

Імітація та прогнозування економічного зростання за допомогою моделі трисекторної економіки типу Солоу

У статті розглянуто неперервну модель економічного зростання типу Солоу для трисекторної економіки. Невідомі функції ВВП для секторів специфіковані у вигляді розкладання траєкторії руху на трендову, періодичну та стохастичну складові. Зв'язок між секторами встановлюється за допомогою ВВП – системи. Апробація моделі проведена на статистичних даних реальних макроекономічних систем.

Ключові слова: моделювання, неперервна модель, декомпозиція, рафінування, прогнозування.

Вступ

Моделі економічного зростання посідають важливе місце в економіко-математичних дослідженнях. Добре відомими є моделі Харрода-Домара, Філіпа, Хікса, Самуельсона та ін. Важливий вклад у вивчення моделей економічного розвитку внесли Ф. Рамсей, Е. Янг, Ф. Найт, Й. Шумпетер [1]. За дослідження моделей економічного зростання Р. Солоу став лауреатом Нобелівської премії з економіки 1987 року. Модель Солоу [2] описує агреговану замкнену економіку і оптимізує економічне зростання односекторної економіки [3].

Основний показник розвитку будь-якої країни – валовий внутрішній продукт (ВВП), темпи приросту якого якісно відображають загальний стан економіки. Для аналізу економічної ситуації доцільно розглядати окремі сектори економіки, зв'язок між якими встановлюється за допомогою ВВП. Виділення окремих секторів пов'язане з тим, що шляхи їх розвитку різні. Отже, ідентифікація моделі економічного зростання буде більш точною у тому випадку, коли будуть враховані особливості кожного сектору та основний показник розвитку.

Постановка проблеми

У загальному випадку економіка країни є m -секторною. Для відображення якісних характеристик m -секторної економіки аналіз економічного зростання треба проводити при $m \geq 3$ [4, 5]. У даній роботі пропонується економіку країни умовно поділити на три сектори: промисловість і сільське господарство (Manufacturing and Agriculture), сектор торгівлі та фінансових операцій (Trade; Real estate and business activities; Financial intermediation and insurance) та сектор послуг (Administration, compulsory social security; Hotels and restaurants; Education; Health and social work). Кожний сектор виробляє продукти як для ринку кінцевого споживання, так і для інвестиційного ринку. В першому випадку продукти споживаються домогосподарствами, а в другому – розподіляються між цими трьома секторами. Загальна схема грошових і товарних потоків для трисекторної економіки зображена на рис. 1.

Назаренко Олександр Максимович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри моделювання складних систем Сумського державного університету; Манько Наталія Миколаївна, студентка Сумського державного університету.

© О.М. Назаренко., Н.М. Манько, 2009



Рис. 1. Схема грошових потоків у закритій трисекторній економіці

Нехай X_{τ}^i – основні фонди i -го сектору ($i=1, 2, 3$) в момент часу $\tau=0, 1, 2, \dots$ проміжку $\tau \in [\tau_0, \tau_k]$, тоді приріст основних фондів ΔX_{τ}^i є чистими інвестиціями в i -й сектор в момент часу τ . Зношення основних фондів (амортизація) дорівнює $\lambda_i X_{\tau}^i$, де λ_i – коефіцієнт амортизації i -го сектору. Якщо загальний обсяг інвестицій I_{τ}^i спрямовується на заміну зношених основних фондів та на їх приріст, то для кожного сектору буде справедливою модель Солоу з дискретним часом [2]:

$$\Delta X_{\tau}^i = \lambda_i X_{\tau}^i + I_{\tau}^i. \quad (1)$$

Тут балансові рівняння (1) виконуються в цілочислових точках $\tau=0, 1, 2, \dots$ проміжку $\tau \in [\tau_0, \tau_k]$.

Якщо припустити, що $I_{\tau}^i = b_i Y_{\tau}^i$ [6], де Y_{τ}^i – ВВП i -го сектору в момент часу $\tau=0, 1, 2, \dots$ проміжку $\tau \in [\tau_0, \tau_k]$, b_i – коефіцієнт, який вказує, скільки відсотків ВВП спрямовується на інвестування, модель (1) можна записати у вигляді

$$\Delta X_{\tau}^i = \lambda_i X_{\tau}^i + b_i Y_{\tau}^i. \quad (2)$$

Виникає питання, який вигляд має неперервний аналог моделі (2). У класичних моделях інвестиційного розвитку [7] аналогом дискретної моделі (2) розглядають диференціальне рівняння вигляду $\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \Lambda \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B} \mathbf{y}(\tau)$, $\tau \in [\tau_0, \tau_k]$, де $\mathbf{x}(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))'$, $\mathbf{y}(\tau) = (y_1(\tau), y_2(\tau), y_3(\tau))'$, Λ і \mathbf{B} – діагональні матриці з діагональними елементами λ_i і b_i ($i=1, 2, 3$) відповідно. Однак практичні дослідження показують, що це рівняння потребує коректування. Лінеаризовану форму диференціального рівняння $\dot{\mathbf{x}}(\tau) = f(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{y}(\tau))$ можна подати у вигляді:

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \Lambda \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B} \mathbf{y}(\tau) + \mathbf{a}_0, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_k]. \quad (3)$$

Тут функція ВВП $\mathbf{y}(\tau)$, матриця амортизацій Λ , матриця \mathbf{B} та сталий вектор \mathbf{a}_0 заздалегідь невідомі.

У даній постановці не враховується взаємозв'язок між секторами, тому потрібна додаткова інформація, яка б враховувала цей взаємозв'язок. Додатковою інформацією макроекономічної динаміки можуть бути значення Y_τ потенціалу Y даної системи в точках $\tau=0, 1, 2, \dots$ проміжку $\tau \in [\tau_0, \tau_k]$. Як потенціал Y вибирають, як правило, валовий внутрішній продукт макроекономічної системи [8]. Пропонується розглядати лінійний зв'язок між ВВП Y та ВВП обраних секторів

$$Y = c_0 + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) + \zeta, \quad (4)$$

де ζ – випадкові відхилення (шуми).

Отже, задача полягає у відновленні закону руху динамічної моделі (3) та встановленні залежності (4), виходячи з деякої статистичної інформації [9]. Припускається, що у цілочислових точках проміжку $[\tau_0, \tau_1]$ з $[\tau_0, \tau_k]$ задаються дані про динаміку основних фондів, ВВП секторів та ВВП країни.

При числовій реалізації моделей, метою яких є прогнозування, граничну умову $\mathbf{x}(\tau_*) = \mathbf{x}_*$, необхідну для розв'язання диференціального рівняння (3), зручно задовольняти в момент часу, що слідує за періодом ідентифікації. У даному випадку ідентифікація проводиться на проміжку $[\tau_0, \tau_1]$. Тому припустимо, що $\tau_* = \tau_1 + 1$. Тоді якщо зробити заміну $t = \tau - \tau_*$, то це дозволяє ідентифікацію моделі (3), (4) проводити на проміжку $t \in [-N, -1]$, а прогнозні значення обчислювати на проміжку $[0, \tau_k - \tau_*]$. При цьому гранична умова подається у вигляді $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_*$.

1. Специфікація функцій ВВП кожного сектору

Основною проблемою на етапі побудови моделі інвестиційного розвитку (3) є ідентифікація невідомої вектор-функції ВВП $\mathbf{y}(t)$ та сталих коефіцієнтів. У даній роботі пропонується специфікацію функції $\mathbf{y}(t)$ проводити методом розкладання (декомпозиції) траєкторії руху на трендову, періодичну та стохастичну (шуми) складові [9]. Періодична складова задається як лінійна комбінація гармонік з різними амплітудами коливань. Як трендову складову, як правило, вибирають експоненціальний тренд. Моделювання макроекономічного розвитку за вказаною методикою проведено в [10].

Отже, для специфікації вектор-функції ВВП пропонується така регресійна модель:

$$\mathbf{y} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 e^{\omega t} + \mathbf{d}_3 \cos \omega t + \mathbf{d}_4 \sin \omega t + \mathbf{d}_5 \cos 2\omega t + \mathbf{d}_6 \sin 2\omega t + \boldsymbol{\varepsilon}(t). \quad (5)$$

Тут згідно з [9] оптимальні значення частот ω належать множині $\{2\pi k / N, k = 1, 2, \dots\}$, де N – об'єм статистичної вибірки.

Оскільки оцінювання невідомих коефіцієнтів розкладання (5) можна провести звичайним МНК, то це дає можливість застосувати тести перевірки статистичних гіпотез щодо значущості МНК-оцінок і обчислити коефіцієнти детермінації R^2 моделі. У даній роботі значущість МНК-оцінок перевіряється за допомогою t -статистики Стьюдента, для чого проводиться рафінування моделі (5), при якому послідовно відкидаються незначущі коефіцієнти розкладання [11].

2. Ідентифікація диференціальних рівнянь для основних фондів

Якщо функції ВВП $y(t)$ специфіковані за формулою (5), то проблема ідентифікації моделі (3) зводиться до оцінювання невідомих матриць Λ і \mathbf{B} та вектора \mathbf{a}_0 . У макроекономічних моделях [7] прийнято вважати коефіцієнти амортизації λ_i сталими величинами, які можна обчислити, усереднюючи відповідні амортизації на заданому проміжку за даними вибірки. Враховуючи той факт, що при практичних дослідженнях значення похідних $\dot{\mathbf{x}}(t)$ невідомі, а відомими є статистичні дані відносно основних фондів X_τ^i у цілочислових точках проміжку $[\tau_0, \tau_1]$, виникає необхідність у розв'язанні системи диференціальних рівнянь (3). Якщо аргументом вибрати уявний час $t = \tau - \tau_*$, то розв'язок системи (3) можна записати у вигляді [12]:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 e^{\Lambda t} + \mathbf{V} e^{\Lambda t} \int_0^t e^{-\Lambda \tau} \mathbf{y}(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Тут $\mathbf{y}(t)$ – вектор-функція регресії, оцінена в моделі (5); параметри \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 і $\mathbf{V} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3)$ заздалегідь невідомі.

Для оцінювання невідомих коефіцієнтів в (6) необхідно скласти відповідну регресійну модель і оцінити кожне регресійне рівняння окремо. Виникаючі регресійні рівняння зручні для практики, оскільки містять по три невідомих коефіцієнти. Після МНК-оцінювання можна вважати, що рівняння руху (3) ідентифіковано.

Аналогічно методом найменших квадратів оцінюється лінійна регресійна модель (4), в результаті чого буде ідентифіковано функцію ВВП $Y(t)$.

3. Метод оберненого зв'язку між динамічною моделлю та регулятором

У ході числової реалізації побудованих алгоритмів оптимальне значення параметра керування v вибирається за допомогою оберненого зв'язку між динамічною моделлю (4)-(6) і регулятором, за який у роботі розглядається мультикритеріальний регулятор. Він налаштовує модель на максимальні значення коефіцієнтів детермінації R^2 та на мінімальні довжини довірчих інтервалів прогнозу Δ [11]. Крім того, регулятор фільтрує множину значень v з метою отримання такого значення цього параметра, щоб побудована модель була нечутливою до незначної зміни вхідної інформації. Для цього обчислюється індекс обумовленості CI матриць, які обертаються в МНК. При практичних дослідженнях величина CI набирає значення від декількох одиниць до декількох тисяч і більше. У даній роботі вибирається критерій $CI < 35$. Схема мультикритеріального регулятора зображена на рис. 2.

4. Числова реалізація побудованих алгоритмів

Апробація даної моделі і методів проводилася на рядах динаміки макроекономічного розвитку Фінляндії [13]: ідентифікація здійснювалася на базовому періоді часу 1975-2003 рр. ($N=29$), а прогнозні значення обчислювалися за 2004 рік ($t=0$). Вхідні дані були знерозмірені шляхом ділення поточних даних для основних фондів та ВВП на відповідні значення у початковому 1975 році.

Для знаходження сталих коефіцієнтів λ_i по кожному сектору економіки використовувалися статистичні дані у вигляді часових рядів загального обсягу капіталу (Gross capital stock) і знайдені середні значення відношення приросту основних фондів до загального обсягу капіталу на базовому періоді. Значення коефіцієнтів амортизації,

які використовувалися в моделі, дорівнюють $\lambda_1 = 0,0564$ для промисловості і сільського господарства, $\lambda_2 = 0,0888$ для сектору торгівлі та фінансових операцій і $\lambda_3 = 0,0751$ для сектору послуг.

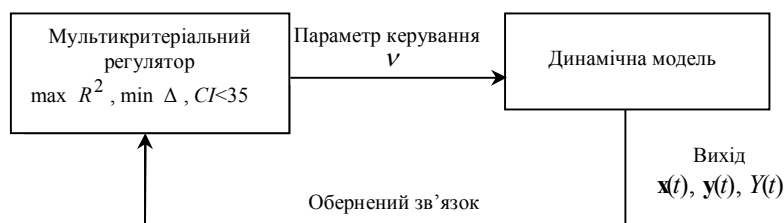


Рис. 2. Схема мультикритеріального регулятора і оберненого зв'язку

Взаємодія мультикритеріального регулятора з динамічною моделлю за допомогою оберненого зв'язку (рис. 2) приводить до оптимального значення $v = 0,0102$. При такому значенні v розкладання на складові функцій ВВП після рафінування (відкидання незначущих коефіцієнтів розкладання) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= -11,2104 + 16,6598 e^{0,0102t} - 0,3334 \sin(0,4333t), \\
 &\quad (0,49896) \quad (0,57740) \quad (0,05987) \\
 y_2(t) &= -27,0829 + 37,0812 e^{0,0102t} + 0,2642 \cos(0,2167t) + \\
 &\quad (0,44971) \quad (0,52042) \quad (0,04961) \\
 &+ 0,3094 \cos(0,4333t) - 0,2745 \sin(0,4333t), \\
 &\quad (0,04971) \quad (0,05375) \\
 y_3(t) &= -27,1515 + 37,4169 e^{0,0102t} + 0,3450 \cos(0,4333t). \\
 &\quad (0,33829) \quad (0,39127) \quad (0,04057)
 \end{aligned} \tag{7}$$

Тут внизу під МНК-оцінками коефіцієнтів у дужках зазначені відповідні стандартні помилки цих оцінок. Неважко переконатися, що критерій Стьюдента значущості МНК-оцінок виконується для всіх коефіцієнтів розкладання (рівень значущості $\alpha = 0,05$, число ступенів вільності змінюється від 24 до 26). Обчислені значення коефіцієнтів детермінації вказують на досить високу якість регресійних моделей для функцій ВВП кожного сектору. Модельні криві та відповідні діаграми розсіювання на проміжку $t \in [-N, -1]$ зображені на рис. 3.

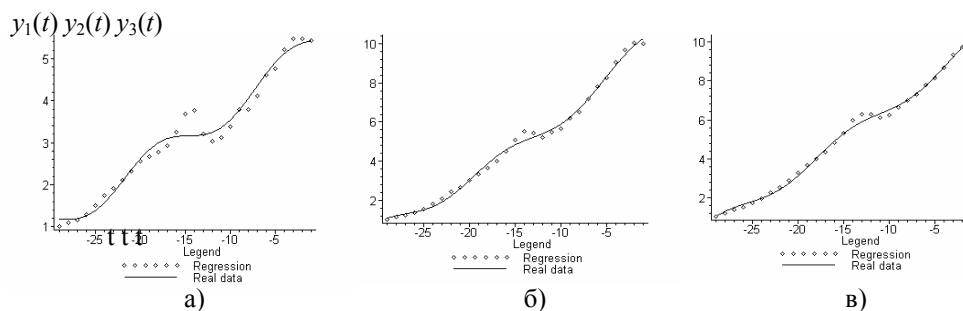


Рис. 3. Модельні криві ВВП та діаграми розсіювання для промисловості та сільського господарства (а), торгівлі та фінансових операцій (б), сектору послуг (в)

Розділ 4 Макроекономічні механізми

На рис. 4 наведені криві регресій, що відповідають траекторіям основних фондів на проміжку $t \in [-N, -1]$. Для порівняння тут також наведені відповідні діаграми розсіювання.

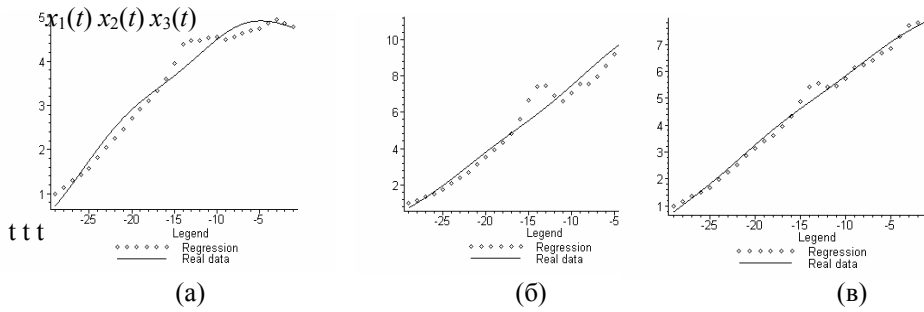


Рис. 4. Модельні криві основних фондів та діаграми розсіювання для промисловості і сільського господарства (а), торгівлі та фінансових операцій (б), сектору послуг (в)

Функція ВВП макроекономічної системи має вигляд

$$Y(t) = -0,0841 + 0,5309 y_1 + 0,1492 y_2 + 0,3762 y_3. \quad (9)$$

(0,0313) (0,1821) (0,0691) (0,1318)

Основні показники роботи мультикритеріального регулятора, описаного вище, наведені в табл. 1. Тут, крім значень коефіцієнтів детермінації R^2 та індексів обумовленості CI , наведені також значення відносних похибок прогнозу на 2004 рік: теоретичної (залежної від довжини довірчого інтервалу) $\delta = \Delta / f(0)$ та практичної

(у порівнянні з реальними даними за 2004 р.) $\xi = \left| \frac{f(0) - f_{табл}}{f(0)} \right|$.

Таблиця 1 – Результати роботи мультикритеріального регулятора

Крива регресії $f(t)$	Коефіцієнт детермінації R^2	Індекс обумовленості CI	Теоретична відносна похибка δ	Практична відносна похибка ξ
$x_1(t)$	97,29%	29,88	5,71%	4,29%
$x_2(t)$	97,09%	14,00	3,91%	2,73%
$x_3(t)$	99,20%	17,21	2,72%	2,69%
$y_1(t)$	97,81%	25,94	3,67%	2,34%
$y_2(t)$	99,62%	26,20	2,52%	1,48%
$y_3(t)$	99,71%	23,69	1,91%	1,03%
$Y(t)$	99,38%	33,97	2,28%	1,23%

Тут високі значення коефіцієнтів детермінації, низькі значення індексів обумовленості, вузькі довірчі інтервали та малі відносні помилки прогнозів свідчать

про адекватність побудованої моделі статистичним даним. Отже, її можна використовувати при короткостроковому прогнозуванні.

Висновки

У даній роботі побудована модель економічного зростання типу Солоу у випадку трисекторної економіки і досліджена ефективність її використання при імітаційному моделюванні та короткостроковому прогнозуванні. Запропонований мультикритеріальний регулятор, який за допомогою оберненого зв'язку з динамічною моделлю оптимізує параметри керування моделі.

1. Barro R. J., Xavier S.-i-M. Economic Growth // McGraw-Hill, 1995. – 540 p.
2. Solow R. M. A Contribution to the Theory of Economic Growth // Quarterly Journal of Economics. – 1956. – Vol. 70. – PP. 64–94.
3. Минюк С. А. Математические методы и модели в экономике : учеб. пособие / С. А. Минюк, Е. А. Ровба, К. К. Кузьмич. – Минск : ТетраСистемс, 2002. – 432 с.
4. Анищенко В. С. Детерминированный хаос / В. С. Анищенко // Соровский образовательный журнал. – 1997. – № 6. – С. 70–76.
5. Назаренко О. М. Динамічне моделювання інвестиційного розвитку та оптимальної макроекономічної інвестиційної політики / О. М. Назаренко // Механізм регулювання економіки. – 2006. – № 4. – С. 187–195.
6. Пономаренко О. І. Сучасний економічний аналіз : навч. посібник / О. І. Пономаренко ; у 2 ч. – Ч. 2. Макроекономіка : – К. : Вища школа, 2004. – 207 с.
7. Колемаев В. А. Математические методы в экономике / В. А. Колемаев. – М. : Юнити-Дана, 2005. – 297 с.
8. Nazarenko O. M. Parametric Identification of State-Space Dynamic Systems: A Time-Domain Perspective. / O. M. Nazarenko, D. V. Filchenko // International Journal of Innovating Computing, Information and Control. – 2008. – Vol. 4, № 7. – PP. 1553–1566.
9. Назаренко О. М. Побудова та ідентифікація лінійно-квадратичних моделей слабо формалізованих динамічних систем / О. М. Назаренко // Вісник Харк. нац. ун-ту. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2008. – Т. 10, № 833. – С. 185–192.
10. Назаренко О. М. Динамічне моделювання макроекономічного розвитку за допомогою декомпозиції траєкторії руху на складові / О. М. Назаренко, П. І. Загряжська // Механізм регулювання економіки. – 2009. – № 1. – С. 142–148.
11. Назаренко О. М. Основи економетрики : підручник / О. М. Назаренко ; вид. 2-ге, перероб. – К. : Центр навчальної літератури, 2005. – 392 с.
12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер ; 5-е изд. – М. : Физматлит, 2004. – 560 с.
13. Statistics Finland [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://www.stat.fi>.

Отримано 06.10.2009 р.

А.М. Назаренко, Н.Н. Манько

Имитация и прогнозирование экономического роста с помощью модели трехсекторной экономики типа Солоу

В статье рассматривается непрерывная модель экономического роста типа Солоу для трехсекторной экономики. Незвестные функции ВВП для секторов специфицированы в виде разложения траектории движения на трендовую, периодическую и стохастическую составляющие. Связь между секторами устанавливается с помощью ВВП – системы. Апробация модели проведена на статистических данных реальных макроекономических систем.

Ключевые слова: моделирование, непрерывная модель, декомпозиция, рафинирование, прогнозирование.