

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МОНОКРИСТАЛІВ**

На правах рукопису

**Князь Ігор Олександрович**

УДК 539.2

**ВПЛИВ КОРЕЛЯЦІЙ НА ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ  
ІНДУКОВАНІ ШУМОМ У ПРОСТОРОВО-РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМАХ**

01.04.02 – теоретична фізика

**АВТОРЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2006

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Сумському державному університеті Міністерства освіти і науки України.

**Науковий керівник** – кандидат фізико–математичних наук

**Харченко Дмитро Олегович,**

Сумський державний університет,

доцент кафедри моделювання складних систем.

**Офіційні опоненти:** доктор фізико–математичних наук

**Філь Дмитро Вячеславович,**

Інститут монокристалів НАН України,

провідний науковий співробітник відділу

теорії конденсованого стану речовини;

доктор фізико–математичних наук, професор

**Шматько Олександр Олександрович,**

Харківський національний університет

ім. В.Н. Каразіна, професор кафедри фізики НВЧ.

**Провідна установа** – Інститут фізики конденсованих систем НАН України, відділ

квантово-статистичної теорії процесів каталізу, м.Львів.

Захист відбудеться “15” лютого 2006 року о 14<sup>00</sup> годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.169.01 при Інституті монокристалів НАН України за адресою: 61001, м. Харків, проспект Леніна, 60.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Інституту монокристалів НАН України за адресою: 61001, м. Харків, проспект Леніна, 60.

Автореферат розісланий “12” січня 2006р.

Вчений секретар

спеціалізованої вченої ради

кандидат фізико-математичних наук

М.В. Добротворська

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Дослідження фазових переходів у системах, що перебувають під дією флуктуаційного середовища, належить до однієї з найбільш передових сфер теоретичної фізики. Це обумовлене намаганням дати оцінку ролі випадкових чинників, які безпосереднім чином впливають на процеси самоорганізації нерівноважних систем. Загалом вважається, що внутрішній (*адитивний*) шум є дезорганізуючим фактором, у той час теоретично та експериментально виявлено, що флуктуації середовища (*мультиплікативний* шум) суттєво впливають на процеси самоорганізації системи. Це приводить до *індукованих шумом* фазових переходів із виникненням станів, які не мають детерміністичного аналога. Такі явища спостерігаються у фізико-хімічних, біологічних та соціально-економічних системах (фазове розшарування, конвективні структури, стохастичний резонанс, самоорганізована критичність і фінансові крахи). Як з'ясовано останніми роками, опис поведінки таких систем досягається модифікацією методів теорії рівноважних фазових переходів.

Серед нерівноважних фазових переходів, що досліджуються і аналізуються у роботі, відокремлено індуковані шумом фазові переходи типу упорядкування/розупорядкування, а також реверсивні фазові переходи, які є результатом комбінованого ефекту, викликаного нелінійністю системи, спектральними характеристиками флуктуацій та просторовою взаємодією елементів системи. Такі явища складають багатообіцяючу сферу досліджень, оскільки дозволяють не лише виявити конструктивну роль флуктуацій, але й пояснити нетривіальні ефекти самоорганізації. Саме це робить актуальною тему дисертації, завдання якої полягає у розробленні нових та узагальненні відомих теоретичних підходів для встановлення механізмів виникнення упорядкованих станів у сильно нерівноважних системах.

Хоча інтерес до явищ індукованої шумом організації постійно зростає, відповідна теорія є незавершеною. До цього часу не сформульовані принципи, на підґрунті яких можливо було б у рамках єдиного підходу врахувати та описати дію декількох стохастичних джерел за умов наявності крос-кореляцій між ними. У зв'язку з цим актуальним стає завдання побудови єдиного формалізму для виявлення впливу шумів, які у широкому діапазоні спектральних характеристик достатньо правдоподібно моделюють реальні флуктуації, та з'ясування внеску їхніх кореляційних властивостей у хід упорядкування у цілому класі стохастичних систем. Вирішенню цього завдання присвячена дана робота.

**Зв'язок роботи із науковими програмами, планами, темами.** Робота пов'язана із виконанням таких держбюджетних тем: „Синергетична теорія конденсованих середовищ” (номер державної реєстрації 0103U000772, термін виконання 2003-2005pp.); „Дослідження впливу флуктуаційного середовища на процеси упорядкування у стохастичних системах” (номер державної реєстрації 0104U002435, термін виконання 2004-2005pp.).

**Мета і задачі дослідження.** Метою дисертаційної роботи є розроблення уніфікованого підходу, що дозволив би адекватним чином виявити та подати механізми самоорганізації розподілених стохастичних систем під дією флуктуаційних джерел за умови врахування їхніх кореляційних властивостей. Оскільки така самоорганізація розуміється у сенсі фазового переходу, то запропонований у роботі підхід розглядається як розвинення теорії нерівноважних фазових переходів для стохастичних систем із кольоровими мультиплікативними шумами. З метою загальності підходу вибрано синергетичну модель Лоренца-Хакена із флуктуаційними доданками кожної з мод та однопараметричну модель типу броунівської частинки, яка знаходиться у потенціалі Ландау з декількома стохастичними джерелами.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

- з'ясувати роль спектральних характеристик флуктуацій амплітуди гідродинамічної моди, спряженого поля та керуючого параметра у процесах упорядкування в системі типу Лоренца-Хакена;
- виявити умови реалізації реверсивних та реорієнтаційних фазових переходів, індукованих крос-кореляційними властивостями флуктуацій, у стохастичній системі із адитивним та мультиплікативним шумами;
- встановити клас стохастичних систем, в яких можливими стають нерівноважні фазові переходи, індуковані шумами;
- розглянути хід упорядкування у синергетичній системі Лоренца-Хакена при різному співвідношенні масштабів релаксації основних мод та крос-кореляціями між їхніми флуктуаціями;
- побудувати феноменологічну картину упорядкування у стохастичних системах із одним та декількома шумами за наявності крос-кореляцій між ними;
- у рамках синергетичних уявлень виявити роль флуктуаційних чинників, що спричиняють самоорганізацію дислокаційно-вакансійного ансамблю дефектів надміцного сплаву при інтенсивному зовнішньому навантаженні.

*Об'єктом* дослідження є процес упорядкування розподілених нелінійних стохастичних систем із сильною та слабкою дисипацією та кольоровими шумами.

*Предметом* дослідження є стохастичні джерела з кінцевим радіусом кореляції.

**Методи дослідження.** При побудові формалізму опису системи із одним кольоровим шумом використовувалися методи стохастичної динаміки та уніфікованої апроксимації кольорового шуму. Розвинення схеми, що дозволяє врахувати крос-кореляції між флуктуаціями, ґрунтується на застосуванні методу розвинення за кумулянтами Ван Кампена. Дослідження фазових переходів у розподілених стохастичних системах проводилося за допомогою теорії середнього поля, роз'язання трансцендентних рівнянь забезпечувалося застосуванням методу Ньютона. При аналізі синергетичних систем використовувалося адіабатичне наближення.

### **Наукова новизна одержаних результатів.**

1. Розвинуто метод уніфікованої апроксимації кольорового шуму для розподілених стохастичних систем, у рамках якого враховується вимога марковості вихідного процесу.
2. Показано, що синергетична система, подана моделлю типу Лоренца-Хакена в адіабатичному наближенні, зазнає індукованих шумом реверсивних фазових переходів. Виявлено, що адитивний кольоровий шум приводить до реверсивного фазового переходу при зміні часу автокореляції флуктуацій, тоді як мультиплікативні флуктуації приводять до реверсивних фазових переходів при зміні керуючих параметрів системи і виступають джерелом виникнення поглинаючого стану.
3. З'ясовано, що крос-кореляції адитивних та мультиплікативних флуктуацій є причиною реалізації реверсивних фазових переходів із виникненням метастабільної фази та реорієнтаційних переходів.
4. Проаналізовано клас моделей розподілених стохастичних систем типу броунівської частинки, що зазнають індукованих шумовими крос-кореляціями реверсивних фазових та реорієнтаційних переходів. Встановлено залежності параметрів моделі флуктуаційних джерел та сингулярності коефіцієнта тертя, що задають режими упорядкування в системі від керуючих параметрів.
5. У рамках синергетичного підходу досліджено ефект упорядкування за наявності декількох корельованих стохастичних джерел при різному співвідношенні релаксаційних параметрів основних мод. Проведено оцінку параметрів синергетичної моделі, які визначають області існування реверсивних фазових переходів із утворенням метастабільної фази та реорієнтаційних переходів.
6. Розвинуто феноменологічну концепцію фазового переходу, яка узагальнюється врахуванням авто- та крос-кореляційних властивостей флуктуацій. Показано, що крос-кореляції порушують симетрію ефективного термодинамічного потенціалу, що приводить до фазових переходів першого роду у системі із вихідним симетричним потенціалом.

**Практичне значення отриманих результатів.** Розвинута концепція, індукованого авто- та крос-кореляціями флуктуацій фазового переходу дозволяє прогнозувати поведінку систем, що перебувають у нерівноважних умовах. Результати можуть бути застосовані для пояснення самоорганізації у розподілених системах за рахунок дії шумового середовища, а також використані при виявленні особливостей реконструкції дефектних структур при пластичній деформації (утворення двійників тощо), реверсивних ефектів полімеризації, фазових переходів у сегнетоелектриках та самоорганізації соціально-економічних систем.

**Особистий внесок здобувача.** У роботах [1-13] участь автора дисертації полягала у вивченні літературних джерел, аналітичному та чисельному розв'язанні поставлених задач, а також у обговоренні отриманих результатів та роботі над публікаціями. У роботі [1] дисертантом

визначено клас одномодових моделей, що зазнають фазових переходів, індукованих крос-кореляцією шумів, отримано відповідні фазові діаграми, досліджено термодинамічну картину індукованого крос-кореляціями фазового переходу. У роботі [2] здобувачем чисельно досліджено картину упорядкування у синергетичній системі із крос-кореляційними властивостями флуктуацій. У роботах [3,6,13] дисертантом проведено чисельний розрахунок фазових та біфуркаційних діаграм, а також реалізовано комп'ютерний експеримент. У роботах [4,7,10-12] дисертантом чисельно одержано і досліджено фазові діаграми, що пов'язують основні керуючі параметри синергетичної моделі системи дефектів, яка перебуває під інтенсивним зовнішнім навантаженням у флуктуаційному середовищі. У роботі [5] автором дисертації досліджено фазові діаграми щодо розвинення термодинамічної концепції індукованого шумом фазового переходу. У роботах [8,9] дисертантом проведено теоретичне узагальнення ефекту впливу крос-кореляційних властивостей флуктуацій на картину самоорганізації.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на таких семінарах і конференціях:

- Міжнародній науковій конференції “Моделювання та оптимізація складних систем” (Київ, 2001);
- Всеукраїнській науковій конференції “ЕВРИКА-2003” (Львів, 2003);
- Міжнародній науковій конференції “Фізика і технологія тонких плівок” (Івано-Франківськ, 2003);
- XVI International School-Seminar “Spectroscopy of Molecules and Crystals” (Севастополь, 2003);
- Всеукраїнській науковій конференції “ЕВРИКА-2004” (Львів, 2004);
- Міжнародній науковій конференції “Statistical Physics 2005: Modern Problems and New Applications” (Львів, 2005).

**Публікації.** Основні результати роботи викладені у 7 статтях вітчизняних та закордонних журналів, з яких 1 у збірнику наукових праць, та 6 тезах конференцій.

**Структура дисертації.** Робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел із 129 найменувань. Повний обсяг дисертації складає 132 сторінки, у тому числі 35 рисунків.

## **ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ**

**У вступі** розкриваються сутність і стан наукової проблеми, мета і задачі дослідження, подається загальна характеристика дисертації.

**У першому розділі** “Методи опису просторово-неоднорідної стохастичної системи” проводиться огляд літератури щодо опису та методів дослідження поведінки стохастичних систем. Тут розглядається типовий підхід до математичного моделювання стохастичних систем та формулюється еволюційне рівняння для параметра стану однорідної та розподіленої систем,

визначаються моделі флуктуацій. Показано, що статистичний опис ефектів самоорганізації досягається переходом від континуальної моделі системи до ґраткової. При цьому рівняння еволюції густини ймовірності реалізації станів формулюється у дискретному за простором вигляді. Оскільки основна увага зосереджена на дослідженні стаціонарних станів, то відповідні характеристики визначаються застосуванням наближених методів теорії середнього поля та уніфікованої апроксимації кольорового шуму. Показано, що для дослідження нерівноважних фазових переходів можуть застосовуватися методи рівноважної статистики. Наводяться експериментальні дані щодо реверсивних фазових переходів, які є основним об'єктом дослідження. У висновках ставляться задачі щодо удосконалення методів аналізу індукованих шумом фазових переходів.

У другому розділі “Фазові переходи у стохастичній системі з одним шумом” у рамках удосконалення та розвинення методу уніфікованої апроксимації кольорового шуму досліджується картина реверсивних фазових переходів у синергетичній системі, що дає змогу узагальнити відомі літературні дані та виявити роль нелінійних чинників еволюції. Тут розвивається метод лінійного аналізу на стійкість для розподілених стохастичних систем із мультиплікативним кольоровим шумом. Окремо проводиться удосконалення методу уніфікованої апроксимації кольорового шуму, яке дозволяє врахувати властивості марковості у моделі флуктуацій, поданої процесом Орнштейна-Уленбека. Відповідно до запропонованої процедури одержується ефективне рівняння Фоккера-Планка та досліджується картина упорядкування в моделі Лоренца-Хакена. У розділі формулюється феноменологічна концепція реверсивного фазового переходу.

Основним об'єктом у розділі є система узагальнених диференціальних рівнянь, що подається найпростішою моделлю Лоренца-Хакена, яка представлена амплітудою гідродинамічної моди  $x$ , спряженим полем  $h$  та керуючим параметром  $e$ . Подана модель узагальнена урахуванням флуктуаційних чинників з амплітудами  $y_x, y_h, y_e$  відповідно та дифузиею гідродинамічної моди із коефіцієнтом  $D$ . У загальному вигляді така трипараметрична модель задається системою рівнянь:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x/\tau_x + a_x h + (D/2d)\Delta x + \sigma_x \zeta_x(t), \\ \dot{h} &= -h/\tau_h + a_h x e + \sigma_h \zeta_h(t), \\ \dot{e} &= (\varepsilon_0 - e)/\tau_e - a_e x h + \sigma_e \zeta_e(t),\end{aligned}\tag{1}$$

де крапка означає похідну за часом;  $d$  – вимірність простору;  $\Delta$  – лапласіан; перші доданки описують автономну релаксацію гідродинамічної моди  $x$  та спряженого поля  $h$  із часовими масштабами  $\phi_x, \phi_h$  до стаціонарних значень  $x_0=h_0=0$ ; керуючий параметр  $e$  релаксує до значення  $e_0$  із часом  $\phi_e$ ; мірою зворотного зв'язку є константи  $a_x, a_h, a_e > 0$ . Флуктуаційні сили  $\zeta_m(t)$ , де  $m = \{x, h, e\}$ , подано найпростішою моделлю кольорових флуктуацій – процесом Орнштейна-Уленбека

$$\tau_\mu \dot{\zeta}_\mu = -\zeta_\mu + \xi_\mu(t),\tag{2}$$

де  $\phi_m$  – час кореляції процесу  $\mathcal{J}_m(t)$ ,  $o_m(t)$  – білий шум зі стандартними властивостями  $\langle o_m(t) \rangle = 0$ ,  $\langle o_m(t) o_n(t') \rangle = \delta_{mn} \delta(t-t')$ .

Відомо, що більшості реалізованих у природі фізичних систем відповідає ситуація, коли спряжене поле і керуючий параметр, устигаючи релаксувати за короткий проміжок часу до своїх стаціонарних значень, слідує еволюції повільної моди  $x$ . Показано, що у такому випадку відповідно до принципу підпорядкування динаміка системи (1) визначається еволюцією повільної моди  $x$ , поданої рівнянням Ланжевена у вигляді

$$dx/dt = f(x) + (D/2d)\Delta x + g_e(x)y_e \mathcal{J}_e(t) + g_h(x)y_h \mathcal{J}_h(t) + g_x(x)y_x \mathcal{J}_x(t), \quad (3)$$

де детерміністична сила  $f(x) = -\partial V/\partial x$  пов'язується із синергетичним потенціалом

$$V(x) = 1/2[x^2 - \theta \ln(1+x^2)], \quad (4)$$

де  $u \equiv e_0 a_x a_h \phi_x \phi_h$  відіграє роль параметра зовнішнього впливу. Мультиплікативні функції у рівнянні (3) мають вигляд:  $g_x = 1$ ,  $g_h = (1+x^2)^{-1}$ ,  $g_e = x g_h$ .

У розділі досліджується вплив кожного із шумів на стан системи окремо. Для цього задіяно метод уніфікованої апроксимації кольорового шуму та теорію середнього поля, яка дозволяє подати дифузійну складову  $\Delta x$  елементарними актами взаємодії найближчих сусідів-вузлів на ґратці, що описується пружною енергією  $V_{int} = (c/2) \sum_j (x - x_j)^2$ , де  $c$  відіграє роль жорсткості ефективної пружинки, що зв'язує вузли ґратки; підсумовування виконується за положеннями найближчих сусідів. Тоді сила взаємодії найближчих вузлів  $f_{int} = -\partial V_{int}/\partial x = D(z-x)$ , де  $D = cz$  ( $z = 2d$  – координаційне число),  $z = \langle x \rangle$  є ефективним середнім полем і відіграє роль параметра порядку системи, що визначається стаціонарним розв'язком відповідного рівняння Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t; \eta) = -\frac{\partial}{\partial x} D_1 P(x, t; \eta) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_2 P(x, t; \eta) \quad (5)$$

із дрейфовою та дифузійною складовими

$$D_1 = \phi(x; \eta) + \varphi(x; \eta; \tau_\mu), \quad D_2 = \frac{\sigma_\mu^2}{2} c_\mu^2(x; \eta), \quad (6)$$

де  $\phi = (f + f_{int})/\gamma_0$ ,  $\gamma_0 = 1 - \tau_\mu (f + f_{int}) \frac{\partial}{\partial x} \ln((f + f_{int})/\sigma_\mu g_\mu)$ ,  $c_\mu = g_\mu/\gamma_0$ ,  $\varphi = -(\sigma_\mu^2/2) c_\mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \ln \gamma_0$ .

Другий член у дрейфовій компоненті  $D_1$  пов'язаний з урахуванням властивостей марковості білого шуму в процесі Орнштейна-Уленбека. Стаціонарна картина упорядкування досліджувалася розв'язанням рівняння самоузгодження за параметром порядку

$$\eta = \int x P_{st}(x, \eta) dx, \quad (7)$$

де  $P_{st}(x, \eta)$  – стаціонарний розв'язок рівняння Фоккера-Планка. Фазова діаграма системи задається розв'язком рівняння



$$\int x \frac{d}{d\eta} P_{sr}(x; \eta) \Big|_{\eta=0} = 1. \quad (8)$$

При дослідженні впливу адитивного шуму на стан синергетичної системи виявлено, що збільшення часу автокореляції адитивного шуму  $\mathcal{J}_x$  сприяє утворенню упорядкованого стану при великих  $D$  і, навпаки, переводить систему до неупорядкованого стану при малих  $D$  (на рис. 1а фаза, що відповідає упорядкованому стану, розміщена вище поверхні поділу фаз). Розв'язок рівняння самоузгодження наведено на рис. 1б, з якого бачимо, що при малих  $D$  фазовий перехід стає реверсивним при збільшенні значення часу кореляції шуму  $\phi$  (аналітичні розв'язки рівняння самоузгодження є симетричними відносно осі абсцис і не показані на графіках). Отримані аналітичні результати добре погоджуються з результатами незалежного чисельного експерименту (рис. 2). Комп'ютерне моделювання показало, що в точках фазового переходу значно зростає сприйнятливість  $\chi(\phi)$  і з'являються значні часові та просторові кореляції.

У випадку шуму спряженого поля істотною виявляється область малих значень  $\tau$ . Показано, що на відміну від випадку адитивного шуму у цій системі реалізуються один перехід уздовж осі часу кореляції шуму  $\phi$  і реверсивні переходи при зміні  $u$  і  $D$ . Відповідні фазові діаграми і поведінка параметра порядку подані на рис. 3. Результати аналітичних розрахунків підтверджуються чисельним моделюванням.

У випадку системи із шумом керуючого параметра флуктуації зникають при  $x=0$ . При цьому функція розподілу задається асимптотикою  $P \propto |x|^{-2(D-\theta+1)/\sigma^2-3}$ . Умова нормування стаціонарного розв'язку рівняння Фоккера-Планка та аналіз граничних функціоналів дифузійного процесу показали, що при  $\theta \leq D + \sigma^2 + 1$  у такій системі реалізується поглинаючий стан, який означає замерзання конфігураційних точок фазового простору системи при потраплянні в область  $x \ll 1$ . Упорядкування у системі стає можливим при  $\theta > D + \sigma^2 + 1$  і реалізується в певному інтервалі значень  $D$ . За отриманими фазовими діаграмами зроблено висновок, що система із шумом керуючого параметра зазнає два типи переходів: перший відповідає втраті ергодичності (виникнення поглинаючого стану), а другий є чисто індукованим шумом фазовим переходом і пов'язаний з комбінованим ефектом нелінійності, просторовою взаємодією та зафарбованими флуктуаціями зовнішнього середовища.

**У третьому розділі** “Фазові переходи, індуковані шумовою крос-кореляцією, у системі з нелінійною дисипацією” запропоновано удосконалення методу кінетичного рівняння, що враховує крос-кореляційні властивості флуктуацій у стохастичній системі типу броунівської частинки у потенціалі із нелінійним тертям. Досліджено клас моделей стохастичних систем, для яких встановлено фазові діаграми, що пов'язують параметри моделей флуктуаційних джерел та їх кореляційні властивості. Розглянуто макроскопічну картину упорядкування.

Основним об'єктом є система рівнянь для скалярної змінної  $x$ , яка подає узагальнену модель броунівської частинки у полі дії потенціалу  $F[x(\mathbf{r})]$  та сили тертя з коефіцієнтом в'язкості  $\zeta(x)$ :

$$\begin{aligned} m\dot{x} &= p, \\ \dot{p} + \frac{\gamma(x)}{m} p &= -\frac{\delta F}{\delta x(\mathbf{r}, t)} + g_\mu(x)\zeta_\mu(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (9)$$

де  $m$  – ефективна маса частинки;  $\mathbf{r}$  – просторова координата. Потенціал типу вільної енергії має такий вигляд:

$$F = \int \left[ V(x) + \frac{D}{4d} |\nabla x|^2 \right] d\mathbf{r}, \quad (10)$$

де  $V(x)$  – питомий термодинамічний потенціал. Останній доданок у другому рівнянні системи (9) подає суму ланжевенівських джерел за правилом Ейнштейна. Увагу у даному розділі зосереджено на часових кореляціях між гаусівськими шумами із кореляційною функцією  $\langle \zeta_\mu(\mathbf{r}, t) \zeta_\nu(\mathbf{r}', t') \rangle = C_{\mu\nu}(t-t')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ , де  $C_{\text{мн}}$  – матриця кореляційних функцій.

Для проведення статистичного аналізу картини самоорганізації головна мета полягала у конструюванні ефективного рівняння Фоккера-Планка для густини ймовірності  $P(x, p, t)$ , а потім переходу до функції розподілу, залежної від  $x$  та  $t$ , за допомогою якої в рамках теорії середнього поля досліджувалася поведінка параметра порядку за формулами (7), (8). Вихідним рівнянням для одержання макроскопічної густини ймовірності  $P(x, p, t)$  є кінетичне рівняння для мікроскопічного розподілу  $c(x_i, p_i, t)$  на  $d$ -вимірній ґратці із кроком  $\ell$ . Для системи (9) воно набуває вигляду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left( L + \hat{N}_\mu \zeta_\mu \right) \rho, \quad (11)$$

де оператори  $L$  та  $\hat{N}_\mu$  є такими:

$$L \equiv -\frac{p_i}{m} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \left( f_i + \frac{D}{2d\ell^2} \sum_j \hat{D}_{ij} x_j - \frac{\gamma_i}{m} p_i \right), \quad \hat{N}_\mu \equiv -g_{\mu i} \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad (12)$$

індекс  $i$  нумерує вузол ґратки;  $\ell^{-2} \sum_j \hat{D}_{ij} x_j$  – ґраткове подання оператора Лапласа. Використовуючи представлення взаємодії та усереднюючи мікроскопічний розподіл за флуктуаціями, одержано рівняння еволюції макроскопічного розподілу  $P = \langle c \rangle$  у вигляді

$$\frac{\partial P}{\partial t} = (L + C) P, \quad (13)$$

де  $C \equiv \sum_{n=0}^{\infty} C^{(n)}$ ,  $C^{(n)} \equiv M_{\mu\nu}^{(n)} (\hat{N}_\mu \hat{L}_\nu^n)$ ,  $\hat{L}_\nu^{(n+1)} = [L, \hat{L}_\nu^{(n)}]$ ,  $\hat{L}_\nu^{(0)} \equiv \hat{N}_\nu$ ,  $M_{\mu\nu}^{(n)} = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \tau^n C_{\mu\nu}(\tau) d\tau$ ,  $[\ , \ ]$  –

комутатор. Для подальших розрахунків використовувалася ієрархія дисипативних і детерміністичних/стохастичних складових:  $v_s t_s / x_s \equiv \epsilon^{-1} \gg 1$ ,  $\gamma_s t_s / m \equiv \epsilon^{-2} \gg \gg 1$ ,

$f_s t_s / v_s m = g_s t_s / v_s m \equiv \epsilon^{-1} \gg 1$ ,  $D_s x_s t_s / m v_s \ell^2 = \epsilon^{-1} \gg 1$ ,  $f_s / \gamma_s v_s = g_s / \gamma_s v_s \equiv \epsilon \ll 1$ ,  $D_s x_s / \gamma_s v_s \ell^2 \equiv \epsilon \ll 1$ ,

$v_s = p_s / m$ , де позначки з індексом  $s$  задають масштаб зміни параметрів. Обмежуючись складовими порядку  $\epsilon^2$  та використовуючи моменти  $P_n(x_i, t) \equiv \int v_i^n P(x_i, v_i, t) dv_i$ , для шуканої густини ймовірності  $P(x_i, t) = P_0(x_i, t)$  одержано рівняння Фоккера-Планка у канонічному вигляді

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(D_1 P) + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(D_2 P), \quad (14)$$

де ефективний дрейф та дифузійний коефіцієнт визначаються за формулами:

$$D_1 = \frac{1}{\gamma_i} \left\{ f_i + \frac{D}{2d} \sum_j \hat{D}_{ij} x_j \right\} + \left[ M_{\mu\nu}^{(0)} g_{\mu i} g_{\nu i} \frac{\partial \gamma_i^{-1}}{\partial x_i} + M_{\mu\nu}^{(1)} g_{\mu i} \left( \frac{\partial g_{\nu i}}{\partial x_i} \right) \right], \quad (15)$$

$$D_2 = \frac{M_{\mu\nu}^{(0)}}{\gamma_i^2} g_{\mu i} g_{\nu i}.$$

Таким чином, розвинений формалізм дає можливість врахувати не лише ефект крос-кореляції між флуктуаційними джерелами, а також виявити роль диспергуючого кінетичного коефіцієнта  $\mathcal{Z}(x)$ .

Для застосування розвинуеного формалізму розглянуто узагальнену систему, яка перебуває під дією адитивного та мультиплікативного шумів:  $g_a(x)=1$ ,  $g_m(x)=\text{sign}(x)|x|^a$ , де  $a \in [0,1]$ . Такий вибір мультиплікативної функції  $g_m(x)$  дозволяє розглянути відомі моделі теплових флуктуацій ( $a=0$ ), напрямленої перколяції ( $a=1/2$ ) та модель популяційної динаміки ( $a=1$ ). Питомий потенціал задається стандартним чином  $V(x)=-(e/2)x^2+x^4/4$ , де  $e$  – параметр зовнішнього впливу, який відіграє роль керуючого параметра і відповідає знерозміреній температурі, відліченій від критичного значення. Кінетичний коефіцієнт вибрано у формі  $\mathcal{Z}(x)=|x^2-1|^{\bar{b}}$ , де показник  $\bar{b}>0$  є мірою сингулярності дисипації в околі стану  $x=1$ . Матриця кореляційних функцій є такою:

$$C(\tau) = \begin{pmatrix} (\sigma_a^2 / \tau_a) e^{-|\tau|/\tau_a} & (\sigma_a \sigma_m / \tau_c) e^{-|\tau|/\tau_c} \\ (\sigma_m \sigma_a / \tau_c) e^{-|\tau|/\tau_c} & (\sigma_m^2 / \tau_m) e^{-|\tau|/\tau_m} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

де  $u_a$  та  $u_m$  – константи амплітуд адитивного та мультиплікативного шумів, відповідно;  $\phi_a$  та  $\phi_m$  – відповідні автокореляційні часи;  $\phi_c$  – крос-кореляційний час між шумами.

Аналіз впливу часу крос-кореляції на поведінку параметра порядку показав: у разі відсутності крос-кореляційного зв'язку між шумами параметр порядку поводить себе тривіальним чином – симетрично зростає при збільшенні керуючого параметра (штрихова крива на рис.4); включення незначних кореляцій між шумами призводить до порушення симетрії функції розподілу з появою негативного значення параметра порядку на границі короткочасової крос-кореляції (крива 1 на рис.4). Комбінований ефект корелюючих шумів, нелінійності системи та просторової взаємодії приводить до зміни знака параметра порядку при малих значеннях  $e$ . Дійсно, "" показують криві 2, 3, збільшення  $\phi_c$  зсуває негативний розв'язок у домен позитивних значень, приводячи до реорієнтаційного переходу при  $e=e_c$ . Окрім того, при  $e=e_c$  за механізмом переліду першого роду

з'являються додаткові позитивні розв'язки рівняння на параметр порядку. Вони зникають при  $e=e^c$ . Таким чином, в інтервалі  $\varepsilon \in [\varepsilon_c, \varepsilon^c]$  реалізується реверсивний фазовий перехід із виникненням нової фази (на рис.4 суцільна і точкова крива відповідають метастабільному та нестабільному розв'язкам). Подальше збільшення часу крос-кореляції приводить до сполучення областей стабільної і нестабільної фаз та формування гістерезисної петлі.

Аналіз побудованих фазових діаграм показав, що порушення симетрії простежується навіть за умови відсутності просторової взаємодії ( $D=0$ ). Встановлено, що зміна показника сингулярності кінетичного коефіцієнта відіграє таку саму роль, як і зміна часу крос-кореляції. Виявлено клас стохастичних систем з адитивним і мультиплікативним шумами, які зазнають нерівноважних фазових переходів. У рамках феноменологічного підходу отримано рівняння Ландау-Халатникова, за яким встановлено, що крос-кореляції є полем, що порушує симетрію ефективного термодинамічного потенціалу, який відіграє роль внутрішньої енергії.

**Розділ четвертий** “Синергетична система з декількома стохастичними джерелами” присвячений розгляду синергетичної системи Лоренца-Хакена із декількома стохастичними джерелами у адіабатичному наближенні при різному співвідношенні релаксаційних параметрів основних мод. Розвинуто метод кінетичного рівняння для дослідження сильно дисипативних систем. Як застосування поданого формалізму у розділі досліджується феноменологічна модель еволюції дислокаційно-вакансійного ансамблю у полі пластичної деформації надміцного сплаву, яка враховує взаємодію вакансій з дислокаціями, флуктуації концентрацій вакансій та деформації.

Аналіз моделі, яка описується рівнянням (3) з двома шумами (параметра порядку і керуючого параметра) показав, що за умови *однієї повільної моди* некорельовані флуктуації у системі Лоренца-Хакена приводять до реалізації індукованого шумом фазового переходу упорядкування за типом переходу другого роду. Характер поведінки системи є аналогічним поданому на рис.4.

Випадок, коли суттєву роль відіграють *дві співвимірні моди* (параметр порядку і спряжене поле), а керуючий параметр випробовує лише швидкі флуктуації в околі стаціонарного значення, відповідає наявності у системі двох повільних мод. Як фізичний приклад остання ситуація виникає при описі еволюції системи дефектів у полі пластичної деформації, коли параметр порядку задає густину дислокацій  $d$ , спряжене поле відповідає густині вакансій  $c$ , а керуючий параметр  $e$  являє собою деформацію і визначається зовнішнім навантаженням  $e_0$ .

У рамках найпростіших уявлень про релаксаційні процеси та механізми дефектоутворення (анігіляція вакансій у дислокації, утворення вакансій рухомими дислокаціями) синергетична модель дислокаційно-вакансійного ансамблю у полі пластичної деформації подається системою Лоренца-Хакена, де враховано неоднорідність розподілу вакансій з коефіцієнтом дифузії  $D_c$ , дебаївська релаксація віддзеркалюється автономною релаксацією поляризованих дислокацій,

виходом нерівноважних вакансій із смуги локалізованої деформації в об'єм зерна та релаксацією деформації до стаціонарного значення  $e_0$ . Когерентний зв'язок між дефектами враховано нелінійною складовою. Подана модель узагальнена введенням флуктуацій вакансій та деформації. Показано, що за умови домірності часових масштабів  $\phi_d$  і  $\phi_c$  у рамках принципу адіабатичного наближення еволюція системи описується рівнянням Ланжевена (9), що містить реактивну і дисипативну складові та задається нелінійним коефіцієнтом тертя  $\gamma(d) = 1 + \tau_c / \tau_d + \beta d^2$ , де  $\beta$  – позитивна стала, ефективний потенціал  $V(d)$  задається конструкцією  $d^4$ , причому адитивний шум відповідає флуктуаціям вакансій  $g_a = \text{const}$ , а мультиплікативний – деформації з  $g_m(d) \propto d$ . У рамках запропонованих у третьому розділі підходів виявлено, що завдяки флуктуаційному механізму дефектоутворення позитивні та негативні значення параметра порядку, що асоціюється із колективною модою, відповідають утворенню різних відносно вектора Бюргерса дислокаційних кластерів. Отримані результати якісно збіглися з відомими експериментальними даними [1\*], що свідчить про адекватність запропонованого підходу.

## ВИСНОВКИ

У результаті проведеного дослідження розвинуто теоретичні підходи, за допомогою яких стає можливим опис фазових переходів, індукованих шумами із урахуванням їх кореляційних властивостей. Основні висновки роботи зводяться до таких положень:

1. У рамках розвинутої схеми уніфікованої апроксимації кольорового шуму показано, що кольоровий шум індукує додаткову дрейфову складову у стохастичному рівнянні, яка зникає при переході до білого шуму.
2. На основі теорії середнього поля та адіабатичного наближення виявлено, що при адитивному шумі система зазнає реверсивного фазового переходу при зміні радіуса автокореляції флуктуацій, мультиплікативні шуми приводять до реверсивних фазових переходів або переходу до поглинаючого стану.
3. Сумісна дія адитивного та мультиплікативного корелюючих шумів приводить до упорядкування стохастичної системи у такий спосіб: при малій інтенсивності мультиплікативного шуму крос-кореляції сприяють фазовому перетворенню, а при великій – протидіють йому. Крос-кореляції адитивного та мультиплікативного шумів відіграють роль зовнішнього поля, величина якого визначається інтенсивностями та часом кореляції цих шумів. Наявність такого поля приводить до переорієнтації параметра порядку, реверсивного фазового переходу та зміні роду фазового переходу. Роль диспергуючого кінетичного коефіцієнта аналогічна до ролі часу крос-кореляції.

4. Поведінка системи з декількома корелюючими шумами може бути описана ефективним потенціалом типу вільної енергії, коефіцієнти розвинення якого визначаються знерозміреною температурою, коефіцієнтом дифузії, інтенсивностями шумів та їхніми часовими радіусами авто- та крос-кореляцій. Автокореляції шумів не порушують симетрію потенціалу вільної енергії, а крос-кореляції та нелінійність кінетичного коефіцієнта приводять до виникнення асиметричних складових у розвиненні вільної енергії за параметром порядку.

5. У стохастичній системі Лоренца-Хакена у випадку однієї повільної моди при нескорельованих флуктуаціях реалізується нерівноважний перехід другого роду при збільшенні параметра зовнішнього впливу та просторової неоднорідності. Крос-кореляція між флуктуаціями є причиною реорієнтаційних та реверсивних фазових переходів з утворенням метастабільної фази. При підвищенні часу крос-кореляції шумів реверсивність зникає, натомість система набуває можливості зазнавати фазових переходів першого роду.

6. Стохастична система Лоренца-Хакена у випадку двох повільних мод зводиться до ефективної системи броунівської частинки із нелінійним коефіцієнтом тертя, адитивним та мультиплікативним шумами. З'ясовано, що при зростанні параметра зовнішнього впливу у системі реалізуються реорієнтаційні та реверсивні фазові переходи.

## ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1\*. Коротаев А.Д., Тюменцев А.Н., Гончиков В.Ч., Олемской А.И. Закономерности формирования субструктуры в высокопрочных дисперсно-упрочненных сплавах // Изв. вузов. Физика. – 1991. – Т.34, №3. – С.81-94

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Olemskoi A.I., Kharchenko D.O. and **Князь I.A.** Phase transitions induced by noise cross–correlations // Phys. Rev. E. – 2005. – V.71, №4. – P.041101(1–12).

2. Kharchenko D.O., **Князь I.A.** Fluctuation reconstruction of phase transition // Eur. Phys. J. B. – 2003. – V.32. – P.375–382.

3. Харченко Д.О., **Князь И.А.** Фазовые переходы с нарушением симметрии в синергетической системе с флуктуационным воздействием // Металлофизика и новейшие технологии. – 2002. – Т.24, №3. – С.389–405.

4. Харченко Д.О., **Князь I.O.** Флюктуаційні фазові переходи в синергетичній системі дефектів // Журн. фіз. досл. – 2004. – Т.8, №4. – С.299–307.

5. Харченко Д.О., **Князь І.О.** Термодинамічна концепція індукованого шумом фазового переходу // Вісник СумДУ. –2004. – №10. – С.231–237.
6. Харченко Д.О., **Князь І.А.** Индуцированные шумом переходы в синергетической системе: приближение среднего поля // Вісник СумДУ. –2001. – №3–4. – С.33–37.
7. Kharchenko D.O., **Князь І.А.** Fluctuation–induced reconstruction of defect structure // in Proc. of SPIE, edited by Galyna O. Puchkovska, Tatiana A. Gavrilko, Olexandr I. Lizengevich. – 2004. – V.5507. – P.17–25.
8. Olemskoi A.I., Kharchenko D.O. and **Князь І.А.** Nonequilibrium phase transitions in stochastic systems induced by noise cross–correlations // Statistical Physics 2005: Modern Problems and New Applications. – Львів, Інститут конденсованих середовищ НАН України. – 2005. – С.100.
9. Харченко Д.О., **Князь І.О.** Фазові переходи індуковані крос–кореляціями // Збірник тез доповідей Всеукраїнської наукової конференції “Еврика 2004”. – Львів: ЛНУ. – 2004. – С.45–46.
10. Kharchenko D.O., **Князь І.А.** Fluctuation reconstruction of phase transition // in Proceedings of the International School–Seminar “Spectroscopy of Molecules and Crystals”. – Sevastopol. – 2003. – P.54.
11. Харченко Д.О., **Князь І.О.** Вплив флуктуацій на самоорганізацію дефектної структури // Збірник тез доповідей Всеукраїнської наукової конференції “Еврика 2003”. – Львів: ЛНУ. – 2003. – С.29.
12. Харченко Д.О., **Князь І.А.** Эволюция дефектной структуры под действием флуктуационных возмущений // Збірник тез Міжнародної наукової конференції “Фізика і технологія тонких плівок”. – Івано–Франківськ: Місто НВ. – 2003. – С.124–125.
13. Харченко Д.О., **Князь І.О.** Моделирование фазовых переходов в синергетичній системі із флуктуаційним середовищем // Збірник тез Міжнародної наукової конференції “Моделирование та оптимізація складних систем”. – Київ: КНУ. – 2001. – Т.1. – С.32–33.

## АНОТАЦІЯ

**Князь І.О. Вплив кореляцій на фазові переходи індуковані шумом у просторово-розподілених системах. – Рукопис.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Інститут монокристалів НАН України, Харків, 2006.

Дисертація присвячена опису кореляційних ефектів, які визначають перебіг фазових переходів, індукованих шумами у просторово-неоднорідних системах. Для кольорового шуму запропонована модифікація методу уніфікованої апроксимації, яка базується на марковській природі стохастичного процесу. Запропонований підхід застосовано до аналізу впливу

спектральних характеристик шуму на картину впорядкування у синергетичній системі Лоренца-Хакена. З'ясовано, що адитивний кольоровий шум індукує протікання реверсивного фазового переходу при зміні його часу автокореляції. Мультиплікативні шуми приводять до утворення впорядкованого стану, що існує в певному інтервалі значень керуючих параметрів, виявлено умови переходу системи у поглинаючий стан. Розвинуто метод кінетичного рівняння для аналізу системи з декількома статистично залежними стохастичними джерелами. З'ясовано, що завдяки крос-кореляції шумів у системі реалізуються реорієнтаційні та реверсивні фазові переходи із виникненням метастабільної фази. На основі теорії середнього поля показано, що крос-кореляція флуктуацій спричиняє виникнення додаткового поля, що порушує симетрію ефективного потенціалу. Розвинуті підходи застосовані для пояснення перебудови дефектної структури у надмісних сплавах при пластичній деформації.

**Ключові слова:** просторово-розподілена система, кольоровий шум, крос-кореляція флуктуацій, індукований шумом фазовий перехід.

#### АННОТАЦІЯ

**Князь И.А. Влияние корреляций на фазовые переходы, индуцированные шумом в пространственно-распределенных системах. – Рукопись.**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика. – Институт монокристаллов НАН Украины, Харьков, 2006.

Диссертация посвящена исследованию корреляционных эффектов, определяющих течение фазовых переходов, индуцированных шумами в системах, обладающих пространственной неоднородностью.

Для цветного шума предложена модификация метода унифицированной аппроксимации, основанная на марковской природе стохастического процесса. Это позволяет перейти от немарковского цветного к белому шуму, анализ которого достигается использованием стандартных методов теории марковских процессов. Получено уравнение движения, содержащее эффективную дрейфовую составляющую, обусловленную корреляциями шума. Развитый подход используется при анализе спектральных свойств шума при самоорганизации систем, значительно удаленных от равновесия. Тестирование метода проведено на трехпараметрической системе Лоренца-Хакена, обобщенной введением аддитивных цветных шумов параметра порядка, сопряженного поля и управляющего параметра, а также учетом пространственной неоднородности параметра порядка. Показано, что цветной аддитивный шум приводит к реверсивному фазовому переходу с нарушением симметрии, происходящим при увеличении времени автокорреляции. Наличие мультиплікативного шума сопряженного поля приводит к реверсивным фазовым переходам при изменении параметра внешнего воздействия и параметра межчастичного взаимодействия.



Мультипликативные флуктуации управляющего параметра высокой интенсивности приводят к появлению поглощающего состояния. Аналитические результаты подтверждаются численным экспериментом.

Найдено эффективное уравнения Фоккера-Планка для диссипативных пространственно-распределенных систем с несколькими коррелирующими шумами. Его тестирование проведено для броуновской частицы, находящейся в  $x^4$ -потенциале с диспергирующим коэффициентом вязкости, аддитивным и мультипликативным шумами. В приближении среднего поля показано, что в стационарном случае кросс-корреляции флуктуаций приводят к реверсивному фазовому переходу и реориентационным переходам. Определен класс стохастических систем, претерпевающих неравновесные переходы такого рода. Установлено взаимное влияние диспергирующего кинетического коэффициента и кросс-корреляции флуктуаций на процесс упорядочения. Показано, что в приближении среднего поля поведение системы с несколькими коррелирующими шумами представляется эффективным потенциалом, играющим роль свободной энергии. Выяснено, что кросс-корреляции шумов индуцируют эффективное поле, нарушающее симметрию свободной энергии.

Развитый подход применен к синергетической системе с несколькими стохастическими источниками, исследование которой проведено при различном соотношении времен релаксации. Установлено, что для системы с одной медленной модой и некоррелирующими флуктуациями упорядоченное состояние обеспечивается ростом параметров внешнего воздействия и межчастичного взаимодействия. В свою очередь, кросс-корреляция шумов приводит к реориентационным и реверсивным переходам. При этом рост времени кросс-корреляции способствует трансформации реверсивных переходов в переходы первого рода. С другой стороны, повышение интенсивности мультипликативного шума способствует реализации реориентационных и реверсивных фазовых переходов. Показано, что система с двумя медленными модами сводится к эффективной модели броуновской частицы с нелинейным трением, аддитивным и мультипликативным шумами. При этом рост параметра внешнего воздействия способствует реориентационным и реверсивным фазовым переходам. Предложена феноменологическая модель фазового перехода, построены фазовые диаграммы и установлена их связь с формой термодинамического потенциала. Физическим приложением предложенной схемы являются процессы перестройки дислокационно-вакансионного ансамбля дефектов под действием интенсивной нагрузки сверхпрочных сплавов. Показано, что в такой системе коллективная мода определяет формирование дислокационных кластеров с фиксированным направлением вектора Бюргера.

**Ключевые слова:** пространственно-распределенная система, цветной шум, кросс-корреляция флуктуаций, индуцированный шумом фазовый переход.

**ABSTRACT**

**Knyaz I.A. Correlation effects in phase transitions induced with noise in spatially extended systems. – Manuscript.**

Thesis for a candidate's degree on specialty 01.04.02 – theoretical physics. – Institute for Single Crystals, NAS of Ukraine, Kharkiv, 2006.

The dissertation is devoted to elaborating theoretical approaches to describe noise induced phase transitions with taking into account cross-correlations of fluctuations. The proposed approach is applied to analyze an influence of spectral properties of noises on a picture of ordering synergetic system of Lorenz-Haken type. It is shown the additive coloured noise induces reentrant phase transition due to a change of its autocorrelation time, whereas multiplicative noise leads to formation of ordered state in a special domain of parameter of external action; conditions of transition to an absorbing state are defined. A general approach for treating the spatially extended systems with the nonlinear damping and correlations between additive and multiplicative noises is developed. It is shown that continuous and reentrant noise induced transitions take place due to the cross-correlation influence. It appears that the cross-correlations play the role of bias field which can induce a chain of phase transitions of different type. Within the mean-field approach, we explain the system behavior by effect of an effective potential being free energy type. Obtained results is applied to investigate reconstruction of ensemble of defects (driven-dislocation-vacancy-ensemble) in the field of plastic flow.

**Key words:** spatially extended system, coloured noise, cross-correlation of fluctuations, noise induced phase transition.

Підп. до друку 10.11.2005 р.

Наклад 100 прим.

Замовлення № 634.

Формат 60×90/16.

Обл.-вид. арк. 0,9.

Ум. друк. арк. 1,1.

Вид-во СумДУ. Р.с. №34 від 11.04.2000р.

40007, м. Суми, вул. Римського-Корсакова, 2

Друкарня СумДУ.

40007, м. Суми, вул. Римського-Корсакова, 2