Y \rangle \approx \varphi(\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x_{i,j} = \langle X_{i,j} \rangle} + O(x). \quad (4.30)$$

Залишаючи два члени ряду (4.29), дисперсію випадкової величини  $Y$  запишемо у вигляді

$$D_Y \approx \sum_{i=1}^n D_{X_i} \left( \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_{x_i = \langle X \rangle} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} \left( \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_{x_i = \langle X_i \rangle} \right) \left( \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_{x_j = \langle X_j \rangle} \right). \quad (4.31)$$

Для випадку, коли випадкові аргументи  $X_1, X_2, \dots, X_n$  не корелюють між собою, маємо

$$\langle Y \rangle \approx \varphi(\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n D_{X_i} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \right|_{x_i = \langle X_i \rangle}, \quad (4.32)$$

$$D_Y \approx \sum_{i=1}^n D_{X_i} \left( \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_{x_i = \langle X \rangle} \right)^2. \quad (4.33)$$

**4.5. Розв'язання типових задач за розділом 4****Задача 4.1**

Контактні напруження на робочих поверхнях зубів шестерень порційні кореню квадратному обертового моменту  $M$ , тобто  $\sigma = b\sqrt{M}$ . Визначити густину розподілу контактних напружень, якщо момент є випадковою величиною, що має нормальний закон розподілу з параметрами  $\langle M \rangle$  і  $D_M$ .

**Розв'язання**

Густина розподілу моменту як випадкової нормально розподіленої величини визначається таким виразом:

$$p_M(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_M}} \exp\left(-\frac{(m - \langle M \rangle)^2}{2D_M}\right).$$

Функція  $\sigma = b\sqrt{M}$  є монотонною функцією випадкового аргументу  $M$  в області значень  $M \in [0; \infty]$ . Знайдемо зворотну функцію:  $M = \frac{\sigma^2}{b^2}$ , яка також є однозначною функцією.

Тоді за формулою (4.7) густина розподілу контактних напружень матиме вигляд

$$p_\sigma(\sigma) = p_1\left(\frac{\sigma^2}{b^2}\right) \left| \frac{dM}{d\sigma} \right| = \frac{2\sigma}{b^2 \sqrt{2\pi D_M}} \exp\left(-\frac{(\sigma - b^2 \langle M \rangle)^2}{2b^2 D_M}\right).$$

**Задача 4.2**

Знайти щільність імовірності випадкової величини  $Y = 1 - X^3$ , якщо відома щільність імовірності випадкової величини  $X$ :

$$p_x(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \text{ (розподіл Коші).}$$

**Розв'язання**

Невипадкова функція  $Y = f(X) = 1 - X^3$  – кубічна парабола, яка є однозначною функцією при  $-\infty \leq x \leq \infty$  (рис. 4.1). Обернена до неї функція  $X = g(Y) = (1 - Y)^{\frac{1}{3}}$  також є однозначною, причому

$$\left| \frac{dg(y)}{dy} \right| = \frac{1}{3} (1 - y)^{-\frac{2}{3}}.$$

Тоді згідно з (4.17) шукана щільність імовірності

$$p_y(y) = p_x[g(y)] \cdot \left| \frac{dg(y)}{dy} \right| = \frac{1}{\pi \left[ 1 + (1 - y)^{\frac{2}{3}} \right]} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1 - y)^{\frac{2}{3}}}.$$

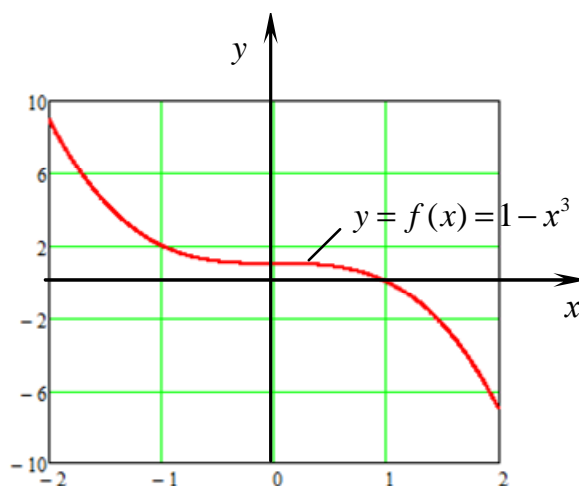


Рисунок 4.1

Перевіримо виконання умови нормування:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left[ 1 + \sqrt[3]{(1 - y)^2} \right] \sqrt[3]{(1 - y)^2}} dy &= \frac{1}{3\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\left( 1 + \sqrt[3]{z^2} \right) \sqrt[3]{z^2}} = \\ &= \frac{1}{3\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3d\sqrt[3]{z}}{1 + \sqrt[3]{z}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{1 + \rho^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \rho \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Остаточно можемо записати



$$p_y(y) = \frac{1}{3\pi} \frac{1}{(1+z) \cdot z}, \text{ де } z = \sqrt[3]{(1-y)^2}.$$

На рис. 4.2 показані щільності ймовірності випадкових величин  $X$  і  $Y$ .

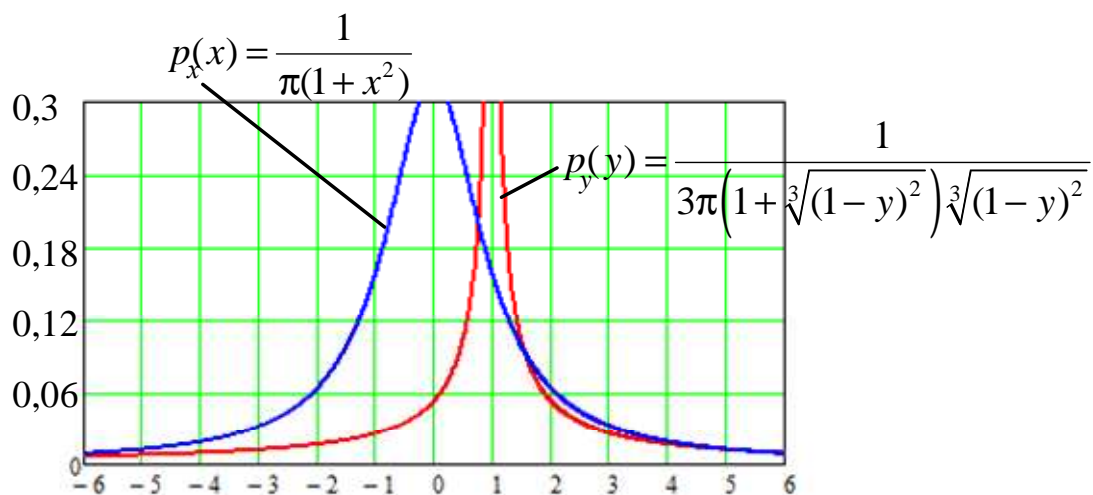


Рисунок 4.2

### Задача 4.3

Випадкова величина  $X$  рівномірно розподілена на відрізку  $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ :

$$p_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти щільність ймовірності випадкової величини  $Y = \cos X$ .

### Розв'язання

У цьому випадку мають місце дві гілки однозначності оберненої функції (рис. 4.3)  $X = \pm \arccos Y$ :

– перша  $g_1(Y) = \arccos Y \quad \left(0 \leq X \leq \frac{\pi}{2}\right)$ ;

– друга  $g_2(Y) = -\arccos y \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq X \leq 0\right)$ ,

$0 \leq Y \leq 1$ .

Тоді за формулою (4.8)

$$p_y(y) = \sum_{k=1}^2 p_x[g_k(y)] \cdot \left| \frac{dg_k(y)}{dy} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (0 \leq y \leq 1).$$

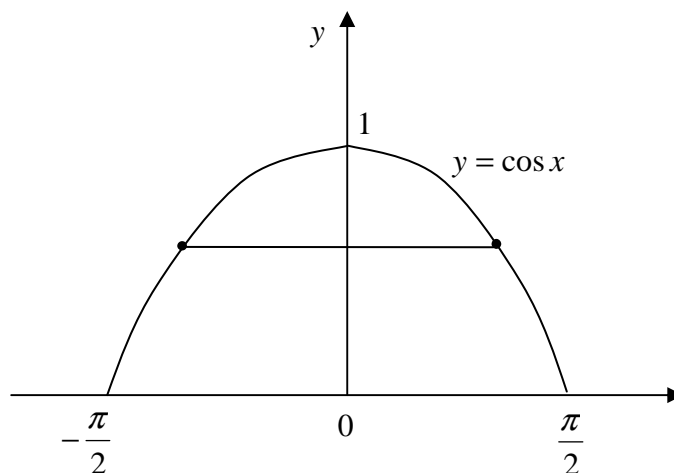


Рисунок 4.3

Знайдений розподіл  $p_y(y)$  ілюструє рис. 4.4.

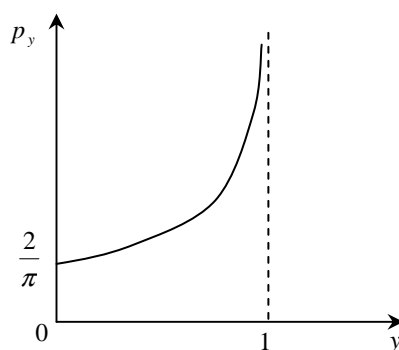


Рисунок 4.4

### Задача 4.4

Для стрижня (рис. 4.5) заданий нормальний закон розподілу

навантаження  $p_q(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}}, (-\infty \leq q \leq \infty)$  і рівномірний розподіл площі

$$p_s(s) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 8 \leq s \leq 12 \text{ см}^2; \\ 0, & s < 8, s > 12 \text{ см}^2, \end{cases}$$

причому  $Q$ ,  $S$  – незалежні випадкові величини.

Визначити щільність імовірності нормального напруження  $Z = \frac{Q}{S}$  у стрижні.

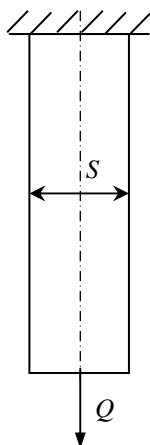


Рисунок 4.5

### Розв'язання

Оскільки випадкове навантаження  $Q$  і площа перерізу  $S$  стохастично незалежні, то їх сумісна щільність імовірності може бути записана у вигляді

$$p(q, s) = p_q(q) p_s(s).$$

Функція  $Q = g(Z, S) = ZS$  – однозначна функція аргументів  $Z$  і  $S$

(рис. 4.6), причому  $\frac{\partial g}{\partial Z} = S$ ,  $\frac{\partial g}{\partial S} = Z$ . Згідно з формулою (4.17)

$$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p[g(z, s), s] \left| \frac{\partial g(z, s)}{\partial z} \right| ds = \int_{-\infty}^{\infty} p_q[g(z, s)] \cdot p_s(s) \cdot \left| \frac{\partial g(z, s)}{\partial z} \right| ds.$$

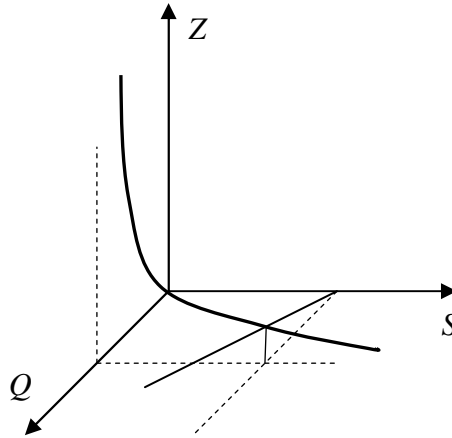


Рисунок 4.6

У результаті підставлення заданих за умовами задачі характеристик розподілів, маємо

$$\begin{aligned}
 p_z(z) &= \int_8^{12} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2 s^2}{2}} \frac{1}{4} s ds = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_8^{12} e^{-\frac{z^2 s^2}{2}} s ds = \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_8^{12} e^{-\frac{z^2 s^2}{2}} \frac{ds^2}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{2}{z^2}\right) \cdot \frac{1}{2} \int_8^{12} e^{-\frac{z^2 s^2}{2}} d\left(-\frac{z^2 s^2}{2}\right) = \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{z^2}\right) e^{-\frac{z^2 s^2}{2}} \Big|_{s=8}^{s=12} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi} z^2} \left( e^{-\frac{64z^2}{2}} - e^{-\frac{144z^2}{2}} \right) = \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi} z^2} \left( e^{-32z^2} - e^{-72z^2} \right).
 \end{aligned}$$

Остаточно

$$p_z(z) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi} z^2} \left( e^{-32z^2} - e^{-72z^2} \right), \quad -\infty \leq z \leq \infty.$$

Інший спосіб розв'язання полягає у розгляді функції розподілу ймовірностей випадкового напруження  $Z$  у стрижні:

$$F_z(z) = \iint_{f(q,s) < z} p(q,s) dq ds.$$

Для її обчислення необхідно знайти область інтегрування на площині  $q, s$ , яка задовольняє умову  $\frac{q}{s} < z$ . Із рис. 4.7 випливає, що умові  $\frac{q}{s} < z$

відповідає заштрихована область інтегрування  $\begin{cases} q < zs, & s > 0; \\ q > zs, & s < 0. \end{cases}$

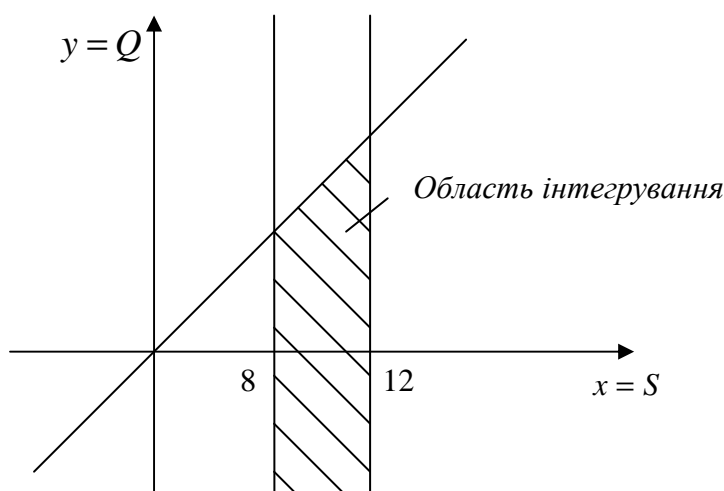


Рисунок 4.7

Таким чином,

$$F(z) = \int_{-\infty}^z \int_8^{12} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{4} e^{-\frac{(zs)^2}{2}} s dz ds.$$

Тоді щільність імовірності

$$p(z) = \frac{dF(z)}{dz} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_8^{12} s e^{-\frac{z^2 s^2}{2}} ds = \frac{1}{4\sqrt{2\pi} z^2} (e^{-32z^2} - e^{-72z^2}), \quad -\infty < z < \infty.$$

### Задача 4.5

Для балки (рис. 4.8) відомий нормальний закон розподілу

випадкового навантаження  $Q$ :  $p(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} \quad (-\infty < q < \infty)$  і

рівномірний закон розподілу її координати  $X$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ell}, & 0 \leq x \leq \ell; \\ 0, & x < 0, x > \ell. \end{cases}$$

Момент у замуруванні дорівнює  $M = QX$ . Визначити щільність імовірності випадкового моменту  $p(m)$ , якщо  $Q$  і  $X$  – стохастично незалежні випадкові величини.

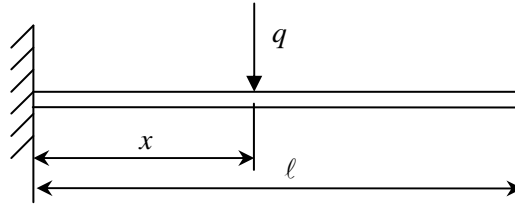


Рисунок 4.8

### Розв'язання

Величина моменту змінюється у межах  $-\infty \leq m \leq \infty$ . За визначенням

$$F(m) = \iint_{f(Q,X) < m} p(q,x) dq dx = \iint_{f(Q,X) < m} p(q)p(x) dq dx = \iint_{QX < m} p(q)p(x) dq dx.$$

Випадкове навантаження  $Q = \frac{M}{X}$  є однозначною функцією  $M$  в області можливих значень  $Q$ , при цьому умова  $qx < m$  як для  $m > 0$  (рис. 4.9 а), так і для  $m < 0$  (рис. 4.9 б) відповідає області інтегрування за  $q$ :  $-\infty \leq q < \frac{m}{x}$ . На підставі цього функція розподілу може бути записана у вигляді

$$F(m) = \int_0^{\ell} \frac{1}{\ell} \int_{-\infty}^{\frac{m}{x}} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{x}\right)^2} dm dx = \int_0^{\ell} \frac{1}{\ell} \Phi\left(\frac{m}{x}\right) dx.$$

Відповідна щільність імовірності

$$p(m) = \frac{dF(m)}{dm} = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{d\Phi\left(\frac{m}{x}\right)}{dm} dx = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m^2}{2x^2}} dx.$$

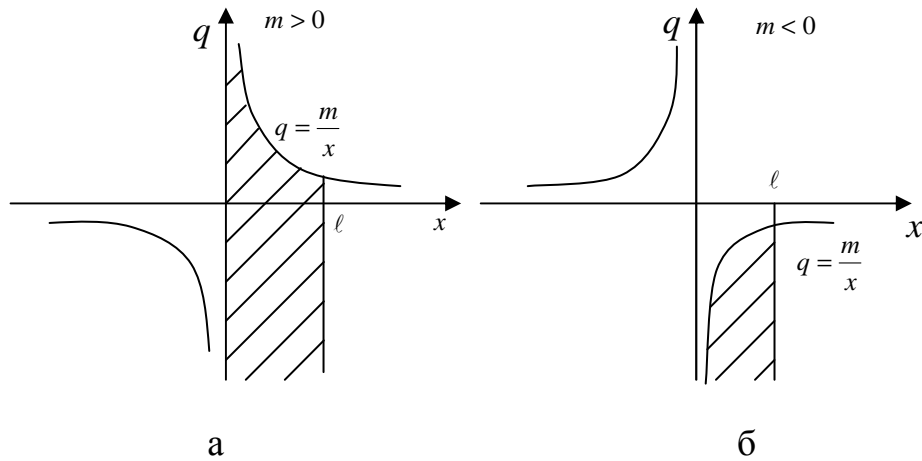


Рисунок 4.9

Проводячи заміну змінних  $t = \frac{m^2}{2x^2}$ ,  $x = \frac{m}{\sqrt{2t}}$ ,  $dx = -\frac{m}{2t\sqrt{2t}} dt$ ,

отримаємо

$$p(m) = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{\sqrt{2t}}{2\pi} \frac{1}{m} e^{-t} \frac{m}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{dt}{t\sqrt{t}} = -\frac{1}{2\ell} \int_{-\infty}^{\frac{m^2}{2\ell^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\frac{1}{2\ell\sqrt{2\pi}} I,$$

де  $I$  – інтегральна показова функція.

Остаточно  $p(m) = -\frac{1}{2\ell\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{m^2}{2\ell^2}} \frac{e^{-t}}{t} dt$  (рис. 4.10).

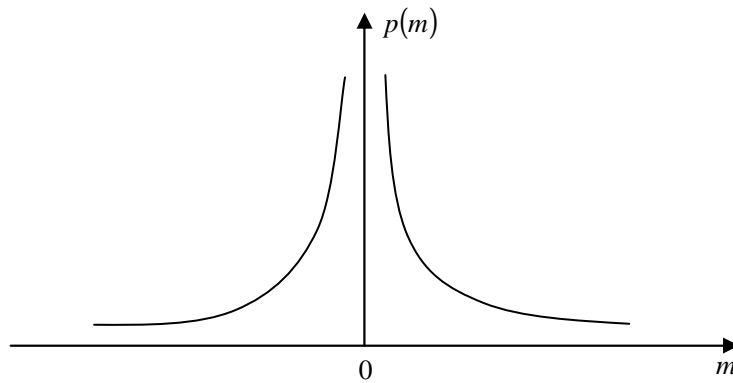


Рисунок 4.10

**Зауваження.** У формулі доцільно змінити межі інтегрування:

$$p(m) = \frac{1}{2\ell\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{m^2}{2\ell^2}}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

### Задача 4.6

Випадкові величини  $X$  і  $Y$  зв'язані детерміністичною залежністю  $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ . Знайти  $\langle Z \rangle$  і  $D_Z$ , якщо  $p(x, y)$  відповідає нормальному закону розподілу ймовірності за  $X$  і за  $Y$ , причому  $\langle X \rangle = \langle Y \rangle = 0$ ,  $D_X = D_Y = \sigma$ .

### Розв'язання

Сумісна щільність імовірності нормально розподілених випадкових величин  $X$  і  $Y$  із заданими за умовами задачі числовими характеристиками має вигляд

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right].$$

Із рис. 4.11 бачимо, що випадкова величина  $Z$  змінюється у межах  $0 \leq z < \infty$ .

Згідно з (4.21) математичне сподівання випадкової величини  $Z$  визначається подвійним інтегралом

$$\langle Z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}} dx dy.$$

Для обчислення цього інтегралу перейдемо до полярних координат  $\rho$ ,  $\varphi$ :

$$\rho^2 = x^2 + y^2; \quad x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi.$$



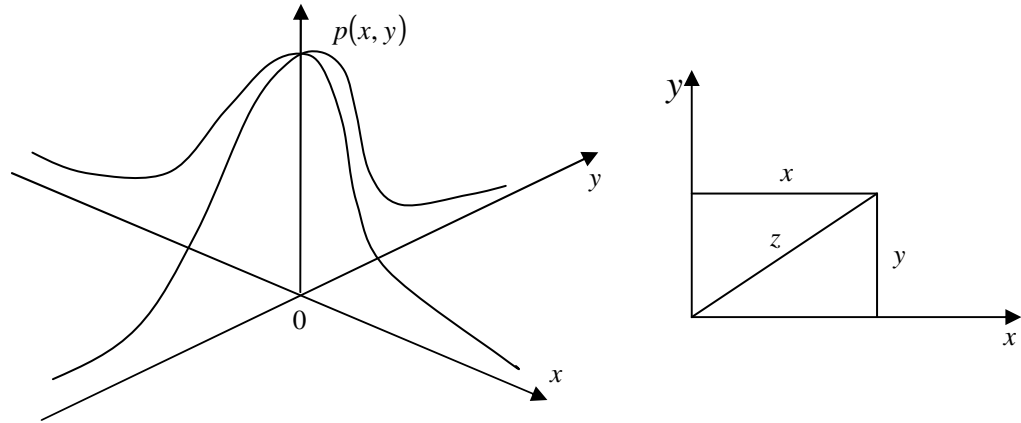


Рисунок 4.11

Елемент площі  $dx dy$  у полярній системі координат дорівнює  $\rho d\phi d\rho$ . Тоді

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r d\phi dr = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{2+1}{2}}} = \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot (2\sigma^2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2}\sigma \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sigma\sqrt{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Таким чином,  $\langle Z \rangle = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

Другий початковий момент згідно з (4.22) дорівнює

$$\begin{aligned} \langle Z^2 \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r^2 \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr d\phi = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} r^3 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{3+1}{2}}} = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot (2\sigma^2)^2 \cdot \Gamma(2) = 2\sigma^2. \end{aligned}$$

Таким чином, шукана дисперсія

$$D_Z = 2\sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{2} = 2\sigma^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

### Задача 4.7

Випадкова величина  $Y$  визначається виразом  $Y = \sum_{j=1}^n a_j X_j + b$ , де  $X_j$  – незалежні випадкові величини з відомими числовими характеристиками  $\langle X_j \rangle$  і  $D_{X_j}$ . Знайти  $\langle Y \rangle$  і  $D_Y$ .

### Розв'язання

За визначенням математичного сподівання невідповідної функції випадкових аргументів (4.21)

$$\langle Y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left( b + \sum_{j=1}^n a_j x_j \right) p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Через лінійність операції підсумовування та інтегрування можемо записати

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle &= b \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n + \\ &+ \sum_{j=1}^n a_j \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_j p(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Використовуючи умову узгодженості

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_{j-1}, dx_{j+1}, \dots, dx_n}_{n-1} = p(x_j),$$

отримуємо

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_j p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &\int_{-\infty}^{\infty} x_j \left[ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_{j-1}, dx_{j+1}, \dots, dx_n}_{n-1} \right] dx_j = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_j p(x_j) dx_j = \langle X_j \rangle. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\sum_{j=1}^n a_j \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_j p(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \sum_{j=1}^n a_j \langle X_j \rangle$$

Остаточно маємо

$$\langle Y \rangle = b + \sum_{j=1}^n a_j \langle X_j \rangle.$$

Другий початковий момент функції  $Y$  дорівнює

$$\begin{aligned} \langle Y^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^n a_j x_j + b \right)^2 p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^n a_j a_j \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n + \\ &+ 2b \sum_{j=1}^n a_j \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_j p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n + b^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2 \int_{-\infty}^{\infty} x_j^2 p(x_j) dx_j + \\ &+ \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j p(x_i, x_j) dx_i dx_j \right)_{i \neq j} + 2b \sum_{j=1}^n a_j \langle X_j \rangle + b^2 = \\ &= \sum_{j=1}^n a_j^2 \langle X_j^2 \rangle + \left( \sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \langle X_i X_j \rangle \right)_{i \neq j} + 2b \sum_{j=1}^n a_j \langle X_j \rangle + b^2. \end{aligned}$$

Дисперсія випадкової величини  $Y$  визначається як  $D_Y = \langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2$ . Тоді

$$\begin{aligned} D_Y &= \sum_{j=1}^n a_j^2 \langle X_j^2 \rangle + \left( \sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle \right)_{i \neq j} + 2b \sum_{j=1}^n a_j \langle X_j \rangle + b^2 - \\ &- b^2 - 2b \sum_{j=1}^n a_j \langle X_j \rangle - \sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle = \\ &= \sum_{j=1}^n a_j^2 \left( \langle X_j^2 \rangle - \langle X_j \rangle^2 \right) = \sum_{j=1}^n a_j^2 D(X_j). \end{aligned}$$

Таким чином, шукана дисперсія дорівнює

$$D_Y = \sum_{j=1}^n a_j^2 D(X_j).$$

### Задача 4.8

Випадкова величина задана виразом  $\langle Y \rangle = \prod_{j=1}^n X_j$ , де  $X_j$  – незалежні випадкові величини. Знайти математичне сподівання  $\langle Y \rangle$  і дисперсію  $D_Y$ , якщо відомі  $\langle X_j \rangle$  і  $D_{X_j}$ .

### Розв'язання

Для незалежних випадкових величин  $X_j$  сумісна щільність імовірності може бути подана у вигляді

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1)p(x_2)\dots p(x_n).$$

За визначенням математичного сподівання невинипадкової функції випадкових аргументів

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^n x_j p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \dots x_n p(x_1) \dots p(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \langle X_1 \rangle \langle X_2 \rangle \dots \langle X_n \rangle = \prod_{j=1}^n \langle X_j \rangle. \end{aligned}$$

Другий початковий момент

$$\begin{aligned} \langle Y^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{j=1}^n x_j \right)^2 p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2 p(x_1) p(x_2) \dots p(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \langle X_1^2 \rangle \langle X_2^2 \rangle \dots \langle X_n^2 \rangle = \prod_{j=1}^n \langle X_j^2 \rangle. \end{aligned}$$

Дисперсія

$$D_Y = \prod_{j=1}^n \langle X_j^2 \rangle - \left( \prod_{j=1}^n \langle X_j \rangle \right)^2 = \prod_{j=1}^n \langle X_j^2 \rangle - \prod_{j=1}^n \langle X_j \rangle^2.$$

Враховуючи, що  $\langle X_j^2 \rangle = D(X_j) + \langle X_j \rangle^2$ , остаточно отримуємо

$$D_Y = \prod_{j=1}^n \left[ D_{X_j} + \langle X_j \rangle^2 \right] - \prod_{j=1}^n \langle X_j \rangle^2.$$

### Задача 4.9

Оцінити методом лінеаризації числові характеристики коефіцієнта запасу міцності  $n$ , що дорівнює відношенню несучої здатності  $R$  та діючого навантаження  $F$ . Середні значення  $R$  і  $F$  відповідно дорівнюють  $\langle R \rangle = 4 \cdot 10^3$  Н і  $\langle F \rangle = 2 \cdot 10^3$  Н; коефіцієнти варіації  $D_R = 230$  кН і  $D_F = 90$  кН.

### Розв'язання

Беручи до уваги, що несучу здатність  $R$  та діюче навантаження  $F$  можна вважати стохастично незалежними випадковими величинами, математичне сподівання коефіцієнта запасу міцності визначаємо за формулою (4.30):

$$\langle n \rangle = \frac{\langle R \rangle}{\langle F \rangle} = \frac{4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3} = 2.$$

Дисперсію коефіцієнта запасу міцності визначаємо за формулою (4.33):

$$\begin{aligned} D_n &\approx D_R \frac{1}{\langle F \rangle^2} + D_F \frac{\langle R \rangle^2}{\langle F \rangle^4} = \\ &= \frac{230 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^6} + 90 \cdot 10^3 \frac{16 \cdot 10^6}{16 \cdot 10^{12}} = (57,5 + 90) \cdot 10^{-3} = 147,5 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

### Задача 4.10

Круглий стрижень вагою  $P = 20$  кН, діаметром  $d = 0,2$  м та границею пропорційності  $\sigma_{\text{п}} = 200$  МПа розтягується випадковою осьовою силою (рис. 4.12) з відомим математичним сподіванням  $\langle F \rangle = 22$  кН і дисперсією  $D_F = 19,4$  (кН)<sup>2</sup>. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи стрижня у межах пропорційності, якщо сила має логарифмічний нормальний закон розподілу ймовірності.

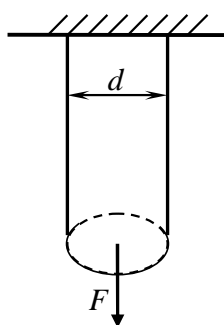


Рисунок 4.12

### Розв'язання

Напруження в замуруванні при розтягненні стрижня визначається за формулою  $\sigma = \frac{F + P}{A}$ , де для випадку круглого поперечного перерізу площа поперечного перерізу  $A = \pi d^2 / 4 = 3,14 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>. Через лінійну залежність випадкової сили та напруження закон розподілу напруження також буде логарифмічно-нормальний з параметрами

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\langle F \rangle + P}{A} = 133,75 \text{ МН}, \quad D_{\sigma} = \frac{D_F}{A^2}.$$

Параметри розподілу випадкової величини  $Z = \ln \sigma$  (див. додаток А) такі:

$$\langle \sigma \rangle = e^{\langle Z \rangle + 0,5D_Z}, \quad D_{\sigma} = e^{2\langle Z \rangle + D_Z} (e^{D_Z} - 1), \quad D_{\sigma} = \langle \sigma \rangle^2 (e^{D_Z} - 1),$$

звідки знаходимо

$$\langle Z \rangle = \ln \langle \sigma \rangle - D_Z/2 = 11,837,$$

$$D_Z = \ln \left( 1 + \frac{D_\sigma}{\langle \sigma \rangle^2} \right) = \ln(1,04) = 0,039, \quad \sigma_Z = 0,198.$$

Ймовірність безвідмовної роботи у межах пропорційності матеріалу дорівнюватиме ймовірності неперевикнення діючими напруженнями межі пропорційності матеріалу стрижня:

$$P_{\text{неруйн}} = \int_{-\infty}^{[\sigma_{\text{пр}}]} p(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2} + \Phi \left( \frac{\ln \sigma_n - \langle Z \rangle}{\sqrt{D_Z}} \right).$$

Для аргумента  $\frac{\ln \sigma_n - \langle Z \rangle}{\sqrt{D_Z}} = \frac{\ln 200000 - 11,837}{0,198} = 1,864$  чисельно

знаходимо ймовірність неруйнування стрижня:

$$P_{\text{неруйн}} = 0,5 + \Phi(1,864) = 0,969.$$

### Задача 4.11

Сталевий стрижень з площею поперечного перерізу  $A = 2 \text{ см}^2$  розтягується силою  $F$  і знаходиться у заданому температурному полі (рис. 4.13). Сила та температура нагрівання розподілені за нормальним законом з такими параметрами математичного сподівання та середньо квадратичного відхилення:  $\langle F \rangle = 30 \text{ кН}$ ,  $\sigma_F = 6 \text{ кН}$ ,  $\langle t \rangle = 40^\circ \text{С}$ ,  $\sigma_t = 8^\circ \text{С}$ .

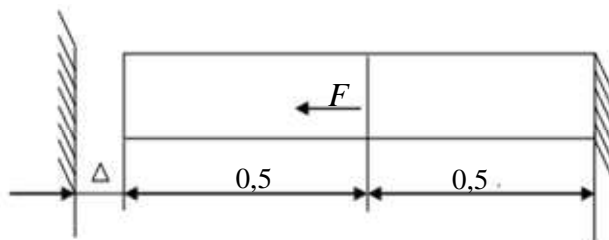


Рисунок 4.13

Необхідно знайти ймовірність безвідмовної роботи стрижня у межах пропорційності  $\sigma_{\text{п}} = 200$  МПа, якщо зазор між лівим кінцем стрижня та стінкою дорівнює  $\Delta = 0,5$  мм.

### Розв'язання

Загальне подовження стрижня знаходимо за формулами опору матеріалів [12]:

$$U = \Delta l_t + \Delta l_F = \alpha l t + \frac{Fl}{2EA},$$

де  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$  коефіцієнт лінійного розширення для сталі. Кожне з цих подовжень також матиме нормальний закон розподілу, тому і загальне подовження буде розподілене за нормальним законом. Для визначення параметрів цього закону скористаємося методом лінеаризації (4.32), (4.33):

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \alpha l \langle t \rangle + \frac{\langle F \rangle l}{2EA} \\ &= 12 \cdot 10^{-6} \cdot 0,9 \cdot 40 + 30 \cdot 10^3 \cdot 0,9 / 2 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 5,93 \cdot 10^{-4} \text{ м,} \end{aligned}$$

$$D_u = \alpha^2 l^2 D_t + \frac{l^2 D_F}{(2EA)^2} = 1,16 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2,$$

$$\sigma_u = \sqrt{D_u} = 1,077 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Вид деформації стрижня (рис. 4.23) при навантаженні залежить від того, чи закритється зазор між стрижнем та стінкою чи ні. Знайдемо ймовірність того, що зазор не закритється.

$$P_1 = \int_{-\infty}^{\Delta} p(u) u = \frac{1}{2} + \Phi \left( \frac{\Delta - \langle u \rangle}{\sqrt{D_u}} \right) = \frac{1}{2} + \Phi(-0,851) = 0,197.$$

Тоді ймовірність закриття зазору дорівнюватиме

$$P_2 = 1 - P_1 = 0,803.$$



У будь-якому випадку напруження у стрижні розподілятиметься за нормальним законом, але параметри його будуть різними залежно від того, закритий зазор чи ні. Якщо зазор не закритий,

$$\sigma_1 = \frac{F}{A}, \quad \langle \sigma_1 \rangle = \frac{\langle A \rangle}{A} = \frac{30 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 150 \text{ МПа},$$

$$D_{\sigma_1} = \frac{D_F}{A^2} = 900 \text{ МПа}.$$

Якщо зазор закритий, то діюче напруження залежатиме від реакції опори, яка дорівнює

$$R = \frac{(U - \Delta)EA}{l}.$$

У цьому випадку найбільше напруження у стрижні матиме вигляд

$$\sigma_2 = \frac{F - R}{A} = \frac{F}{A} - E \frac{U - \Delta}{l}.$$

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини  $\sigma_2$  визначатимуться за формулами

$$\langle \sigma_2 \rangle = \langle \sigma_1 \rangle - E \frac{\langle u \rangle - \Delta}{l} = 150 \cdot 10^6 - 2,1 \cdot 10^{11} \frac{5,27 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-4}}{0,8} = 143,7 \text{ МПа},$$

$$D_{\sigma_2} = D_{\sigma_1} + D_u \frac{E^2}{l^2} = 30 \cdot 10^6 + 9,16 \cdot 10^9 \frac{(2,11 \cdot 10^{11})^2}{0,8^2} = 503,5 \cdot (\text{МПа})^2$$

Щільності розподілу напруження  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  тепер розглядатимемо як умовні густини ймовірності, оскільки вони зв'язані умовою перекриття чи неперекриття зазору. За формулою повної ймовірності густина ймовірності найбільших напружень у стрижні визначатиметься за формулою

$$p(\sigma) = P_1 p(\sigma_1) + P_2 p(\sigma_2) =$$

$$= \frac{P_1}{\sqrt{2\pi D_{\sigma_1}}} \exp\left[-\frac{(\sigma - \langle \sigma_1 \rangle)^2}{2D_{\sigma_1}}\right] + \frac{P_2}{\sqrt{2\pi D_{\sigma_2}}} \exp\left[-\frac{(\sigma - \langle \sigma_2 \rangle)^2}{2D_{\sigma_2}}\right].$$

Ймовірність неруйнування у межах пропорційності матеріалу стрижня дорівнюватиме

$$P = P_1(0,5 + \Phi(t_1)) + P_2(0,5 + \Phi(t_2)),$$

$$\text{де } t_1 = \frac{(200 - 150) \cdot 10^6}{30 \cdot 10^6} = 1,667, \quad t_2 = \frac{(200 - 143,7) \cdot 10^6}{\sqrt{503,5 \cdot 10^6}} = 2,509.$$

З урахуванням знайдених вище значень для  $P_1$  і  $P_2$  знаходимо шукану ймовірність неруйнування стрижня для заданих умов

$$P = 0,197 \cdot 0,9522 + 0,803 \cdot 0,993 = 0,985.$$

### Задача 4.12

Сталевий вал сталого перерізу діаметром  $d = 0,1$  м навантажений крутним моментом з випадковою величиною амплітуди, що має експоненціальний закон розподілу з математичним сподіванням  $\langle M \rangle = 12000$  Нм і дисперсією  $D_M = 7,5 \cdot 10^6$  (Нм)<sup>2</sup>. Необхідно визначити ймовірність неруйнування вала з умови неперевищення напруження  $\tau_\ell = 100$  МПа, а відносним кутом закручування –  $\theta_\ell = 0,02$  рад/м.

### Розв'язання

Максимальне дотичне напруження та відносна кутова деформація при крученні вала

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W_p}, \quad \theta = \frac{M}{GJ_p},$$

де полярний момент опору  $W_p = 0,2d^3$ ; модуль зсуву  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа, полярний момент інерції  $J_p = 0,1 \cdot d^4$ .

Величини напруження  $\tau_{\max}$  та деформації  $\theta$  вала, що залежать від випадкового навантаження моментом кручення, також матимуть експоненціальний закон розподілу з параметрами

$$\langle \tau_{\max} \rangle = \frac{\langle M \rangle}{W_p} = \frac{12000}{0,2(0,1)^3} = 60 \text{ МПа}, \quad \langle \theta \rangle = \frac{12000}{8 \cdot 10^{10} (0,1)^5} = 0,015 \text{ рад/м},$$

$$D_{\tau_{\max}} = \frac{D_M}{W_p^2} = \frac{7,5 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 0,1^3} = 13,693 \cdot 10^6 \text{ Па}, \quad D_{\theta} = \frac{D_M}{(GJ_p)^2} = 3,42 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}.$$

Параметри експоненціального закону (додаток А) для визначення величини напруження вала  $b = \frac{1}{\sqrt{D_{\tau}}}$ ,  $a = \langle \tau \rangle - \sqrt{D_{\tau}}$ .

Ймовірність неперевикнення граничного напруження дорівнюватиме

$$P_{\tau} = F(\tau_{\ell}) = 1 - \exp[-b(\tau_{\ell} - a)] = \\ = 1 - \exp\left[-\frac{1}{1,368 \cdot 10^7} (10^8 - 6 \cdot 10^7 + 1,368 \cdot 10^7)\right] = 0,98.$$

Аналогічно

$$P_{\theta} = 1 - \exp\left[-\frac{1}{3,42 \cdot 10^{-3}} (0,02 - 0,015 + 3,42 \cdot 10^{-3})\right] = 0,915.$$

Якщо діаметр вала також є випадковою величиною з нормальним законом розподілу та математичним сподіванням, що дорівнює номінальному значенню і середнім квадратичним відхиленням  $\sigma_d = 0,006\text{м}$ , то ймовірнісні напруження та відносної кутової деформації знайдемо розвиненням виразів для  $\tau$  і  $\theta$  у ряд Тейлора:

$$\langle \tau_{\max} \rangle = \frac{\langle M \rangle}{0,2 \langle d \rangle^3} + \frac{3 \cdot 4 D_d \langle M \rangle}{2 \cdot 0,2 \langle d \rangle^5} = \frac{\langle M \rangle}{0,2 \langle d \rangle^3} \left(1 + 6 \frac{D_d}{\langle d \rangle^2}\right) = \\ = \frac{12000}{0,2(0,1)^3} \left(1 + 6 \frac{0,006^2}{0,1^2}\right) = 61,29 \text{ МПа}, \\ D_{\tau_{\max}} = \frac{\langle M \rangle^2}{0,2^2 \langle d \rangle^6} \left(\frac{D_M}{\langle M \rangle^2} + \frac{D_d \cdot 9 \cdot 16}{0,2^2 \langle d \rangle^4}\right) = \\ = \frac{12000^2}{0,2^2 0,1^6} \left(\frac{7,5 \cdot 10^6}{12000^2} + \frac{0,006^2 \cdot 9}{0,1^2}\right) = 304,14 \text{ (МПа)}^2,$$

$$\begin{aligned} \langle \theta \rangle &= \frac{\langle M \rangle}{0,1G \langle d \rangle^4} \left( 1 + 10 \frac{D_d}{\langle d \rangle^2} \right) = \\ &= \frac{12000}{0,1 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} (0,1)^4} \left( 1 + 10 \frac{0,006^2}{0,1^2} \right) = 0,0155 \text{ рад/м}, \\ D_\theta &= \frac{12000^2}{(0,8 \cdot 10^5 \cdot 0,1)^2 0,1^8} (0,52 + 0,0576) = 0,13 \cdot 10^{-5} \text{ (рад/м)}^2. \end{aligned}$$

Якщо вважати, що напруження та кутова деформація також мають експоненціальний закон розподілу, то формули для визначення ймовірності неперевикнення граничного напруження та кута відповідно матимуть вигляд

$$\begin{aligned} P_\tau &= 1 - \exp \left[ - \frac{1}{\sqrt{3,0414 \cdot 10^{14}}} \left( 100 \cdot 10^6 - 61,29 \cdot 10^6 + \sqrt{3,0414 \cdot 10^{14}} \right) \right] = 0,961, \\ P_\theta &= 1 - \exp \left[ - \frac{1}{\sqrt{1,3 \cdot 10^{-5}}} \left( 0,02 - 0,0155 + \sqrt{1,332 \cdot 10^{-5}} \right) \right] = 0,839. \end{aligned}$$

### Задача 4.13

Бетонний стрижень квадратного поперечного перерізу 15 x 15 см стискається силою  $F$ , що прикладена зі зміщенням щодо однієї з головних осей на величину  $d = 2$  см. Визначити ймовірність неруйнування стрижня, якщо сила  $F$  має нормальний розподіл із математичним сподіванням  $\langle F \rangle = 70$  кН і дисперсією  $D_F = 35$  (кН)<sup>2</sup>.

### Розв'язання

Діюче максимальне напруження у бетонному стрижні визначаємо за формулою

$$\sigma = \frac{F}{A} \pm \frac{M}{W} = \frac{F}{A} \pm \frac{Fd}{W} = \frac{F}{A} \left( 1 \pm \frac{Ad}{W} \right),$$

де момент опору  $W = \frac{b^3}{6}$ ;  $A = b^2$ ;  $b = 15$  см.

Під дією моменту ( $Fd$ ) у кутових точках перерізу будуть виникати додатні (розтягувальні) та від'ємні (стискальні) напруження. Крихкий матеріал має різні властивості для умов розтягування та стискання, тому умови міцності перевіримо для двох точок: де діють максимальні розтягувальні та максимальні стискальні напруження.

Максимальне напруження також матиме нормальний закон розподілу з такими параметрами для деформацій розтягування:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\langle F \rangle}{A} \left( 1 - \frac{Ad}{W} \right) = \frac{70 \cdot 10^3}{0,15^2} \left( 1 - \frac{6 \cdot 0,02}{0,15} \right) = 3,11 \cdot 10^6 (1 - 0,8) = 0,622 \text{ МПа};$$

$$D_\sigma = \frac{D_F}{A^2} \left( 1 - \frac{Ad}{W} \right)^2 = \frac{35 \cdot 10^6}{0,15^4} \left( 1 - \frac{6 \cdot 0,02}{0,15} \right)^2 = 0,053 \text{ МПа};$$

і для стискання:

$$\langle \sigma_{cm} \rangle = 3,11 \cdot 10^6 \cdot 1,8 = 5,6 \text{ МПа}, \quad D_{\sigma_{cm}} = 0,118 \cdot 5,6 = 0,661 \text{ МПа}.$$

Межа міцності бетону на розтягування  $[\sigma_p] = 0,7$  МПа і на стискання  $[\sigma_{cm}] = 9$  МПа.

Ймовірність неруйнування стрижня

$$P_{\text{неруйн}} = \int_{-\infty}^{[\sigma]} \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\sigma}} \exp\left(-\frac{(\sigma - \langle \sigma \rangle)^2}{2D_\sigma}\right) d\sigma = 0,5 + \Phi(t).$$

Аргумент функції Лапласа для напружень розтягнення та стиснення відповідно дорівнюватиме

$$t_p = \left( \frac{[\sigma_p] - \langle \sigma \rangle}{\sqrt{D_p}} \right) = \frac{0,7 - 0,622}{0,072} = 1,083, \quad t_{cm} = \left( \frac{9 - 5,6}{0,661} \right) = 5,144.$$

Величини відповідних ймовірностей неруйнування стрижня становлять  $P_p = 0,861$ ,  $P_{cm} = 0,99999997$ .

### Задача 4.14

Визначити ймовірність неруйнування розтягнутого стрижня задачі 4.10, якщо для межі пропорційності також прийняти нормальний закон розподілу з математичним сподіванням  $\langle \sigma_{\text{lim}} \rangle = 200$  МПа та дисперсією  $D_{\sigma_{\text{lim}}} = 400$  (МПа)<sup>2</sup>.

### Розв'язання

Руйнування настає тоді, коли діючі у стрижні напруження  $\sigma$  перевищать межу пропорційності  $\sigma_{\text{lim}}$ , інакше кажучи, коли виконується умова  $\sigma > \sigma_{\text{lim}}$ , або

$$Z = \sigma_{\text{lim}} - \sigma < 0.$$

Різниця випадкових величин  $\sigma$  і  $\sigma_{\text{lim}}$  також буде випадковою величиною:

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle &= \langle \sigma_{\text{lim}} \rangle - \langle \sigma \rangle, \\ D_z &= D_{\sigma_{\text{lim}}} + D_{\sigma} - 2K_{\sigma_{\text{lim}}\sigma}. \end{aligned}$$

Кореляційний момент, що входить в останню рівність для незалежних випадкових величин, перетворюється на нуль. Оскільки граничне і робоче напруження практично незалежні, то  $\sigma_Z = \sqrt{D_{\sigma_{\text{lim}}} + D_{\sigma}}$ .

Величину, обернену до коефіцієнта варіації  $\nu_z$  випадкової величини  $Z$  згідно з підходом А. Р. Ржаніцина до визначення коефіцієнта запасу, називають характеристикою безпеки [14]:

$$u_p = \frac{1}{\nu_Z} = \frac{\langle Z \rangle}{\sigma_Z} = \frac{\langle \sigma_{\text{lim}} \rangle - \langle \sigma \rangle}{\sqrt{D_{\sigma_{\text{lim}}} + D_{\sigma}}}.$$

Характеристикою безпеки  $u_p$  є квантиль, знаючи який, за таблицями нормального розподілу можна визначити ймовірність

неруйнування, а саме

$$u_p = \frac{\langle \sigma_{\text{lim}} \rangle - \langle \sigma \rangle}{\sqrt{D_{\sigma_{\text{lim}}} + D_{\sigma}}} = \frac{200 \cdot 10^6 - 135 \cdot 10^6}{\sqrt{400 \cdot (10^6)^2 + 0,221^2 \cdot (135 \cdot 10^6)^2}} = 1,81.$$

Шукана мовірність неруйнування:

$$P_{\text{неруйн}} = 0,965.$$

### Задача 4.15

Визначити ймовірність неруйнування трубопроводу діаметром  $d = 50 \pm 0,3$  мм, що має номінальну товщину стінки  $\delta_{\text{ном}} = 1,5$  мм, виконаного зі сталі X18H10T і навантаженого внутрішнім надмірним тиском  $p = 3 \cdot 10^7$  Па з допуском  $\pm 15\%$ .

### Розв'язання

Для визначення надійності скористаємося розв'язком попередньої задачі 4.14, тобто визначимо квантиль  $u_p$  для заданих умов навантаження трубопроводу та характеристик його несучої здатності. При цьому розглянемо руйнування у випадку раптового перевищення навантаженням несучої здатності труби.

Припустимо, що межа міцності  $\sigma_s$ , товщина стінки  $\delta$  і навантаження  $p$  розподілені за нормальним законом, тоді граничні відхилення дорівнюють трьом середнім квадратичним відхиленням (правило трьох сигм), тобто

$$\sigma_d = \frac{\Delta d}{3} = \frac{0,3}{3} = 0,1 \text{ мм}; \quad \sigma_p = \frac{\Delta p}{3} = \frac{0,15 \cdot 3 \cdot 10^7}{3} = 0,15 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Як математичні сподівання діаметра  $d$  і тиску  $p$  візьмемо номінальні значення цих параметрів. За табличними даними, що наведені, наприклад у [5], знаходимо математичні сподівання для

матеріалу трубопроводу:  $\langle \sigma \rangle = 63,73 \cdot 9,81 \cdot 10^6 \text{ Па}$  і  $\langle \delta \rangle = 1,54 \text{ мм}$ . Коефіцієнти варіації межі міцності і товщини знаходимо за спеціальними таблицями, що також наведені, наприклад, у [5]:  $v_\sigma = 5,65 \%$ ;  $v_\delta = 3,38 \%$ .

Визначимо коефіцієнт варіації діаметра:

$$v_d = \frac{\sigma_d}{\langle d \rangle} = \frac{0,1}{50} = 0,002 = 0,2\% .$$

Оскільки навантаженням є робочий тиск, візьмемо як несучу здатність руйнівальний тиск, який, як відомо з теорії безмоментних оболонок, у даному випадку визначають виразом  $R = 2\sigma_\epsilon \delta / d$ .

Математичне сподівання діючого навантаження визначимо, розвиваючи у ряд Тейлора детерміністичний вираз  $R = 2\sigma_\epsilon \delta / d$  в околі точки  $(\langle \sigma \rangle, \langle \delta \rangle, \langle d \rangle)$ :

$$\langle R \rangle = \frac{2\langle \sigma \rangle \langle \delta \rangle}{\langle d \rangle} = \frac{2 \cdot 63,73 \cdot 1,5}{50} 9,81 \cdot 10^6 = 3,75 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2.$$

Тоді умовний коефіцієнт запасу

$$k_y = \frac{3,75 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^7} = 1,25.$$

Для визначення коефіцієнта варіації несучої здатності необхідно визначити дисперсію. Скористаємося методом статистичної лінеаризації:

$$D_R = \left( \frac{2\langle \sigma \rangle}{\langle d \rangle} \right)^2 D_\delta + \left( \frac{2\langle \delta \rangle}{\langle d \rangle} \right)^2 D_\sigma + \left( \frac{2\langle \sigma \rangle \langle \delta \rangle}{\langle d \rangle^2} \right)^2 D_d.$$

Тоді коефіцієнт варіації дорівнюватиме

$$v_R = \sqrt{v_\sigma^2 + v_\delta^2 + v_d^2} = \sqrt{5,65^2 + 3,38^2 + 0,2^2} = 6,59 \%, v_R = 0,0659.$$

У цьому прикладі діаметр трубопроводу можна вважати невинуваткою величиною, оскільки його відносні флуктуації фактичних



даних істотно менше розкиду границі міцності і товщини.

Коефіцієнт варіації навантаження

$$v_q = \frac{\sqrt{D_p}}{\langle p \rangle} = \frac{0,15 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^7} = 0,05.$$

Знаючи коефіцієнти варіації, знаходимо квантиль

$$u_p = \frac{k_y - 1}{\sqrt{v_p^2 k_y^2 + v_q^2}} = \frac{1,25 - 1}{\sqrt{0,05^2 \cdot 1,25^2 + 0,0659^2}} = 2,753.$$

За таблицею квантилів нормального розподілу, наведеної, наприклад, у [4; 5; 10] знаходимо, що ймовірність неруйнування становить  $P = 0,9972$ .

### Задача 4.16

В елементі двигуна діє напруження, що має нормальний закон розподілу з математичним сподіванням  $\langle \sigma \rangle = 350$  МПа і середнім квадратичним відхиленням  $\sqrt{D_\sigma} = 40$  МПа. Через вплив температури та інших факторів міцність матеріалу також є випадковою величиною з нормальним розподілом з параметрами  $\langle \sigma_* \rangle = 820$  МПа і  $D_{\sigma_*} = 80$  МПа. Визначити ймовірність безвідмовної роботи цього елемента.

### Розв'язання

Для визначення ймовірності безвідмовної роботи також скористаємось формулою

$$u_p = \frac{\langle \sigma_* \rangle - \langle \sigma \rangle}{\sqrt{D_{\sigma_*} + D_\sigma}} = \frac{820 - 350}{\sqrt{40^2 + 80^2}} = 5,255.$$

За таблицею квантилів нормального розподілу знаходимо  $P_{\text{неруйн}} = 0,9999999$ .

Припустимо, що погана термічна обробка та значні коливання

температури викликали збільшення середнього квадратичного відхилення міцності до 150 МПа. У цьому випадку коефіцієнт запасу (відношення математичних сподівань граничного та діючого напружень) залишається таким самим, а ймовірність безвідмовної роботи змінюється, а саме

$$u_p = \frac{820 - 350}{\sqrt{40^2 + 150^2}} = 3,028,$$

тобто у цьому випадку  $P_{неруйн} = 0.9987$ .

### Задача 4.17

Необхідно визначити діаметр круглого стрижня з надійністю 0,99990, що розтягується нормально розподіленою випадковою силою з такими параметрами:  $\langle P \rangle = 17800$  Н,  $D_p = 445$  Н. Межа міцності є також нормально розподіленою величиною з параметрами  $\langle \sigma_* \rangle = 690$  МПа,  $\sqrt{D_{\sigma_*}} = 34,5$  МПа.

### Розв'язання

Нормальне напруження у довільному перерізі стрижня визначається за формулою

$$\sigma = \frac{P}{A},$$

де  $A = \pi r^2$ . Використовуючи розвинення у ряд Тейлора за формулами (4.32), (4.33), знаходимо

$$\langle A \rangle = \pi \langle r^2 \rangle = \pi \left( \langle r \rangle^2 + D_r \right), D_A = 4\pi^2 D_r \langle r \rangle^2.$$

Якщо допуск для радіуса кругового поперечного перерізу можна виразити як частку  $\delta$  від радіуса  $r$ , то за правилом трьох сигм

знаходимо:  $3\sqrt{D_r} = \delta\langle r \rangle$ , тобто  $\sqrt{D_r} = \frac{\delta}{3}\langle r \rangle$ . За формулами (4.32), (4.33)

знаходимо параметри закону розподілу діючого напруження:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\langle P \rangle}{\langle A \rangle} = \frac{\langle P \rangle}{\pi(\langle r \rangle^2 + D_r)},$$

$$D_\sigma = \frac{D_p}{\langle A \rangle^2} + D_A \left( \frac{\langle P \rangle}{\langle A \rangle^2} \right)^2 = \frac{D_p(\langle r \rangle^2 + D_r)^2 + 4D_r\langle r \rangle^2\langle P \rangle^2}{\pi^2(\langle r \rangle^2 + D_r)^4}.$$

Підставимо отримані значення  $\langle \sigma \rangle$  і  $D_\sigma$  у формулу для визначення квантиля  $u_p$  з урахуванням вищезнайдених виразів для  $\langle r \rangle$  і  $D_r$ , отримаємо

$$u_p = \frac{\langle \sigma_* \rangle - \frac{\langle P \rangle}{\pi\langle r \rangle^2(1+\gamma^2)}}{\sqrt{D_{\sigma_*}^2 + \left( \frac{D_p}{\pi^2\langle r \rangle^4(1+\gamma^2)^2} + \frac{4\delta^2\langle P \rangle^2}{\pi^2\langle r \rangle^4(1+\gamma^2)^4} \right)^2}},$$

де  $\gamma=1/3$ . За заданою надійністю  $H=0,9999$  чисельно знаходимо значення  $u_p = 3,719$ . Якщо взяти  $\delta=0,015$ , то після перетворень та скорочень останнє рівняння матиме вигляд

$$144,63\langle r \rangle^4 - 24,6\langle r \rangle^2 + 1 = 0.$$

Це рівняння має два невід'ємних корені:  $\langle r \rangle_1 = 2,6$  мм і  $\langle r \rangle_2 = 3,21$  мм. Перший корінь приводить до ймовірності 0,0001 (тобто характеризує ненадійність елемента), а другий корінь дає задану ймовірність неруйнування 0,9999.

## 4.6. ДОДАТКОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

**Завдання 1.** Визначити закон розподілу ймовірності, а також математичне сподівання та дисперсію випадкового сигналу  $Y$  на виході квадратичного детектора, який має характеристику  $Y = 2X^2 + 7$ , якщо вихідний сигнал  $X$  розподілений: а) за рівномірним законом імовірності, причому  $x_{\min} = -2, x_{\max} = 2$ ; б) за нормальним законом з параметрами  $\langle X \rangle = 0, D_X = 1$ .

**Завдання 2.** Знайти щільності ймовірності: а) суми; б) різниці; в) добутку; г) частинного двох випадкових величин, які підлягають рівномірному розподілу на інтервалі  $[0; a]$ .

**Завдання 3.** Є відцентровий регулятор, сторони якого дорівнюють  $a$ . Кут  $\varphi$  є випадковою величиною, яка рівномірно розподілена в інтервалі  $(\pi/6; \pi/4)$ . Знайти закон розподілу ймовірностей діагоналей  $AB$  і  $CD$  такого регулятора.

**Завдання 4.** Щільність імовірності випадкової величини  $X$  задана

функцією 
$$p(x) = \begin{cases} cx^{\frac{3}{2}} & \text{при } x \geq 1; \\ 0 & \text{при } x < 1. \end{cases}$$
 Знайти сталу  $c$ , щільність

імовірності випадкової величини  $Z = \frac{1}{X^2}$  і ймовірність  $P(0,25 < Z < 0,64)$ .

**Завдання 5.** Випадкова величина  $\xi$  рівномірно розподілена на відрізьку  $[1; 3]$ . Знайти щільність імовірності випадкової величини  $\eta = \xi^2 + 1$ .

**Завдання 6.** Випадкова величина  $\xi$  рівномірно розподілена на відрізку  $[-1; 1]$ . Зайти щільність імовірності випадкової величини  $\eta = -\ln(\xi + 2)$ .

**Завдання 7.** Випадкова величина  $X$  задана функцією розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Зайти функцію розподілу ймовірностей випадкової величини  $Y = \frac{1}{1-X}$ .

**Завдання 8.** Випадкова величина  $\xi$  має стандартний нормальний розподіл ( $\langle \xi \rangle = 0, D_\xi = 1$ ). Знайти щільність імовірності випадкової величини  $\eta = \xi^2$ .

**Завдання 9.** Випадкова величина  $\xi$  підлягає показовому розподілу з параметром  $\lambda$ . Знайти функції щільності ймовірності випадкових величин: а)  $\eta_1 = \lambda \xi$ ; б)  $\eta_2 = \xi^2$ ; в)  $\eta_3 = 2\sqrt{\xi}$ ; г)  $\eta_4 = 1 - e^{-\lambda \xi}$ .

**Завдання 10.** Випадкова величина  $\xi$  рівномірно розподілена на відрізку  $[0; 1]$ . Знайти щільності ймовірності випадкових величин:

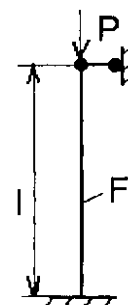
а)  $\eta_1 = 4\xi + 1$ ; б)  $\eta_2 = -\ln(1-\xi)$ ; в)  $\eta_3 = \operatorname{tg}\left(\pi\left(\xi - \frac{1}{2}\right)\right)$ .

**Завдання 11.** Стохастично незалежні випадкові величини  $\xi$  і  $\eta$  рівномірно розподілені на відрізках  $[0; 4]$  і  $[1; 4]$  відповідно. Визначити щільність імовірності суми  $\xi + \eta$ .

**Завдання 12.** Стрижень довжиною 24 см ламають на дві частини; вважаючи, що точка перелому рівномірно розподілена по усій довжині стрижня, визначити, чому дорівнює середня довжина більшої частини стрижня.

**Завдання 13.** Стрижень довжиною 16 см ламають на дві частини; вважаючи, що точка перелому рівномірно розподілена по усій довжині стрижня, визначити чому дорівнює середня довжина меншої частини стрижня.

**Завдання 14.** Знайти закон розподілу ймовірностей напруження  $\sigma_{кр}$ , що відповідає критичному значенню стискальної сили  $P$ , якщо гнучкість стрижня  $\lambda$  і модуль пружності  $E$  – незалежні випадкові величини, рівномірно розподілені в інтервалах:  $120 \leq \lambda \leq 150$ ,  $2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \leq E \leq 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

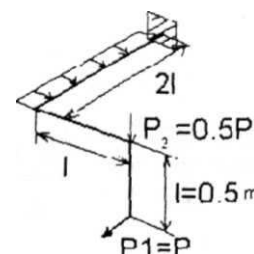


Обчислити математичне сподівання напруження  $\langle \sigma_{кр} \rangle$ .

**Завдання 14.** Заданий розподіл ймовірностей випадкової величини  $X^T = (1 \ 3 \ 7 \ 9 \ 11 \ 15)$  з імовірностями їх появи  $p^T = (0,2 \ 0,3 \ 0,1 \ 0,1 \ 0,2 \ 0,1)$ . Записати ряд розподілу випадкової величини:  $Y = (X^3 - 9X^2 + 23X - 15)^2$  та обчислити ймовірність події  $XY \geq 150$ .

**Завдання 15.** Знайти закон розподілу ймовірностей найнижчої власної частоти квадратної пластини, шарнірно обпертої по усіх кромках, якщо розмір сторони пластини  $a$  і її товщина  $h$  – незалежні випадкові величини, рівномірно розподілені в інтервалах:  $95 \text{ см} \leq a \leq 105 \text{ см}$ ,  $1,5 \leq h \leq 2 \text{ мм}$

**Завдання 16.** Для стрижня круглого перерізу знайти закон розподілу еквівалентних напружень у небезпечному перерізі (за критерієм текучості Мізеса), якщо діаметр стрижня  $d$  – випадкова величина, рівномірно розподілена в інтервалі:  $3 \leq d \leq 4 \text{ см}$ , а параметр навантаження  $P$  – нормально розподілена випадкова величина з параметрами:



$\langle P \rangle = 0,5 \text{ кН}$ ,  $D_p = 0,2 (\text{кН})^2$ .

**Завдання 17.** Випадкова величина  $X$  підлягає нормальному закону

розподілу ймовірностей  $p(x) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi E_x}} e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E_x}}$ . Визначити математичне

сподівання та дисперсію випадкової величини  $Y = |X|$ .

**Завдання 18.** Випадкова величина  $X$  підлягає закону Пуассона.

Визначити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини

$Y = \cos(bx)$ , де  $b$  – детерміністичний параметр.

**Завдання 19.** Знайти щільність ймовірності амплітуди

сталих вимушених коливань механічної системи, яка

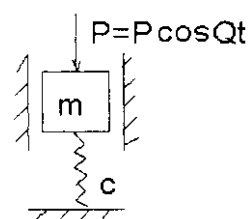
здійснює коливання у вертикальній площині, якщо  $P$  і  $c$  –

незалежні випадкові величини, причому величина  $P$

розподілена нормально з параметрами  $\langle P \rangle = P_0$ ,  $D_P = \sigma_p^2$ , а величина

$c$  розподілена рівномірно в інтервалі

$\theta^2 m(1 + \rho) \leq c \leq \theta^2 m(1 + 2\rho)$ ,  $0 < \rho < 1$ .



**Завдання 20.** Незалежні випадкові величини  $X$  і  $Y$  підлягають

законам рівномірної щільності ймовірності в інтервалах  $(0; 1)$  і  $(-1; 1)$ ,

відповідно. Обчислити математичне сподівання та дисперсію

випадкової величини:  $Z = 2X(1 - Y)^2$

**Завдання 21.** Випадкова величина  $X$  підлягає закону Пуассона.

Визначити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини

$Y = \sin(bX)$ , де  $b$  – детерміністичний параметр.

**Завдання 22.** Випадкова величина  $X$  розподілена за нормальним

законом із параметрами  $a$  і  $\sigma$ ; випадкова величина  $Y$  – рівномірно

розподілена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ , причому  $X$  і  $Y$  є статистично

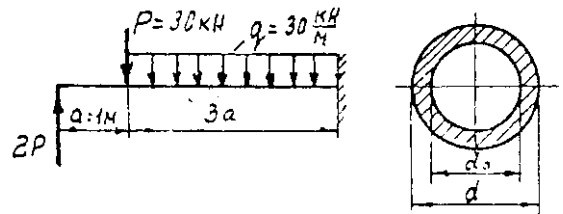
незалежними. Записати щільність ймовірності випадкової величини

$Z = X \sin Y$ .

**Завдання 23.** Визначити щільність імовірності випадкової величини  $X$  так, щоб випадкова величина  $Y = (X)^{1/n}$  підлягала нормальному розподілу з такими параметрами:  $\langle Y \rangle = 0$ ,  $\sigma_Y = 1$ .

**Завдання 24.** Поздовжня сила, що виникає у поперечному перерізі стрижня, підлягає нормальному закону розподілу з параметрами  $\langle N \rangle = 10 \text{ кН}$  і  $D_N = 1 (\text{кН})^2$ . Визначити математичне сподівання площі перерізу, за якої відбувається розрив стрижня, якщо межа міцності матеріалу стрижня є рівномірно розподіленою в інтервалі  $40 \text{ кН} / \text{см}^2 \leq \sigma_{\text{ни}} \leq 50 \text{ кН} / \text{см}^2$ .

**Завдання 25.** Визначити математичне сподівання та дисперсію максимального нормального напруження для балки сталого кільцевого перерізу, якщо внутрішній та зовнішній діаметри є незалежними випадковими величинами, які мають рівномірний розподіл імовірності.



**Завдання 26.** Дві незалежні випадкові величини  $X$  і  $Y$  рівномірно розподілені в інтервалах  $(a; b)$  і  $(c; d)$  відповідно. Знайти щільність імовірності, математичне сподівання та дисперсію добутку  $Z = XY$ .

**Завдання 27.** Випадкові величини  $\xi$  і  $\eta$  стохастично незалежні та підлягають показовому закону розподілу з параметром. Знайти щільність імовірності випадкової величини  $\mu = 2\xi + 5\eta$  і розрахувати ймовірність  $P(2\xi + 5\eta < 2)$ .

**Завдання 28.** Система трьох випадкових величин  $(X, Y, Z)$

рівномірно розподілена у межах еліпсоїда:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . Знайти



щільність імовірностей системи та щільності імовірностей випадкових величин, що входять до неї.

**Завдання 29.** Визначити ймовірність неруйнування лопаток, якщо відомо, що середнє значення змінних напружень  $m_\sigma = 10$  кгс/мм<sup>2</sup> і середнє квадратичне відхилення  $S_\sigma = 2$  кгс/мм<sup>2</sup> (за даними тензOMETрування); середнє значення межі витривалості  $m_{\sigma_{-1}} = 20$  кгс/мм<sup>2</sup> і середнє квадратичне відхилення  $S_{\sigma_{-1}} = 3$  кгс/мм<sup>2</sup> (за даними випробувань на витривалість).

**Завдання 30.** За умовами задачі 4.13 визначити ймовірність неруйнування для випадку, коли зміщення навантаження також є випадковою величиною з математичним сподіванням  $\langle d \rangle = 3$  см і дисперсією  $D = 0,014$  см<sup>2</sup>.

#### 4.7. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називають невинпадковою функцією випадкового аргументу?
2. Як за відомою щільністю імовірності випадкового аргументу невинпадкової функції визначити її щільність імовірності, якщо функція є монотонною?
3. Як за відомою щільністю імовірності випадкового аргументу невинпадкової функції визначити її щільність імовірності, якщо функція є немонотонною?
4. Що називають невинпадковою функцією векторних випадкових величин?
5. Що таке якобіан перетворення і як він визначається?
6. Запишіть сумісну функцію розподілу невинпадкової функції векторних випадкових величин для випадку, коли детерміновані функції зв'язку векторів  $X$  і  $Y$  є монотонними, а розмірності векторів – однакові.
7. Як визначаються початкові та центральні моменти довільного порядку невинпадкової функції випадкового аргументу?
8. Запишіть формулу для визначення математичного сподівання та дисперсії невинпадкової функції декількох випадкових величин.
9. Як можна визначити числові характеристики нелінійної функції випадкового аргументу за відомими числовими характеристиками її аргументу?

## РОЗДІЛ 5. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Граничні теореми теорії ймовірностей є основою математичної статистики і поділяються на дві групи. Теореми першої групи, які об'єднані загальною назвою "**закон великих чисел**", установлюють умови, за яких середнє арифметичне випадкових величин прагне до деяких не випадкових (детермінованих) значень і може бути визначено з достатньою точністю.

Теореми другої групи, які об'єднані загальною назвою "**центральна гранична теорема**", встановлюють умови, за яких закон розподілу випадкових величин прагне до нормального.

### 5.1. Нерівність Чебишева і закон великих чисел

Основу закону великих чисел становлять теореми Чебишева і Бернуллі [4; 8; 11]. Їх доведення базується на загальній лемі, яка відома під назвою нерівності Чебишева.

**Нерівність Чебишева.** Якщо  $X$  – випадкова величина з математичним сподіванням  $\langle X \rangle$  і дисперсією  $D_X$ , то ймовірність того, що відхилення її значень  $x$  від  $\langle X \rangle$  за абсолютною величиною є меншим за мале позитивне число  $\varepsilon$ , задовольняє нерівність:

$$P(|x - \langle X \rangle| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D_X}{\varepsilon^2}. \quad (5.1)$$

Нерівність Чебишева дає **верхню оцінку** для ймовірності відхилення значень випадкової величини від свого математичного сподівання.

**Теорема Чебишева.** Якщо  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – послідовність попарно незалежних випадкових величин з математичними сподіваннями  $\langle X_k \rangle$  і дисперсіями  $D_{X_k}$ , які є обмеженими однією й тією самою сталою  $D_{X_k} \leq C, k = 1, 2, \dots, n$ , то яким би малим не було додатне число  $\varepsilon$ , виконується рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \langle X_k \rangle \right| < \varepsilon \right\} = 1, \quad (5.2)$$

інакше кажучи, при  $n \rightarrow \infty$  середнє арифметичне випадкових величин  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  збігається за ймовірністю до їх загального математичного сподівання

**Теорема Бернуллі.** Якщо у кожному з  $n$  незалежних випробувань ймовірність прояву події постійна і дорівнює  $p$ , то з імовірністю, близькою до достовірності, можна стверджувати, що при необмеженому зростанні числа випробувань відносна частота  $n_A/n$  прояву події збігається за ймовірністю до його імовірності  $p$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{n_A}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1. \quad (5.3)$$

Теорема Бернуллі історично є першою і найбільш простою формою закону великих чисел. Вона теоретично обґрунтовує властивість стійкості відносної частоти для наближеного розрахунку ймовірності події.

## 5.2. Теореми Ляпунова і Муавра-Лапласа

На відміну від закону великих чисел, об'єктом розгляду якого є випадкові величини, центральна гранична теорема розглядає закони їх

розподілу ймовірностей і встановлює умови виникнення нормального закону розподілу ймовірностей.

**Центральна гранична теорема (теорема Ляпунова).** Якщо випадкова величина  $X = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_n$  є сумою великої кількості ( $n \rightarrow \infty$ ) взаємно незалежних центрованих випадкових величин зі скінченною дисперсією у загальному випадку розподілених за різними законами розподілу ймовірностей, причому вплив кожної з них на всю суму є малим, то випадкова величина  $X$  має розподіл, який прагне до нормального (гаусового).

Ця теорема частіше за інші використовується на практиці: в математичній статистиці вибіркові випадкові величини характеризуються однаковими розподілами ймовірностей, оскільки отримані з однієї й тієї самої генеральної послідовності.

Якщо  $\{X_k\}$  – послідовність незалежних випадкових величин із математичними сподіваннями  $\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle$  і дисперсіями  $D_{X_1}, D_{X_2}, \dots, D_{X_n}$ , причому  $n$  достатньо велике, а величини  $X_1, X_2, \dots, X_n$  порівняні за порядком свого впливу на загальну суму, то розподіл ймовірностей випадкової величини  $Y = \sum_{k=1}^n X_k$  відповідає нормальному закону розподілу, а ймовірність потрапляння до інтервалу  $(\alpha, \beta)$  визначається як

$$P(\alpha \leq Y \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \langle X \rangle}{\sigma_Y}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \langle X \rangle}{\sigma_Y}\right), \quad (5.4)$$

де  $\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) dt$  – функція розподілу ймовірностей нормальної

випадкової величини (або інтеграл імовірності);  $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$  –

функція Гауса (рис. 5.1);  $\langle Y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle X_k \rangle$ ;  $\sigma_Y = \sqrt{D_Y} = \sqrt{\sum_{k=1}^n D_{X_k}}$ .

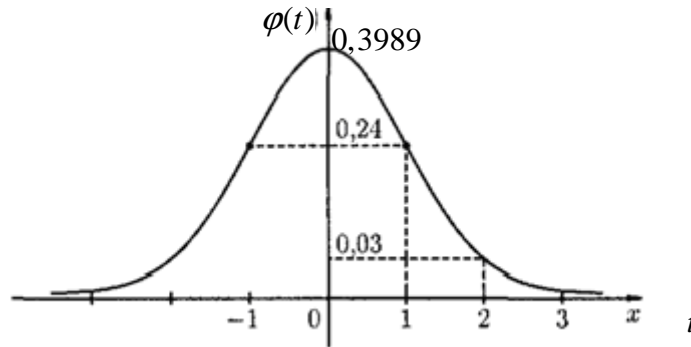


Рисунок 5.1.

Якщо випадкова величина  $Y = \frac{y - m_Y}{\sigma_Y}$  належить до інтервалу  $(0; 1)$ , то вона називається стандартизованою нормальною величиною.

Під час розв'язання задач використовують табличні значення функції  $\Phi(y)$  (див. додаток А). Оскільки для функції  $\Phi(y)$  справедливою є рівність:  $\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$ , то достатньо мати табличні значення цієї функції лише для додатних значень аргументу.

**Гранична теорема Муавра–Лапласа.** Якщо ймовірність появи події  $A$  у кожному з  $n$  незалежних дослідів постійна і дорівнює  $p$ , а неяви  $q = 1 - p$ , то ймовірність того, що у цих дослідах подія  $A$  відбудеться  $m$  разів, дорівнює (формула Бернуллі):

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Якщо число дослідів достатньо велике ( $n \rightarrow \infty$ ), то ймовірність  $P_n(m)$  може бути розрахована за наближеною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (5.5)$$

де  $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ .

Формула (5.5) виражає *локальну теорему Муавра-Лапласа*: при  $n \rightarrow \infty$  та скінченному  $p$  (а відповідно і  $q$ ) біноміальний розподіл асимптотично прямує до нормального (гаусового) розподілу.

Під час розгляду числа проявів події  $A$  (при  $p, q = const$ ), як правило, необхідно визначити ймовірність того, що число  $n$  лежить між деякими значеннями  $a$  і  $b$ . Оскільки при достатньо великих  $n$  безпосереднє використання біноміального розподілу вимагає громіздких розрахунків, то використовують асимптотичну формулу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Звідси, зокрема, випливає, що ймовірність проявлення події  $A$  не менше  $m_1$  та не більше  $m_2$  разів у  $n$  дослідах може бути визначена за наближеною формулою

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad (5.6)$$

де  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

Формула (5.6) виражає *інтегральну форму теорему Муавра–Лапласа*. Точність наближеної формули (5.6) збільшується зі зростанням  $n$ . На практиці формулу (5.6) використовують у випадку, коли  $npq > 10$ , а  $p \neq 0, p \neq 1$ .

Якщо число досліджень  $n \rightarrow \infty$ , а ймовірності проявлення події є малими ( $p \rightarrow 0$ ), то для розрахунку ймовірності того, що у  $n$  дослідах подія відбудеться  $k$  разів, застосовують **формулу Пуассона** [4; 10; 11; 13]

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (5.7)$$

де  $\lambda = np$  – середнє число проявів події у  $n$  дослідах.

Формула (5.7) дає задовільне наближення для  $p \leq 0,1$  і  $np \leq 10$ . При більших значеннях  $p$  і  $np$  необхідно використовувати наближену формулу Лапласа (5.6).

Події, для яких є застосовною формула (5.7), називають **рідкими подіями**, оскільки ймовірність їх прояву дуже мала.

Ймовірність того, що у  $n$  незалежних дослідах, у кожному з яких ймовірність прояву події дорівнює  $p$ , абсолютна величина відхилення відносної частоти прояву події від імовірності прояву події не буде вищою за будь-яке мале додатне число  $\varepsilon$  приблизно дорівнює

подвоєній функції Лапласа при  $x = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$ :

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (5.8)$$



**5.3. Розв'язання типових задач за розділом 5****Задача 5.1**

Визначити ймовірність виготовлення 400 деталей за умови, що відносна частота виявлення нестандартних деталей відхилиться від 0,1 за модулем не більше ніж на 0,03.

**Розв'язання**

Із умови задачі:  $n = 400$ ,  $p = 0,1$ ,  $q = 0,9$ ,  $\varepsilon = 0,03$  Необхідно визначити  $P\left(\left|\frac{m}{400} - 0,1\right| \leq 0,03\right)$

Використовуючи формулу (5.8), знайдемо

$$P\left(\left|\frac{m}{400} - 0,1\right| \leq 0,03\right) \approx 2\Phi\left(\sqrt{\frac{0,03^2 \cdot 400}{0,1 \cdot 0,9}}\right) = 2\Phi(2) = 0,9544 = 95,44\% .$$

**Задача 5.2**

Знайти ймовірність того, що подія  $A$  відбудеться рівно 80 разів у 400 дослідах, якщо ймовірність настання події у кожному досліді постійна і дорівнює 0,2.

**Розв'язання**

Використовуючи наближену формулу Лапласа (5.5), отримаємо

$$P_{80,400} = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \varphi(x) = \frac{1}{8} \varphi(x), \quad x = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 0 .$$

Функція Гауса для визначеного значення аргументу дорівнює  $\Phi(0) = 0,3989$ . (рис. 5.1). Отже, шукана ймовірність:

$$P_{80,400} = \frac{1}{8} 0,3989 = 0,04986.$$

### Задача 5.3

Ймовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що серед 1000 виготовлених деталей 5 виявляться нестандартними.

### Розв'язання

Оскільки за умовами задачі  $p < 0,1$ , а  $np = 1000 \cdot 0,004 = 4$ , можемо скористатися формулою Пуассона (5.7), де  $\lambda = np = 1000 \cdot 0,004 = 4$ :

$$P_{5,1000} = \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0,1563.$$

Визначимо шукану ймовірність за наближеною формулою Лапласа (5.5):

$$x = \frac{5 - 1000 \cdot 0,004}{\sqrt{1000 \cdot 0,004 \cdot 0,996}} \approx \frac{1}{1,996} \approx 0,501;$$

$$P_{5,1000} \approx \frac{1}{1,996} \Phi(0,501) \approx \frac{0,3519}{1,996} \approx 0,1763.$$

Порівнюючи результати розрахунків, можемо зробити висновок, що вони відрізняються не більше ніж на 12 %.

**Задача 5.4**

Знайти ймовірність того, що подія  $A$  (гальмування автомобіля) відбудеться 70 разів на трасі довжиною 256 км, якщо ймовірність гальмування на кожному кілометрі цієї траси дорівнює 0,25.

**Розв'язання**

Число досліджень  $n$  відповідає числу кілометрів на трасі. Оскільки  $n = 256$  можна вважати достатньо великим, застосуємо формулу Лапласа (5.5). За умовами задачі

$$p = 0,25, \quad q = 0,75, \quad k = 70, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 256 \cdot 0,25}{\sqrt{256 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значення функції Гауса  $\varphi(\sqrt{3}/2) = 0,2733$ .

Тобто шукана ймовірність дорівнює

$$P_{256}(70) = \frac{1}{\sqrt{256 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \varphi(\sqrt{3}/2) = 0,0394.$$

**Задача 5.5**

Ймовірність виготовлення якісної деталі на станку дорівнює 0,9. Скільки деталей необхідно виготовити, щоб з імовірністю 0,98 можна було очікувати, що не менш ніж 150 деталей будуть якісними?

**Розв'язання**

За умовами задачі маємо:  $p = 0,9, \quad q = 0,1, \quad k_1 = 150, \quad k_2 = n,$   
 $P_n(150, n) = 0,98.$

Застосовуючи формулу Лапласа (5.6), отримуємо

$$P(k_1 \leq n \leq k_2) \approx \Phi(k_2) - \Phi(k_1) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

або

$$0,98 = \Phi\left(\frac{n - 0,9n}{\sqrt{n \cdot 0,9 \cdot 0,1}}\right) - \Phi\left(\frac{150 - 0,9 \cdot n}{\sqrt{n \cdot 0,9 \cdot 0,1}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - \Phi\left(\frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right)$$

Оскільки  $n \geq 150$  то  $\sqrt{n}/3 > \sqrt{150}/3 \approx 4,1$ . а  $\Phi(4) \approx 0,5$  (див.

додаток А). Тобто маємо рівняння  $0,98 = 0,5 - \Phi\left(\frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right)$  або

$$\Phi\left(\frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right) = -0,48, \quad \frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}} = -2,06$$

Враховуючи, що функція Лапласа непарна, отримуємо рівняння

$$0,9n - 0,618\sqrt{n} - 150 = 0.$$

Із розв'язання якого отримуємо  $\sqrt{n} \approx 13,3$ . Тобто необхідна кількість деталей дорівнює  $n = 177$ .

### Задача 5.6

Ймовірність прояву події  $A$  у кожному з 200 незалежних дослідів є постійною і такою, що дорівнює  $p = 0,8$ . Знайти ймовірність того, що подія  $A$  проявиться: а) не менше ніж 150 разів і не більше 180 разів; б) не менше 150 разів; в) не більше 149 разів.

### Розв'язання

Оскільки за умовами задачі  $n$  можна вважати досить великим, а також задані інтервали зміни  $k$ , застосуємо формулу Лапласа (5.6).

а) За умовою задачі:  $n = 200$ ,  $p = 0,8$ ,  $q = 0,2$ ,  
 $k_1 = 150$ ,  $k_2 = 180$ .

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{150 - 200 \cdot 0,8}{\sqrt{200 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,77, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{180 - 200 \cdot 0,8}{\sqrt{200 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 3,54,$$

Шукана ймовірність дорівнює

$$P(150 \leq n \leq 180) = \Phi(3,54) - \Phi(-1,77) = \Phi(3,54) + \Phi(1,77)$$

$$\Phi(3,54) = 0,4997, \quad \Phi(1,77) = 0,4616,$$

$$P(150 \leq n \leq 180) = 0,4997 + 0,4616 = 0,9613.$$

б) У цьому випадку необхідно покласти  $k_1 = 150$ ,  $k_2 = n = 200$ .

$$x_1 = -1,77, \quad x_2 = \frac{200 - 200 \cdot 0,8}{\sqrt{200 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 7,08,$$

$$\Phi(1,77) = 0,4616, \quad \Phi(7,08) = 0,5.$$

Шукана ймовірність дорівнюватиме

$$P(150 \leq m \leq 200) = \Phi(7,08) + \Phi(1,77) = 0,5 + 0,4616 = 0,9616.$$

в) Події  $A$  (відбулася не менше ніж 150 разів) і  $A^c$  (відбулася не більше 149 разів) є протилежними, тому

$$P_{200}(149) = 1 - P(150 \leq 200) = 1 - 0,9616 = 0,0384.$$

### Задача 5.7

Ймовірність появи події у кожному з незалежних дослідів дорівнює 0,2. Знайти найменше число дослідів, при якому з ймовірністю 0,99 можна очікувати, що відносна частота появи події відхиляється від його ймовірності за модулем не більше ніж на 0,04.

### Розв'язання

Проведемо такі перетворення у формулі (5.3)

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon \leq \frac{k}{n} - p \leq \varepsilon\right) = P\left((p - \varepsilon) \cdot n \leq k \leq (p + \varepsilon) \cdot n\right).$$

Згідно з інтегральною формулою Муавра-Лапласа (5.6)

$$P\left(-\varepsilon \leq \frac{k}{n} - p \leq \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\frac{(p + \varepsilon) \cdot n - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{(p - \varepsilon) \cdot n - np}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Для заданих умов задачі, отримуємо:

$$p = 0,2, q = 0,8, \varepsilon = 0,04,$$

$$P\left(\left|k/n - p\right| \leq \varepsilon\right) = 0,99.$$

Визначимо значення аргументу функції Лапласа

$$2\Phi\left(0,04 \sqrt{\frac{n}{0,2 \cdot 0,8}}\right) = 0,99 \quad \text{або} \quad \Phi\left(0,1\sqrt{n}\right) = 0,495.$$

За табличними даними функції Лапласа (додаток А) знаходимо

$$\Phi(2,573) = 0,495, \quad 0,1\sqrt{n} = 2,573, \quad n = 662,033.$$

Округляючи результат до найближчого цілого, отримаємо шукану величину найменшого числа дослідів  $n = 663$ .

### Задача 5.8

Із кожних 40 виробів, що виготовлені станком-автоматом, бракованими є 4. Навмання взяли 400 виробів. Визначити ймовірність того, що серед них 350 штук є без дефектів.

**Розв'язання**

Оскільки за умовами задачі кількість випробувань є достатньо великою ( $n = 400$ ), то для визначення ймовірності того, що подія  $A$  (навмання витягнута деталь якісна) проявиться рівно  $k = 350$  разів, скористаємося наближеною формулою Лапласа (5.5). Ймовірність виявлення бракованого виробу дорівнює  $q = \frac{4}{40} = 0,1$ . Отже ймовірність виявлення виробу без дефекту дорівнює  $p = 1 - q = 1 - 0,1 = 0,9$ .

Визначимо значення аргументу функції Гауса:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{350 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = -\frac{10}{\sqrt{36}} = -1,67.$$

Враховуючи парність функції Гауса ( $\varphi(x) = \varphi(-x)$ ), за таблицею значень цієї функції (див. додаток А) знаходимо, що  $\varphi(1,67) = 0,0989$ .

Остаточно шукана ймовірність дорівнює

$$P_{400}(350) = \frac{0,0989}{6} \approx 0,016.$$

**Задача 5.9**

Ймовірність відсутності студента на лекції дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що зі 100 студентів на лекції будуть присутніми не менше 75 і не більше 90.

**Розв'язання**

Кількість випробувань (кількість студентів) можна вважати достатньо великою ( $n = 100$ ). Тому для знаходження ймовірності того,

що подія  $A$  відбудеться від 75 до 90 разів скористаємось інтегральною формулою Муавра-Лапласа (5.6):

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\text{де } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Визначимо значення аргументів  $x_1$  і  $x_2$ :

$$x_1 = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -\frac{5}{\sqrt{16}} = -1,25, \quad x_2 = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{10}{4} = 2,5.$$

Враховуючи те, що функція Лапласа є непарною ( $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ ) за таблицею значень функції Лапласа (додаток А) знаходимо

$$\Phi(-1,25) = -\Phi(1,25) = -0,39435, \quad \Phi(2,5) = 0,49379.$$

Отже, шукана ймовірність дорівнює

$$P_{100}(75 \leq k \leq 90) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = 0,49379 + 0,39435 = 0,888.$$

### Задача 5.10

Скільки разів необхідно кинути гральний кубик, щоб найімовірніше число прояву трійки дорівнювало 55?

### Розв'язання

Число  $m$  називається найімовірнішим у  $n$  незалежних дослідах, якщо ймовірність настання події  $A$  при цьому числі є найбільшою. Можливі значення цього числа знаходяться у межах

$$np - q \leq m \leq np + p.$$



За умовами задачі  $m = 55$ , ймовірність викидання трійки дорівнює  $p = \frac{1}{6}$ , а відповідна ймовірність не появи трійки дорівнює

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Отже, маємо систему нерівностей

$$\begin{cases} n\frac{1}{6} - \frac{5}{6} \leq 55, \\ n\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \geq 55, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} n - 5 \leq 330, \\ n + 1 \geq 330. \end{cases}$$

Таким чином, можна стверджувати, що гральний кубик необхідно кинути від 329 до 335 разів.

### Задача 5.11

Ткач обслуговує 1000 веретен. Ймовірність пориву нитки на одному з веретен протягом однієї хвилини дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини порив відбудеться на 7 веретенах.

### Розв'язання

Оскільки кількість випробувань (кількість верстатів) можна вважати достатньо великою  $n = 1000$ , а ймовірність події (порив нитки) є достатньо малою  $p = 0,005$ , то для визначення шуканої ймовірності скористаємося формулою Пуасона (5.7).

За умовами задачі параметр розподілу  $\lambda = 1000 \cdot 0,005 = 5$ , тоді шукана ймовірність

$$P_{1000}(7) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{5^7}{7!} e^{-5} = \frac{78125}{5040} 0,006738 = 0,1044.$$

**5.4. ДОДАТКОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

**Завдання 1.** У лотереї з 40000 білетів цінні виграші випадають на 3 білети. Визначити: а) імовірність отримання хоча б одного цінного виграшу на 1000 білетів; б) кількість білетів, яка забезпечує ймовірність отримання цінного виграшу не меншу ніж 0,5.

**Завдання 2.** Із ящика, який містить  $n$  білетів із номерами  $1, 2, \dots, n$  виймають по черзі усі білети. Прийняли, що усі послідовності номерів білетів мають однакові ймовірності. Визначити ймовірність того, що хоча б у одного білета номер збігається з його власним.

**Завдання 3.** Ймовірність влучання у ціль при одному пострілі для одного стрільця дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що при 200 пострілах мішень буде вражена 160 разів.

**Завдання 4.** Знайти імовірність того, що при 800 пострілах у мішень буде влучено 260 разів, якщо ймовірність влучання при одному пострілі дорівнює 0,4.

**Завдання 5.** Відомо, що у середньому 5 % студентів носять окуляри. Якою є імовірність того, що з 200 студентів, які сидять в аудиторії, не менше 5 носять окуляри?

**Завдання 6.** Коректура з 500 сторінок містить 1300 друкарських помилок. Знайти найбільш імовірне число друкарських помилок на одній сторінці тексту і ймовірність цього числа помилок.

**Завдання 7.** На факультеті навчається 500 студентів. Знайти найбільш імовірне число студентів, які народилися 1 вересня і

ймовірність цього числа народжень. Імовірність народження 1 вересня взяти такою, що дорівнює 0,0027.

**Завдання 8.** Відділ технічного контролю підприємства перевіряє на стандартність 900 деталей. Імовірність того, що деталь стандартна, дорівнює 0,9. Знайти з імовірністю 0,95 межі, в яких буде знаходитися число стандартних деталей серед перевірених.

**Завдання 9.** Відділ контролю якості перевіряє на відповідність стандартам 1000 деталей. Вибрана деталь з імовірністю 0,975 є стандартною. Знайти найімовірніше число стандартних деталей; ймовірність того, що число стандартних деталей серед перевірених відрізняється від найімовірнішого числа не більше ніж на 10.

**Завдання 10.** Страхова компанія уклала 40000 договорів. Ймовірність страхового випадку за кожним із цих договорів упродовж року становить 2,5 %. Знайти ймовірність того, що таких випадків буде не більше 870.

**Завдання 11.** Ймовірність потрапляння у ціль при одному пострілі дорівнює 0,7. Скільки пострілів потрібно зробити, що з імовірністю, не меншою за 0,95, можна було стверджувати, що відхилення частоти потрапляння до цілі від імовірності цієї самої події буде не більше 0,01?

**Завдання 12.** Імовірність того, що звукова картка комп'ютера вийде з ладу впродовж гарантійного строку, дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що упродовж гарантійного строку з 8 комп'ютерів:  
а) лише в одного відмовить звукова картка; б) хоча б у одного не відмовить.

**Завдання 13.** Визначити ймовірність того, що при 700 киданнях грального кубика "шестірка" випаде від 100 до 140 разів.

**Завдання 14.** Гральний кубик кидають 80 разів. Знайти з імовірністю 0,99 межі, в яких буде лежати число разів, коли випало шість очок.

**Завдання 15.** Симетричну монету підкидають 100 разів. Знайти ймовірність того, що: а) "герб" випаде рівно 50 разів; б) число "гербів", що випали, лежить у межах від 40 до 60.

**Завдання 16.** З молокозаводу до магазину відправили 4000 добре запакованих пляшок молока. Ймовірність того, що пляшка розіб'ється на шляху до магазину, дорівнює 0,0005. Визначити ймовірність того, що з 4000 пляшок до магазину прибудуть 5 розбитих.

**Завдання 17.** Скільки партій необхідно зіграти з імовірністю перемоги в одній партії  $\frac{1}{3}$ , щоб найімовірніше число перемог дорівнювало 6.

**Завдання 18.** Невелике містечко щоденно відвідують 100 туристів, які вдень йдуть обідати. Кожен із них обирає один із двох місцевих ресторанів з однаковими ймовірностями і незалежно один від одного. Власник одного з ресторанів бажає, щоб з імовірністю 0,99 усі туристи, які прийшли до його ресторану, змогли одночасно пообідати. Скільки місць повинно бути для цього в його ресторані?

**Завдання 19.** Для токаря ймовірність виготовити деталь необхідної якості дорівнює 0,75. За зміну він виготовив 400 деталей. Знайти ймовірність того, що у їх числі 280 деталей відповідають нормам за якістю.

**Завдання 20.** У роботі шліфувальника брак становить 15%. Вироби відправляються споживачам (без перевірки) у коробках по 100 штук. Знайти ймовірності таких подій: А – навмання узята коробка

містить 14 бракованих виробів;  $V$  – число бракованих виробів у коробці не перевищує 20.

**Завдання 21.** Пристрій містить 1000 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови будь-якого елемента упродовж часу  $t$  дорівнює 0,0025. Знайти ймовірність того, що за час  $t$  відмовлять лише 4 елементи.

**Завдання 23.** На підсумовуючий механізм поступає 10 складових, кожна із яких є однозначним числом. При цьому будь-яка цифра є однаково можливою. Яку шкалу повинен мати такий механізм, щоб із імовірністю 99 % на ній можна було показати результат підсумовування.

**Завдання 23.** Відомо, що кількість бракованих деталей у партії дорівнює 0,5 %. Контролер перевіряє партію із 1000 деталей. Якою є ймовірність виявити рівно три браковані деталі? Якою є ймовірність виявити не менше трьох бракованих деталей?

**Завдання 24.** Імовірність появи події у кожному з 400 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти таке додатне число  $\epsilon$ , щоб з імовірністю 0,99 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності не перевищувала  $\epsilon$ .

**Завдання 25.** Курс акції за 1 день може піднятися на 1 пункт з імовірністю 50 %, опуститися на 1 пункт з імовірністю 30 % та залишитися незмінним з імовірністю 20 %. Знайти ймовірність того, що за 5 днів торгів курс підійметься лише на 2 пункти.

**Завдання 26.** У 400 випробуваннях імовірність успіху у кожному випробуванні дорівнює 0,8. За допомогою нерівності Чебишева оцінити ймовірність того, що різниця між числом успіхів у цих випробуваннях і середнім числом успіхів буде меншою за 20.

**Завдання 27.** Доходи жителів міста мають математичне сподівання 5000 грн і середнє квадратичне відхилення 1000 грн за 1 місяць. Знайти ймовірність того, що середній дохід 100 випадково вибраних жителів становитиме від 4500 до 5500 грн.

**Завдання 28.** Проведено 40000 дослідів. Подія  $A$  відбулась у  $k=16042$  випадках. За ймовірність події взято відносну частоту настання події, яка дорівнює  $\frac{k}{m} \approx 0,4$ . Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити, з якою ймовірністю можна гарантувати, що число 0,4 відрізняється від істинної ймовірності не більше ніж на 0,05.

**Завдання 29.** У місті працюють три комерційні установи, кількісні оцінки "річної надійності" яких дорівнюють 0,95; 0,90; 0,85 відповідно. Знайти: а) ймовірність того, що упродовж року збанкрутують усі три установи; б) ймовірність того, що упродовж року збанкрутує хоча б одна установа.

**Завдання 30.** У продукції фабрики деталі декору відмінної якості становлять 50 %. Деталі вкладають у коробки по 200 шт. у кожній. Якою є ймовірність, що число деталей відмінної якості у коробці відрізняється від 100 не більше ніж на 5. У яких межах з ймовірністю 0,997 знаходиться число деталей відмінної якості в одній коробці.

### 5.5. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що ви розумієте під законом великих чисел?
2. У чому зміст теореми Чебишева? Сформулюйте її.
3. Сформулюйте теорему Бернуллі.
4. Сформулюйте центральну граничну теорему теорії ймовірностей. Наведіть приклади її використання.
5. Які властивості має функція Лапласа? Як визначається і для чого використовується функція Гауса.
6. Запишіть наближену формулу Лапласа. У яких випадках її використовують?
7. За яких умов використовують формулу Пуассона? Наведіть її.

## РОЗДІЛ 6. ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

### 6.1. Способи опису випадкових процесів (функцій)

*Випадковою функцією*  $U(x)$  називають спосіб, за допомогою якого кожному значенню не випадкового аргументу  $x$  ставлять у відповідність випадкову величину  $U$ . Якщо аргументом є час, то  $U(t)$  прийнято називати *випадковим процесом*; якщо аргументи – просторові координати, то  $U(\vec{r}(x_i))$  – *випадкове поле*; якщо просторово-часові аргументи, то  $U(\vec{r}, t)$  – *просторово-часове випадкове поле*.

Випадкові процеси можуть бути описані двома способами:

- за допомогою законів розподілу;
- за допомогою числових характеристик (моментних функцій).

При фіксованому значенні аргументу  $t$  маємо випадкову величину  $U$ , для якої може бути визначена щільність імовірності  $p(u; t)$ , яка залежить від  $t$  як від параметра. Ця функція називається *одноточковою (у розумінні для однієї часової точки) щільністю ймовірності*.

За визначенням, одноточкову щільність імовірності можна розглядати як питому ймовірність для моменту часу  $t$ , яка, якщо її помножити на елемент  $du$  простору  $U$ , дає ймовірність події, яка полягає у тому, що  $u(t) < U(t) < u(t) + du$ , тобто

$$p(u, t) du \stackrel{\text{def}}{=} P[u(t) < U(t) < u(t) + du]. \quad (6.1)$$

Для *двоточкової сумісної щільності ймовірності*  $p(u_1, u_2; t_1, t_2)$ :

$$p(u_1, u_2; t_1, t_2) du_1 du_2 \stackrel{\text{def}}{=} P \left[ \begin{array}{l} u_1(t_1) < U(t_1) < u_1(t_1) + du_1 \\ u_2(t_2) < U(t_2) < u_2(t_2) + du_2 \end{array} \right], \quad (6.2)$$

де аргумент  $u_1$  – можливе значення випадкового процесу  $U(t)$  при фіксованому значенні  $t_1$ , а  $u_2$  – можливе значення  $U(t)$  при фіксованому  $t_2$ .



За аналогією з (6.1) і (6.2) вводяться *треточкова, четириточкова і т. д. сумісні щільності ймовірності*.

Математичне сподівання (моментна функція першого порядку) випадкового процесу

$$\langle U(t) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} up(u, t) du. \quad (6.3)$$

Властивості математичного сподівання:

1.  $\langle \varphi(t) \rangle = \varphi(t)$ , якщо  $\varphi(t)$  – детерміністична функція часу.
2.  $\langle U_1(t) + U_2(t) + \dots + U_n(t) \rangle = \langle U_1(t) \rangle + \langle U_2(t) \rangle + \dots + \langle U_n(t) \rangle$ .
3.  $\langle CU(t) \rangle = C\langle U(t) \rangle$ , де  $C$  – стала.
4.  $\langle U_1(t)U_2(t)\dots U_n(t) \rangle = \langle U_1(t) \rangle \langle U_2(t) \rangle \dots \langle U_n(t) \rangle$ , якщо  $U_i(t)$  – некорельовані випадкові процеси при будь-якому  $t \in (-\infty, +\infty)$ .

Моментна функція другого порядку

$$\begin{aligned} \langle U(t_1)U(t_2) \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 u_2 p(u_1, u_2; t_1, t_2) du_1 du_2 = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n u_1 u_2 p(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) du_1 du_2 \dots du_n \end{aligned} \quad (6.4)$$

За аналогією можуть бути введені моментні функції більш високих порядків.

**Центрований випадковий процес (флуктуація)**

$$\tilde{U}(t) \stackrel{\text{def}}{=} U(t) - \langle U(t) \rangle. \quad (6.5)$$

**Дисперсія** випадкового процесу

$$\begin{aligned} D_U(t) &= \langle \tilde{U}(t)^2 \rangle = \langle (U(t) - \langle U(t) \rangle)^2 \rangle = \\ &= \langle U(t)^2 \rangle - 2\langle U(t)\langle U(t) \rangle \rangle + \langle U(t) \rangle^2 = \langle U(t)^2 \rangle - \langle U(t) \rangle^2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

характеризує розкид значень щодо математичного сподівання в момент часу  $t$  (тобто у точці  $t_1 = t_2 = t$ ).

Властивості дисперсії випадкового процесу:

1.  $D_U(t) \geq 0$  .
2.  $D_\varphi(t) = 0$ , де  $\varphi(t)$  – детерміністична функція.
3.  $D_U(t) = \varphi(t)^2 D_X(t)$  , де  $U(t) = \varphi(t)X(t)$  .
4.  $D_U(t) = D_{U_1}(t) + D_{U_2}(t)$ , де  $U(t) = U_1(t) + U_2(t)$ , а  $U_1(t), U_2(t)$  –

некорельовані для будь-якого  $t \in (-\infty, \infty)$  випадкові процеси.

**Кореляційною функцією** випадкового процесу називають моментну функцію (другого порядку) від добутку центрованих процесів для часових точок  $t_1$  і  $t_2$ :

$$\begin{aligned}
 K_U(t_1, t_2) & \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{U}(t_1) \tilde{U}(t_2) \rangle = \\
 & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u_1 - \langle U(t_1) \rangle) (u_2 - \langle U(t_2) \rangle) p(u_1, u_2; t_1, t_2) du_1 du_2 = \quad (6.7) \\
 & = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n (u_1 - \langle U(t_1) \rangle) (u_2 - \langle U(t_2) \rangle) p(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) du_1 du_2 \dots du_n.
 \end{aligned}$$

Для **комплексних випадкових процесів кореляційна функція** визначається як [2]:

$$K_U(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{U}^*(t_1) \tilde{U}(t_2) \rangle, \quad (6.8)$$

де  $\tilde{U}^*(t_1)$  – спряжений до  $\tilde{U}(t)$  центрований процес.

Властивості кореляційної функції випадкового процесу.

### 1. Парність

$$K_U(t_1, t_2) = K_U(t_2, t_1). \quad (6.9)$$

### 2. Є додатною

$$K_U(t, t) = D_U \geq 0, \quad (6.10)$$

де рівність нулю справа має місце для детерміністичної функції  $U(t)$  .

### 3. Властивість, яка впливає з нерівності Коші-Буняковського [10]:

$$K_U^2(t_1, t_2) \leq K_U(t_1, t_1)K_U(t_2, t_2). \quad (6.11)$$

4. Під час  $n$ -точкового аналізу випадкового процесу моментна функція (другого порядку) від добутку центрованих випадкових процесів для часових точок  $t_1$  і  $t_2$  утворює кореляційну матрицю:

$$\mathbf{K} \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} K_U(t_1, t_1) & K_U(t_1, t_2) & \dots & K_U(t_1, t_n) \\ K_U(t_2, t_1) & K_U(t_2, t_2) & \dots & K_U(t_2, t_n) \\ & & \dots & \\ K_U(t_n, t_1) & K_U(t_n, t_2) & \dots & K_U(t_n, t_n) \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

кожна компонента якої володіє властивостями кореляційної функції (6.9)–(6.11).

Нормованою кореляційною функцією випадкового процесу  $U(t)$  називають невідповідну функцію (коефіцієнт кореляції)

$$\rho_U(t_1, t_2) = \frac{K_U(t_1, t_2)}{\sqrt{D_U(t_1)D_U(t_2)}}. \quad (6.13)$$

**Взаємною кореляційною функцією** випадкових процесів  $U_1(t), U_2(t)$  називають невідповідну функцію

$$K_{U_1 U_2}(t_1, t_2) = \langle \tilde{U}_1(t_1) \tilde{U}_2(t_2) \rangle.$$

Два випадкових процеси  $U_1(t)$  і  $U_2(t)$  називають некорельованими, якщо

$$K_{U_1 U_2}(t_1, t_2) = 0,$$

для будь-якого  $t \in (-\infty, \infty)$ .

## 6.2. Стаціонарні випадкові процеси. Властивість ергодичності

Випадковий процес  $U(t)$  називають *стаціонарним*, якщо його ймовірнісні характеристики *інваріантні стосовно вибору початку відліку за часовим аргументом  $t$* :

– одноточкова щільність імовірності не залежить від  $t$ :

$$p(u, t) \equiv p(u); \quad (6.14)$$

– двоточкова сумісна щільність імовірності  $p(u_1, u_2; t_1, t_2)$  залежить не від моментів часу  $t_1$  і  $t_2$ , а від різниці часових аргументів:

$$p(u_1, u_2; t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} p\left(u_1, u_2; \underbrace{t_2 - t_1}_{\tau}\right) = p(u_1, u_2; \tau), \quad (6.15)$$

де  $\tau = t_2 - t_1$ ;

– триточкова сумісна щільність імовірності

$$\begin{aligned} p(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3) &= p(u_1, u_2, u_3; \tau_1, \tau_2) = \\ &= p(u_1, u_2, u_3; \tau_2, \tau_3) = p(u_1, u_2, u_3; \tau_3, \tau_1), \end{aligned} \quad (6.16)$$

де  $t_2 - t_1 = \tau_1$ ,  $t_3 - t_2 = \tau_2$ ,  $t_3 - t_1 = \tau_3$  і т. д.

Під час другого способу опису перший момент або математичне сподівання стаціонарного випадкового процесу

$$\langle U(t) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u p(u) du = C = \text{const}. \quad (6.17)$$

Другий початковий момент є функцією  $\tau = t_2 - t_1$ :

$$\langle U(t_1)U(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 u_2 p(u_1, u_2, \tau) du_1 du_2 = f(\tau). \quad (6.18)$$

Кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу також залежить не від аргументів  $t_1$  і  $t_2$ , а від їх різниці  $\tau = t_2 - t_1$ :

$$K_U(t_1, t_2) = \langle (U(t_1) - \langle U(t_1) \rangle)(U(t_2) - \langle U(t_2) \rangle) \rangle = K_U(\tau). \quad (6.19)$$

Для стаціонарних випадкових процесів кореляційна функція зберігає свої *основні властивості*:

1. *Парність* (або симетричність за  $\tau$ )  $K_U(\tau) = K_U(-\tau)$ .
2. *Додатність*  $K_U(0) = D_U \geq 0$ .
3. Є спадною функцією :  $|K_U(\tau)| \leq K_U(0)$ ,  $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} K_U(\tau) = 0$ .

Випадковий процес називають *стаціонарним у широкому розумінні (за Хінчином)*, якщо умови стаціонарності виконуються лише для його перших двох моментних функцій.

Стаціонарний випадковий процес прийнято називати *ергодичним*, якщо його єдина реалізація  $u(t)$  несе у собі всю інформацію про процес. Для *ергодичних процесів при визначенні моментних функцій операцію усереднення за множиною реалізацій можна замінити операцією усереднення за часовим аргументом*.

Перший початковий момент ергодичного процесу дорівнює

$$\langle U(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t') dt' = const. \quad (6.20)$$

Кореляційна функція (другий центрований момент) визначається як

$$K_U(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \tilde{u}(t') \tilde{u}(t' + \tau) dt', \quad (6.21)$$

де  $\tilde{u}(t) = u(t) - \langle U(t) \rangle = u(t) - C$ .

### 6.3. Спектральне подання випадкових функцій (процесів)

Випадковий процес  $U(t)$  можна подати у вигляді *дискретного стохастично ортогонального канонічного подання*

$$U(t) = \langle U(t) \rangle + \sum_k U_k \varphi_k(t), \quad (6.22)$$

де  $\varphi_k(t)$  – детерміністичні базисні функції;  $U_k$  – випадкові числа (спектр розкладання), які задовольняють умову стохастичної ортогональності

$$\langle U_j U_k \rangle = 0, \quad (j \neq k).$$

*Канонічне неперервне спектральне подання* випадкового процесу має вигляд

$$U(t) = \langle U(t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \varphi(t/\omega) d\omega, \quad (6.23)$$

де випадковий спектр розкладання  $U(\omega)$  задовольняє умову стохастичної ортогональності

$$\langle U(\omega) U(\omega') \rangle = S_U(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (6.24)$$

Тут  $S_U(\omega)$  – детерміністична функція, яка називається *спектральною щільністю*;  $\delta(\omega)$  – дельта-функція Дірака.

Спектральне подання стаціонарних випадкових процесів є стохастично ортогональним (і навпаки).

Властивості спектральної щільності випадкового процесу:

1.  $S_U(\omega) \geq 0$ .
2.  $S_U(\omega) = S_U(-\omega)$  – для дійсних випадкових процесів.
3.  $D_U = K_U(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_U(\omega) d\omega = const \geq 0$ .

Для неперервних стаціонарних випадкових процесів виконуються співвідношення Вінера-Хінчина

$$\begin{aligned} K_U(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_U(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \\ S_U(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_U(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Дійсна форма співвідношень Вінера-Хінчина має вигляд

$$K_U(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_U(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (6.26)$$

$$S_U(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_U(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

#### 6.4. Диференціювання та інтегрування випадкових функцій (процесів)

*Похідною випадкової функції  $U(t)$  за ймовірністю* називають випадкову функцію  $V(t)$ , яка задовольняє для будь-якого скільки завгодно малого  $\varepsilon > 0$  умову

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P\left(\left|\frac{U(t + \Delta t) - U(t)}{\Delta t} - V(t)\right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (6.27)$$

*Похідною у середньоквадратичному розумінні випадкової функції  $U(t)$*  називають таку випадкову функцію  $V(t)$ , яка задовольняє умову

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \left( \frac{U(t + \Delta t) - U(t)}{\Delta t} - V(t) \right)^2 \right\rangle = 0. \quad (6.28)$$

Випадкова функція  $U(t)$  є *неперервною у середньоквадратичному розумінні*, якщо для неї виконується граничне співвідношення

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \langle |U(t + \Delta) - U(t)|^2 \rangle = 0. \quad (6.29)$$

На підставі (6.29) можна стверджувати, що *для неперервності випадкової функції  $U(t)$  достатньо, щоб її кореляційна функція була неперервною стосовно своїх аргументів.*

*Для диференційованості випадкового процесу (функції) необхідно і достатньо існування другої змішаної частинної похідної від кореляційної функції процесу.*

Для стаціонарних випадкових процесів кореляційна функція залежить не від аргументів  $t_1, t_2$ , а від їх різниці:  $K_U(t_1, t_2) = K_U(t_1 - t_2) = K_U(\tau)$ , причому

$$\left. \frac{\partial^2 K_U(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=t_2=t} = - \left. \frac{d^2 K_U(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}.$$

Відповідно для того щоб *стаціонарна випадкова функція  $U(t)$  була такою, що можна диференціювати, необхідно і достатньо існування другої похідної від її кореляційної функції у нулі.*

*Похідною випадкової функції (процесу) за множиною реалізацій називають випадкову функцію*

$$\bar{V}(t) = \frac{d}{dt} \bar{U}(t). \quad (6.30)$$

*Для стаціонарної випадкової функції кореляційна функція її похідної дорівнює*

$$K_V(\tau) = - \frac{d^2 K_U(\tau)}{d\tau^2}. \quad (6.31)$$

**Теорема.** Для існування кореляційної функції похідної стаціонарного випадкового процесу необхідно і достатньо, щоб кореляційна функція вихідного процесу була двічі диференційованою за часовим аргументом.

Якщо випадкові процеси  $X(t)$  і  $Y(t)$  зв'язані лінійним співвідношенням вигляду

$$Y(t) = L \underset{t}{X}(t), \quad (6.32)$$



де  $L_t$  – лінійний детерміністичний інтегральний (або диференціальний) оператор, то

$$\begin{aligned}\langle Y(t) \rangle &= L_t \langle X(t) \rangle, \\ K_Y(t_1, t_2) &= L_t L_{t_2} K_X(t_1, t_2).\end{aligned}\tag{6.33}$$

## 6.5. Розв'язання типових задач за розділом 6

### Задача 6.1

Визначити математичне сподівання та кореляційну функцію випадкового процесу  $U(t) = Ae^{-Ct}$ , де  $A$  і  $C$  незалежні випадкові

величини, для яких  $P(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-\langle A \rangle)^2}{2}}$ ,  $P(c) = e^{-c}$ ,  $c > 0$ ,  $\langle c \rangle = 1$ ,  $D(c) = 1$ .

### Розв'язання

Із умови стохастичної незалежності випадкових величин  $A$  і  $C$  їх сумісна щільність імовірності

$$p(a, c) = p(a)p(c).$$

Математичне сподівання або моментна функція 1-го порядку випадкового процесу  $U(t)$  визначається як

$$\begin{aligned}\langle U(t) \rangle &= \langle Ae^{-Ct} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} ae^{-ct} p(a, c) da dc = \int_{-\infty}^{\infty} ap(a) da \int_0^{\infty} e^{-ct} e^{-c} dc = \\ &= \langle A \rangle \int_0^{\infty} e^{-c(t+1)} dc = \langle A \rangle \left. \frac{e^{-c(t+1)}}{-(t+1)} \right|_0^{\infty} = \frac{\langle A \rangle}{t+1}.\end{aligned}$$

Кореляційна функція процесу

$$\begin{aligned}
 K_U(t_1, t_2) &= \langle \tilde{U}(t_1) \tilde{U}(t_2) \rangle = \left\langle \left( Ae^{-Ct_1} - \frac{\langle A \rangle}{t_1 + 1} \right) \left( Ae^{-Ct_2} - \frac{\langle A \rangle}{t_2 + 1} \right) \right\rangle = \\
 &= \langle A^2 e^{-Ct_1} e^{-Ct_2} \rangle - \frac{\langle Ae^{-Ct_1} \langle A \rangle \rangle}{t_2 + 1} - \frac{\langle Ae^{-Ct_2} \langle A \rangle \rangle}{t_1 + 1} + \frac{\langle A \rangle^2}{(t_1 + 1)(t_2 + 1)} = \\
 &= \langle A^2 e^{-Ct_1} e^{-Ct_2} \rangle - \frac{\langle A \rangle^2}{(t_1 + 1)(t_2 + 1)}.
 \end{aligned}$$

Другий початковий момент, який входить до виразу для кореляційної функції, дорівнює

$$\begin{aligned}
 \langle U(t_1)U(t_2) \rangle &= \langle A^2 e^{-C(t_1+t_2)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} a^2 e^{-c(t_1+t_2)} p(a) p(c) da dc = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} a^2 p(a) da \int_0^{\infty} e^{-c(t_1+t_2)} e^{-c} dc = \frac{\langle A^2 \rangle}{t_1 + t_2 + 1}.
 \end{aligned}$$

За визначенням дисперсія випадкової величини  $D_A = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ , звідси

$$\langle A^2 \rangle = D_A + \langle A \rangle^2.$$

Згідно з умовами задачі  $D_A = \sigma^2 = 1$ , тоді вираз для кореляційної функції випадкового процесу  $U(t)$  набуває вигляду

$$K_U(t_1, t_2) = \frac{1 + \langle A \rangle^2}{t_1 + t_2 + 1} - \frac{\langle A \rangle^2}{(t_1 + 1)(t_2 + 1)} = \frac{(t_1 + 1)(t_2 + 1) + \langle A \rangle^2 t_1 t_2}{(t_1 + t_2 + 1)(t_1 + 1)(t_2 + 1)}.$$

## Задача 6.2

Заданий випадковий процес  $X(t) = A \sin t$ , де  $A$  – випадкова величина, яка підлягає нормальному закону розподілу з параметрами  $\langle A \rangle, \sigma$ . Визначити одноточкову щільність імовірності та функцію розподілу випадкового процесу при  $t \neq k\pi$  ( $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ ).

### Розв'язання

Визначимо числові характеристики випадкового процесу  $X(t)$ .

Математичне сподівання

$$\langle X(t) \rangle = \langle A \sin t \rangle = \langle A \rangle \sin t.$$

Кореляційна функція

$$\begin{aligned} K_X(t, t') &= \langle \tilde{X}(t) \tilde{X}(t') \rangle = \langle (A - \langle A \rangle) \sin t (A - \langle A \rangle) \sin t' \rangle = \\ &= \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \sin t \sin t' = D A \sin t \sin t' = \sigma^2 \sin t \sin t'. \end{aligned}$$

Дисперсія та середньоквадратичне відхилення процесу відповідно дорівнюватимуть

$$\begin{aligned} D_X &= K_X(t = t') = \sigma^2 \sin^2 t; \\ \sigma_X &= \sqrt{D_X} = \sigma |\sin t|. \end{aligned}$$

Таким чином, випадковий процес  $X(t) = A \sin t$  має нормальний розподіл з такими параметрами:  $\langle A \rangle \sin t$ ,  $\sigma |\sin t|$ , при цьому щільність імовірності

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma} |\sin t|} e^{-\frac{(x - \langle A \rangle \sin t)^2}{2\sigma^2 \sin^2 t}}$$

і функція розподілу ймовірностей:

$$F(x, t) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - \langle A \rangle \sin t}{\sigma |\sin t|}\right),$$

де  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

### Задача 6.3

Балка (рис. 6.1) навантажена у кінцевому перерізі  $z = 0$  випадковими моментами  $M_{x0}, M_{y0}$  з відомими числовими

характеристиками:  $\langle M_{x0} \rangle, \langle M_{y0} \rangle, D_{M_{x0}}, D_{M_{y0}}, K_{M_{x0}M_{y0}}$ . Визначити математичне сподівання та дисперсію максимального нормального напруження у довільному перерізі балки.

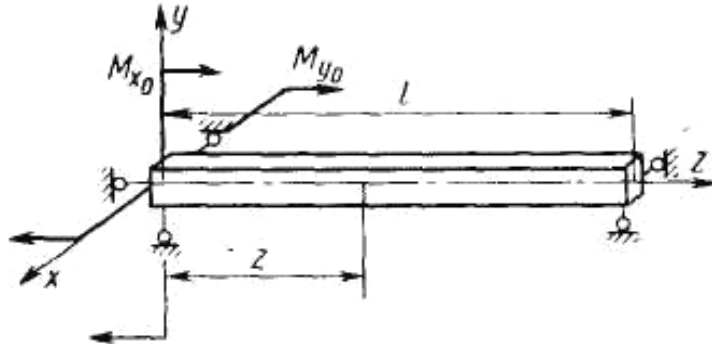


Рисунок 6.1

### Розв'язання

Згинальні моменти у довільному перерізі балки дорівнюють

$$M_x = M_{x0} \left(1 - \frac{z}{l}\right), M_y = M_{y0} \left(1 - \frac{z}{l}\right).$$

Із курсу опору матеріалів відомо, що максимальне нормальне напруження у довільному перерізі визначається за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x y_1}{J_x} + \frac{M_y x_1}{J_y},$$

де  $x_1, y_1$  – координати точки розглядуваного перерізу, яка максимально відділена від нейтральної лінії балки;  $J_x, J_y$  – моменти інерції перерізу балки відносно відповідних осей.

Позначимо  $a_1 = \frac{y_1}{J_x}, a_2 = \frac{x_1}{J_y}$ , тоді математичне сподівання

максимального нормального напруження

$$\langle \sigma \rangle = a_1 \left(1 - \frac{z}{l}\right) \langle M_{x0} \rangle + a_2 \left(1 - \frac{z}{l}\right) \langle M_{y0} \rangle.$$

За визначенням кореляційна функція максимального нормального напруження дорівнює

$$\begin{aligned}
 K_{\sigma}(z, z') &= \langle \tilde{\sigma}(z) \tilde{\sigma}(z') \rangle = \left\langle \left( a_1 \left( 1 - \frac{z}{l} \right) (M_{X_0} - \langle M_{X_0} \rangle) + a_2 \left( 1 - \frac{z}{l} \right) (M_{Y_0} - \langle M_{Y_0} \rangle) \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left( a_1 \left( 1 - \frac{z'}{l} \right) (M_{X_0} - \langle M_{X_0} \rangle) + a_2 \left( 1 - \frac{z'}{l} \right) (M_{Y_0} - \langle M_{Y_0} \rangle) \right) \right\rangle = \\
 &\quad = \left( 1 - \frac{z}{l} \right) \left( 1 - \frac{z'}{l} \right) \langle (a_1 \tilde{M}_{X_0} + a_2 \tilde{M}_{Y_0})^2 \rangle = \\
 &\quad = \left( 1 - \frac{z}{l} \right) \left( 1 - \frac{z'}{l} \right) (a_1^2 \langle \tilde{M}_{X_0} \rangle + 2a_1 a_2 \langle \tilde{M}_{X_0} \tilde{M}_{Y_0} \rangle + a_2^2 \langle \tilde{M}_{Y_0} \rangle) = \\
 &\quad = \left( 1 - \frac{z}{l} \right) \left( 1 - \frac{z'}{l} \right) (a_1^2 D_{M_{X_0}} + 2a_1 a_2 K_{M_{X_0} M_{Y_0}} + a_2^2 D_{M_{Y_0}}).
 \end{aligned}$$

Користуючись властивістю кореляційної функції (6.10), отримуємо вираз для дисперсії:

$$D_{\sigma} = K_{\sigma}(z = z') = \left( 1 - \frac{z}{l} \right)^2 (a_1^2 D_{M_{X_0}} + 2a_1 a_2 K_{M_{X_0} M_{Y_0}} + a_2^2 D_{M_{Y_0}}).$$

#### Задача 6.4

Відомі числові характеристики двовимірного випадкового вектора  $\vec{X} = \{X_1, X_2\}^T$ : математичне сподівання  $\langle X_1 \rangle = -0,5$ ,  $\langle X_2 \rangle = 1$  і дисперсії його компонент  $D_{X_1} = 3$ ,  $D_{X_2} = 2$ , а також взаємна кореляційна функція  $K_{X_1 X_2} = -2$ . Визначити математичне сподівання, дисперсію та кореляційну функцію скалярного випадкового процесу

$$Y(t) = X_1 \cos t + X_2 \sin t + t.$$

#### Розв'язання

За визначенням математичного сподівання випадкового процесу маємо

$$\langle Y(t) \rangle = \langle X_1 \cos t + X_2 \sin t + t \rangle = \langle X_1 \rangle \cos t + \langle X_2 \rangle \sin t + \langle t \rangle = -0,5 \cos t + \sin t + t$$

Знайдемо кореляційну функцію

$$\begin{aligned}
 K_Y(t_1, t_2) &= \langle \tilde{Y}(t_1) \tilde{Y}(t_2) \rangle = \\
 &= \langle [(X_1 - \langle X_1 \rangle) \cos t_1 + (X_2 - \langle X_2 \rangle) \sin t_1] [(X_1 - \langle X_1 \rangle) \cos t_2 + (X_2 - \langle X_2 \rangle) \sin t_2] \rangle = \\
 &= \langle (X_1 - \langle X_1 \rangle)^2 \rangle \cos t_1 \cos t_2 + \langle (X_1 - \langle X_1 \rangle)(X_2 - \langle X_2 \rangle) \rangle \cos t_1 \sin t_2 + \\
 &\quad + \langle (X_2 - \langle X_2 \rangle)(X_1 - \langle X_1 \rangle) \rangle \sin t_1 \cos t_2 + \langle (X_2 - \langle X_2 \rangle)^2 \rangle \sin t_1 \sin t_2 = \\
 &= D_{X_1} \cos t_1 \cos t_2 + 2K_{X_1 X_2} (\cos t_1 \sin t_2 + \sin t_1 \cos t_2) + D_{X_2} \sin t_1 \sin t_2 = \\
 &= 3 \cos t_1 \cos t_2 - 4 \sin(t_1 + t_2) + 2 \sin t_1 \sin t_2.
 \end{aligned}$$

Для визначення дисперсії скористаємося властивістю кореляційної функції (6.10):

$$D_Y = K_Y(t_1 = t_2) = 3 \cos^2 t - 4 \sin 2t + 2 \sin^2 t.$$

### Задача 6.5

Визначити, чи є стаціонарним випадковий процес  $X(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ , де  $A, \omega$  – сталі,  $\varphi$  – випадкова величина, яка рівномірно розподілена на відрізку  $[0; 2\pi]$ .

### Розв'язання

Для рівномірно розподіленої випадкової величини  $\varphi$  (рис. 6.2) із умови нормування  $\int_0^{2\pi} C d\varphi = 1$  знаходимо  $C = \frac{1}{2\pi}$ .

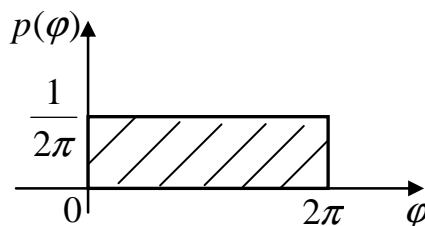


Рисунок 6.2

Таким чином, щільність імовірності

$$p(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ 0, & 2\pi < \varphi < 0. \end{cases}$$

Математичне сподівання випадкового процесу  $X(t)$

$$\langle X \rangle = \langle A \sin(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \varphi) d\varphi = -\frac{A}{2\pi} \cos(\omega t + \varphi) \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

тобто розглядуваний процес є центрованим ( $X = \tilde{X}$ ). Тоді за формулою (6.7) знаходимо кореляційну функцію:

$$\begin{aligned} K_X(t, t') &= \langle \tilde{X}(t) \tilde{X}(t') \rangle = A^2 \langle \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega t' + \varphi) \rangle = \\ &= \frac{A^2}{2} \langle \cos(\omega(t - t')) - \cos(2\varphi + \omega(t + t')) \rangle = \frac{A^2}{2} \cos(\omega(t - t')) - \\ &- \frac{A^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\varphi + \omega(t + t')) d\varphi = \frac{A^2}{2} \cos(\omega(t - t')) - \frac{A^2}{8} \sin(2\varphi + \omega(t + t')) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega(t - t')) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau). \end{aligned}$$

Оскільки перші дві моментні функції задовольняють умови стаціонарності, то можна стверджувати, що розглядуваний випадковий процес  $X(t)$  є стаціонарним у широкому розумінні (за Хінчином).

### Задача 6.6

Визначити, чи є стаціонарним випадковий процес  $U(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ , де  $\omega$  – детерміністичний параметр;  $A$  і  $B$  – некорельовані випадкові величини з нульовими математичними сподіваннями і однаковими дисперсіями:  $\langle A \rangle = \langle B \rangle = 0$ ,  $D_A = D_B = D$ .

### Розв'язання

Математичне сподівання випадкового процесу

$$\begin{aligned}\langle U(t) \rangle &= \langle A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \rangle = \langle A \cos(\omega t) \rangle + \langle B \sin(\omega t) \rangle = \\ &= \langle A \rangle \cos(\omega t) + \langle B \rangle \sin(\omega t) = 0.\end{aligned}$$

Процес є центрованим, відповідно кореляційна функція

$$\begin{aligned}K_U(t_1, t_2) &= \langle \tilde{U}(t_1) \tilde{U}(t_2) \rangle = \\ &= \langle (A \cos(\omega t_1) + B \sin(\omega t_1))(A \cos(\omega t_2) + B \sin(\omega t_2)) \rangle = \\ &= \langle A^2 \cos(\omega t_1) \cos(\omega t_2) + AB \cos(\omega t_1) \sin(\omega t_2) + \\ &+ BA \sin(\omega t_1) \cos(\omega t_2) + B^2 \sin(\omega t_1) \sin(\omega t_2) \rangle = \\ &= \langle A^2 \rangle \cos(\omega t_1) \cos(\omega t_2) + \langle AB \rangle \cos(\omega t_1) \sin(\omega t_2) + \\ &+ \langle BA \rangle \sin(\omega t_1) \cos(\omega t_2) + \langle B^2 \rangle \sin(\omega t_1) \sin(\omega t_2).\end{aligned}$$

Через відсутність кореляції між випадковими величинами  $A$  і  $B$  ( $\langle AB \rangle = \langle BA \rangle = 0$ ), і враховуючи, що  $\langle A^2 \rangle = D_A$ ,  $\langle B^2 \rangle = D_B$  і  $D_A = D_B = D$ ,

отримаємо

$$\begin{aligned}K_U(t_1, t_2) &= D_A \cos(\omega t_1) \cos(\omega t_2) + D_B \sin(\omega t_1) \sin(\omega t_2) = \\ &= D(\cos(\omega t_1) \cos(\omega t_2) + \sin(\omega t_1) \sin(\omega t_2)) = D \cos \omega(t_1 - t_2) = D \cos \omega \tau.\end{aligned}$$

З урахуванням того, що  $\langle U(t) \rangle = 0$ , а кореляційна функція залежить від  $\tau = t_2 - t_1$ , можна стверджувати, що розглядуваний випадковий процес є стаціонарним (за Хінчином).

### Задача 6.7

Випадковий процес  $U(t)$  може бути поданий у вигляді дискретного спектрального розкладання вигляду

$$U(t) = a(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (X_k \sin \omega_k t + V_k \cos \omega_k t),$$

де  $\omega_k$  – детерміністичний параметр;  $X_k$  і  $V_k$  – випадкові амплітуди, причому  $\langle X_k \rangle = \langle V_k \rangle = 0$ . Визначити математичне сподівання  $\langle U(t) \rangle$  і кореляційну функцію  $K_U(t_1, t_2)$ .



## Розв'язання

Математичне сподівання

$$\langle U(t) \rangle = a(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\langle X_k \rangle \sin \omega_k t + \langle V_k \rangle \cos \omega_k t] = a(t).$$

Кореляційна функція

$$\begin{aligned} K_U(t_1, t_2) &= \langle (U(t_1) - \langle U(t_1) \rangle)(U(t_2) - \langle U(t_2) \rangle) \rangle = \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} (X_k \sin \omega_k t_1 + V_k \cos \omega_k t_1) \sum_{j=0}^{\infty} (X_j \sin \omega_j t_2 + V_j \cos \omega_j t_2) \right\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\langle X_k X_j \rangle \sin \omega_k t_1 \sin \omega_j t_2 + \langle V_k X_j \rangle \cos \omega_k t_1 \sin \omega_j t_2 + \\ &\quad + \langle X_k V_j \rangle \sin \omega_k t_1 \cos \omega_j t_2 + \langle V_k V_j \rangle \cos \omega_k t_1 \cos \omega_j t_2). \end{aligned}$$

У випадку, якщо  $X_k$  і  $V_k$  – некорельовані випадкові величини, тобто  $\langle X_k V_j \rangle = \langle V_k X_j \rangle = 0$ , кореляційна функція вихідного випадкового процесу дорівнює

$$K_U(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\langle X_k X_j \rangle \sin \omega_k t_1 \sin \omega_j t_2 + \langle V_k V_j \rangle \cos \omega_k t_1 \cos \omega_j t_2).$$

Позначимо  $K_{X_k X_j} = \langle X_k X_j \rangle$ ,  $K_{V_k V_j} = \langle V_k V_j \rangle$ , тоді

$$K_U(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (K_{X_k X_j} \sin \omega_k t_1 \sin \omega_j t_2 + K_{V_k V_j} \cos \omega_k t_1 \cos \omega_j t_2).$$

або

$$K_U(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle Y_k Y_j \rangle \phi_k(t_1) \phi_j(t_2),$$

де  $Y_k = \{X_1, V_1, X_2, V_2, \dots\}$ ,  $\phi_k = \{\sin \omega_k t, \cos \omega_k t, \dots\}$ .

Розкладання є канонічним, якщо

$$\langle Y_j Y_k \rangle = 0, \quad j \neq k, \quad \langle Y_j \rangle = 0.$$

У цьому випадку амплітудами розкладання кореляційної функції є дисперсії коефіцієнтів розкладання процесу

$$K_U(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{\infty} D_{Y_j} \varphi_j(t_1) \varphi_j(t_2).$$

Таким чином, для канонічного розкладання маємо

$$K_U(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ D_{X_j} \sin \omega_j t_1 \sin \omega_j t_2 + D_{V_j} \cos \omega_j t_1 \cos \omega_j t_2 \right].$$

Якщо  $D_{X_j} = D_{V_j} = D_j$ , то  $K_U(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{\infty} D_j \cos(t_2 - t_1) = K_U(\tau)$ , але

процес  $U(t)$  не є стаціонарним процесом, оскільки його математичне сподівання  $\langle U(t) \rangle = a(t)$  – функція часу ( $\neq const$ ).

### Задача 6.8

Випадковий процес  $U(t)$  дозволяє розкладання вигляду

$$U(t) = a(t) + \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \varphi(t, \omega) d\omega,$$

причому для випадкового спектра розкладання  $\langle X(\omega) \rangle = 0$ . Визначити  $\langle U(t) \rangle$ ,  $K_U(t_1, t_2)$ .

### Розв'язання

Математичне сподівання процесу

$$\langle U(t) \rangle = \left\langle a(t) + \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \varphi(t, \omega) d\omega \right\rangle = a(t) + \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \varphi(t, \omega) d\omega \right\rangle = 0.$$

Відповідно центрований процес:

$$\tilde{U}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \varphi(t, \omega) d\omega.$$

Тоді за визначенням кореляційної функції

$$K_U(t, t') = \left\langle \tilde{U}(t) \tilde{U}(t') \right\rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) X(\omega') \varphi(t, \omega) \varphi(t', \omega) d\omega d\omega' \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle X(\omega) X(\omega') \rangle \varphi(t, \omega) \varphi(t', \omega) d\omega d\omega' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(t, t') \varphi(t, \omega) \varphi(t', \omega) d\omega d\omega'.$$

### Задача 6.9

Кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу  $U(t)$  задана у вигляді

$$K_U(\tau) = \sigma_U^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|).$$

Визначити спектральну щільність  $S_U(\omega)$ .

### Розв'язання

Користуючись оберненою формулою Вінера-Хінчина (6.25), можемо записати

$$S_U(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_U(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma_U^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha|\tau| + i\omega\tau)} (1 + \alpha|\tau|) d\tau =$$

$$= \frac{\sigma_U^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha|\tau| + i\omega\tau)} d\tau + \frac{\sigma_U^2 \alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha|\tau| + i\omega\tau)} |\tau| d\tau.$$

Обчислимо інтеграл

$$J(\alpha, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha|\tau| + i\omega\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau - i\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau - i\omega\tau} d\tau =$$

$$= \frac{e^{(\alpha - i\omega)\tau}}{\alpha - i\omega} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-(\alpha + i\omega)\tau}}{\alpha + i\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha - i\omega} + \frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Оскільки

$$\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha|\tau|+i\omega\tau)} |\tau| d\tau = -\alpha \frac{\partial J}{\partial \alpha},$$

то остаточно можемо записати вираз для спектральної щільності

$$\begin{aligned} S_U(\omega) &= J(\alpha, \omega) - \alpha \frac{\partial J(\alpha, \omega)}{\partial \alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{2\alpha(\omega^2 - \alpha^2)}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} = \\ &= \frac{2\alpha^3 + 2\alpha\omega^2 - 2\alpha\omega^2 + 2\alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} = \frac{4\alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

### Задача 6.10

Для експоненціально корельованого стаціонарного випадкового процесу  $U(t)$  кореляційна функція має вигляд [2]:

$$K_U(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}.$$

Визначити спектральну щільність  $S_U(\omega)$ .

### Розв'язання

Користуючись оберненою формулою Вінера-Хінчина (6.25), можемо записати

$$S_U(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 \tau^2 - i\omega\tau} d\tau.$$

Виділимо під знаком експоненти у підінтегральному виразі повний квадрат:

$$-\alpha^2 \tau^2 - i\omega\tau = -\alpha^2 \left[ \tau^2 + \frac{i\omega}{\alpha^2} \tau - \left( \frac{\omega}{2\alpha^2} \right)^2 \right] - \frac{\omega^2}{4\alpha^2} = -\alpha^2 \left( \tau + \frac{i\omega}{2\alpha^2} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha^2},$$

тоді

$$S_U(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 \left( \tau + \frac{i\omega}{2\alpha^2} \right)^2} d \frac{\left( \tau + \frac{i\omega}{2\alpha^2} \right) \alpha}{\alpha}.$$

Беручи до уваги значення чудового інтегралу  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$  [10],

остаточно отримаємо

$$S_U(\omega) = \frac{\sigma^2 e^{-\left(\frac{\omega^2}{4\alpha^4}\right)} \sqrt{\pi}}{2\pi\alpha} = \frac{\sigma^2 e^{-\left(\frac{\omega^2}{4\alpha^4}\right)}}{2\sqrt{\pi}\alpha}.$$

Проілюструємо отриманий результат (рис. 6.3).

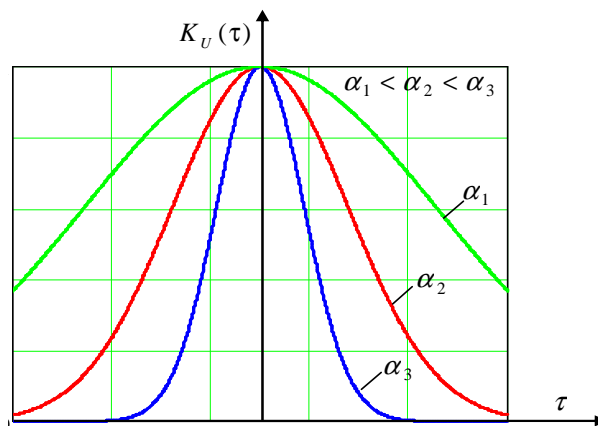


Рисунок 6.3

При  $\alpha \rightarrow \infty$  кореляційна функція  $K_U(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$ , а спектральна щільність

$$S_U(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma^2}{2\pi} = const.$$

Таким чином, при  $\alpha \rightarrow \infty$  експоненціально корельований стаціонарний процес на межі дає "білий шум".

**Задача 6.11**

Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкового процесу  $Y(t) = t \frac{dX(t)}{dt} + C$ , де  $X(t) = t^2 + 4t + 2$ ;  $K_X(t, t') = D_X e^{-\alpha(t-t')^2}$ ;

$D_X - const$ .

**Розв'язання**

Математичне сподівання випадкового процесу  $Y(t)$  знайдемо, використовуючи визначення нестрогого диференціювання:

$$\langle Y(t) \rangle = \left\langle t \frac{dX(t)}{dt} \right\rangle + \langle C \rangle = t \frac{d\langle X(t) \rangle}{dt} + C = t(2t + 4) + C = 2t^2 + 4t + C.$$

Тоді кореляційна функція

$$\begin{aligned} K_Y(t, t') &= \langle (Y(t) - \langle Y(t) \rangle)(Y(t') - \langle Y(t') \rangle) \rangle = \\ &= \left\langle \left( t \frac{\partial X(t)}{\partial t} + C - \left\langle t \frac{\partial X(t)}{\partial t} \right\rangle - C \right) \left( t' \frac{\partial X(t')}{\partial t'} + C - \left\langle t' \frac{\partial X(t')}{\partial t'} \right\rangle - C \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Якщо позначити  $V(t) = \frac{\partial X(t)}{\partial t}$ , то вираз для кореляційної функції

можна привести до вигляду

$$K_Y(t, t') = t \cdot t' K_V(t, t').$$

Згідно з формулою  $K_V(t, t') = \frac{\partial^2 K_X(t, t')}{\partial t \partial t'}$ , отримуємо:

$$K_Y(t, t') = t \cdot t' \frac{\partial^2 K_X(t, t')}{\partial t \partial t'} = t \cdot t' \frac{\partial}{\partial t} \left( -2\alpha D_X (t - t') e^{-\alpha(t-t')^2} \right).$$

Тоді дисперсія випадкового процесу  $Y(t)$  дорівнює

$$D_Y = K_Y(t = t') = -2\alpha D_X e^{-\alpha(t-t')^2} (2\alpha(t-t')^2 - 1) t'^2 = 2\alpha D_X t'^2.$$

**Задача 6.12**

Нехай випадковий процес  $X(t)$  з відомими числовими характеристиками  $\langle X(t) \rangle = a$  і  $K_X(t_1, t_2)$  підлягає неоднорідному лінійному перетворенню

$$Y(t) = L_t X(t) + \varphi(t),$$

де  $L_t$  – детерміністичний лінійний диференціальний оператор,  $\varphi(t)$  – детерміністична функція. Визначити  $K_{XY}(t_1, t_2)$ ,  $K_Y(t_1, t_2)$ .

### Розв'язання

Використовуючи властивості математичного сподівання, а також (через лінійність оператора) можливість перестановки операторів математичного сподівання та інтегрування, отримаємо

$$\langle Y(t) \rangle = \langle L_t X(t) + \varphi(t) \rangle = L_t \langle X(t) \rangle + \varphi(t).$$

Тоді для центрованого випадкового процесу  $\tilde{Y}(t)$  маємо:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(t) &= Y(t) - \langle Y(t) \rangle = \\ &= L_t [X(t) - \langle X(t) \rangle] + \varphi(t) - \varphi(t) = L_t \tilde{X}(t). \end{aligned}$$

Взаємна кореляційна функція випадкових процесів  $X(t)$  і  $Y(t)$  визначається як

$$\begin{aligned} K_{XY}(t_1, t_2) &= \langle \tilde{X}(t_1) \tilde{Y}(t_2) \rangle = \langle \tilde{X}(t_1) L_{t_2} \tilde{X}(t_2) \rangle = \\ &= L_{t_2} \langle \tilde{X}(t_1) \tilde{X}(t_2) \rangle = L_{t_2} K_X(t_1, t_2). \end{aligned}$$

У свою чергу, кореляційна функція випадкового процесу  $Y(t)$  дорівнює

$$\begin{aligned} K_Y(t_1, t_2) &= \langle \tilde{Y}(t_1) \tilde{Y}(t_2) \rangle = \langle L_{t_1} \tilde{X}(t_1) L_{t_2} \tilde{X}(t_2) \rangle = \\ &= L_{t_1} L_{t_2} \langle \tilde{X}(t_1) \tilde{X}(t_2) \rangle = L_{t_1} L_{t_2} K_X(t_1, t_2). \end{aligned}$$

### Задача 6.13

Визначити взаємну кореляційну функцію  $K_{XY}(t_1, t_2)$  при  $t_1 = 0, t_2 = 1$  випадкових процесів  $Y(t) = -t \frac{dX(t)}{dt} + \int_0^t \tau X(\tau) d\tau + \sin \omega t$  і

$X(t)$ , якщо задані числові характеристики  
 $\langle X(t) \rangle = a(t)$ ,  $K_X(t_1, t_2) = \sigma_X^2 e^{-(t_1+t_2)}$ .

### Розв'язання

Подамо випадковий процес  $Y(t)$  у вигляді неоднорідного лінійного перетворення:

$$Y(t) = L_t X(t) + \varphi(t),$$

де  $L_t$  – лінійний інтегро-диференціальний оператор;  $\varphi(t)$  – детерміністична функція. Тоді математичне сподівання процесу

$$\langle Y(t) \rangle = L_t \langle X(t) \rangle + \varphi(t).$$

Для центрованих значень випадкового процесу  $Y(t)$  маємо:

$$\tilde{Y}(t) = L_t (X(t) - \langle X(t) \rangle) = L_t \tilde{X}(t).$$

Взаємна кореляційна функція визначається як

$$\begin{aligned} K_{XY}(t_1, t_2) &= \langle \tilde{X}(t_1) \tilde{Y}(t_2) \rangle = \langle \tilde{X}(t_1) L_{t_2} \tilde{X}(t_2) \rangle = L_{t_2} K_X(t_1, t_2), \\ L_{t_2} K_X(t_1, t_2) &= -t_2 \frac{\partial K_X(t_1, t_2)}{\partial t_2} + \int_0^{t_2} t' K_X(t_1, \tau) dt' = \\ &= t_2 \sigma_X^2 e^{-(t_1+t_2)} + \sigma_X^2 \int_0^{t_2} t' e^{-(t_1+t')} dt' = t_2 \sigma_X^2 e^{-(t_1+t_2)} + \sigma_X^2 e^{-t_1} (-t_2 e^{-t_2} - e^{-t_2} + 1) = \\ &= \sigma_X^2 e^{-t_1} (1 - e^{-t_2}). \end{aligned}$$

При  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 1$  маємо

$$K_{XY}(0, 1) = \sigma_X^2 (1 - e^{-1}) \approx 0,63 \sigma_X^2.$$



## 6.6. ДОДАТКОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

**Завдання 1.** Заданий випадковий процес  $X(t) = At^2 + B \cos \omega t$ , де  $A, B$  – незалежні випадкові величини із заданими ймовірнісними характеристиками. Визначити кореляційну функцію та дисперсію такого процесу.

**Завдання 2.** Визначити взаємну кореляційну функцію випадкових процесів:  $X(t) = At$ ,  $Y(t) = At^2$ , де  $A$  – випадкова величина з відомою дисперсією  $D_A$ .

**Завдання 3.** Задано два випадкових процеси  $X(t) = At$ ,  $Y(t) = Bt^2$ , де  $A, B$  – незалежні випадкові величини із заданими ймовірнісними характеристиками:  $\langle A \rangle = 3$ ,  $\langle B \rangle = 6$ ,  $D_A = 0,2$ ,  $D_B = 5$ . Визначити математичне сподівання, кореляційну функцію та дисперсію випадкового процесу  $Z(t) = X(t) + Y(t)$ .

**Завдання 4.** Заданий випадковий процес  $X(t) = 2A \sin(\omega t) + 3Bt^2 + 7$ , де  $A$  і  $B$  – випадкові величини з відомими ймовірнісними характеристиками:  $\langle A \rangle = 1$ ,  $\langle B \rangle = 2$ ,  $D_A = 0,2$ ,  $D_B = 0,5$ ,  $\rho_{AB} = -0,3$ . Визначити математичне сподівання і кореляційну функцію.

**Завдання 5.** Випадковий процес  $X(t)$  заданий у вигляді канонічного розкладання:  $X(t) = t - 3 \cos t + A(t + \cos t) + B \cos 2t$ , причому  $D_A = 1$ ,  $D_B = 2$ . Визначити математичне сподівання, кореляційну функцію та дисперсію такого процесу.

**Завдання 6.** Заданий випадковий процес  $X(t) = x_1 t + x_2 \sin t$ , де випадковий вектор  $(x_1, x_2)$  має математичне сподівання  $(1, -1)$  і

кореляційну матрицю  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Визначити математичне сподівання та кореляційну функцію процесу  $X(t)$ .

**Завдання 7.** Задані числові характеристики випадкового процесу:  $\langle X(t) \rangle = 2t + 1$ ,  $K(t_1, t_2) = e^{-(t_1 - t_2)^2}$ . Знайти математичне сподівання та кореляційну функцію його похідної.

**Завдання 8.** Нехай  $A$  і  $B$  – незалежні випадкові величини, які підлягають нормальному розподілу з математичними сподіваннями, що дорівнюють нулю, і однаковими дисперсіями, які дорівнюють 0,5.

Визначити числові характеристики випадкового процесу  $X(t) = \frac{A+B}{t}$ .

**Завдання 9.** Визначити математичне сподівання і кореляційну функцію випадкового процесу  $X(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ , де  $A$ ,  $\omega$  і  $\varphi$  – випадкові величини, причому  $\varphi$  не залежить від  $A$ ,  $\omega$  має рівномірний розподіл на відрізку  $[0, 2\pi]$ .

**Завдання 10.** Визначити математичне сподівання  $\langle X(t) \rangle$ , кореляційну функцію  $K_X(t_1, t_2)$  і дисперсію  $D_X(t)$  випадкового процесу  $X(t) = At - B5e^{-5t} + \cos t$ , де  $A$  – випадкова величина з нормальним законом розподілу ( $\langle A \rangle = 3$ ,  $D_A = 2$ );  $B$  – випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку  $[-3, 1]$ .

**Завдання 11.** Визначити математичне сподівання  $\langle Z(t) \rangle$ , кореляційну функцію  $K_Z(t_1, t_2)$  і дисперсію  $D_Z(t)$  випадкового процесу  $Z(t) = t^2 + e^{-2t} X(t) - Y(t) \sin 4t$ , де  $X(t), Y(t)$  – центровані випадкові процеси, для яких  $K_X(t_1, t_2) = 4 \cos(t_1 - t_2)$ ,  $K_Y(t_1, t_2) = 36 \cos(t_1 - t_2)$ ,  $K_{XY}(t_1, t_2) = 12 \cos(t_1 - t_2)$ .

**Завдання 12.** Визначити кореляційну функцію  $K_Z(t_1, t_2)$  і дисперсію  $D_Z(t)$  випадкового процесу  $Z(t) = X(t)e^t - Y(t)\cos t + e^{2t}$ , де  $X(t), Y(t)$  – некорельовані випадкові процеси, кореляційні функції яких:

$$K_X(t_1, t_2) = K_Y(t_1, t_2) = \frac{1}{(1 + (t_2 - t_1))^2}.$$

**Завдання 13.** На площині рухається випадкова точка  $K$  так, що полярна координата  $\varphi$  є випадковою функцією часу з кореляційною функцією  $K(t_1, t_2) = a^2 c^{-b^2(t_1 - t_2)^2}$ . Визначити дисперсію кутової швидкості  $\omega$  полярного радіуса-вектора точки  $K$ .

**Завдання 14.** Нехай  $A$  і  $B$  – незалежні однаково розподілені випадкові величини, що набувають значень  $+1$  і  $-1$  з імовірностями  $0,5$ . Довести, що випадковий процес  $Y(t) = A\cos \omega t + B\sin \omega t$ , де  $\omega$  – детерміністичний параметр, є стаціонарним.

**Завдання 15.** Довести, що сума незалежних стаціонарних випадкових процесів є стаціонарним випадковим процесом.

**Завдання 16.** Нехай  $A_1, A_2, \dots, A_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  – незалежні випадкові величини, причому  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  мають рівномірний розподіл на відрізку  $[0, 2\pi]$ . Показати, що випадковий процес

$$X(t) = \sum_{i=1}^n A_i \cos(i(\varphi_i + t))$$
 є стаціонарним.

**Завдання 17.** Показати, що випадковий процес  $X(t) = (A - 2)\cos 3t - B\sin 3t$ , є стаціонарним у широкому розумінні. Визначити його дисперсію, якщо  $A$  – випадкова величина, рівномірно розподілена на інтервалі  $[0, 4]$ ;  $B$  – випадкова величини з нормальним законом розподілу, причому  $\langle B \rangle = 0, D_B = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

**Завдання 18.** Визначити спектральну щільність стаціонарного процесу  $X(t)$ , якщо його кореляційна функція  $K_X(\tau) = 81e^{-9\tau^2}$ .

**Завдання 19.** Визначити спектральну щільність випадкового процесу  $X(t)$ , кореляційна функція якого дорівнює  $K(\tau) = Ce^{-\alpha|\tau|}$ , де  $C$  – стала.

**Завдання 20.** Визначити спектральну щільність стаціонарного випадкового процесу  $X(t)$ , кореляційна функція якого  $K_X(\tau) = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \cos \omega_i \tau$ .

**Завдання 21.** Визначити спектральну  $S_Y(\omega)$ , якщо випадковий процес  $Y(t) = X(t)\dot{X}(t)$ , де  $X(t)$  – випадковий процес, кореляційна функція якого  $K_X(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|} \left( 1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3}\alpha^2\tau^2 \right)$ , причому  $\langle X(t) \rangle = 0$ .

Побудувати графіки  $S_Y(\omega)$  і  $S_X(\omega)$ .

**Зауваження.** Під час розв'язування задачі врахувати, що

$$X(t)\dot{X}(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [X(t)^2].$$

**Завдання 22.** Кореляційна функція  $K_X(\tau)$  випадкового процесу  $X(t)$  спадає за лінійним законом від одиниці до нуля при  $0 < |\tau| < \tau_0$ , а при  $|\tau| \geq \tau_0$  вона дорівнює нулю. Визначити спектральну щільність  $S_X(\omega)$ . Побудувати графіки для  $K_X(\tau)$  і  $S_X(\omega)$ .

**Завдання 23.** Нормально розподілена стаціонарно випадкова функція  $U(x)$  має кореляційну функцію вигляду  $K_U(x) = \sigma_U^2 e^{-\alpha|x|}$ . Визначити максимум спектральної щільності  $S_{U_1}(\omega)$ , якщо  $U_1(x) = U(x)^2$ .

**Завдання 24.** Визначити спектральну щільність випадкового процесу  $X(t)$ , якщо його кореляційна функція задана у вигляді

$$K_X(\tau) = \sum_{j=1}^n A_j e^{-\alpha_j |\tau|}, \quad (\alpha_j > 0).$$

$n = 2, A_1 = 2A_2, \alpha_1 = 3\alpha_2.$

**Завдання 25.** Стационарний випадковий процес  $X(t)$  має

кореляційну функцію  $K_{X_{1,2}}(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \beta \tau \pm \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau| \right).$  Знайти

спектральну щільність  $S_{X_{1,2}}(\omega)$  і побудувати її графіки.

**Завдання 26.** Довести, що випадковий процес  $X(t) = e^{-at} \sin(\omega t + \varphi),$

де  $a, \omega$  – додатні детерміністичні величини, а  $\varphi$  – нормально розподілена на інтервалі  $[0, 2\pi]$  випадкова величина, є таким, що може бути диференційованим для усіх  $t > 0.$

**Завдання 27.** Заданий випадковий процес

$X(t) = 1 + t + At + Bt^2 + Ct^3,$  де  $D_A = 2, D_B = 1, D_C = 1.$  Визначити числові

характеристики першої похідної заданого процесу.

**Завдання 28.** Для випадкового процесу, який заданий у задачі 6, визначити числові характеристики випадкового процесу вигляду

$$Y(t) = \int_0^t X(s) ds.$$

**Завдання 29.** На вхід інтегрального пристрою подається випадковий процес  $X(t)$  з математичним сподіванням

$\langle X(t) \rangle = 0,2 \cos^2 \omega t$  і кореляційною функцією

$K_X(t_1, t_2) = 0,4 \cos \omega t_1 \cos \omega t_2.$  Визначити математичне сподівання і

кореляційну функцію на виході з пристрою.

**Завдання 30.** Диференційований у середньоквадратичному розумінні випадковий процес  $X(t)$  має кореляційну функцію  $K_X(t_1, t_2)$ .

Для випадкового процесу  $Y(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt}$  визначити математичне сподівання і кореляційну функцію. Що зміниться, якщо випадковий процес  $X(t)$  буде стаціонарним.

**Завдання 31.** Заданий випадковий процес  $X(t)$  з математичним сподіванням, яке дорівнює нулю і кореляційною функцією вигляду  $K_X(t_1, t_2) = e^{t_1 t_2}$ . Довести, що заданий процес нескінченно диференційований у середньоквадратичному розумінні.

**Завдання 32.** Знаючи кореляційну функцію  $K_X(t_1, t_2) = 2t_1 t_2 + t_1^2 t_2^2$  випадкового процесу  $X(t)$ , визначити кореляційну функцію його похідної.

**Завдання 33.** Знаючи кореляційну функцію  $K_X(t_1, t_2) = t_1 t_2 e^{t_1 + t_2}$  випадкового процесу  $X(t)$ , визначити взаємну кореляційну функцію процесу та його похідної.

**Завдання 34.** Для стаціонарного випадкового процесу  $X(t)$  відома кореляційна функція  $K_X(\tau) = 5(1 - \sin 3\tau^2)e^{-2\tau^2}$ . Визначити кореляційну функцію і дисперсію похідної  $X'(t)$ , а також взаємну кореляційну функцію  $K_{XX'}(\tau)$ .

**Завдання 35.** Визначити кореляційну функцію і дисперсію випадкового процесу  $Z(t) = \int_0^t X(s) ds$ , а також взаємну кореляційну функцію  $K_{XZ}(t_1, t_2)$ , якщо  $K_X(\tau) = 2 + 8 \cos 2\tau$ .

**Завдання 36.** Визначити дисперсію ординати центра тяжіння корабля під час хвиль, якщо  $\ddot{X}(t) + 2n\dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = \omega_0^2 Q(t)$ , причому

$n > 0, \omega_0^2 > n$ , де ордината хвильового профілю  $Q(t)$  є випадковим процесом із заданою кореляційною функцією

$$K_Q(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega\tau + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega\tau \right).$$

Побудувати графіки функцій  $K_Q(\tau), S_X(\omega)$ .

**Завдання 37.** Команда, що надходить на орган керування об'єктом, визначається виразом  $X(t) = k_1U(t) + k_2\dot{U}(t)$ , де  $k_1, k_2$  – детерміністичні функції. Визначити спектральну щільність  $S_X(\omega)$ , якщо

$$K_U(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

Побудувати графіки функцій  $K_U(\tau), S_U(\omega), S_{\dot{U}}(\omega)$ .

**Завдання 38.** Визначити математичне сподівання та кореляційну функцію розв'язку диференціального рівняння  $\dot{Y}(t) - a^2tY(t) = bX(t)$  при нульових початкових умовах, якщо  $\langle X(t) \rangle = t, K_X(\tau) = Ae^{-\alpha^2\tau^2}$ . Побудувати графіки функцій  $K_X(\tau), K_Y(t, t')$ .

**Завдання 39.** Стаціонарна випадкова функція  $X(t)$  зв'язана зі стаціонарною випадковою функцією  $Y(t)$  диференціальним рівнянням  $\ddot{X}(t) + 2n\dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = \omega_0^2 Y(t)$ , ( $\omega_0 \geq 0, n > 0$ ). Визначити спектральну щільність  $S_X(\omega)$  і взаємну кореляційну функцію  $K_{XY}(\tau)$ , якщо

$$S_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}.$$

**Завдання 40.** Деяка динамічна система описується диференціальним рівнянням вигляду  $5\dot{Y}(t) + Y(t) = 4\dot{X}(t) + 3X(t)$ . На вхід цієї системи подається стаціонарна випадкова функція із заданим математичним сподіванням  $\langle X(t) \rangle = 3$  і кореляційною функцією  $K_X(\tau) = 2e^{-\alpha|\tau|}$ . Визначити математичне сподівання, дисперсію та

спектральну щільність випадкової функції  $Y(t)$ . Побудувати графіки функцій  $K_X(\tau)$ ,  $K_Y(\tau)$ ,  $S_Y(\omega)$ .

### 6.7. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Наведіть визначення випадкової величини та випадкової функції (процесу).
2. За допомогою яких способів можуть бути задані випадкові процеси?
3. Дайте визначення дво- та триточкової сумісної щільності ймовірності випадкового процесу.
4. Наведіть основні властивості математичного сподівання випадкового процесу.
5. Який процес називають центрованим? Наведіть формулу для його визначення.
6. Що характеризує та як визначається дисперсія випадкового процесу?
7. Наведіть властивості дисперсії випадкового процесу.
8. Дайте визначення та наведіть формули для визначення кореляційної функції дійсних та комплексних випадкових процесів.
9. Наведіть властивості кореляційної функції випадкового процесу.
10. Дайте визначення та наведіть формули нормованої кореляційної функції та взаємної кореляційної функції.
11. Які процеси називають некорельованими?
12. Дайте визначення стаціонарних (у широкому розумінні та за Хінчиним) випадкових процесів. Наведіть приклади реальних стаціонарних процесів.



13. Якою є різниця між стаціонарними у вузькому та широкому розумінні випадковими процесами?
14. Наведіть властивості кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу.
15. Які процеси називають ергодичними? За якими формулами можуть бути визначені моментні функції таких процесів.
16. Дайте визначення спектральної щільності дійсного стаціонарного процесу. Наведіть основні властивості цієї функції.
17. Дайте визначення похідної випадкової функції за ймовірністю.
18. Дайте визначення похідної випадкової функції у середньоквадратичному розумінні.
19. Що необхідно і достатньо для диференційованості випадкової функції?
20. Наведіть умови існування кореляційної функції похідної стаціонарного випадкового процесу.

Таблиця А.1 – Основні функції розподілу випадкових величин та їх характеристики

Функція розподілу	Щільність розподілу	Параметри і моменти розподілу
Нормальний (гаусів) закон		
$\frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-\langle X \rangle)^2}{2\sigma_X^2}} dz$ $(-\infty < x < \infty)$	$\frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\langle X \rangle)^2}{2\sigma_X^2}}$	$\langle X \rangle, \sigma_X = \sqrt{D_X}$ – математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини $X$
Логарифмічно нормальний закон		
$F(x) = \Phi \left[ \frac{\ln x - \langle Z \rangle}{\sigma_Z} \right]$	$Z = \ln X, f(x) = 0, x \leq 0$ $f(x) = \frac{1}{x\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \langle Z \rangle)^2}{2\sigma_z^2}}, 0 < x < \infty$	$\langle X \rangle = e^{\langle Z \rangle + \sigma_z^2/2},$ $\sigma_X^2 = e^{2\langle Z \rangle + 2\sigma_z^2} (e^{\sigma_z^2} - 1),$ $v_X = \sigma_X / \langle X \rangle = (e^{\sigma_z^2} - 1)^{1/2}$ – коефіцієнт варіації
Закон Релея		
$1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ $(0 < x < \infty)$	$\frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma$ – параметр розподілу; $\langle X \rangle = \sigma \sqrt{0,5\pi},$ $\sigma_X = S \sqrt{2 - 0,5\pi}$
Експоненціальний закон		
$F(x) = 1 - e^{-b(x-a)}, x \geq a$ $F(x) = 0, x < a$	$f(x) = b \exp[-b(x-a)], x \geq a$ $f(x) = 0, x < a$	$\langle X \rangle = a + 1/b,$ $\sigma_X^2 = \frac{1}{b^2}, v_X = \frac{1}{1+ab}$

Продовження табл. А.1

Функція розподілу	Щільність розподілу	Параметри і моменти розподілу
Рівномірний розподіл в інтервалі $(a, b)$		
$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & x > b \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & x > b \end{cases}$	$\langle X \rangle = 0,5(a+b),$ $\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}, v_x = \frac{b-a}{\sqrt{3}(b+a)}$
Гамма-розподіл		
$F(x) = \frac{\gamma(a+1, x/b)}{\Gamma(a+1)},$ $\Gamma(a+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^a dt = a! -$ <p style="text-align: center;">гамма-функція,</p> $\gamma(a+1, x) = \int_0^x e^{-t} t^a dt - \text{неповна}$ <p style="text-align: center;">гамма-функція, табульована Пірсоном,</p> $F(x) = 1 - \sum_{n=0}^a e^{-x/b} (x/b)^n / n!,$ <p style="text-align: center;">якщо <math>a</math> – ціле число</p>	$f(x) = 0, x \leq 0,$ $f(x) = \frac{1}{b\Gamma(a+1)} \left(\frac{x}{b}\right)^a e^{-x/b},$ $0 \leq x \leq \infty, b > 0, a > -1$	$\langle X \rangle = b(a+1), \quad \sigma_x^2 = b^2(a+1),$ $v_x = \frac{1}{\sqrt{a+1}}.$ <p style="text-align: center;">Якщо відомі два перших моменти випадкової величини <math>X</math>, то</p> $a = (v_x^{-2} - 1), \quad b = v_x^2 \langle X \rangle$
«Хі-квадрат» – розподіл		
$F(x) = P(x^2 < x) = \frac{\gamma(\lambda, \alpha x)}{\Gamma(\lambda)}$	$f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x},$ $0 < x < \infty$	$\langle X \rangle = \frac{\lambda}{\alpha}, \quad \sigma_x^2 = \frac{\lambda}{\alpha^2}, v_x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

Продовження табл. А.1

Функція розподілу	Щільність розподілу	Параметри і моменти розподілу
Розподіл Вейбула		
$F(x) = 1 - e^{-\frac{(x-x_0)^b}{a}}, \quad x \geq x_0,$ при $x_0 = 0, b = 2, a = 2d^2$ – перетворюється на розподіл Релея	$f(x) = \frac{b}{a}(x - x_0)^{b-1} e^{-\frac{(x-x_0)^b}{a}}, \quad x \geq x_0,$ $f(x) = 0, \quad x < x_0$	При $x_0 = 0$ : $\langle X \rangle = a^{1/b} \Gamma(1 + 1/b),$ $\sigma_X^2 = a^{2/b} [\Gamma(1 + 2/b) - \Gamma^2(1 + 1/b)].$ Якщо відомі два перших моменти величини $x$ , то $1 + v_x^2 = \Gamma(1 + 2/b) / \Gamma^2(1 + 1/b),$ $a = [\langle X \rangle / \Gamma(1 + 1/b)]^b$

Таблиця А.2 - Значення функції Гауса  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	...0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9
0,0...	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1...	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2...	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3...	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4...	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5...	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6...	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7...	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8...	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9...	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0...	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1...	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2...	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3...	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4...	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5...	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6...	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7...	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8...	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9...	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0...	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1...	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2...	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3...	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4...	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5...	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6...	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7...	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8...	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9...	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0...	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1...	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2...	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3...	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4...	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5...	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6...	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7...	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8...	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9...	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Таблиця А.3 – Значення функції Лапласа

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,50	0,1915	1,00	0,3413	1,50	0,4332	2,00	0,4772	3,00	0,49865
0,01	0,0040	0,51	0,1950	1,01	0,3438	1,51	0,4345	2,02	0,4783	3,20	0,49931
0,02	0,0080	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357	2,04	0,4793	3,40	0,49966
0,03	0,0120	0,53	0,2019	1,03	0,3485	1,53	0,4370	2,06	0,4803	3,60	0,499841
0,04	0,0160	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382	2,08	0,4812	3,80	0,499928
0,05	0,0199	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394	2,10	0,4821	4,00	0,499968
0,06	0,0239	0,56	0,2123	1,06	0,3554	1,56	0,4406	2,12	0,4830	4,50	0,499997
0,07	0,0279	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418	2,14	0,4838	5,00	0,499997
0,08	0,0319	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429	2,16	0,4846		
0,09	0,0359	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441	2,18	0,4854		
0,10	0,0398	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452	2,20	0,4861		
0,11	0,0438	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,22	0,4868		
0,12	0,0478	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474	2,24	0,4875		
0,13	0,0517	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484	2,26	0,4881		
0,14	0,0557	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495	2,28	0,4887		
0,15	0,0596	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4505	2,30	0,4893		
0,16	0,0636	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515	2,32	0,4898		
0,17	0,0675	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525	2,34	0,4904		
0,18	0,0714	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535	2,36	0,4909		
0,19	0,0753	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545	2,38	0,4913		
0,20	0,0793	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554	2,40	0,4918		
0,21	0,0832	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564	2,42	0,4922		
0,22	0,0871	0,72	0,2642	1,22	0,3883	1,72	0,4573	2,44	0,4927		
0,23	0,0910	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582	2,46	0,4931		
0,24	0,0948	0,74	0,2703	1,24	0,3925	1,74	0,4591	2,48	0,4934		
0,25	0,0987	0,75	0,2734	1,25	0,3944	1,75	0,4599	2,50	0,4938		
0,26	0,1026	0,76	0,2764	1,26	0,3962	1,76	0,4608	2,52	0,4941		
0,27	0,1064	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616	2,54	0,4945		
0,28	0,1103	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625	2,56	0,4948		
0,29	0,1141	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633	2,58	0,4951		
0,30	0,1179	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641	2,60	0,4953		
0,31	0,1217	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649	2,62	0,4956		
0,32	0,1255	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656	2,64	0,4959		
0,33	0,1293	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664	2,66	0,4961		
0,34	0,1331	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671	2,68	0,4963		
0,35	0,1368	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678	2,70	0,4965		
0,36	0,1406	0,86	0,3051	1,36	0,4131	1,86	0,4686	2,72	0,4967		
0,37	0,1443	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693	2,74	0,4969		
0,38	0,1480	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699	2,76	0,4971		
0,39	0,1517	0,89	0,3133	1,39	0,4177	1,89	0,4706	2,78	0,4973		
0,40	0,1554	0,90	0,3159	1,40	0,4192	1,90	0,4713	2,80	0,4974		
0,41	0,1591	0,91	0,3186	1,41	0,4207	1,91	0,4719	2,82	0,4976		
0,42	0,1628	0,92	0,3212	1,42	0,4222	1,92	0,4726	2,84	0,4977		
0,43	0,1664	0,93	0,3238	1,43	0,4236	1,93	0,4732	2,86	0,4979		
0,44	0,1700	0,94	0,3264	1,44	0,4251	1,94	0,4738	2,88	0,4980		
0,45	0,1736	0,95	0,3289	1,45	0,4265	1,95	0,4744	2,90	0,4981		
0,46	0,1772	0,96	0,3315	1,46	0,4279	1,96	0,4750	2,92	0,4982		
0,47	0,1808	0,97	0,3340	1,47	0,4292	1,97	0,4756	2,94	0,4984		
0,48	0,1844	0,98	0,3365	1,48	0,4306	1,98	0,4761	2,96	0,4985		
0,49	0,1879	0,99	0,3389	1,49	0,4319	1,99	0,4767	2,98	0,4986		

## Список використаної літератури

1. Андрухаев Х. М. Сборник задач по теории вероятностей : учебное пособие / Х. М. Андрухаев ; под ред. А. С. Солодовникова. – М. : Просвещение, 1985. – 160 с.
2. Болотин В. В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений / В. В. Болотин. – М. : Стройиздат, 1982. – 352 с.
3. Боровков А. А. Теория вероятностей : учебное пособие для вузов / А. А. Боровков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука. гл. ред. физ.-мат. лит, 1986. – 432 с.
4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей : учеб. для вузов / Е. С. Вентцель. – 6-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1999. – 576 с.
5. Волков Л. И. Надежность летательных аппаратов : учеб. пособие / Л. И. Волков, А. М. Шишкевич. – М. : Высш. школа, 1975. – 296 с.
6. Гихман И. И. Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – М. : Наука, 1977 – 568 с.
7. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами : учебное пособие / А. И. Кибзун, Е. Р. Горянинова, А. В. Наумов, А. Н. Сиротин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 224 с.
8. Коган Е. А. Теория вероятностей : учебное пособие по дисциплине “Математика” для студентов всех специальностей / Е. А. Коган ; под ред. зав. кафедрой, чл.-корр. РАН Э. И. Григолюка. – М. : МАМИ, 2004. – 57 с.
9. Теория вероятностей в примерах и задачах : учебное пособие / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина, В. И. Соловьев и др. – М. : 2001. – 87 с.
10. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.
11. Лоэв М. Теория вероятностей / М. Лоэв. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1962. – 720 с.
12. Писаренко Г. С. Опір матеріалів : підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський ; за ред. Г. С. Писаренка. – К. : Вища школа, 1993. – 655 с.
13. Прохоров Ю. В. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы / Ю. В. Прохоров. – 2-е изд. – М. : Наука, 1967. – 496 с.
14. Ржаницын А. Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность / А. Р. Ржаницын. – М. : Стройиздат, 1978. – 239 с.
15. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистики и теории случайных функций : учебное пособие / под общей ред. А. А. Свешникова. – 4-е изд., стер. – СПб. : Изд-во «Лань», 2008. – 448 с.

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП.....</b>	<b>С.</b> <b>3</b>
<b>РОЗДІЛ 1</b>	
<b>ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ.....</b>	<b>5</b>
1.1. Основні визначення та теореми .....	5
1.2. Розв'язання типових задач за розділом 1.....	9
1.3. Додаткові завдання для самостійної роботи.....	31
1.4. Контрольні запитання.....	36
<b>РОЗДІЛ 2</b>	
<b>СПОСОБИ ОПИСУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН.....</b>	<b>37</b>
2.1. Випадкові величини.....	37
2.2. Характеристики розподілів випадкових величин....	37
2.3. Числові характеристики випадкових величин.....	41
2.4. Характеристичні функції випадкових величин.....	44
2.5. Розв'язання типових задач за розділом 2.....	46
2.6. Додаткові завдання для самостійної роботи.....	67
2.7. Контрольні запитання.....	72
<b>РОЗДІЛ 3</b>	
<b>ВЕКТОРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ.....</b>	<b>73</b>
3.1. Характеристики розподілу векторної випадкової величини.....	73
3.2. Умовні закони розподілу систем випадкових величин	77
3.3. Числові характеристики випадкових векторів.....	77
3.4. Розв'язання типових задач за розділом 3.....	80
3.5. Додаткові завдання для самостійної роботи.....	95
3.6. Контрольні запитання.....	101
<b>РОЗДІЛ 4. НЕВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ АРГУМЕНТІВ.....</b>	<b>102</b>
4.1. Невипадкові функції скалярних випадкових аргументів.....	102



4.2. Невипадкові функції векторних випадкових величин.....	104
4.3. Числові характеристики невідповідних функцій випадкових аргументів.....	106
4.4. Лінеаризація функцій випадкових аргументів.....	107
4.5. Розв'язання типових задач за розділом 4.....	110
4.6. Додаткові завдання для самостійної роботи.....	139
4.7. Контрольні запитання.....	145

## **РОЗДІЛ 5**

### **ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ 146**

5.1. Нерівність Чебишева і закон великих чисел.....	146
5.2. Теорема Ляпунова і Муавра-Лапласа.....	147
5.3. Розв'язання типових задач за розділом 5.....	152
5.4. Додаткові завдання для самостійної роботи.....	161
5.5. Контрольні запитання.....	166

### **РОЗДІЛ 6. ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ..... 167**

6.1. Способи опису випадкових процесів (функцій).....	167
6.2. Стационарні випадкові процеси. Властивість ергодичності.....	171
6.3. Спектральне подання випадкових функцій (процесів).....	172
6.4. Диференціювання та інтегрування випадкових функцій (процесів).....	174
6.5. Розв'язання типових задач за розділом 6.....	176
6.6. Додаткові завдання для самостійної роботи.....	192
6.7. Контрольні запитання.....	199

### **ДОДАТОК А. .... 201**

### **Список використаної літератури..... 207**