УДК 517.574
КП
№ госрегистрации 0111U002152
Инв. №

Министерство образования и науки Украины
Сумский государственный университет
(СумГУ)

40007, Украина, г. Сумы, ул. Римского-Корсакова, 2;
тел. (0542) 33 41 08, факс (0542) 33 40 49

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе,
д.ф.-м.н., профессор

________________ А.Н. Черноус
2013.12.26

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ДЕЛЬТА-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ И МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ, РЯДЫ ФУРЬЕ

(заключительный)

Начальник НИЧ
к.ф.-м.н. Д.И. Курбатов
2013.12.26

Руководитель НИР
д.ф.-м.н., профессор К.Г. Малютин
2013.12.24

2013

Рукопись закончена 20 декабря 2013 г.
Результаты работы рассмотрены научным советом СумГУ
протокол № 3 от 26 декабря 2013 г.

СПИСОК АВТОРОВ

Руководитель НИР главный научный сотрудник д.ф.-м.н., профессор	2013.12.24	К.Г. Малютин (выводы, разд. 4, 5, 6, 7, 8, 9)
главный научный сотрудник д.ф.-м.н., профессор	2013.12.24	Ю.Б. Зелинский (разд. 10)
старший научный сотрудник к.э.н., доцент	2013.12.24	А.К. Малютин (разд. 2, 3)
научный сотрудник к.п.н., доцент	2013.12.24	Н.И. Одарченко (разд. 7, 8)
научный сотрудник аспирант	2013.12.24	А.А. Багдасарян (разд. 4, 7)
научный сотрудник аспирант	2013.12.24	О.А. Боженко (разд. 5, 6)
научный сотрудник аспирант	2013.12.24	И.И. Козлова (разд. 7, 8, 9)
лаборант лаборант	2013.12.24	С.Е. Бобрун (введение)
лаборант студент	2013.12.24	В.С. Ганнов (разд. 1, 2)
лаборант студент	2013.12.24	С.В. Матвийчук (разд. 2, 3)
лаборант студент	2013.12.24	Р.А. Руденко (разд. 1)

РЕФЕРАТ

Заключительный отчет о НИР. 115 с., 101 источник.

Объект исследования — функции, субгармонические в комплексной плоскости; функции, субгармонические в верхней полуплоскости, аналитические функции нулевого порядка, многозначные отображения.

Цель работы — изучение свойств функций, субгармонических в верхней полуплоскости; распределение их риссовских и полных мер; решение интерполяционных задач в классах аналитических функций нулевого порядка; изучение неподвижных точек многозначных отображений.

Метод исследования — метод рядов Фурье, а также разнообразные методы теории функций комплексного переменного, теории субгармонических функций, методы математического анализа и некоторые приёмы из работ Л. Рубела, А. А. Кондратюка, А. Ф. Гришина, К. Г. Малютина; методы работ М. А. Красносельского и К. Н. Солтанова

Основные полученные результаты. Доказана теорема о регулярности роста коэффициентов Фурье дельта-субгармонических и мероморфных функциях вполне регулярного роста в полуплоскости. Доказана теорема о принадлежности индикатора дельта-субгармонических и мероморфных функциях вполне регулярного роста в полуплоскости классу $L_p(0, \pi)$, $1 \leq p \leq 2$. Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости интерполяционных задач в классах целых функций и функций аналитических в верхней полуплоскости нулевого порядка и нормального типа. Эти условия формулируются в терминах канонического произведения узлов интерполяции и в терминах меры, определяемой этими узлами. Получены критерии принадлежности дельта-субгармонической в полуплоскости функции к классу функций конечного гамма-епсилон роста. Вводится понятие канонической функции. Доказана теорема о нижнем порядке субгармонических в верхней полуплоскости функций бесконечного порядка. Доказана теорема об образе компактного подмножества, удовлетворяющего "условию острого угла многозначного отображения области евклидова пространства.

СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, КОНЕЧНЫЙ ГАММА-ТИП, РЯДЫ ФУРЬЕ, ПОЛНАЯ МЕРА, КАНОНИЧЕСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, НУЛЕВОЙ УТОЧНЕННЫЙ ПОРЯДОК, ЦЕЛАЯ ФУНКЦИЯ, ИНТЕРПОЛЯЦИЯ, МНОГОЗНАЧНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, НЕПОДВИЖНАЯ ТОЧКА, "УСЛОВИЕ ОСТРОГО УГЛА".

СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Через A и B мы обозначаем величины, постоянные по параметрам, участвующим в доказательстве. В доказательстве даже одной теоремы символами A и B могут обозначаться различные константы, кроме специально оговоренных случаев, когда константы A и B фиксируются.

$\mathbb{C}$ — открытая комплексная плоскость;

$\mathbb{C}_+$ — верхняя комплексная полуплоскость: $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$;

$\mathbb{C}_-$ — нижняя комплексная полуплоскость: $\mathbb{C}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$;

$\mathbb{R}$ — вещественная ось;

$\gamma(r)$ — функция роста;

$\rho(r)$ — уточнённый порядок, $V(r) = r^{\rho(r)}$;

$h(r)$ — медленно возрастающая функция;

$[\cdot]$ — целая часть числа;

$[\rho, \infty]$ — класс целых функций порядка ρ;

$[\rho(r), \infty)$ — класс целых функций уточненного порядка $\rho(r)$ и нормального типа;

$[\rho, \infty]_+$ — класс аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функций порядка ρ;

$[\rho(r), \infty)_+$ — класс аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функций формального порядка $\rho(r)$;

$[\rho(r), \infty)_+^h$ — класс аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функций полуформального порядка $\rho(r)$;

$\delta(z - a)$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке a;

$\mu(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta(z - a_n)$;

$\delta S(\gamma(r))$ — класс дельта-субгармонических функций конечного γ-типа;

$S(\gamma(r))$ — класс субгармонических функций конечного γ-типа;

$S\delta(\gamma(r))$ — класс дельта-субгармонических функций в полуплоскости конечного γ-типа;

$JS(\gamma(r))$ — класс субгармонических функций в полуплоскости конечного γ-типа;

$C(a, r)$ — открытый круг с центром в точке a радиуса r;

$B(a, r)$ — замкнутый круг с центром в точке a радиуса r;

$l^*(G)$ — верхняя линейная плотность множества G;

$c_k(r; v)$ — коэффициенты Фурье функции v;

μ_v — мера Рисса функции v;

$n(t) = n_A(t) = \mu(B(0, t))$ — считающая функция последовательности $A = \{a_n\}$;

$N_v(r) = \int\limits_0^r \frac{\mu_v(B(0,x))}{x}\,dx$ — неванлинновская считающая функция меры μ_v;
$\Phi^*_A(z,\alpha) = (n_A(C(z,\alpha|z|)) - 1)^+$;
$\Phi_A(z,\alpha) = \dfrac{(n_A(C(z,\alpha|z|)) - 1)^+}{V(|z|)}$;
$I_A(z,\delta) = \int\limits_0^\delta \dfrac{\Phi_A(z,\alpha)\,d\alpha}{\alpha}$;
$E_A(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ — каноническая функция последовательности A;
$\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{C}_+$ — пересечение множества Ω с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$:
$D = \{a_k, q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — дивизор;
$n_D(G) = \sum_{a_n \in G} q_n$;
$\tilde{n}^+_D(G) = \sum_{a_n \in G} q_n \operatorname{Im} a_n$;
$n^+_D(G) = \sum_{a_n \in G \setminus B(0,1)} q_n \sin\theta_n + \tilde{n}^+_D(G \cap B(0,1))$;
D_f — дивизор корней функции f;
$E_D(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1 - \dfrac{z}{a_n}\right)\left(1 - \dfrac{z}{\bar{a}_n}\right)^{-1}\right]^{q_n}$ — неванлинновская каноническая функция дивизора D;
$\Phi^+_D(z,\alpha) = \dfrac{n^+_D(C(z,\alpha|z|) \setminus \{a_n\})}{V(|z|)}$;
$I^+_D(z,\delta) = \sin\theta \int\limits_0^\delta \dfrac{\Phi^+_D(C(z,\alpha)\,d\alpha}{\alpha(\alpha + \sin\theta)^2}$, $\theta = \arg z$;

$$S(r;k,\mu) = \frac{1}{k} \iint\limits_{B(0,r)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k};$$

$$S(r_1, r_2; k, \mu) = S(r_2; k, \mu) - S(r_1; k, \mu), \quad r_1 \le r_2;$$

$$S'(r;k,\mu) = \frac{1}{k} \iint\limits_{B(0,r)} \left(\frac{\bar{\zeta}}{r}\right)^k d\mu(\zeta);$$

$T(r;v) = N(r,v) + m(r,v)$ — характеристика Неванлинны функции v;

$$N(r,v) = \int\limits_0^r \frac{\mu(t)}{t} dt;$$

$m(r,v) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} v_+(re^{i\theta}\,d\theta$;
λ_v — полная мера функции v;

ν_v — граничая мера функции v;
$D_+(R_1,R_2)=\overline{C_+(0,R_2)\backslash C_+(0,R_1)}$, $R_1<R_2$, — полукольцо;

$$S_+(r;k,\lambda)=\frac{1}{\pi k}\iint\limits_{D_+(r_0,r)}\frac{\sin k\varphi}{\tau^k\operatorname{Im}\zeta}\,d\lambda(\zeta)+\frac{1}{\pi k r_0^{2k}}\iint\limits_{\overline{C_+(0,r_0)}}\frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta)\,;$$

$$S_+(r_1,r_2;k,\lambda)=S_+(r_2;k,\lambda)-S_+(r_1;k,\lambda),\quad r_1\le r_2\,;$$

$\mathcal{E}(\gamma)$ — класс целых функций конечного γ-типа.

ПРЕДИСЛОВИЕ

"Одной из самых красивых глав классического анализа является теория суб- и супергармонических функций". Это слова из предисловия Е. Б. Дынкина к переводу книги Дж. А. Ханта. Субгармонические функции были введены в анализ Гартогсом (Hartogs) и Ф. Риссом (F. Riesz), однако, их идея уже заложена в методе "выметания"Пуанкаре (Poincaré). Они представляют собой распространение на случай функций нескольких переменных выпуклых функций одного переменного. В своей монографии И. И. Привалов [50] писал: "После того как теория субгармонических функций достаточно развилась, естественно возник вопрос о приложении их как более общего класса функций к теории аналитических функций комплексного переменного. Этот новый методологический подход к проблемам теории функций комплексного переменного, в основе которого лежат свойства субгармонических функций, с одной стороны, даёт упрощение доказательств и объясняет ряд положений, на первый взгляд не связанных друг с другом; с другой стороны, позволяет формулировать ряд принципов в наиболее общем виде для широкого класса субгармонических функций."Вследствие теоремы Рисса о представлении теория субгармонических функций оказывается тесно связанной с оформившейся ранее теорией потенциала. Теория потенциала является более общей теорией, так как в ней рассматриваются более общие ядра, чем в теории субгармонических функций. Сближение тут происходит на путях развития абстрактной теории субгармонических функций.

Теория субгармонических функций является активно развивающейся областью современной математики. Исследованиям в этой области посвящены многочисленные работы. Она находит свои применения в теории функций комплексного переменного, в теории потенциала, в теории случайных процессов, в геометрии. Поэтому получение любого нового результата в этой области является актуальной задачей как для самой математики, так и для её приложений.

В работе также исследуются избранные вопросы интегральной геометрии. Затронутая проблематика связывает в один узел проблемы комплексного анализа, топологии и элементы выпуклого анализа. Основной цикл рассматриваемых задач — это вопросы топологической классификации обобщенно выпуклых множеств в комплексных пространствах. Среди таких множеств важную роль играют линейно выпуклые и сильно линейно выпуклые множества. Геометрические свойства этих множеств, в отличие от аналитических их свойств, до последнего времени были мало исследованыю Решен ряд проблем, поставленных Л.А. Айзенбергом, по геометрическому описанию сильно линейно выпуклых множеств. Показано, что эти множества являются естественным классом, на котором можно постро- ить комплексную теорию, аналогичную вещественному выпуклому анализу. Все классические результаты выпуклого анализа находят в подходящей интерпретации комплексную трактовку. Использование в доказательствах групп когомологий позволяет преодолеть сложность, связанную с тем, что комплексная гиперплоскость не разбивает пространство. Решенные здесь задачи позволяют по-новому взглянуть на утверждения выпуклого анализа и распространить их на более широкий класс множеств даже в вещественном случае. Впервые для решения задач, которые вообще не удавалось решить, применен метод многозначных отображений. Исследование графиков этих отображений приводит к нахождению простых и окончательных решений задач описания глобальных свойств множества по известным свойствам его сечений линейными многообразиями. Изучаются классы отображений, инвариантные на обобщенно выпуклых множествах. Приводится решение ряда основных задач обобщенной выпуклости. Но разработанные в ней понятия и методы позволяют ставить вопрос о решении многих других задач комплексного анализа и применения геометрических и топологических методов в анализе.

ВВЕДЕНИЕ

Теория субгармонических и гармонических функций играет важную роль в теории голоморфных функций. Это связано с тем, что реальная $\operatorname{Re} f$ и мнимая $\operatorname{Im} f$ части голоморфной в области функции f являются гармоническими функциями, а функции $\log |f|$ и $|f|^p$, $p > 0$, субгармоническими в этой области. Таким образом, теория субгармонических и гармонических функций дает гибкий и эффективный метод изучения свойств голоморфных функций. В частности, хорошо известно, что построить субгармоническую функцию с заданными асимптотическими свойствами, как правило, легче, чем построить целую функцию. Эффективные методы аппроксимации субгармончеких функций логарифмами модуля целых функций розработали Р. С. Юлмухаметов [65]–[67], Ю. И. Любарский, М. Л. Содин, Е. Малинникова [39, 84] и др. Однако, основное значение этой теории состоит в непосредственных связях субгармонических функций с теорией потенциала, поскольку фундаментальная теорема Ф. Рисса о представлении утверждает, что локально каждая субгармоническая функция является суммой некоторой гармонической функции и потенциала. Таким образом, изучение субгармонических функций составляет один из важнейших аспектов теории потенциала, который играет ведущую роль в исследовании проблем математической физики и теории поля, в тому числе и новейших. Субгармонические функции естественным образом возникают также в теории винеровских процессов, спектральной теории операторов, конструктивной теории функций, теории вероятностей. Разным аспектам теории субгармонических функций и более общей теории потенциала и их приложениям посвящена серия монографий таких известных ученых, как И. И. Привалов [50], М. Брело [7], Н. С. Ландкоф [31], У. Хейман та П. Кеннеди [62], У. Хейман [78], М. Цудзи [101], Н. И. Ахиезер [3, 4], И. Ц. Гохбер и М. Г. Крейн [17, 18], Ю. В. Линник и Й. В. Островський [38], Е. Б. Динкин [24], Дж. А. Хант [61], П. А. Мейер [49], Дж. А. Дуб [71], Б. Фугледе [72], Т. Радо [92], В. С. Азарин [68] и докторские диссертации А. П. Гришина [20], А. А. Кондратюка [26].

В работе изучаются представления субгармонических функций в комплексной плоскости и в верхней полуплоскости комплексного переменного. Эти представления применяются к исследованию роста субгармонических функций, к решению задач интерполяции и к изучению идеалов в классах целых функций.

Актуальность темы.

В теории субгармонических функций много важных результатов получаются с помощью различных представлений этих функций. Наиболее известные из них – формула Пуассона-Йенсена, на которую опирается большая часть теории субгармонических функций. Сюда же относятся формулы Неванлинны, Симидзу-Альфорса, Карлемана, Б. Я. Левина. Теория субгармонических функций в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, созданная А. Ф. Гришиным, большей частью опирается на открытые им интегральные формулы. Из представления Гришина ясно видно, что субгармоническая функция конечного порядка в верхней полуплоскости определяется своей полной мерой с точностью до гармонического полинома, который обращается в нуль на вещественной оси, аналогично тому, как целая функция конечного порядка определяется своими корнями с точностью до функции вида $\exp\{P(z)\}$, где $P(z)$ – полином. Аналогичные формулы при разных ограничениях получали другие математики: М. В. Говоров, У. Хейман, Д. Ито.

В теории целых функций важную роль играют их канонические произведения. Для целых функций конечного порядка таким представлением является представление Адамара. Для целых функций произвольного γ-типа аналог этого факта был установлен Л. Рубелом. Методом, которым пользовался Л. Рубел, был метод рядов Фурье целых и мероморфных функций. Этот метод, основанный на использовании ряда Фурье для $\ln|f(re^{i\theta})|$ как функции от θ, стал систематически использоваться для изучения асимптотических свойств целых и мероморфных функций в работах Л. Рубела и Б. Тейлора. Затем к ним присоединились Д. Майлз, Д. Шиа и др. Следует отметить, что ещё в 1927 г. Н. И. Ахиезер исползовал соотношения между коеффициентами Фурье и нулями целой функции для доказательства теоремы Линделёфа о типе целой функции. Позднее ними пользовались М. Картрайт и А. Пфлюгер. Однако, это были изолированные работы без особых применений. В. С. Азарин (1977) получил критерий вполне регулярного роста целой функции в терминах её коэффициентов Фурье. В 80-е годы важные результаты в этом направлении были получены А. А. Кондратюком, который обобщил теорию Левина-Пфлюгера целых функций вполне регулярного роста на мероморфные функции произвольного γ-типа. Ряд важных результатов в этом направлении получили также А. Ф. Гришин, А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Я. В. Васильків, Н. В. Заболоцкий и др.

В начале XXI столетия метод рядов Фурье К. Г. Малютиным был перенесен на функции субгармонические в полуплоскости. К. Г. Малютин и Н. Садык расширили вышеупомянутые результати на δ-субгармонические функции конечного γ-типа. Важные результаты в этом направлении за последние годы были получены А. А. Кондратюком и А. Я. Християниным.

С вопросами представления целых функций тесно связаны интерполяционные задачи и изучение идеалов в разных классах целых функций. Вопросами интерполяции в классах целых функций занимались многие математики. Укажем на исследования А. В. Братищева, А. О. Гельфонда, В. Л. Гончарова, А. Ф. Гришина и А. М. Руссаковского, М. О. Евграфова, Ю. Ф. Коробейника, Б. Я. Левина, А. Ф. Леонтьева, К. Г. Малютина и мн. др. Для классов целых функций бесконечного порядка задачи интерполяции изучены не достаточно полно. Мы укажем на исследования С. А. Беренстейна и Б. А. Тейлора, У. А. Сквайерса, Р. Е. Хеймана, Т. И. Абаниной, Б. В. Винницкого и И. Б. Шепарович.

Всё вышеизложенное и обусловило выбор объекта, темы исследования и её актуальность.

Объект и предмет исследования. Объектами исследования являются функции, субгармонические в комплексной плоскости, и функции, субгармонические в верхней полуплоскости.

Предметом исследования являются свойства функций, субгармонических в комплексной плоскости, и функций, субгармонических в верхней полуплоскости, распределение их риссовских и полных мер, аналог теорий Л. Рубела и А. А. Кондратюка.

1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ, ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЙ ИССЛЕДОВАНИЯ

Субгармонические функции были введены в анализ Гартогсом (Hartogs) и Ф. Риссом (F. Riesz), однако, их идея уже заложена в методе "выметания"Пуанкаре (Poincaré). Они представляют собой распространение на случай функций нескольких переменных выпуклых функций одного переменного. В своей монографии И. И. Привалов [50] писал: "Новый методологический подход к проблемам теории функций комплексного переменного, в основе которого лежат свойства субгармонических функций, с одной стороны, даёт упрощение доказательств и объясняет ряд положений, на первый взгляд не связанных друг с другом; с другой стороны, позволяет формулировать ряд принципов в наиболее общем виде для широкого класса субгармонических функций."

Имеется много книг, посвященных различным аспектам теориии субгармонических функций. Мы отметим здесь монографию У. Хеймана и П. Кеннеди [62].

Вследствие теоремы Рисса о представлении теория субгармонических функций оказывается тесно связанной с теорией потенциала. Теория потенциала является более общей теорией, чем теория так как в ней рассматриваются более общие ядра. Сближение происходит на путях развития абстрактной теории субгармонических функций.

Субгармонические функции естественным образом появляются в теории винеровских процессов. Связь теории потенциала и теории случайных процессов изложена в книгах Е. Б. Дынкина [24], Дж. А. Ханта [61], Дж. Л. Дуба [71]. Теория субгармонических функций тесно связана и с другими разделами математики. Например, известны приложения теории субгармонических функций к геометрии [79].

В работе теория субгармонических функций развивается в направлении, о котором писал И. И. Привалов, то есть в тесной связи с теорией аналитических функций.

Изучение свойств специальных классов целых и субгармонических функций — другой важный аспект современных исследований. Большое применение находит класс целых функций вполне регулярного роста в смысле Левина–Пфлюгера. Теория функций вполне регулярного роста создана в работах этих математиков. Ее изложение приведено в книге [33]. Новый подход к этой теории получается в рамках , созданной В. С. Азариным [68] теории динамических систем субгармонических функций. Н. В. Говоров [13] построил теорию функций вполне регулярного роста в полуплоскости. После введения А. Ф. Гришиным [21] понятия полной меры стало яснее сходство и различие между теорией аналитических и субгармонических функций для плоскости и для полуплоскости.

В 60-х годах прошлого века в работах Л. Рубела [96, 97], Л. Рубела и Б. Тейлора [98], Д. Майлза [85, 87], Д. Майлза и Д. Шиа [88], Н. Рао и Д. Шиа [93] и др. начал широко применяться метод рядов Фурье для изучения свойств целых и мероморфных функций. Этот метод является эффективным при решении ряда общих задач теории мероморфных функций и устанавливает ее связь с теорией рядов Фурье. Одним из преимуществ этого метода является то, что он позволяет исследовать функции с довольно нерегулярным ростом на бесконечности и функции бесконечного порядка. Кроме того, поскольку коэффициенты Фурье

$$c_k(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})\,d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

выражаются определённым образом через нули и полюсы мероморфной функции f, то с их помощью можно исследовать распределение нулей и полюсов этой функции. Заметим, что ещё в 1927 г. Н. И. Ахиезер применил эти соотношения для нового доказательства теоремы Линделёфа о типе целой функции. Позже ими пользовались также М. Картрайт и А. Пфлюгер. Но это были изолированные работы без широких приложений. В работах же Л. Рубела, Б. Тейлора, Д. Майлза и др., применявших теорию рядов Фурье к изучению целых и мероморфных функций, получены фундаментальные результаты, решены важные задачи теории мероморфных функций.

Строго положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на $[0,\infty)$, называется функцией роста. Пусть f – мероморфная в комплексной плоскости функция, $Z(f)$ ($W(f)$) – множество её нулей (полюсов), $T(r,f)$ – неванлинновская характеристика, $c_k(r,f)$ – коэффициенты Фурье функции f. Функция f называется функцией конечного γ-типа, если существуют положительные постоянные A и B такие, что $T(r,f) \le A\gamma(Br)$ для всех $r > 0$. Класс таких функций обозначим через $\mathcal{M}(\gamma)$, через $\mathcal{E}(\gamma)$ обозначим класс целых функций конечного γ-типа. Методом рядов Фурье Рубел и Тейлор нашли исчерпывающие характеристики множеств $Z(f)$ и $W(f)$ функций из класса $\mathcal{M}(\gamma)$. Используя метод рядов Фурье, Д. Майлз решил, не поддававшуюся решению на протяжении ряда лет, проблему представления мероморфной функции $f \in \mathcal{M}(\gamma)$ в виде частного двух целых функций из класса $\mathcal{E}(\gamma)$: $\mathcal{M}(\gamma)=\mathcal{E}(\gamma)/\mathcal{E}(\gamma)$.

Метод рядов Фурье позволил построить обобщение известной теории Левина–Пфлюгера целых функций вполне регулярного роста, распространить её основные положения не только на целые функции с нерегулярным ростом, но и на мероморфные функции. В 80-е годы важные результаты в этом направлении были получены А. А. Кондратюком [28, 27].

В работах Я. В. Василькива [8] и К. Г. Малютина [43] результаты Рубела и Тейлора были обобщены на субгармонические функции в комплексной плоскости.

Созданная А. Ф. Гришиным теория субгармонических функций в полуплскости позволила К. Г. Малютину [42] распространить результаты Л. Рубела, Б. Тейлора, Д. Майлза на δ-субгармонические функции, определённые в полуплоскости. Важные результаты в этом направлении за последние годы были получены А. Я. Християниным [81] и в совместных работах А. Я. Християнина и А. А. Кондратюка [82, 83]. Переход в полуплоскость вызывает определённые трудности, связанные со сложным поведением функции в окрестности границы. Отличие от плоскости проявляется уже при получении критериев принадлежности δ-субгармонической функции заданному классу. Так, например, для полуплоскости невозможно никакое обобщение одного из критериев Рубела-Тейлора. В совместной работе К. Г. Малютина и Н. Садыка [44] получены важные результаты для δ-субгармонических функций вполне регулярного роста в полуплоскости.

2 РЯДЫ ФУРЬЕ И СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ПЛОСКОСТИ

2.1 Функции роста

Метод рядов Фурье суб- и дельта-субгармонических функций, основанный на использовании ряда Фурье для $\ln|f(re^{i\theta})|$ как функции от θ, систематически стал применяться для изучения асимптотических свойств целых и мероморфных функций в работах Л. Рубела и Б. Тейлора, Д. Майлза, Д. Шея и др. Следует заметить, что еще в 1927 г. Н.И. Ахиезер применил соотношения между коэффициентами Фурье и нулями целой функции для доказательства теоремы Линделефа о типе целой функции. Позже ими пользовались М. Картрайт и А. Пфлюгер. Но это были изолированные работы без особых приложений. В 80-е годы важные результаты в этом направлении были получены А. А. Кондратюком, обобщившем теорию Левина – Пфлюгера целых функций вполне регулярного роста на мероморфные функции произвольного γ-типа.

Определение. *Положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, называется функцией роста.*

В случае необходимости будем считать значения функции $\gamma(r)$ на полуинтервале (0,1] должным образом измененными (в частности, $\lim\limits_{r\to+0}\gamma(r) = 1$). Измененная функция также будет функцией роста.

Далее через $\gamma(r)$ всегда будет обозначаться некоторая (как правило, фиксированная) функция роста. Кроме того, следуя Титчмаршу, мы будем пользоваться следующими названиями и обозначениями. Если в некотором рассуждении встречается число, не зависящее от основных переменных, то оно называется постоянной. Для обозначения абсолютных положительных постоянных, не обязательно одних и тех же, мы пользуемся буквами A, B. Может встретиться утверждение вроде "$|f(z)| < A\gamma(Br)$, следовательно, $3|f(z)| < A\gamma(Br)$ которое не должно вызывать недоразумений.

Определение. *Порядком и нижним порядком функции роста γ называются величины*:

$$\beta[\gamma] = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\gamma(r)}{\ln r}, \quad \alpha[\gamma] = \liminf_{r\to\infty} \frac{\ln\gamma(r)}{\ln r}.$$

Среди функций роста выделяется класс таких функций, что функция $\ln\gamma(r)$ является выпуклой относительно $\ln r$. Иногда используется следующая лемма о представлении таких функций [29, Предложение 5.1].

Лемма 2.1 *Пусть функция* $\varphi(r)$ *является выпуклой относительно* $\ln r$ *и неубывающей на полуоси* $\mathbb{R}_+$*. Тогда справедливо представление:*

$$\varphi(r) = \varphi(0) + \int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad r \in \mathbb{R}_+,$$

где $\omega(t)$ *– неубывающая функция на* $\mathbb{R}_+$*,* $\omega(t) \geq 0$*.*

Требование, чтобы функция $\ln \gamma(r)$ была выпуклой относительно $\ln r$ выполняется для широкого класса функций роста, важных в приложениях (например, для функции $\gamma(r) = r^\rho$, $\rho > 0$). Такие функции роста обладают некоторыми важными свойствами. Следующая лемма – это Лемма 5.1 из [29].

Лемма 2.2 *Пусть функция* $\ln \gamma(r)$ *выпукла относительно* $\ln r$*. Тогда существует число* $R_0 > 0$ *такое, что для каждого* $R \geq R_0$ *найдется* $\sigma = \sigma(R) > 0$ *такое, что*

$$\frac{\gamma(R)}{R^\sigma} = \inf \left\{ \frac{\gamma(r)}{r^\sigma} : r > 0 \right\} . \tag{2.1}$$

Среди функций роста важную роль играют функции, удовлетворяющие следующему условию:

$$\gamma(2r) \leq A\gamma(r) \tag{2.2}$$

при некотором $A > 0$.

Достаточное условие для выполнения (2.2) содержится в Лемме 5.1 из [29].

Лемма 2.3 *Пусть функция* $\ln \gamma(r)$ *выпукла относительно* $\ln r$ *и* $\beta[\gamma] < \infty$*, тогда выполняется неравенство* (2.2)*.*

Определение 2.1 *Абсолютно непрерывная функция* $\rho(r)$*,* $r \in \mathbb{R}_+$*, называется уточнённым порядком в смысле Бутру, если она удовлетворяет следующим условиям*

$$-\infty < \alpha = \liminf_{r\to\infty} \rho(r) \leq \rho = \limsup_{r\to\infty} \rho(r) \leq +\infty,$$

$$\lim_{r\to\infty} \rho'(r) r \ln r = 0 \,.$$

Если $\alpha = \rho$*, то функция* $\rho(r)$ *называется уточнённым порядком в смысле Валирона (часто – просто уточнённым порядком).*

Функцию $r^{\rho(r)}$ мы будем обозначать через $V(r)$. Так как

$$V'(r) = \frac{1}{r}V(r)(\rho(r) + \rho'(r)r\ln r)\,,$$

то из определения уточнённого порядка следует, что функция $V(r)$ при $\alpha > 0$ (а именно этот случай нас в основном будет интересовать в дальнейшем) есть строго возрастающая функция в некоторой окрестности бесконечности. Ограничения, которые накладываются на функцию $\rho(r)$, касаются ее поведения в окрестности бесконечности. В дальнейшем мы будем требовать, чтобы функция $V(r)$ при $\alpha > 0$ была монотонной (например, $\rho'(r)r\ln r) \geq -\rho(r)$), т.е. была функцией роста, причем $\lim\limits_{r\to+0} V(r) = 1$.

Следующее полезное утверждение легко доказывается и хорошо известно [33] для уточненного порядка в смысле Валирона.

Лемма 2.4 *Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок в смысле Бутру. Если сегмент $[a,b]$ таков, что $a > 1$, то при любом $\varepsilon > 0$ асимптотически, равномерно относительно $l \in [a,b]$, выполняется соотношение*

$$l^{\beta-\varepsilon} \leq \frac{V(lr)}{V(r)} \leq l^{\rho+\varepsilon}\,.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{V(lr)}{V(r)} = l^{\rho(lr)}r^{\rho(lr)-\rho(r)}\,.$$

Пусть $\varepsilon(r) = \sup_{u\geq r} u\rho'(u)\ln u$. Заметим, что

$$\lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0. \tag{2.3}$$

Тогда

$$|\rho(lr) - \rho(r)| = \left|\int_r^{lr} \rho'(u)\,du\right| \leq |\varepsilon(r)|\frac{(l-1)r}{r\ln r}\,.$$

Теперь из определения уточненного порядка и (2.3) легко следует утверждение леммы.

В дальнейшем будет полезна еще одна лемма.

Лемма 2.5 *Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок в смысле Бутру, δ – фиксированное положительное число. При $\lambda < \beta + 1$*

$$\int_\delta^r \frac{V(t)}{t^\lambda}\,dt \leq \frac{V(r)r}{(\beta+1-\lambda)r^\lambda} + o\left(\frac{V(r)r}{r^\lambda}\right), \quad r\to\infty\,, \tag{2.4}$$

а при $\lambda > \rho + 1$

$$\int_r^\infty \frac{V(t)}{t^\lambda}\,dt \le \frac{V(r)r}{(\lambda-\rho-1)r^\lambda} + o\left(\frac{V(r)r}{r^\lambda}\right), \quad r \to \infty\,. \tag{2.5}$$

Доказательство. Докажем неравенство (2.4). Обозначим через

$$\tilde\varepsilon(r) = \inf_{u\ge r} u\rho'(u)\ln u, \quad \varepsilon_1(r) = \inf_{u\ge r}(\rho(u)-\beta)\,.$$

Ясно, что

$$\lim_{r\to\infty}\tilde\varepsilon(r) = \lim_{r\to\infty}\varepsilon_1(r) = 0\,. \tag{2.6}$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\int_\delta^r \frac{t^\beta}{t^\lambda}\frac{V(t)}{t^\beta}\,dt = \left.\frac{V(t)t}{(\beta+1-\lambda)t^\lambda}\right|_\delta^r -$$
$$\frac{1}{\beta+1-\lambda}\int_\delta^r\left[\frac{V(t)}{t^\lambda}(\rho(t)-\beta)+\frac{V(t)t}{t^\lambda}\rho'(t)\ln t\right]dt \le \frac{V(r)r}{(\beta+1-\lambda)r^\lambda} -$$
$$\frac{1}{\beta+1-\lambda}\int_\delta^{r_1}\left[\frac{V(t)}{t^\lambda}(\rho(t)-\beta)+\frac{V(t)t}{t^\lambda}\rho'(t)\ln t\right]dt -$$
$$\frac{\varepsilon_1(r_1)+\tilde\varepsilon(r_1)}{\beta+1-\lambda}\int_{r_1}^r\frac{V(t)}{t^\lambda}\,dt + O(1), \quad r\to\infty\,. \tag{2.7}$$

При фиксированном $\varepsilon > 0$, воспользовавшись соотношением (2.6), выберем (и зафиксируем) число $r_1 > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\varepsilon_1(r_1) + \tilde\varepsilon(r_1) \ge -\varepsilon(\beta+1-\lambda)\,.$$

Тогда из (2.7) мы получим, что

$$\int_\delta^r\frac{V(t)}{t^\lambda}\,dt \le \frac{V(r)r}{(\beta+1-\lambda)r^\lambda} + \varepsilon\int_\delta^r\frac{V(t)}{t^\lambda}\,dt + o\left(\frac{V(r)r}{r^\lambda}\right) + O(1), \quad r\to\infty\,.$$

Отсюда следует неравенство (2.4).

Для доказательства неравенства (2.5) положим

$$\varepsilon_2(r) = \sup_{u\ge r}(\rho(u)-\rho)\,.$$

Ясно, что

$$\lim_{r\to\infty}\varepsilon_2(r) = 0\,. \tag{2.8}$$

Как и выше, интегрируя по частям, получаем:

$$\int_r^\infty \frac{t^\rho}{t^\lambda}\frac{V(t)}{t^\rho}\,dt = \left.\frac{V(t)t}{(\rho+1-\lambda)t^\lambda}\right|_r^\infty +$$
$$\frac{1}{\lambda-\rho-1}\int_r^\infty \left[\frac{V(t)}{t^\lambda}(\rho(t)-\rho)+\frac{V(t)t}{t^\lambda}\rho'(t)\ln t\right]dt \le$$
$$\frac{V(r)r}{(\lambda-\rho-1)r^\lambda}+\frac{\varepsilon_2(r)+\varepsilon(r)}{\lambda-\rho-1}\int_r^\infty \frac{V(t)}{t^\lambda}\,dt\,.$$

Воспользовавшись (2.3) и (2.4), мы получим, что

$$(1+o(1))\int_r^\infty \frac{V(t)}{t^\lambda}\,dt \le \frac{V(r)r}{(\lambda-\rho-1)r^\lambda},\quad r\to\infty\,,$$

и, наконец,

$$\int_r^\infty \frac{V(t)}{t^\lambda}\,dt \le \frac{V(r)r}{(\lambda-\rho-1)r^\lambda}+o\left(\frac{V(r)r}{r^\lambda}\right),\quad r\to\infty\,.$$

Лемма полностью доказана.

2.2 Дельта-субгармонические функции

Пусть $\mathbb{C}$ – плоскость комплексного переменного. Через $C(a,r)$ будем обозначать открытый круг радиуса r с центром в точке a, а через $B(a,r)$ – замкнутый круг. Под дельта-субгармонической функцией в области D мы понимаем разность двух субгармонических в этой области функций: $v(z)=v_1(z)-v_2(z)$, где v_i, $i=1,2$, – функции субгармонические в области D.

Если D – область с кусочно-гладкой границей ∂D, $v(z)\ne-\infty$ тождественно, μ – мера Рисса функции v, дельта-субгармонической в замкнутой области $\overline{D}$, то справедлива формула братьев Рольфа и Фритьофа Неванлинн

$$v(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} v(z)\frac{\partial G(\zeta,z)}{\partial n}\,d\zeta-\iint\limits_D G(\zeta,z)\,d\mu(\zeta), \tag{2.9}$$

где G – функция Грина области D, $\partial G/\partial n$ – производная по внутренней нормали.

Если $D = B(0,R)$, то формула (2.9) называется формулой Пуассона-Иенсена и принимает вид:

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(Re^{i\varphi}) \operatorname{Re}\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\,d\varphi - \iint\limits_{|\zeta|\le R} \ln\left|\frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{R(z-\zeta)}\right| d\mu(\zeta). \qquad (2.10)$$

При $z = 0$, $v(0) \neq \pm\infty$, формула (2.10) называется формулой Иенсена:

$$v(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(Re^{i\varphi})\,d\varphi - \iint\limits_{|\zeta|\le R} \ln\left|\frac{R}{\zeta}\right| d\mu(\zeta). \qquad (2.11)$$

Характеристикой Неванлинны, дельта-субгармонической в круге $C(0,R)$ функции v, $v(0) \neq \infty$, называется выражение

$$T(r,v) = m(r,v) + N(r,v), \quad r < R,$$

где

$$m(r,v) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_+(re^{i\varphi})\,d\varphi, \quad N(r,v) = \int\limits_0^r \frac{\mu_-(t)}{t}\,dt.$$

Здесь $v_+ = \max\{v, 0\}$, $\mu = \mu_+ - \mu_-$ – жорданово разложение риссовской меры функции v, $\mu_-(t) = \mu_-\{C(0,t)\}$.

Характеристика Неванлинны $T(r,v)$ удовлетворяет неравенству

$$T\left(r, \sum_{j=1}^q v_j\right) \le \sum_{j=1}^q T(r, v_j)\,. \qquad (2.12)$$

Если v – субгармоническая функция в круге $B(0,R)$, то как следует из формулы (2.10),

$$T(r,v) \le M(r,v) \le \frac{R+r}{R-r} T(R,v), \quad 0 < r < R\,, \qquad (2.13)$$

где $M(r,v) = \max\{v(z) : |z| = r\}$.

Все эти сведения можно найти в книгах [50, 62].

2.3 Коэффициенты Фурье дельта-субгармонических функций

Введем следующее определение.

Определение 2.2 *Коэффициентами Фурье дельта-субгармонической в круге $C(0,R)$ функции $v(z)$ называются числа*

$$c_k(r,v)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\theta}v(re^{i\theta})\,d\theta, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad r<R\,.$$

Для заданной меры μ обозначим

$$d\mu_k(\zeta)=\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k}, \quad \mu_k(r)=\mu_k(B(0,r))\,.$$

В следующей лемме мы получаем выражения для коэффициентов Фурье, которые несколько отличаются от соответствующих формул, полученных в работе [43].

Лемма 2.2 *Пусть v – дельта-субгармоническая в круге $C(0,R_0)$ функция, $v(0)=0$, μ – её риссовская мера,*

$$v(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{2}\big(\alpha_k e^{ik\theta}+\bar\alpha_k e^{-ik\theta}\big)\;-\;--$$

разложение в некоторой окрестности точки $z=0$.

Тогда для $0<r<R_0$ справедливо

$$c_0(r,v)=N(r,-v)-N(r,v); \tag{2.14}$$

$$c_k(r,v)=\frac{r^k}{2}\alpha_k+\frac{1}{2k}\iint\limits_{|\zeta|\le r}\frac{r^{2k}-\tau^{2k}}{r^k}\,d\mu_k(\zeta), \quad z=re^{i\theta},\zeta=\tau e^{i\varphi}, \tag{2.15}$$

при $k\ge 1$ и $c_k=\bar c_{-k}$ при $k\le -1$.

Доказательство. Формула (2.14) совпадает с формулой Иенсена (2.11). Для доказательства (2.15) будем использовать формулу Пуассона-Иенсена (2.10). Так как при $0\le r<R<R_0$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{|k|}e^{ik(\theta-\varphi)}, \quad z=re^{i\theta}, \tag{2.16}$$

то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(Re^{i\varphi})\,\mathrm{Re}\,\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\,d\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(R,v)\left(\frac{r}{R}\right)^{|k|} e^{ik\theta}. \tag{2.17}$$

Воспользовавшись далее разложением ядра

$$G(z,\zeta) = \ln\frac{R}{\tau} + {\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' \frac{1}{2|k|}\left(\frac{r}{\tau}\right)^{|k|}\left(1-\frac{\tau^{2|k|}}{R^{2|k|}}\right) e^{ik(\theta-\varphi)}\,, \tag{2.18}$$

$$0 \le r < \tau \le R, \quad \zeta = \tau e^{i\varphi},$$

$$G(z,\zeta) = \ln\frac{R}{r} + {\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' \frac{1}{2|k|}\left(\frac{\tau}{r}\right)^{|k|}\left(1-\frac{r^{2|k|}}{R^{2|k|}}\right) e^{ik(\theta-\varphi)} \tag{2.19}$$

$$0 \le \tau < r \le R,$$

(штрих над знаком суммы означает, что отсутствует слагаемое при $k = 0$), и приравнивая коэффициенты Фурье правой и левой частей формулы (2.10), для $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{1}{2}\alpha_k r^k = c_k(R)\left(\frac{r}{R}\right)^k - \frac{1}{2k}\iint\limits_{|\zeta|\le r}\left(\frac{r}{\tau}\right)^{|k|}\left(1-\frac{\tau^{2|k|}}{R^{2|k|}}\right) e^{-ik\varphi}\,d\mu(\zeta).$$

Умножив это равенство на $(R/r)^k$, получим (2.15) при $r = R$.

Теорема 2.1 *Для любой функции $v \in S(\gamma(r))$ существуют: а) субгармоническая функция $u \not\equiv -\infty$; б) неограниченное множество $\mathcal{R}$ положительных чисел и семейство $\{v_R : R \in \mathcal{R}\}$ субгармонических функций; в) положительные постоянные A и B, такие, что* 1) *полные меры функций v_R в круге $C(0,R)$ совпадают с полной мерой функции $v + u$;* 2) *$v + u - v_R \rightrightarrows 0$ равномерно на компактах когда $R \to \infty$, $R \in \mathcal{R}$;* 3)

$$M(r,F) \le A\gamma(Br)\,,$$

где F – любая из функций v, u, v_R или $v + u - v_R$.

Если $\alpha[\gamma] = \infty$, то можно взять $u \equiv 1$. Если функция $\ln\gamma(r)$ выпукла относительно $\ln r$, то можно взять $u \equiv 1$ и $\mathcal{R} = \{R : R \ge R_0\}$ при некотором $R_0 > 0$.

Доказательство. Предположим, не уменьшая общности, что $v(0) = 0$. Пусть $\mu = \mu(v)$ – риссовская мера функции v, а μ', $\mathcal{R}$, $\alpha(R) = \{\alpha_k(R)\}$, $c_k(r;\mu'_R,\alpha(R))$ такие же, как в лемме 2.1 Поскольку мера μ' $\gamma(r)$-допустима, то существует функция $v^* \in S(\gamma(r))$, для которой $\mu(v^*) = \mu'$. Будем считать $v^*(0) = 0$. Существуют субгармонические функции g_R такие, что $g_R(0) = 0$, $c_k(r, g_R) = c_k(r; \mu'_R, \alpha(R))$ для всех $r > 0$ и $\mu(g_R) = \mu'_R$ при $R \in \mathcal{R}$. Заключаем, что $g_R \in S(\gamma(r))$. Тогда $\lim\limits_{\mathcal{R} \ni R \to \infty} g_R = 0$ равномерно на компактах.

Положим $v_R = v^* - g_R$, $u = v^* - v$. Тогда функция $v^* = u + v$ имеет ту же меру Рисса в круге $C(0, R)$, что и функция v_R, т.е. выполняется условие 1) и

$$\lim_{\mathcal{R} \ni R \to \infty} v + u - g_R = \lim_{\mathcal{R} \ni R \to \infty} v_R = 0$$

равномерно на компактах, т.е. выполняется условие 2).

Далее, так как $v^*, g_R \in S(\gamma(r))$, то имеем

$$|c_k(r, v_R)| = |c_k(r, v^*) - c_k(r, g_R)| \leq \frac{A\gamma(Br)}{|k| + 1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

для всех $R \in \mathcal{R}$ при некоторых положительных A и B.

Таким образом, если F – любая из функций v, u, v_R или $v + u - v_R$, то

$$m_2(r, F) \leq \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{|k| + 1} \right)^2 \right\}^{1/2} \frac{A\gamma(Br)}{|k| + 1}.$$

Утверждение 3) доказано. Последнее же утверждение теоремы следует непосредственно из леммы 2.1.

Определение 2.3 *Пусть $v \in S(\gamma(r))$. Семейство функций $\{v_R : R \in \mathcal{R}\}$, фигурирующее в теореме* 2.1, *называется обобщенным представлением функции v.*

Из теоремы 2.1 нетрудно получить представление Адамара для субгармонических функций конечного порядка.

Теорема 2.2 *Пусть v – субгармоническая функция порядка ρ, $0 < \rho < \infty$, $v(0) = 0$, μ – риссовская мера функции v. Тогда*

$$v(z) = \operatorname{Re} P_p(z) + \iint \ln \left| E\left(\frac{z}{\zeta}, p \right) \right| \, d\mu(\zeta), \quad p = [\rho], \tag{2.20}$$

где $P_p(z)$ – многочлен степени не выше p, $E(u, p)$ – первичный множитель Вейерштрасса рода p.

Дадим теперь аналог теоремы 2.2 для дельта-субгармонических функций.

Теорема 2.3 *Пусть v – дельта-субгармоническая функция порядка ρ, $0 < \rho < \infty$, $v(0) = 0$, μ – риссовская мера функции v. Тогда*

$$v(z) = \operatorname{Re} P_p(z) + \iint \ln \left| E\left(\frac{z}{\zeta}, p \right) \right| \, d\mu(\zeta), \quad p = [\rho], \tag{2.21}$$

где $P_p(z)$ – многочлен степени не выше p, $E(u,p)$ – первичный множитель Вейерштрасса рода p.

Доказательство. Пусть $\mu = \mu_+ - \mu_-$ – жорданово разложение риссовской меры функции v. Возьмём не целое $\beta > \rho$, $p = [\beta]$. Так как $N(r,v) \le T(r,v) = O(r^\beta)$, $r \to \infty$, то по теореме Линделёфа существует субгармоническая функция v_1, $T(r,v_1) = O(r^\beta)$, $r \to \infty$, такая, что $\mu(v_1) = \mu_-$. По теореме Адамара

$$v_1(z) = \operatorname{Re} \tilde{P}_p(z) + \iint \ln \left| E\left(\frac{z}{\zeta}, p\right)\right| \, d\mu_-(\zeta), \quad p = [\rho]\,,$$

где $\tilde{P}_p(z)$ – многочлен степени не выше p. Функция $v_2 = v + v_1$ – субгармоническая, $\mu(v_2) = \mu_+$, и её порядок равен β. Снова применяя теорему Адамара, находим

$$v_2(z) = \operatorname{Re} \tilde{Q}_p(z) + \iint \ln \left| E\left(\frac{z}{\zeta}, p\right)\right| \, d\mu_+(\zeta), \quad p = [\rho]\,,$$

где $\tilde{Q}_p(z)$ – многочлен степени не выше p. Используя равенство $v = v_2 - v_1$, получаем требуемое утверждение.

В заключение введём другое определение обобщённого представления субгармонической функции.

Пусть $v \in S(\gamma(r))$, μ – риссовская мера функции v. Пусть $v_\mu(z)$ – такая субгармоническая функция, что её коэффициенты Фурье совпадают с коэффициентами Фурье меры μ. Тогда функция $\tilde{v} = v - v_\mu$ – гармоническая и принадлежит классу $S(\gamma(r))$.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 2.3 *Пусть $v \in S(\gamma(r))$, μ – риссовская мера функции v. Тогда $v = v_\mu + \tilde{v}$ где функция $\tilde{v}$ – гармоническая и принадлежит классу $S(\gamma(r))$, а функция v_μ – субгармоническая такая, что её коэффициенты Фурье совпадают с коэффициентами Фурье меры μ.*

Определение 2.4 *Представление $v = v_\mu + \tilde{v}$ называется обобщённым представлением в смысле Вейерштрасса функции v.*

3 ЦЕЛЫЕ И МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА

3.1 Целые функции вполне регулярного роста

Для характеристики зависимости роста функции конечного порядка, голоморфной внутри угла $\alpha \le \arg z \le \beta := [\alpha, \beta]$, от направления, по которому точка z стремится к бесконечности Фрагмен и Линделеф ввели функцию

$$h_f(\theta) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} \quad \alpha \le \theta \le \beta\,,$$

которую называют *индикатором функции* $f(z)$ (относительно функции роста $r^{\rho(r)}$).

Условимся, что запись

$$\overset{*}{\lim_{r\to\infty}} \varphi(r) = a$$

будет обозначать предел, когда r стремится к ∞, пробегая все положителные значения, за исключением некоторого множества E *нулевой относительной меры*, т.е. такого, что

$$\overset{*}{\lim_{r\to\infty}} r^{-1}\mathrm{mes}([0,r]\cap E) = 0\,.$$

Определение *Функция $f(z)$, аналитическая в угле (α, β), называется функцией в.р.р. в замкнутом угле $[\alpha, \beta]$, если предел*

$$\overset{*}{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = h_f(\theta)$$

равномерно по θ, когда $r \to \infty$, не принимая значений из некоторого общего для всех $\theta \in [\alpha, \beta]$ множества E нулевой относительной меры.

Определение *Функция $f(z)$, аналитическая в угле (α, β), называется функцией в.р.р. в открытом угле (α, β), если она имеет в.р.р. в каждом замкнутом угле $[\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.*

Определение *Целая функция $f(z)$ называется функцией в.р.р., если она имеет в.р.р. во всей плоскости, т.е. в угле $[0, 2\pi)$.*

Если для множества $\{a_n\}$ точек комплексной плоскости при всех $\theta, \eta \in [0, 2\pi]\setminus N$, где N – разве лишь счетно, существует конечный предел

$$\Delta(\theta, \eta) = \lim_{r\to\infty} r^{-\rho(r)} n(r, \theta, \eta)\,,$$

где $n(r,\theta,\eta)$ – число точек a_n в секторе $\{z : |z| \le r, \arg z \in (\theta,\eta]\}$, то говорят, что множество $\{a_n\}$ имеет *угловую плотность.*

Определение *Угловой плотностью множества* $\{a_n\}$ *называется определенная с точностью до аддитивной постоянной функция* $\Delta(\psi) = \Delta(\psi_0,\psi)$, *где* $\psi_0 \notin N$ *– произвольно фиксировано.*

Основные результаты теории целых функций в.р.р. содержатся в двух теоремах.

Теорема (Левин-Пфлюгер) *Для того, чтобы целая функция* $f(z)$ *была функцией в.р.р., необходимо и достаточно, чтобы при нецелом* ρ *множество ее нулей имело угловую плотность, а при целом* $\rho > 0$ *еще дополнительно существовал предел*

$$\delta_0 = \lim_{r\to\infty} \frac{r^\rho}{r^{\rho(r)}} \left\{ c_\rho + \frac{1}{\rho} \sum_{|a_n|\le r} a_n^{-\rho} \right\}.$$

Теорема (Левин-Пфлюгер) *Индикатор целой функции* $f(z)$ *в.р.р. при нецелом* ρ *выражается формулой*

$$h_f(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \int\limits_0^{2\pi} \cos\rho(|\theta-\psi| - \pi)\, d\Delta(\psi)\,,$$

а при целом $\rho > 0$ *– формулой*[1]

$$h_f(\theta) = \int\limits_{\theta-2\pi}^{\theta} (\theta-\psi)\sin\rho(\psi-\theta)\, d\Delta(\psi) + \tau_f \cos(\rho\,\theta + \theta_f)\,,$$

где $\Delta(\psi)$ *– угловая плотность нулей* $f(z)$, $\tau_f = |\delta_0/\rho + c_\rho|$, $\theta_f = \arg(\delta_0/\rho + c_\rho)$, *а* c_ρ *обозначает старший коэффициент многочлена в каноническом представлении* $f(z) = z^m \exp(P(z)) E(z)$ ($E(z)$ *– каноническое произведение нулей* $f(z)$).

3.2 Мероморфные функции вполне регулярного роста

Мероморфные функции вполне регулярного роста относительно достаточно произвольной функции роста были введены А. А. Кондратюком. Основные понятия и результаты этой теории изложены в книге [29].

[1] в [9], с. 122 эта формула приведена с опечатками

Основным инструментом его исследований явился, разработанный Л. Рубелом и Б. Тейлором [98], метод рядов Фурье целых и мероморфных функций, который является весьма эффективным при изучении функций бесконечного порядка и функций нерегулярно растущих в окрестности бесконечности.

Строго положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на полуоси $[0, +\infty)$, называется *функцией роста.*

Порядком и нижним порядком функции роста γ называются величины:

$$p[\gamma] = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\gamma(r)}{\ln r}, \quad p_*[\gamma] = \liminf_{r\to\infty} \frac{\ln\gamma(r)}{\ln r}.$$

Далее через $\gamma(r)$ всегда будет обозначаться некоторая (как правило, фиксированная) функция роста. Кроме того, следуя Титчмаршу, будем пользоваться следующими названиями и обозначениями. Если в некотором рассуждении встречается число, не зависящее от основных переменных, то оно называется постоянной. Для обозначения абсолютных положительных постоянных, не обязательно одних и тех же, мы пользуемся буквами A, B. Может встретиться утверждение вроде "$|f(z)| < A\gamma(Br)$, следовательно, $3|f(z)| < A\gamma(Br)$ которое не должно вызывать недоразумений.

Определение *Мероморфная функция $f(z)$ называется функцией конечного γ-типа, если существуют положительные постоянные A и B такие, что $T(r, f) \le A\gamma(Br)$ для всех $r > 0$. (Здесь $T(r, f)$ – характеристика Неванлинны функции $f(z)$.)*

Класс данных мероморфных функций при фиксированной функции γ обозначим через $M(\gamma(r))$. Через $E(\gamma(r))$ обозначим класс целых функций конечного γ-типа.

Предположим, что условие

$$\gamma(2r) \le K\gamma(r) \tag{3.1}$$

выполняется при некотором $K > 0$ и всех $r > 0$.

При условии (3.1) А. А. Кондратюк ввел понятие мероморфной функции в.р.р.

Определение *Функция $f \in M(\gamma(r))$ называется мероморфной функцией в.р.р., если для всех η и φ из $[0, 2\pi]$ существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\gamma(r)} \int_{\eta}^{\varphi} \ln|f(re^{i\theta})|\, d\theta\,.$$

Класс таких функций обозначим через $M^o(\gamma(r))$. Через $E^o(\gamma(r))$ обозначим подкласс целых функций из $M^o(\gamma(r))$.

Обозначим через

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta,\quad k\in\mathbb{Z}$$

коэффициенты Фурье функции f.

Теорема (Кондратюк) *Пусть* f *– мероморфная функция,* $f(0)=1$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $f\in M^o(\gamma(r))$;

(ii) $f\in M(\gamma(r))$ *и для каждого* $k\in\mathbb{Z}$ *существует предел*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{c_k(r,f)}{\gamma(r)}=c_k\,;$$

(iii) $N(r,f)=O(\gamma(r))$, $r\to\infty$, *и для каждой функции* ψ *из* χ *существует конечный предел*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\gamma(r)}\int\limits_0^{2\pi}\psi(\theta)\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta\,,$$

где ψ *– любое из пространств* $C[0,2\pi]$, $L_p[0,2\pi]$, $p>1$.

А. А. Кондратюк ввел понятие индикатора мероморфной функции в.р.р.

Определение *Если* $f\in M^o(\gamma(r))$, *то функция*

$$h(\theta,f)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{ik\theta}$$

называется индикатором функции f.

Он показал, что для любой функции роста $\gamma(r)$, удовлетворяющей условию (3.1)

$$h(\theta,f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{\gamma(r)}\,.$$

А. А. Кондратюк развил теорию мероморфных функций в.р.р., аналогичную теории Левина-Пфлюгера, одним из достоинств которой является тот факт, что если $f\in E^o(r^{\rho(r)})$, то f является целой функцией в.р.р.

в смысле Левина-Пфлюгера, т.е. теория Левина-Пфлюгера включается в теорию Кондратюка.

3.3 Множества регулярного роста целых функций

В 80-е годы прошлого столетия А. Ф. Гришин развил теорию Левина-Пфлюгера в другом направлении, введя понятие множества регулярного роста (м.р.р.) целой функции.

Определение *Отображение $T(z)$, определенное на множестве E, называется асимптотически тождественным на бесконечности, если*

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in E}} \frac{T(z)-z}{z} = 0\,.$$

Определение *Пусть $f(z)$ – целая функция с индикатором $h_f(\theta)$ относительно $r^{\rho(r)}$. Множество E, называется множеством регулярного роста функции $f(z)$, если существует отображение $T(z)$, определенное на E, асимптотически тождественное на бесконечности, такое, что*

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in T(E)}} \left[\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} - h_f(\theta)\right] = 0\,.$$

А. Ф. Гришин показал: для того, чтобы луч $\arg z = \theta$ был м.р.р. целой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ была функцией в.р.р. на этом луче в смысле Левина-Пфлюгера. В частности, для того, чтобы целая функция $f(z)$ была функцией в.р.р., необходимо и достаточно, чтобы вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$ была ее м.р.р. Т.о. целая функция в.р.р. регулярно растет на своих корнях в смысле определения Гришина.

Определение *Пусть E – м.р.р. для функции $f(z)$, A – предельное множество функции $\arg z(\mathrm{mod} 2\pi)$ при $z\to\infty$, $z\in E$. Пусть $h_1(\theta)$ – тригонометрически ρ-выпуклый индикатор такой, что $h_1(\theta)\geq h_f(\theta)$, $h_1(\theta) = h_f(\theta)$ при $\theta\in A$. Тогда множество E, называется множеством регулярного роста функции $f(z)$ относительно индикатора $h_1(\theta)$.*

Произвольная целая функция, не являющаяся функцией в.р.р., может регулярно расти на множестве E, которое является частью множества ее корней. Для оценки плотности таких множеств Гришин ввел специальные характеристики.

Пусть E – счетное множество с единственной точкой сгущения на бесконечности, $n_E(G)$ – число точек E, принадлежащих множеству G, $n_E(C(0,r)) \le Mr^{\rho(r)}$ ($C(z,r)$ – открытый круг с центром в точке z радиуса r). Пусть K – компакт, $K_\sigma = \overline{\bigcup_{z\in K} C(z,\sigma)}$, K^t – гомотетия множества K с коэффициентом t и центром в начале координат, $K^t_\sigma = (K_\sigma)^t$. Обозначим

$$\tilde{d}_E(K) = \limsup_{t\to\infty} \frac{n_E(K^t)}{t^{\rho(t)}}, \quad d_E(K) = \limsup_{\sigma\to+0} \tilde{d}_E(K_\sigma)\,.$$

Теорема (Гришин) *Пусть E – часть множества корней целой функции $f(z)$ с индикатором $h_f(\theta)$ относительно $r^{\rho(r)}$. Пусть E – м.р.р. функции $f(z)$ относительно индикатора $h_1(\theta)$. Пусть μ_H – риссовская мера субгармонической функции $H(re^{i\theta}) = r^\rho h_1(\theta)$. Тогда для любого компакта K справедливо неравенство*

$$d_E(K) \le \mu_H(K)\,. \tag{3.2}$$

Классы функций, регулярно растущих на множестве своих корней, естественным образом появляются при исследовании интерполяционной задачи в классе $[\rho(r), h(\theta)]_r$ целых функций в.р.р. с индикатором равным $h(\theta)$. Полное описание этого класса, представляющее известную гипотезу А. Ф. Леонтьева, неизвестно.

Проблема Леонтьева состоит в следующем: нужно выяснить, имеются ли функции $f(z)$ с простыми нулями $\{a_n\}$, которые удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln|f'(a_n)|}{r_n^{\rho(r_n)}} - h_f(\theta_n)\right] = 0, \quad a_n = r_n e^{i\theta_n}\,, \tag{3.3}$$

но не являются функциями в.р.р.

А. Ф. Гришин, используя теорию м.р.р. показал, что при выполнении (3.3) множество $\{a_n\}$ является частью корней некоторой функции из класса $[\rho(r), h(\theta)]_r$. (Интересные результаты в этом направлении были получены ранее А. В. Братищевым.) Одновременно, А. Ф. Гришин решил интерполяционную задачу в этом классе.

4 ФУНКЦИИ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

4.1 Регулярно растущие функции относительно $r^{\rho(r)}$

Напомним основные факты теории аналитических функций в.р.р. в полуплоскости, следуя книге. Определим на квадрате $D = \{\psi, \theta : 0 \leq \psi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ следующую функцию:

$$g(\psi,\theta) = \begin{cases} (\cos\rho(|\psi-\theta|-\pi)-, & \psi \in (0,\pi),\ \theta \in [0,\pi], \\ \cos\rho(\psi+\theta-\pi))/\sin\psi, & \\ 2\rho\sin\rho(\theta-\pi), & \psi = 0, \theta \in [0,\pi), \\ -2\rho\sin\rho\theta, & \psi = \pi,\ \theta \in (0,\pi], \\ 0, & \psi = \theta = 0,\ \psi = \theta = \pi\,. \end{cases}$$

Теорема (Гришин-Говоров) *Для того чтобы функция $f(z)$, аналитическая в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, была функцией в.р.р. в открытой полуплоскости относительно функции роста $r^{\rho(r)}$, необходимо и достаточно, чтобы при нецелом ρ множество ее нулей имело аргументно-граничную $\rho(r)$-плотность, а при целом $\rho > 0$ еще дополнительно аргументно-граничную $\rho(r)$-симметрию.*

В этом случае индикатор функции $f(z)$ при нецелом ρ выражается формулой

$$h_f(\theta) = \frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int\limits_0^\pi g(\psi,\theta)\,d\lambda(\psi), \quad 0 < \theta < \pi\,,$$

а при целом ρ – формулой

$$h_f(\theta) = 2\pi\cos\rho\theta\int\limits_0^\pi \frac{\sin\rho\psi}{\sin\psi}\,d\lambda(\psi) + 2\sin\rho\theta\left\{\sigma - \frac{1}{2}a_\rho + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\theta \frac{\psi\cos\rho\psi}{\sin\psi}\,d\lambda(\psi) + \int\limits_\theta^\pi \frac{(\psi-\pi)\cos\rho\psi}{\sin\psi}\,d\lambda(\psi)\right\}, \quad 0 < \theta < \pi\,,$$

где $\lambda(\psi)$ – аргументно-граничная плотность нулей $f(z)$, σ – коэффициент аргументно-граничной симметрии, а a_ρ – коэффициент из канонического представления.

Аналогичные результаты получены и для функций в.р.р. в замкнутой полуплоскости.

4.2 Множества регулярного роста функций в полуплоскости

В 90-е годы прошлого столетия первый автор этой статьи перенес теорию А. Ф. Гришина на полуплоскость, введя понятия множества регулярного роста функции, аналитической в полуплоскости. Также как и в случае плоскости это понятие оказалось весьма эффективным при решении ряда интерполяционных задач в классах функций в.р.р. в полуплоскости, так и при построении функций в.р.р. в полуплоскости с заданным индикатором.

Определение *Отображение $T(z)$, определенное на множестве $E \subset \mathbb{C}_+$, называется асимптотически тождественным на бесконечности, если*

$$T(E) \subset \mathbb{C}_+, \lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in E}} \frac{T(z)}{z} = 1\,, \sup_{z\in E} \frac{T(z)-z}{\Im z} < \infty\,.$$

Как и вслучае плоскости введем определение м.р.р. для функции $f(z)$, аналитической в полуплоскости.

Определение *Пусть $f(z)$ –функция, аналитическая в полуплоскости, с индикатором $h_f(\theta)$ относительно $r^{\rho(r)}$. Множество E, называется множеством регулярного роста функции $f(z)$, если существует отображение $T(z)$, определенное на E, асимптотически тождественное на бесконечности, такое, что*

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in T(E)}} \left[\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} - h_f(\theta)\right] = 0\,.$$

Определение *Пусть E – м.р.р. для функции $f(z)$, A – предельное множество функции $\arg z \in (0,\pi)$ при $z \to \infty$, $z \in E$. Пусть $h_1(\theta)$ – тригонометрически ρ-выпуклый ограниченный (непрерывный) индикатор на отрезке $[0,\pi]$ такой, что $h_1(\theta) \geq h_f(\theta)$, $\theta \in (0,\pi)$ ($\theta \in [0,\pi]$) и $h_1(\theta) = h_f(\theta)$ при $\theta \in A \setminus \{0;\pi\}$ ($\theta \in A$). Тогда множество E, называется множеством регулярного роста функции $f(z)$ относительно индикатора $h_1(\theta)$ в открытой полуплоскости $\mathbb{C}_+$ (в замкнутой полуплоскости $\overline{\mathbb{C}_+}$).*

Связь введенного определения с классическим раскрывается следующими двумя теоремами.

Теорема 4.1 *Для того чтобы функция $f(z)$ была функцией в.р.р. в* *открытой полуплоскости* $\mathbb{C}_+$ *относительно функции роста* $r^{\rho(r)}$, *необходимо и достаточно, чтобы вся полуплоскость* $\mathbb{C}_+$ *была ее м.р.р.*

Теорема 4.2 *Для того чтобы функция* $f(z)$ *была функцией в.р.р. в замкнутой полуплоскости* $\overline{\mathbb{C}_+}$ *относительно функции роста* $r^{\rho(r)}$, *необходимо и достаточно, чтобы вся полуплоскость* $\overline{\mathbb{C}_+}$ *была ее м.р.р. и ее индикатор* $h_f(\theta)$ *был непрерывен на отрезке* $[0,\pi]$.

Так же как и в случае целых функций произволная функция, аналитическая в полуплоскости, не являющаяся функцией в.р.р., может регулярно расти на множестве E, кторое является частью множества ее корней. Для оценки плотности таких множеств были введены характеристики аналогичные тем, которые были введены А. Ф. Гришиным.

Пусть $E \subset \mathbb{C}_+$ – счетное множество с точками сгущения на бесконечности и на вещественной оси,

$$n_E^+(G) = \sum_{a_n \in E\cap C(0,1)} \Im a_n + \sum_{a_n \in E\setminus C(0,1)} \sin\arg a_n\,,$$

$$n_E^+(C(0,r)) \le M r^{\rho(r)}\,.$$

Пусть K – компакт, а функция $d_E^+(K)$ определяется как и характеристика $d_E(K)$ заменой меры n_E на меру n_E^+.

Теорема 4.3 *Пусть* E *– часть множества корней аналитической в* $\mathbb{C}_+$ *функции* $f(z)$, $\ln|f(z)| \le M|z|^{\rho(|z|)}$, *с индикатором* $h_f(\theta)$ *относительно* $r^{\rho(r)}$. *Пусть* E *– м.р.р. функции* $f(z)$ *относительно индикатора* $h_1(\theta)$, *ограниченного на отрезке* $[0,\pi]$. *Пусть* μ_H *– неванлинновская мера субгармонической функции* $H(re^{i\theta}) = r^\rho h_1(\theta)$. *Тогда для любого компакта* K *справедливо неравенство*

$$d_E^+(K) \le \mu_H(K)\,. \tag{4.1}$$

Для всякого множества $E \subset \mathbb{C}_+$, удовлетворяющего условию (4.1) можно построить функцию $f(z)$ в.р.р., которая обращается в ноль в точках множества E и имеет индикатор $h_f(\theta) = h_1(\theta)$, $\theta \in [0,\pi]$. При этом корни функции $f(z)$, отличные от точек множества E, "хорошо"отделены от множества E и образуют слабо регулярное множества в полуплоскости (или корче $WR^+(\rho(r))$ [27])

Классы функций, регулярно растущих на множестве своих корней, естественным образом появляются при исследовании интерполяционной задачи в классах аналитических функций в.р.р. с индикатором равным $h(\theta)$. Эти задачи решены первым автором для ограниченного индикатора и непрерывного индикатора на отрезке $[0,\pi]$.

4.3 Субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости

Пусть $J\delta = JS - JS$ – класс δ-субгармонических функций в $\mathbb{C}_+$. Для фиксированной меры λ положим

$$d\lambda_k(\zeta) = \frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}\tau^{k-1}\,d\lambda(\zeta)\ (\zeta = \tau e^{i\varphi}), \lambda_k(r) = \lambda_k\Big(\overline{C(0,r)}\Big)\,,$$

где $\dfrac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}$ для $\varphi = 0,\,\pi$ определяется по непрерывности. В частности, $\lambda(r) = \lambda(\overline{C(0,r)})$.

Коэффициенты Фурье для функции $v \in J\delta$ определяются формулами:

$$c_k(r,v) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi v(re^{i\theta})\sin k\theta\,d\theta, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Пусть $v = v_+ - v_-$ и λ – полная мера функции v. Пусть $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ – жорданово разложение меры λ. Положим

$$m(r,v) := \frac{1}{r}\int\limits_0^\pi v_+(re^{i\varphi})\sin\varphi\,d\varphi,\ N(r,r_0,v) := N(r,v) := \int\limits_{r_0}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3}\,dt\,,$$

$$T(r,r_0,v) := T(r,v) := m(r,v) + N(r,v) + m(r_0,-v)\,,$$

где $r_0 > 0$ – произвольное, фиксированное число, $r_0 < r$; можно считать $r_0 = 1$.

Далее предположим, что функция роста удовлетворяет условию:

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\gamma(r)}{r} > 0\,. \tag{4.2}$$

Определение *Функция $v \in J\delta$ называется функцией конечного γ-типа, если существую константы $A, B > 0$ такие, что*

$$T(r,v) \le \frac{A}{r}\gamma(Br), \quad r > r_0\,.$$

Обозначим соответствующий класс δ-субгармонических функций конечного γ-типа через $J\delta(\gamma(r))$. Через $JS(\gamma(r))$ обозначим соответствующий класс субгармонических функций конечного γ-типа.

Если условие (4.2) не выполняется, мы используем другую характеристику для описания роста функций

$$T(r,v) := m(r,v) + N\left(r, \frac{r}{2}, v\right) + m\left(\frac{r}{2}, -v\right).$$

Все утверждения и в этом случае сохраняют силу.

Определение *Положительная мера λ имеет конечную γ-плотность, если существуют положительные константы A и B такие, что*

$$N(r,\lambda) := \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda(t)}{t^3}\,dt \le \frac{A}{r}\gamma(Br)$$

для всех $r > r_0$.

Определение *Положительная мера λ в полуплоскости называется мерой конечного γ-типа, если если существуют положительные константы A и B такие, что для всех $r > 0$,*

$$\lambda(r) \le Ar\gamma(Br)\,. \tag{4.3}$$

Следующая теорема имеет место.

Теорема 4.4 *Пусть γ – функция роста и пусть $v \in J\delta$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

(i) $v \in J\delta(\gamma(r))$;

(ii) *мера $\lambda_+(v)$ (или $\lambda_-(v)$) имеет конечную γ-плотность и*

$$|c_k(r,v)| \le A\gamma(Br), \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

для некоторых положительных A, B и всех $r > 0$.

4.4 Субгармонические функции регулярного роста полуплоскости

Определение *Функция $v \in J\delta$ называется функцией вполне регулярного роста относительно $\gamma(r)$, если для всех η и φ из отрезка $[0,\pi]$ существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\gamma(r)} \int\limits_{\eta}^{\varphi} v(re^{i\theta}) \sin\theta\, d\theta\,.$$

Обозначим соответствующий класс δ-субгармонических функций в.р.р. относительно $\gamma(r)$ через $J\delta(\gamma(r))^o$. Через $JS(\gamma(r))^o$ обозначим класс истинно-субгармонических функций в.р.р. из $J\delta(\gamma(r))^o$.

Пусть $\widetilde{L}^\infty[0,\pi]$ – банахово подпространство $L^\infty[0,\pi]$ порожденное семейством характеристических функций всех отрезков из $[0,\pi]$. По теореме Кантора о равномерной непрерывнсти $C[0,\pi] \subset \widetilde{L}^\infty[0,\pi]$. Обозначим через $\mathcal{L}[0,\pi]$ любое из пространств $C[0,\pi]$, $\widetilde{L}^\infty[0,\pi]$ или $L^1[0,\pi]$. Следующая теорема получена в [44].

Теорема 4.5 *Пусть $v \in J\delta$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $v \in J\delta(\gamma(r))^o$;

(ii) $v \in J\delta(\gamma(r))$ *и для всех* $k \in \mathbb{N}$ *существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_k(r,v)}{\gamma(r)} = c_k\,; \tag{4.4}$$

(iii) *мера* $\lambda_-(v)$ *имеет конечную* γ*-плотность и для любой функции* ψ *из* $\mathcal{L}[0,\pi]$ *существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\gamma(r)} \int\limits_0^\pi \psi(\theta) v(re^{i\theta}) \sin\theta \, d\theta\,.$$

Здесь $\lambda(v){=}\lambda_+(v){-}\lambda_-(v)$ – полная мера, соответствующая функции v и $c_k(r,v)$ – коэффициенты Фурье функции v.

Заметим, что если v из класса $JS(\gamma(r))^o$, то ограничение на меру $\lambda_-(v)$ в (iii) отсутствует ($\lambda_-(v) \equiv 0$).

4.5 Индикатор субгармонической функции регулярного γ-роста

Следуя Кондратюку введем следующее определение.

Определение *Пусть $v \in J\delta(\gamma(r))^o$, а c_k определены равенствами (3.4). Тогда функция*

$$h(\theta,v) = \sum_{k=1}^\infty c_k \sin k\theta$$

называется индикатором функции v.

Существование такой функции и ее принадлежность классу $L2[0,2\pi]$ мы покажем ниже Нам понадобится лемма о пиках Пойя [90].
Лемма 4.1 *Пусть ψ_1, ψ_2, ψ – положительные непрерывные функции от r на луче $[r_0,\infty)$ такие, что отношение $\psi_2(r)/\psi_1(r)$ возрастает и*

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\psi(r)}{\psi_1(r)}=\infty,\quad \limsup_{r\to\infty}\frac{\psi(r)}{\psi_2(r)}=0\,.$$

Тогда существует такая последовательность $\{r_n\}$, $r_n\to\infty$ $(n\to\infty)$, что при $r=r_n$ выполняется

$$\begin{aligned}\frac{\psi(t)}{\psi_1(t)}&\le\frac{\psi(r_n)}{\psi_1(r_n)},\quad r_0\le t\le r_n,\\ \frac{\psi(t)}{\psi_2(t)}&\le\frac{\psi(r_n)}{\psi_2(r_n)},\quad r_n\le t<\infty\,.\end{aligned}$$

Теорема 4.6 *Пусть функция v принадлежит классу $J\delta(\gamma(r))^o$. Тогда индикатор $h(\theta,v)$ принадлежит $L_2[0,\pi]$.*

Доказательство. Из (3.1) следует [16], что порядок $\beta:=p[\gamma]<\infty$. Тогда $\lim_{r\to\infty}\gamma(r)/r^k=0$ для всех $k>\beta$. Из неравенства $|c_k(r,v)|\le A\gamma(r)$ и формулы для коэффициентов Фурье [14] при $r>r_0$

$$c_k(r,v)=c_k(r_0,v)\left(\frac{r}{r_0}\right)^k+\frac{2r^k}{\pi}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt,\quad k\in\mathbb{N}\,,$$

получаем

$$c_k(r,v)=-\frac{2r^k}{\pi}\int\limits_{r}^{\infty}\frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt,\quad k>\beta\,. \tag{4.5}$$

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралу в (4.5), получаем для всех $k>\beta$

$$c_k(r,v)=-\frac{1}{\pi k r^k}\iint\limits_{\overline{C_+(0,r)}}\frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta)-\frac{r^k}{\pi k}\iint\limits_{|\zeta|\ge r}\frac{\sin k\varphi}{\tau^k\Im\zeta}\,d\lambda(\zeta),\ \zeta=\tau e^{i\varphi}\,. \tag{4.6}$$

Положим $\tilde\lambda=|\lambda|$,

$$N_1(r,v):=\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\tilde\lambda(t)}{t^3}\,dt\,.$$

Отсюда следует, что мера $\tilde{\lambda}$ имеет кончную γ-плотность. Из (4.6) получаем неравенство

$$|c_k(r,v)| \le \frac{1}{\pi r^k}\int\limits_0^r t^{k-1}\,d\tilde{\lambda}(t) + \frac{r^k}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{d\tilde{\lambda}(t)}{t^{k+1}}, \quad k > \beta\,.$$

Применяя формулу интегрирования по частям в правой части этого неравенства, получаем для всех $k > \beta$

$$|c_k(r,v)| \le \frac{(k+1)r^k}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{\tilde{\lambda}(t)}{t^{k+2}}\,dt - \frac{k-1}{r^k\pi}\int\limits_0^r t^{k-2}\tilde{\lambda}(t)\,dt =$$

$$\frac{(k+1)r^k}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{dN_1(t)}{t^{k-1}} - \frac{k-1}{r^k\pi}\int\limits_0^r t^{k+1}\,dN_1(t) = \tag{4.7}$$

$$\frac{(k^2-1)}{\pi}\left\{\int\limits_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k N_1(t)\,dt + \int\limits_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k N_1(t)\,dt\right\} - \frac{2k}{\pi} r N_1(r)\,.$$

Пусть $\limsup\limits_{r\to\infty} N_1(r)/r^{\beta-\varepsilon} = \infty$ для всех $\varepsilon > 0$. Применяя лемму 4.1 к функциям $\psi(r) = N_1(r)$, $\psi_1(r) = r^{\beta-\varepsilon}$, $\psi_2(r) = r^{\beta+\varepsilon}$, находим последовательность $\{r_n\}$, $r_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, такую, что

$$N_1(t) \le \left(\frac{t}{r_n}\right)^{\beta-\varepsilon}, r_0 \le t \le r_n; \quad N_1(t) \le \left(\frac{t}{r_n}\right)^{\beta+\varepsilon}, r_n \le t < \infty\,.$$

Используя (4.8), получим из (4.7)

$$|c_k(r_n,v)| \le \frac{2k}{\pi} N(r_n)\left\{\frac{k^2+\beta-\varepsilon k}{(k-\varepsilon)^2-\beta^2} - 1\right\} \le$$

$$\frac{Ak}{\pi}\gamma(r_n)\left\{\frac{k^2+\beta-\varepsilon k}{(k-\varepsilon)^2-\beta^2} - 1\right\}, \quad k > \beta\,.$$

Из последнего неравенства следует, что при $k > \beta$

$$|c_k| = \lim_{r\to\infty}\frac{|c_k(r,v)|}{\gamma(r)} = \lim_{n\to\infty}\frac{|c_k(r_n,v)|}{\gamma(r_n)} \le \frac{Ak}{\pi}\left\{\frac{k^2+\beta-\varepsilon k}{(k-\varepsilon)^2-\beta^2} - 1\right\}\,.$$

Т.к. $\varepsilon > 0$ любое число, то

$$|c_k| \le \frac{Ak}{\pi}\left\{\frac{\beta^2+\beta}{k^2-\beta^2}\right\}, \quad k > \beta\,.$$

В силу теоремы Фишера-Рисса существует функция h из $L_2[0,2\pi]$, коэфициентами Фурье которой являются числа c_k.

Теорема полностью доказана.

5 ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

5.1 Введение

Мы ограничим историческую часть нашего отчета ссылкой на обзор Б.Я. Левина и В.А. Ткаченко "Интерполяция целыми функциями" [15, Глава 4]. Кроме того, сошлёмся на статью А.В. Братищева и Ю.Ф. Коробейника [6] как на близкого предшественника настоящей работы.

Введем необходимые определения. Дифференцируемая функция $\rho(r)$ на полуоси $(0,+\infty)$ называется уточнённым порядком, если выполняются условия:

1) $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$,

2) $\lim\limits_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r = 0$.

Детальное изложение свойств уточнённого порядка можно найти в работах [33, 69, 22]. В статье используется обозначение $V(r) = r^{\rho(r)}$. Дополнительно мы предполагаем, что $V(r) \equiv 1$ при $r \in [0,1]$. Это сделано для того, чтобы не вводить дополнительную функцию

$$V_1(r) = \begin{cases} V(r), & r > 1, \\ 1, & r \in [0,1]. \end{cases}$$

Привёдем наиболее часто цитируемое свойство уточнённого порядка. Оно состоит в том, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V(rt)}{V(r)} = t^{\rho}, \quad t > 0\,,$$

и этот предел равномерный на любом сегменте $[a,b] \subset (0,+\infty)$.

В случае, если число ρ в определении уточнённого порядка равно нулю, то уточнённый порядок $\rho(r)$ называется нулевым уточнённым порядком.

Пусть $f(z)$ – целая функция, $M(f,r) = \max\limits_{\varphi} |f(re^{i\varphi})|$. Символом $[\rho(r),\infty)$ мы будем обозначать класс целых функций f, для которых выполняется неравенство:

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(f,r)}{V(r)} < \infty\,.$$

Пусть $A = \{a_n : n = 1, 2, \dots\}$ такая последовательность комплексных чисел, что выполняются соотношения: $0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \dots$, $a_n \neq a_k$ при $n \neq k$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Исследование разрешимости задачи

$$f(a_n) = b_n, \quad n = 1, 2, \dots\,, \tag{5.1}$$

в классе $[\rho(r), \infty)$ при единственном ограничении

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ |b_n|}{V(|a_n|)} < \infty \tag{5.2}$$

теперь называют задачей свободной простой интерполяции в классе $[\rho(r), \infty)$.

Этой терминологии мы обязаны А.Ф. Леонтьеву.

Последовательность $\{a_n\}$ называется интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$, если задача (5.1) разрешима в классе $[\rho(r), \infty)$ для любой последовательности чисел $\{b_n\}$, удовлетворяющей условию (5.2).

В основном тексте статьи мы дополнительно предполагаем, что выполняется неравенство $|a_1| > 0$. Это упрощает доказательство и формулировки некоторых утверждений, однако, не ограничивает общности наших рассуждений. По ходу статьи мы делаем замечание, что последовательности $a_1, a_2, \dots$ и $0, a_1, a_2, \dots$ являются одновременно интерполяционными. В принципе, на нулевой уточнённый порядок $\rho(r)$ мы не накладываем никаких ограничений. Однако, в основном тексте работы мы предполагаем, что выполняется дополнительное условие

$$\sigma = \varliminf_{r\to\infty} \frac{V(r)}{\ln r} = \infty\,. \tag{5.3}$$

Дело в том, что в случае, если $\sigma < \infty$, то класс $[\rho(r), \infty)$ состоит из полиномов $P(z)$ таких, что $\deg P \leqslant \sigma$. Этот случай неинтересен для теории.

Находятся четыре различных необходимых условия для того, чтобы последовательность $\{a_n\}$ была интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$. Указываются два различных набора, каждый из которых состоит из трёх вышеупомянутых условий. Доказывается, что выполнение всех трёх условий из каждого набора оказывается достаточным для того, чтобы последовательность $\{a_n\}$ была интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$.

С каждой последовательностью $\{a_n\}$ мы связываем следующую меру в комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(z - a_n)\,,$$

где $\delta(z-a_n)$ – мера Дирака, то есть единичная мера, сосредоточенная в точке a_n. Мы будем употреблять следующие обозначения:

$$C(z,t)=\{w\in\mathbb{C}:|w-z|<t\},\quad B(z,t)=\{w\in\mathbb{C}:|w-z|\leqslant t\}\,.$$

Функция $n(t)=\mu(B(0,t))$ называется считающей функцией последовательности $\{a_n\}$, а функция $N(t)=\int\limits_0^t\frac{n(x)}{x}\,dx$ называется неванлинновской считающей функцией последовательности $\{a_n\}$. В этом определении важно условие $|a_1|>0$. В противном случае функция $N(t)$ определяется более сложным образом:

$$N(t)=m\ln t+\int\limits_0^t\frac{n(x)-m}{x}\,dx\,,$$

где m – кратность нуля в последовательности $\{a_n\}$.

По ходу работы нам придётся встречаться ещё с такими объектами. Пусть $f(z)$ – целая функция и пусть $\{z_n\}$ – множество корней этой функции, перенумерованных в порядке возрастания их модулей. С целой функцией f связывается следующая мера μ_f в комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$\mu_f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}m(z_n)\delta(z-z_n)\,,$$

где $m(z_n)$ – кратность корня z_n.

Функция $n_f(t)=\mu_f(B(0,t))$ называется считающей функцией корней функции f, а функция

$$N_f(t)=m(0)\ln t+\int\limits_0^t\frac{n_f(x)-m(0)}{x}\,dx$$

называется неванлинновской считающей функцией корней функции f.

Заметим ещё, что мера μ_f является риссовской мерой субгармонической функции $v(z)=\ln|f(z)|$.

Остановимся более подробно на результатах работы [6]. Мы уже указывали на связь настоящей статьи с этой работой. В работе [6] изучается разрешимость задачи кратной интерполяции в классах $[\rho(r),\infty)$, причём рассматривается случай $\rho\geqslant 0$. Авторы работы [6] выделяют случай $\rho=0$ и замечают, что в их работе впервые рассматривается интерполяционная задача в классе целых функций нулевого порядка. Сформулируем частный случай теоремы 5 из [6], который соответствует задаче простой интерполяции и случаю $\rho = 0$.

Теорема А. *Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок такой, что функция $V(r)$ является логарифмически выпуклой, причём $\varliminf\limits_{r\to\infty} rV'(r) > 0$, а функция $\dfrac{V(r)}{rV'(r)}$ является возрастающей (не обязательно строго) и неограниченной на луче $[r_0, \infty)$. Для того, чтобы последовательность $\{a_n\}$ была интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{n(r)}{rV'(r)} = 0$,

2) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{V(|a_n|)} \ln \dfrac{1}{|\Phi_n^\delta(a_n)|} < \infty$, *для любого фиксированного $\delta \in (0, 1)$, где*

$$\Phi_n^\delta(z) = \prod_{0<|a_n-a_k|<\delta|a_n|} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right).$$

Приведём формулу Пуассона для субгармонической функции v и круга $B(z, R)$, на которую часто будем ссылаться в нашей статье:

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + Re^{i\varphi})\, d\varphi - \int_0^R \frac{\mu_v(B(z,t))}{t}\, dt\,.$$

Здесь μ_v – риссовская мера функции v.

В случае, если $f(z)$ – целая функция, a – простой корень функции f, $v(z) = \ln \left|\dfrac{f(z)}{z-a}\right|$, то формула Пуассона для круга $B(a, R)$ приобретает вид:

$$\ln |f'(a)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(a + Re^{i\varphi})|\, d\varphi - \int_0^R \frac{\mu_f(B(a,t)) - 1}{t}\, dt - \ln R\,.$$

Основным результатом раздела являются следующие две теоремы. Напомним, мы считаем, что выполняются условия: $|a_1| > 0$ и (5.3). Кроме того, как обычно, $b^+ = \max\{b; 0\}$.

Теорема 5.6 *Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок, удовлетворяющий условию (1.3), $\{a_n : n = 1, 2, \dots\}$, $0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \dots$, – последовательность попарно различных комплексных чисел. Для того, чтобы* *последовательность $\{a_n\}$ была интерполяционной в классе $[\rho(r),\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{N(r)}{V(r)}<\infty$,

2) $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}}\dfrac{1}{V(r)}\int\limits_0^r\dfrac{(\mu(B(z,t))-1)^+}{t}\,dt<\infty$,

3) *для любых чисел $M>0$ и $p>0$ существует целая функция $g\in[\rho(r),\infty)$ такая, что для любого n в круге $B\left(a_n,\dfrac{1}{(1+|a_n|)^p}\right)$ выполняется неравенство:*

$$\ln|g(z)|\geqslant MV(|a_n|)\,.$$

Теорема 5.7 *Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок, удовлетворяющий условию* (1.3),$\{a_n:n=1,2,\dots\}$, $0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\dots$, *– последовательность попарно различных комплексных чисел. Для того, чтобы последовательность $\{a_n\}$ была интерполяционной в классе $[\rho(r),\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{N(r)}{V(r)}<\infty$,

2) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{1}{V(|a_n|)}\ln\dfrac{1}{|E'(a_n)|}<\infty$, *где* $E(z)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z}{a_n}\right)$,

3) *для любых чисел $M>0$ и $p>0$ существует целая функция $g\in[\rho(r),\infty)$ такая, что для любого n в круге $B\left(a_n,\dfrac{1}{(1+|a_n|)^p}\right)$ выполняется неравенство:*

$$\ln|g(z)|\geqslant MV(|a_n|)\,.$$

Заметим, что при рассмотрении интерполяционной задачи в классе функций $[\rho(r),\infty)$, где $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок, появляется специфическое условие 3), которое отсутствует в случае, когда $\rho=\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)>0$.

5.2 Необходимые условия разрешимости задачи

Теорема 5.1. *Пусть* $\{a_n\}$ *– интерполяционная последовательность в классе* $[\rho(r), \infty)$, $N(r)$ *– неванлинновская считающая функция последовательности* $\{a_n\}$. *Тогда выполняется неравенство*:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty\,. \tag{5.4}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующей теоремой.

Теорема B. *Пусть* $\rho(r)$ *– нулевой уточнённый порядок,* $\{b_n\}$ *– последовательность комплексных чисел,* $0 \leqslant |b_1| \leqslant |b_2| \leqslant \ldots$, $n(r)$ *– считающая функция этой последовательности, а* $N(r)$ *– её неванлинновская считающая функция. Если*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty\,,$$

то

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{V(r)} = 0\,.$$

Пусть $\{a_n\}$ – интерполяционная последовательность в классе $[\rho(r), \infty)$. Обозначим

$$E(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\,.$$

Из теоремы B следует, что $E(z)$ – целая функция. Кроме того, справедливо неравенство

$$\ln|E(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{r}{|a_n|}\right) = \int_0^{\infty} \ln\left(1 + \frac{r}{t}\right)\, dn(t) =$$
$$\int_0^{\infty} \frac{rn(t)}{(t+r)t}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{rN(t)}{(t+r)^2}\, dt\,.$$

Здесь и далее используется обозначение $|z| = r$.

Отсюда следует, что $E \in [\rho(r), \infty)$.

Теперь заметим, что если последовательность $\{a_n\}$, $|a_1| > 0$, является интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$, то последовательность

$0, a_1, a_2, \dots$, также является интерполяционной в этом классе. Действительно, рассмотрим интерполяционную задачу $f_1(0) = b_0$, $f_1(a_n) = b_n$, где

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|b_n|}{V(|a_n|)} < \infty\,.$$

Пусть $f \in [\rho(r), \infty)$ – решение интерполяционной задачи $f(a_n) = b_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда функция

$$f_1(z) = f(z) + (b_0 - f(0))E(z)$$

принадлежит классу $[\rho(r), \infty)$ и является решением поставленной интерполяционной задачи. Тем самым, ограничение $a_1 \neq 0$ не является существенным.

Теорема 5.2. *Пусть последовательность $\{a_n\}$ является интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$. Тогда*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{1}{V(r)} \int\limits_0^r \frac{(\mu(B(z,t)) - 1)^+}{t}\,dt < \infty\,. \tag{5.5}$$

Теорема 5.3. *Пусть $\{a_n\}$, $0 < |a_1| \leqslant |a_1| \leqslant \dots$, – такая последовательность попарно различных комплексных чисел, что выполняется неравенство* (1.4). *Пусть $E(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z}{a_n}\right)$. Тогда условие* (1.5) *эквивалентно условию*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln\frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty\,. \tag{5.6}$$

В работе мы пользуемся следующей теоремой.

Теорема C. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $B(0, 2eR)$ $(R > 0)$, $f(0) = 1$ и η – произвольное положительное число, не превышающее $\dfrac{3}{2}e$. Тогда внутри круга $B(0, R)$, но вне исключительных кругов с общей суммой радиусов, не превышающей $4R\eta$, выполняется неравенство*

$$\ln|f(z)| \geqslant -\left(2 + \ln\frac{3e}{2\eta}\right)\ln M(f, 2eR)\,.$$

Это теорема 11 из [33, Глава I, §8].

Теорема 5.4. *Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок, а $\Lambda = \{\lambda_n : n = 1, 2, \dots\}$, $0 \leqslant |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \dots$, – такая последовательность комплексных чисел, что её неванлинновская считающая функция $N_\Lambda(r)$ имеет нормальный тип относительно уточнённого порядка*

$\rho(r)$. Пусть

$$f(z) = z^{m-1} \prod_{n=m}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \quad g(z) = z^{m-1} \prod_{n=m}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{|\lambda_n|}\right),$$

где $m-1$ – количество нулей в последовательности Λ. Пусть H – такое неограниченное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$, что

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{z\in H} \frac{1}{V(r)} \int_0^{\delta r} \frac{\mu_\Lambda(B(z,t))}{t}\, dt = 0\,.$$

Тогда

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in H}} \frac{1}{V(r)} (\ln|f(z)| - \ln g(r)) = 0\,.$$

Доказательство опирается на следующую теорему.

Теорема D. *Пусть $v(z)$ – субгармоническая функция в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, гармоническая в некоторой окрестности нуля, μ_v – риссовская мера этой функции. Пусть неванлинновская считающая функция меры μ_v*

$$N_v(r) = \int_0^r \frac{\mu_v(B(0,x))}{x}\, dx$$

имеет нормальный тип относительно нулевого уточненного порядка $\rho(r)$. Тогда выполняется равенство

$$v(z) = -\int_0^r \frac{\mu_v(B(z,t))}{t}\, dt + N_v(r) + o(1)V(r), \quad r\to\infty\,.$$

Это следствие теоремы 2 из [16].

Теорема 5.5. *Пусть последовательность $\{a_n\}$ является интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$, M и p – произвольные, положительные числа. Тогда существует целая функция $g(z)$ нормального типа относительно уточненного порядка $\rho(r)$ такая, что для любого n в круге $B\left(a_n, \dfrac{1}{(1+|a_n|)^p}\right)$ будет выполняться неравенство:*

$$\ln|g(z)| \geqslant MV(|a_n|)\,.$$

5.3 Критерии разрешимости интерполяционной задачи

Напомним, что функция N определяется формулой:

$$N(t)=\int\limits_0^t \frac{n(x)}{x}\,dx=\int\limits_0^t \frac{\mu(B(0,x))}{x}\,dx\,.$$

Далее заметим, что теорема 5.6 в сторону необходимости уже доказана. Это теоремы 5.1, 5.2 и 5.5. Докажем теорему в сторону достаточности.

Обозначим $l_n=\min\limits_{k\neq n}|a_n-a_k|$. Из условия 2) следует, что существует постоянная K_1 такая, что для всех $n\geqslant 2$ выполняются неравенства:

$$K_1\geqslant \frac{1}{V(|a_n|)}\int\limits_0^{|a_n|}\frac{\mu(B(a_n,t))-1}{t}\,dt\geqslant \frac{1}{V(|a_n|)}\int\limits_{l_n}^{|a_n|}\frac{dt}{t}=\frac{1}{V(|a_n|)}\ln\frac{|a_n|}{l_n}\,.$$

Отсюда следует, что для любого n выполняется неравенство:

$$\ln\frac{|a_n|}{l_n}\leqslant K_1V(|a_n|)\,. \tag{5.7}$$

Правда, мы доказали это неравенство для $n\geqslant 2$. Однако, увеличивая, если нужно, постоянную K_1, можно считать, что (5.7) выполняется и при $n=1$.

Отметим еще неравенство $|a_n-a_k|\geqslant \dfrac{1}{2}(l_n+l_k)$, из которого следует, что круги $C\left(a_n,\dfrac{1}{2}l_n\right)$ попарно не пересекаются.

Покажем, что существует последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\{\chi_n(z)\,:\,n=1,2,\dots\}$, обладающая свойствами: $\chi_n(z)\in[0,1]$, $\chi_n(z)=1$ при $z\in B\left(a_n,\dfrac{1}{4}l_n\right)$, $\chi_n(z)=0$ при $z\notin C\left(a_n,\dfrac{1}{2}l_n\right)$, для всех z выполняется неравенство: $\left|\dfrac{\partial\chi_n(z)}{\partial\bar z}\right|\leqslant\dfrac{6}{l_n}$.

Действительно, пусть функция $\varphi(x)$ определяется следующим образом: $\varphi(x)=1$ при $x\in\left[-\dfrac{1}{3}l_n,\dfrac{1}{3}l_n\right]$, $\varphi(x)=0$ при $x\in\left(-\infty,-\dfrac{5}{12}l_n\right)\cup\left(\dfrac{5}{12}l_n,+\infty,\right)$, $\varphi(x)$ – линейная функция на каждом из сегментов $\left[-\frac{5}{12}l_n, -\frac{1}{3}l_n\right]$, $\left[\frac{1}{3}l_n, \frac{5}{12}l_n\right]$. Построенная функция $\varphi(x)$ является кусочно-линейной и всюду вне угловых точек, выполняется неравенство:

$$|\varphi'(x)| \leqslant \operatorname{arctg}\frac{12}{l_n}\,.$$

Рассмотрим, хорошо известную в теории регуляризации, функцию

$$\omega_\varepsilon(x) = \frac{c}{\varepsilon}\begin{cases} e^{\frac{\varepsilon^2}{x^2-\varepsilon^2}} & , \ |x| < \varepsilon, \\ 0 & , \ |x| \geq \varepsilon\,, \end{cases}$$

где постоянная c выбирается из условия

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1\,.$$

Функция $\omega_\varepsilon(x)$ является бесконечно дифференцируемой функцией на вещественной оси $(-\infty, +\infty)$, причем $\operatorname{supp}\omega_\varepsilon(x) = (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{12}l_n$. Обозначим

$$\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y)\omega_\varepsilon(y)\,dy\,.$$

Функция $\psi(x)$ является бесконечно дифференцируемой функцией на всей вещественной оси, причем для любого x: $\psi(x) \in [0,1]$, $\psi(x) = 1$ на сегменте $\left[-\frac{1}{4}l_n, \frac{1}{4}l_n\right]$, $\psi(x) = 0$ при $|x| \geqslant \frac{1}{2}l_n$,

$$\psi'(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x-y)\omega_\varepsilon(y)\,dy, \quad |\psi'(x)| \leqslant \operatorname{arctg}\frac{12}{l_n}\,.$$

Далее положим $h(z) = \psi(\sqrt{x^2+y^2})$, $z = x + iy$. Функция $h(z)$ является бесконечно дифференцируемой функцией в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, причем для любого z: $h(z) \in [0,1]$, $h(z) = 1$ в круге $B\left(0, \frac{1}{4}l_n\right)$, $h(z) = 0$ при $|z| \geqslant \frac{1}{2}l_n$. Кроме того,

$$\frac{\partial h(z)}{\partial x} = \psi'(|z|)\frac{x}{|z|}, \quad \frac{\partial h(z)}{\partial y} = \psi'(|z|)\frac{y}{|z|},$$

$$\left|\frac{\partial h(z)}{\partial \bar{z}}\right| = \left|\frac{1}{2}\frac{\partial h(z)}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial h(z)}{\partial y}\right| \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{12}{l_n} \leqslant \frac{6}{l_n}\,.$$

В качестве $\chi_n(z)$ можно взять функцию $h(z-a_n)$.

Обозначим

$$\alpha_n(z) = \frac{\partial \chi_n(z)}{\partial \bar{z}} \frac{b_n}{E(z)}\,.$$

Здесь $\{b_n : n = 1, 2, \dots\}$ – произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию (1.2). Считаем, что $\alpha_n(a_n) = 0$, $\alpha_n(z) = 0$ при $|z - a_n| \geqslant \dfrac{1}{2} l_n$. Кроме того, обозначим

$$u(z) = \ln \left| \frac{E(z)}{E'(a_n)(z-a_n)} \right|, \quad \gamma_n = \min \left\{ l_n, \frac{1}{(1+|a_n|)^p} \right\}.$$

Функция $u(z)$ является гармонической функцией в круге $C(a_n, \gamma_n)$, субгармонической в $\mathbb{C}$ и $u(a_n) = 0$. Мы уже доказали, что $E(z) \in [\rho(r), \infty)$. Из теоремы 3 следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty\,.$$

Если учесть еще условия (1.4) и (1.5), то получим, что существует постоянная K_2, такая, что для любого n на границе круга $B(a_n, \gamma_n)$, а значит и во всем круге $B(a_n, \gamma_n)$, будет выполняться неравенство:

$$u(z) \leqslant K_2 V(|a_n|)\,.$$

Рассмотрим теперь функцию $v(z) = K_2 V(|a_n|) - u(z)$. Это положительная гармоническая функция в круге $C(a_n, \gamma_n)$, причем $v(a_n) = K_2 V(r_n)$. В этом круге справедливо представление:

$$v(a_n + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\gamma_n^2 - r^2}{\gamma_n^2 - 2r\gamma_n \cos(\varphi - \theta) + r^2}\, d\sigma(\varphi)\,,$$

где σ – конечная положительная мера. Справедлива оценка:

$$v(a_n + re^{i\theta}) \leqslant \frac{\gamma_n + r}{\gamma_n - r} v(a_n)\,.$$

Если $r \in \left[\dfrac{1}{4}\gamma_n, \dfrac{1}{2}\gamma_n\right]$, то получаем, что $v(a_n + re^{i\theta}) \leqslant 3K_2 V(|a_n|)\,.$ Для таких r это приводит к оценке:

$$\ln \left| \frac{E'(a_n) z}{E(a_n + z)} \right| \leqslant 2K_2 V(|a_n|)\,.$$

Из этого, в свою очередь, следует, что существует такая постоянная K_3, что для всех натуральных n и для всех $r \in \left[\frac{1}{4}\gamma_n, \frac{1}{2}\gamma_n\right]$ выполняется неравенство:

$$\ln \frac{1}{|E(a_n + re^{i\theta})|} \leqslant K_3 V(|a_n|)\,.$$

Из этого, в свою очередь, следует, что существует постоянная K_4 такая, что для любого n в кольце $\frac{1}{4}\gamma_n \leqslant |z - a_n| \leqslant \frac{1}{2}\gamma_n$ будет выполняться неравенство:

$$\ln((1 + |z|^4)|\alpha_n(z)|) \leqslant K_4 V(|a_n|)\,.$$

Из условия 3) теоремы следует, что существует целая функция $g(z) \in [\rho(r), \infty)$ такая, что в кругах $B\left(a_n, \frac{1}{(1+|a_n|)^p}\right)$ выполняется неравенство: $\ln|g(z)| \geqslant K_4 V(|a_n|)$.

Пусть $\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(z)$. Из сказанного следует, что во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ выполняется неравенство:

$$|\alpha(z)| \leqslant \frac{|g(z)|}{1 + |z|^4}\,. \tag{5.8}$$

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \beta(z)}{\partial \bar{z}} = \alpha(z)\,.$$

Одним из решений этого уравнения [10, глава 1, §4] является функция

$$\beta(z) = -\frac{g(z)}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\alpha(\zeta) d\xi d\eta}{g(\zeta)(\zeta - z)}, \quad \zeta = \xi + i\eta\,.$$

Из оценки (5.8) и теоремы 1.23 из [10] следует, что выполняется неравенство:

$$\left| \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\alpha(\zeta) d\xi d\eta}{g(\zeta)(\zeta - z)} \right| \leq K_5$$

с некоторой постоянной K_5. Таким образом, $|\beta(z)| \leq K_5 |g(z)|$.

Решение интерполяционной задачи (1.1) задается функцией:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_n(z) - \beta(z) E(z)\,.$$

Имеем
$$\frac{\partial F}{\partial \bar z} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\partial \chi_n}{\partial \bar z} - \frac{\partial \beta}{\partial \bar z} E(z) = E(z)\left(\alpha(z) - \frac{\partial \beta}{\partial \bar z}\right) = 0\,.$$
Таким образом, $F(z)$ – целая функция. Очевидно, что $F \in [\rho(r), \infty)$. Теорема 5.6 доказана.

Теорема 5.7 является следствием теорем 5.6 и 5.3.

Далее мы доказываем четыре теоремы, которые можно рассматривать как примеры на приложение теорем 6 и 7.

Теорема 5.8 *Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок, удовлетворяющий условию* (5.4), *и такой, что функция $V(r) = r^{\rho(r)}$ является логарифмически выпуклой на некоторой полуоси (r_0, ∞). Пусть a_n – допустимая последовательность. Для того, чтобы последовательность a_n была интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*:
$$1)\ \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty,\ 2)\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty.$$

Доказательство. Необходимость условий 1) и 2) следует из теорем 1 и 3. Поэтому в доказательстве нуждается только достаточность. Из условия теоремы следует, что функция $rV'(r)$ является возрастающей на полуоси (r_0, ∞). Из равенства (5.4) следует, что это неограниченная функция. Пусть $n_1(r)$ – возрастающая функция скачков со скачками равными единице, которая равна нулю на некотором сегменте $[0, \delta]$, $\delta > 0$, и скачки которой на полуоси (r_0, ∞) совпадают со скачками функции $[rV'(r)]$ (как обычно, $[\cdot]$ означает целую часть числа). Обозначим
$$N_1(r) = \int_0^r \frac{n_1(t)}{t}\,dt\,.$$
Легко заметить, что $N_1(r) \sim V(r)$ при $r \to \infty$.

Пусть b_n – точки скачков функции $n_1(r)$, $f_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{b_n}\right)$.

Хорошо известно и легко проверяется, что
$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln f_1(r)}{V(r)} = 1\,.$$
Пусть $f_2 = Tf_1$. Из леммы 5.1 следует, что для всех достаточно больших n в круге $B\left(a_n, \frac{1}{1+|a_n|}\right)$ будет выполняться неравенство
$$\ln|f_2(z)| \geqslant \frac{1}{2} V(|a_n|)\,.$$

Тогда если λ и m – достаточно большие натуральные числа, $g(z) = \lambda f_2^m(z)$, то для любого n в круге $B\left(a_n, \dfrac{1}{1+|a_n|}\right)$ будет выполняться неравенство $\ln|g(z)| \geqslant MV(|a_n|)$ с любым наперёд заданным M. Теперь из теоремы 5.7 будет следовать, что последовательность a_n является интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$.

Теорема доказана.

Замечание. С помощью теоремы 5.8 можно убедиться, что теорема A сформулирована неточно. Пусть $V(r) = \ln^2 r$ при $r \geqslant e$. Тогда функция $V(r)$ удовлетворяет всем ограничениям, которые накладываются на эту функцию в теореме A. Рассмотрим последовательность $a_n = e^{n/2}$ и функцию

$$E(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{e^{n/2}}\right) .$$

Справедливы соотношения:

$$N(r) \sim \ln^2 r \ (r \to \infty), \quad \ln|E'(a_n)| \sim \ln^2 a_n \ (n \to \infty) .$$

Тогда по теореме 8 последовательность a_n является интерполяционной в классе $\left[\dfrac{2 \ln\ln r}{\ln r}, \infty\right)$. Между тем как условие 1) из теоремы A не выполняется, так как

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{rV'(r)} = 1 .$$

Теорему 5.8 можно считать исправленным вариантом теоремы A.

Теорема 5.9. *Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок, удовлетворяющий условию (5.4), $V(r) = r^{\rho(r)}$, и пусть существует логарифмически выпуклая функция $h(r)$ на некоторой полуоси (r_0, ∞) такая, что*

$$0 < \varliminf_{r\to\infty} \frac{V(r)}{h(r)} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{V(r)}{h(r)} < \infty .$$

Пусть a_n – допустимая последовательность. Для того, чтобы последовательность a_n была интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $\varlimsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{N(r)}{V(r)} < \infty$, 2) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{V(|a_n|)} \ln \dfrac{1}{|E'(a_n)|} < \infty$.

Доказательство в существенном повторяет доказательство предыдущей теоремы, только функцию $n_1(r)$ нужно строить, используя функцию $rh'_+(r)$, а не $rV'(r)$ как в доказательстве предыдущей теоремы.

Теорема 5.10 *Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок, удовлетворяющий условию (5.4), $V(r) = r^{\rho(r)}$, и пусть*

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{V(r)}{\ln^2 r} > 0\,.$$

Пусть a_n – допустимая последовательность. Для того, чтобы утверждения:

i) a_n – интерполяционная последовательность в классе $[\rho(r), \infty)$, и

ii) выполняются условия:

$$1)\ \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty, \quad 2)\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty,$$

были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовала логарифмически выпуклая функция $h(r)$ на некоторой полуоси (r_0, ∞) такая, что

$$0 < \varliminf_{r\to\infty} \frac{V(r)}{h(r)} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{V(r)}{h(r)} < \infty\,.$$

Доказательство. То, что i) и ii) эквивалентны – это теорема 5.9.

Докажем необходимую часть теоремы. Вначале заметим, что из утвеждения i) следует утверждение ii). Это теоремы 5.1 и 5.3. Поэтому нам осталось доказать, что если из утверждения ii) следует утверждение i), то выполняется условие.

Рассмотрим последовательность a_n такую, как в замечании к теореме 8. Выполняются условия:

$$N(r) \sim \ln^2 r\ (r \to \infty), \quad \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} \sim -\ln^2 a_n\ (n \to \infty)\,.$$

Из ограничений на $V(r)$ в условии теоремы следует, что

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty\,.$$

Таким образом, для последовательности a_n справедливо утверждение ii). По предположению из этого следует, что последовательность a_n является интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$. Поэтому существует функция $f(z)$ из этого класса, которая решает интерполяционную задачу: $f(a_n) = e^{V(a_n)}$, $f(0) = 1$. Пусть b_n – корни функции $f(z)$. Имеем

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_n}\right)\,.$$

Введё ещё функцию

$$f_1(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{|b_n|}\right).$$

Функция f_1 также принадлежит классу $[\rho(r),\infty)$. Поэтому с некоторым M_1 выполняется неравенство

$$h(r):=\ln\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{r}{|b_n|}\right)<M_1V(r).$$

Кроме того,

$$V(a_n)=\ln f(a_n)\leqslant\ln f_1(a_n)=h(a_n).$$

Из этого неравенства, определения a_n и условий $V(r)=r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок, $h(r)$ – возрастающая функция, следует, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{V(r)}{h(r)}\leqslant 1.$$

Тем самым доказано, что

$$\frac{1}{M_1}<\varliminf_{r\to\infty}\frac{V(r)}{h(r)}\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\frac{V(r)}{h(r)}<\infty.$$

Так как $h(r)$ – логарифмически выпуклая функция, то тем самым доказано соотношение, а вместе с ним и теорема.

В заключение мы приведём просто формулируемые достаточные условия разрешимости интерполяционной задачи, которые применимы для довольно широкого класса последовательностей.

Теорема 5.11 *Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок, удовлетворяющий условию (2.4) и a_n – допустимая последовательность. Пусть выполняются условия*:

$$1)\ \varlimsup_{r\to\infty}\frac{N(r)}{V(r)}<\infty,\quad 2)\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{V(|a_n|)}\ln\frac{1}{|E'(a_n)|}<\infty,$$

$$3)\ \varlimsup_{n\to\infty}\frac{V(|a_n|)}{N(|a_n|)}<\infty,\quad 4)\ \lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{N(r)}=0.$$

Тогда a_n является интерполяционной последовательностью в классе $[\rho(r),\infty)$.

Доказательство. Из условия 4) следует, что функция $N(r)$ представляется в виде $N(r)=V_1(r)=r^{\rho_1(r)}$, где $\rho_1(r)$ – нулевой уточнённый порядок. Точками роста функции $n(r)$ являются точки $|a_n|$. Обозначим

$$g_1(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{|a_n|}\right).$$

Выполняется равенство:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{g_1(r)}{V_1(r)} = 1\,.$$

Пусть $g_2 = Tg_1$. По лемме 5.1

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in H}}\frac{1}{V_1(r)}(\ln|g_2(z)| - \ln g_1(r)) = 0\,.$$

Из (5.15) следует, что для всех достаточно больших n в круге $B\left(a_n, \dfrac{1}{1+|a_n|}\right)$ будет выполняться неравенство

$$\ln|g_2(z)| \geqslant \frac{1}{2}V_1(|a_n|)\,.$$

Теперь если взять $g(z) = \lambda g_2^m(z)$, то при достаточно больших натуральных числах λ и m в любом круге $B\left(a_n, \dfrac{1}{1+|a_n|}\right)$ будет выполняться неравенство $\ln|g(z)| \geqslant MV_1(|a_n|)$ с любым наперёд заданным M. Теперь из теоремы 7 будет следовать, что последовательность a_n является интерполяционной в классе $[\rho_1(r),\infty)$. Из условия 1) теоремы следует, что эта последовательность будет интерполяционной также в классе $[\rho(r),\infty)$.

Теорема доказана.

6 ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

6.1 Введение

В 1975 г. Б. Я. Левин и Нгуен Тхыонг Уен [34] рассмотрели интерполяционную задачу в классе функций порядка не большего чем ρ ($\rho > 1$) в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Ими были найдены условия необходимые и условия достаточные для ее разрешимости в терминах канонических произведений определяемых узлами интерполяции. Причем между этими условиями был разрыв, что позволило авторам строить решение интерполяционной задачи в виде ряда Лагранжа.

Исследования Б. Я. Левина и Нгуен Тхыонг Уена были продолжены Нгуен Тхыонг Уеном [54, 55, 56]. В [54] им была рассмотрена интерполяционная задача в классе функций типа не выше чем нормальный при заданном порядке ρ ($\rho > 1$). Нгуен Тхыонг Уеном были снова найдены условия необходимые и условия достаточные для ее разрешимости в терминах канонических произведений определяемых узлами интерполяции, между которыми был разрыв, позволяющий строить решение в виде обобщенного ряда Лагранжа.

Полностью интерполяционная задача в классах функций типа не выше чем нормальный при заданном уточненном порядке $\rho(r)$ ($\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$) и в классах функций конечного порядка $\rho > 0$ была решена К. Г. Малютиным [40, 41]. В этих работах были найдены необходимые и достаточные условия для разрешимости интерполяционных задач как в терминах канонических произведений, построенных по узлам интерполяции, так и в терминах меры, определяемой этими узлами.

6.2 Классы аналитических функций в полуплоскости

Будем пользоваться терминологией работ [41, 42]

Обозначим через $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$ верхнюю полуплоскость. Через $C(a, r)$ будем обозначать открытый, а через $B(a, r)$ — замкнутый круг радиуса r с центром в точке a, через Ω_+ пересечение множества Ω с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$: $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{C}_+$.

Пусть $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ — дивизор, т.е. множество различных комплексных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}_+$ вместе с их кратностями $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$. По заданному дивизору $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = r_n e^{i\theta_n}$ определим следующие меры: $n_D(G) = \sum_{a_n\in G} q_n$, $\tilde n_D^+(G) = \sum_{a_n\in G} q_n \Im a_n$, $n_D^+(G) = \sum_{a_n\in G\setminus B(0,1)} q_n \sin\theta_n + \tilde n_D^+(G\cap B(0,1))$. Если это не будет вызывать недоразумений, то индекс D будем опускать. Дивизор корней произвольной функции f будем обозначать через D_f. Обозначим через $n_f = n_{D_f}$, $n_f^+ = n_{D_f}^+$, $n_{f,a}(r) = n_f(C(a,r))$, $n_{f,a}^+(r) = n_f^+(C(a,r))$, $n_{D,a}(r) = n_D(C(a,r))$, $n_{D,a}^+(r) = n_D^+(C(a,r))$. В частности, положим $n_f(r) = n_{f,0}(r)$, $n_f^+(r) = n_{f,0}^+(r)$, $n_D(r) = n_{D,0}(r)$, $n_D^+(r) = n_{D,0}^+(r)$. Все рассматриваемые меры мы будем считать продолженными в комплексную плоскость, считая их ограничения на $\mathbb{C}_-$ нулевой мерой, а если речь идет о внутренних мерах, заданных в $\mathbb{C}_+$, то их ограничение на вещественную ось — есть нулевая мера.

Говоря о дивизоре $D_f = \{a_n, q_n\}_{n=1}^\infty$ корней некоторой функции f, мы иногда будем обозначать его через $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, где в последовательности $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ точка a_n встречается ровно q_n раз.

По ходу работы мы будем использовать широко известное свойство уточненного порядка, которое сформулируем в виде леммы.

Лемма 6.1 *Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок. Тогда при любом $t>0$*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(rt)}{V(r)} = t^\rho, \tag{6.1}$$

причем предел равномерный на фиксированом сегменте $[a,b]\subset(0,+\infty)$.

Уточненный порядок $\rho(r)$ называется *формальным порядком* функции f, если существует такая константа M_f, зависящая только от f, что для всех $z\in\mathbb{C}_+$ выполняется неравенство

$$\log|f(z)| < M_f V(|z|)\,. \tag{6.2}$$

Символом $[\rho(r),\infty)_+$ мы будем обозначать класс аналитических в $\mathbb{C}_+$ функций f формального порядка $\rho(r)$.

Уточненный порядок $\rho(r)$ называется *полуформальным порядком* аналитической в $\mathbb{C}_+$ функции f, если $\rho(r)$ — формальный порядок функции f и выполняется следующее условие Левина [33, стр. 128]: существуют числа $q\in(0,1)$, $\delta\in(0,\pi/2)$, такие, что в каждой области

$$D(R,q,\delta) = \{z : qR \leqslant |z| \leqslant \frac{1}{q}R,\ \delta < \arg z < \pi-\delta\}$$

найдется точка z, в которой выполняется неравенство:

$$\log|f(z)| \geqslant -M_f V(|z|)\,.$$

Класс аналитических в $\mathbb{C}_+$ функций, для которых $\rho(r)$ является полуформальным порядком, обозначим через $[\rho(r), \infty)_+^h$. Этой терминологии мы обязаны А.Ф. Гришину. Ясно, что $[\rho(r), \infty)_+^h \subset [\rho(r), \infty)_+$.

Если $\rho = \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) > 1$ и $\rho(r)$ является формальным порядком функции f в $\mathbb{C}_+$, то $\rho(r)$ будет и полуформальным порядком этой функции [75]. С другой стороны, для функции e^{iz} $\rho(r) \equiv 0$ является формальным порядком, а $\rho(r) \equiv 1$ – полуформальным порядком этой функции. Действительно, функция e^{iz} ограничена в полуплоскости и для любого $z \in \mathbb{C}_+$ выполняется неравенство $|e^{iz}| \geqslant e^{-|z|}$.

Таким образом, различие между формальным и полуформальным порядком обнаруживается в полуплоскости только при $\rho \leqslant 1$ (и, в частности, при $\rho = 0$).

Функции f из класса $[\rho(r), \infty)_+$ обладают следующими свойствами [21]:

a) $\log|f(z)|$ имеет некасательный предел $\log|f(t)|$, $t \in \mathbb{R}$, почти всюду на вещественной оси, $\log|f(t)| \in L^1_{loc}(-\infty, \infty)$;

b) на вещественной оси существует знакопеременная мера (заряд) ν такая, что

$$\lim_{y\to+0} \int_a^b \log|f(t+iy)|\,dt = \nu([a,b]) - \frac{1}{2}(\nu(\{a\}) + \nu(\{b\}))\,.$$

Мера ν называется граничной мерой функции f;

c) $d\nu(t) = \log|f(t)|\,dt + d\sigma(t)$, где σ — сингулярная мера относительно меры Лебега.

Для функции $f \in [\rho(r), \infty)_+$ определим, следуя [21], полную меру λ как

$$\lambda(G) = 2\pi \int\limits_{\mathbb{C}_+\cap G} \Im\zeta\, d\mu(\zeta) - \nu(G)\,,$$

где μ — риссовская мера субгармонической в верхней полуплоскости функции $\log|f|$. Мера λ обладает следующими свойствами:

1) λ — конечная мера на каждом компакте $G \subset \mathbb{C}$,

2) λ — неотрицательная мера вне $\mathbb{R}$,

3) λ равна нулю в полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{z : \Im z < 0\}$.

Мы будем использовать следующую лемму [21].

Лемма 6.2 *Пусть λ_f — полная мера функции $f \in [\rho(r), \infty)_+$. Тогда выполняется неравенство*

$$\iint\limits_{B_+(0,R)} \frac{d|\lambda_f|(\xi)}{1+|\xi|^2} \leqslant M_f \left(\int\limits_0^R \frac{V(t)}{1+t^2} dt + \frac{V(R)}{R} \right). \tag{6.3}$$

с некоторой постоянной $M_f > 0$, не зависящей от R.

6.3 Постановка интерполяционной задачи в классе $[\rho(r), \infty)_+$ (в классе $[\rho(r), \infty)_+^h$)

Обозначим через $\Lambda_z = \min\{1; \Im z\}$, $\Lambda_n = \Lambda_{a_n}$. Пусть $f \in [\rho(r), \infty)_+$ ($f \in [\rho(r), \infty)_+^h$). Из формулы Коши для производных нетрудно получить следующее неравенство

$$|f^{(k-1)}(z)| \leq \frac{(k-1)!}{\Lambda_z^{k-1}} \exp[M_f V(|z|)], \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Это неравенство приводит к разумности введения следующего определения.

Определение *Дивизор $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^\infty$ называется интерполяционным в классе $[\rho(r), \infty)_+$ (в классе $[\rho(r), \infty)_+^h$), если для любой последовательности комплексных чисел $b_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию*

$$\sup_n \frac{1}{V(|a_n|)} \sup_{1 \leq k \leq q_n} \log^+ \frac{|b_{n,k}| \Lambda_n^{k-1}}{(k-1)!} < \infty\,, \tag{6.4}$$

существует функция $F \in [\rho(r), \infty)_+$ ($F \in [\rho(r), \infty)_+^h$) со свойством

$$F^{(k-1)}(a_n) = b_{n,k}, \quad k = 1, 2, \ldots, q_n,\ n \in \mathbb{N}\,. \tag{6.5}$$

По заданному дивизору D определим семейства функций

$$\Phi_D^+(z, \alpha) = \frac{n_D^+(C(z, \alpha|z|) \setminus \{a_n\})}{V(|z|)}, \quad \alpha > 0\,,$$

где a_n — точка носителя дивизора D, ближайшая к точке z (если таких точек несколько, то выбираем любую из них). Положим

$$I_D^+(z,\delta)=\sin\theta\int\limits_0^\delta\frac{\Phi_D^+(z,\alpha)\,d\alpha}{\alpha(\alpha+\sin\theta)^2},\quad \theta=\arg z\,.$$

Сформулируем основную теорему нашей работы.

Теорема 6.1 *Пусть $\rho(r)$ — нулевой уточненный порядок. Тогда следующие три утверждения эквивалентны.*

1) *Дивизор D является интерполяционным в классе $[\rho(r),\infty)_+$ (в классе $[\rho(r),\infty)_+^h$).*

2) *Выполняются условия*:

2.1)

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{q_n\Im a_n}{1+|a_n|^2}<\infty\,, \tag{6.6}$$

2.2) *каноническое произведение*

$$E(z)=\prod_{|a_n|\leqslant1}\left(\frac{z-a_n}{z-\bar a_n}\right)^{q_n}\prod_{|a_n|>1}\left(\frac{z-a_n}{z-\bar a_n}\cdot\frac{\bar a_n}{a_n}\right)^{q_n}$$

дивизора D удовлетворяет условию:

$$\sup_n\frac{1}{V(|a_n|)}\log\frac{|\gamma_{n,1}|}{\Lambda_n^{q_n}}<\infty\,, \tag{6.7}$$

где

$$\gamma_{n,k}=\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\frac{(z-a_n)^{q_n}}{E(z)}\Bigg|_{z=a_n},\ k=1,\dots,q_n,n\in\mathbb{N}\,.$$

3) *Выполняются условия (6.6) и*

3.1) *при любом $\delta>0$*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}_+}I_D^+(z,\delta)<\infty\,; \tag{6.8}$$

3.2)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{q_n}{V(|a_n|)}\log\frac{2\Im a_n}{\Lambda_n}<\infty\,. \tag{6.9}$$

6.4 Необходимые условия разрешимости

Теорема 6.2 *Пусть* $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— интерполяционный дивизор в классе* $[\rho(r), \infty)_+$ *(в классе* $[\rho(r), \infty)_+^h$*) и* $\rho(r)$ *— нулевой уточненный порядок. Тогда выполняется условие* (6.6).

Пусть F – функция класса $[\rho(r), \infty)_+$, решающая интерполяционную задачу $F(a_1) = 1$, $F^{(k-1)}(a_1) = 0$, $k = 2, \dots, q_1$, $F^{(k-1)}(a_n) = 0$, $k = 1, \dots, q_n$, при $n \geq 2$. По предположению теоремы такая функция существует. Так как дивизор D, за исключением точки a_1, является частью корней функции F, то из неравенства (6.3) леммы 6.2 следует, что

$$\sum_{|a_n| \leqslant R} \frac{q_n \Im a_n}{1 + |a_n|^2} \leqslant M_F \left(\int_0^R \frac{V(t)}{1+t^2} dt + \frac{V(R)}{R} \right). \tag{6.10}$$

с некоторой постоянной $M_F > 0$, не зависящей от R.

Поскольку $\rho(r)$ — нулевой уточненный порядок, то $V(R) \leqslant M_1 R^{1/2}$ с некоторой постоянной $M_1 > 0$, не зависящей от R. Поэтому $\lim\limits_{R \to \infty} \dfrac{V(R)}{R} = 0$ и интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{V(t)}{1+t^2} dt$ сходится. Тогда отсюда и из (6.10) следует (6.6). Теорема доказана.

Теорема 6.3 *Пусть* $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— интерполяционный дивизор в классе* $[\rho(r), \infty)_+$ *(в классе* $[\rho(r), \infty)_+^h$*) и* $\rho(r)$ *— нулевой уточненный порядок. Тогда выполняется утверждение* 2) *теоремы* 6.1.

Условие 2.1) следует из теоремы 4.2. Доказательство условия 2.2) дословно повторяет доказательство аналогичного условия в работе [41].

Теорема 6.4 *Пусть* $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— интерполяционный дивизор в классе* $[\rho(r), \infty)_+$ *(в классе* $[\rho(r), \infty)_+^h$*) и* $\rho(r)$ *— нулевой уточненный порядок. Тогда выполняется утверждение* 3) *теоремы 6.1.*

Доказательство условий 3.1) и 3.2) проведено в работе [41] при $\rho > 1$. Анализ этих рассуждений показывает, что эти утверждения справедливы и при $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.

Теорема 6.5 *Пусть* $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— такой дивизор, что выполняется условие (6.6) и* $\rho(r)$ *— нулевой уточненный порядок. Тогда утверждения* 2) *и* 3) *теоремы 6.1 эквивалентны.*

В работе [41] эквивалентность этих условий доказана для $\rho > 1$. Снова анализ этого доказательства показывает, что это справедливо для $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.

Нам понадобится следующая лемма из [41].

Лемма 6.3 *Пусть дивизор* $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *является интерполяционным в классе* $[\rho(r), \infty)_+$ *(в классе* $[\rho(r), \infty)_+^h$*) и* $\rho(r)$ *— нулевой уточ-*

ненный порядок. Тогда

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k \Im a_k \Im a_n}{|a_n - \bar{a}_k|^2 (1 + r_k^2)^{\frac{3}{2}}} < \infty\,. \tag{6.11}$$

Заметим [41], что если дивизор D удовлетворяет условию (6.7), то справедлива следующая лемма.

Лемма 6.4 *Пусть дивизор D удовлетворяет условию (6.7), тогда*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{V(r_n)} \max_{1\leqslant k\leqslant q_n} \frac{|\gamma_{n,k}|}{\Lambda_n^{q_n-k+1}} < \infty\,. \tag{6.12}$$

Пусть функция $G(\zeta)$ аналитична в круге $C(0,r)$, $|G(\zeta)| \leqslant M$, и пусть $G(\zeta)$ имеет нуль кратности m в точке $\zeta = 0$ и нуль кратности q в точке $\zeta = a$. Тогда

$$|a|^q \geqslant \frac{G^{(m)}(0)}{m!} \cdot \frac{r^{m+q}}{M}\,. \tag{6.13}$$

Обозначим через l_n величину

$$l_n = \min\left\{\Lambda_n/2, \operatorname{dist}\left(\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \setminus \{a_n\}; \{a_n\}\right)\right\}, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

где dist означает расстояние между множествами. Пусть, например, $l_n = |a_k - a_n|$. Положим $G(\zeta) = E(a_k + \zeta)$, $r = \Lambda_k$. Замечая, что в этом случае $\Lambda_k > \Lambda_n/2 \geqslant l_n = |a_k - a_n|$, применим неравенство (6.13) к функции $G(\zeta)$. Имеем

$$l_n^{q_n} \geqslant \frac{E^{(q_k)}(a_k)}{q_k!} \cdot \frac{\Lambda_k^{q_k+q_n}}{\max\limits_{|\zeta-a_k|\leqslant\Lambda_k} |E(\zeta)|}\,.$$

Из последнего неравенства, ограниченности функции $E(\zeta)$ ($|E(\zeta)| \leqslant 1$, $\zeta \in \mathbb{C}_+$), из условия (6.7) и свойств уточненного порядка следует, что

$$l_n^{q_n} \geqslant \Lambda_n^{q_n} \exp(-M_1 V(|a_n|)), \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{6.14}$$

при некотором $M_1 > 0$. Это неравенство справедливо и когда $l_n = \Lambda_n/2$, $n \in \mathbb{N}$.

Определим аналитическую в круге $C(0,1)$ функцию $\psi(t)$ равенством $\psi(t)t^{q_n} = E(a_n + l_n t)$. Применяя правило Лопиталя, а также неравенства (6.7) и (6.14), получим:

$$|\psi(0)| = l_n^{q_n} \frac{|E^{(q_n)}(a_n)|}{q_n!} \geqslant \exp(-M_2 V(|a_n|))$$

при некотором $M_2 > 0$. Кроме того, при $|t| \leqslant 1$ функция $\psi(t)$ ограничена, так как

$$|\psi(t)| \leqslant \max_{|t|=1} |\psi(t)| = \max_{|t|=1} |\psi(t) t^{q_n}| = \max_{|t|=1} |E(a_n + l_n t)| \leqslant 1\,.$$

Далее воспользуемся следующей теоремой [33, Теорема 9, Глава I, § 6].
Теорема. *Пусть голоморфная в круге $C(0,R)$ функция $f(z)$ не имеет нулей. Тогда в круге $C(0,r)$, $r < R$, справедливо неравенство*

$$\log |f(z)| \geqslant \frac{-2r}{R-r} \max_{|\zeta| \leqslant R} \log |f(\zeta)|\,. \tag{6.15}$$

Положим $g(\zeta) = \psi(\zeta)\psi^{-1}(0)$. Поскольку функция $g(\zeta)$ не имеет нулей в круге $C(0,1/2)$ и $g(0) = 1$, к ней применимо неравенство (6.15), которое при $|\zeta| \leqslant r = 1/4$ и $R = 1/2$ дает $g(\zeta) \geqslant \exp(-2M_2 V(|a_n|))$. Откуда

$$|E(a_n + \tau)| \geqslant \frac{|\tau|^{q_n}}{|l_n|^{q_n}} \exp(-M_3 V(|a_n|)), \quad |\tau| \leqslant \frac{l_n}{4}\,, \tag{6.15}$$

при некотором $M_3 > 0$.

Далее по определению имеем

$$\gamma_{n,k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a_n| = l_n/4} \frac{(\zeta - a_n)^{q_n - k}}{E(\zeta)} d\zeta, \quad k \in \overline{1, q_n},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Неравенство (6.12) следует теперь из этого соотношения, определения l_n и (6.16). Лемма доказана.

6.5 Доказательство импликации 2) ⇒ 1) теоремы 6.1

Обозначим через

$$\alpha_{n,m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{i=o}^{q_n - m} \frac{1}{i!} \gamma_{n, q_n + 1 - m - i} b_{n,i+1}, \quad m \in \overline{1, q_n},\ n \in \mathbb{N}\,. \tag{6.17}$$

Перенумеровав, если есть необходимость, точки дивизора D, можно считать, что

$$\frac{\Im a_{n+1}}{1 + r_{n+1}^2} \leqslant \frac{\Im a_n}{1 + r_n^2}, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{6.18}$$

Положим

$$\beta_n(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1+\bar a_k(z+i\Lambda_n)}{i(\bar a_k-z-i\Lambda_n)}\frac{\Im a_k}{(1+r_k^2)^{\frac32}},\quad n\in\mathbb{N}\,. \tag{6.19}$$

Ряд, определяющий функции $\beta_n(z)$ в (6.19), сходится равномерно в каждой области

$$D^n_{r,\delta}=\{z:|z|\leqslant r,\Im z\geqslant -\Lambda_n+\delta,\ \delta>0\}\,,$$

т.к. при $z\in D^n_{r,\delta}$, $r\geqslant 2$

$$\left|\frac{1+\bar a_k(z+i\Lambda_n)}{i(\bar a_k-z-i\Lambda_n)}\right|\frac{\Im a_k}{(1+r_k^2)^{\frac32}}\leqslant\frac{\sqrt{(1+r)(1+r_k)}}{\delta}\frac{\Im a_k}{(1+r_k^2)^{\frac32}}\,,$$

и ряд (6.6) сходится.

Оценим $\Re\beta_n(z)$. Имеем

$$\Re\beta_n(z)=$$
$$=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\Im a_k+\Im z+\Lambda_n+r_k^2(\Im z+\Lambda_n)+|z+i\Lambda_n|^2\Im a_k)}{|\bar a_k-z-i\Lambda_n|^2}\frac{\Im a_k}{(1+r_k^2)^{\frac32}}\,. \tag{6.20}$$

Т.к. $\Im a_n>0$, $\Im\bar a_k<0$, то $|\bar a_k-a_n-i\Lambda_n|>|\bar a_k-a_n|$. Отсюда, из леммы 6.3, неравенства (6.18) и (6.20) получаем, в частности, что

$$\begin{aligned}\Re\beta_n(a_n)&\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\Im a_k(\Im a_k(1+|a_n+i\Lambda_n|^2)+2\Im a_n(1+r_k^2))}{|\bar a_k-a_n|^2(1+r_k^2)^{\frac32}}\leqslant\\&\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\Im a_k}{1+r_k^2}+\frac{2\Im a_n}{1+4r_n^2}\right)\frac{\Im a_k(1+r_k^2)(1+4r_n^2)}{|\bar a_k-a_n|^2(1+r_k^2)^{\frac32}}\leqslant\\&\leqslant 5\frac{1+4r_n^2}{1+r_n^2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\Im a_n}{|\bar a_k-a_n|^2}\frac{\Im a_k}{(1+r_k^2)^{\frac12}}\leq K_1<\infty\,.\end{aligned} \tag{6.21}$$

А также

$$\Re\beta_n(z)\geqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\Im a_k)^2}{(1+r_k^2)^{\frac32}}\frac{1}{|\bar a_k-z-i\Lambda_n|^2}\,. \tag{6.22}$$

Положим далее

$$P_n(z)=\sum_{m=1}^{q_n}\alpha_{n,m}\left[\frac{\varphi_n(z)}{z-a_n}\right]^{(m-1)}\,, \tag{6.23}$$

где

$$\varphi_n(z) = \left(\frac{1+z\bar{a}_n}{1+r_n^2}\right)^3 \frac{g(z)}{g(a_n)} \left(\frac{2\Im a_n}{z-\bar{a}_n}\right)^2 \exp[\beta_n(a_n) - \beta_n(z)]\,,$$

$g(z)$ — целая функция класса $[\rho(r), \infty)_+$ (класса $[\rho(r), \infty)_+^h$), которая будет определена ниже.

Заметим, что

$$\varphi_n(a_n) = 1, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{6.24}$$

Кроме того, воспользовавшись элементарным неравенством $1+x \leqslant \sqrt{2(1+x^2)}$, получим при $|z| \geqslant 1$:

$$\left|\frac{1+z\bar{a}_n}{1+r_n^2}\right| \leqslant \frac{|z|(1+r_n)}{1+r_n^2} \leqslant \frac{\sqrt{2}|z|}{\sqrt{1+r_n^2}}\,.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} |\varphi_n(z)| \leqslant 4\left(\frac{\sqrt{2}|z|}{\sqrt{1+r_n^2}}\right)^3 \frac{|g(z)|}{|g(a_n)|}\frac{(\Im a_n)^2}{|z-\bar{a}_n|^2}\times \\ \times \exp\{\Re[\beta_n(a_n) - \beta_n(z)]\}, \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{gathered} \tag{6.25}$$

Формальный ряд

$$F(z) = E(z)\sum_{n=1}^{\infty} P_n(z) \tag{6.26}$$

решает интерполяционную задачу (6.5) [41] .

Покажем, что при надлежащем выборе функции $g(z)$ функция $F(z)$ принадлежит классу $[\rho(r), \infty)_+$ ($[\rho(r), \infty)_+^h$). Из условия (6.4), неравенства (6.12) и равенства (6.17) получаем для всех $m = 1, \ldots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$|\alpha_{n,m}| \leqslant \frac{q_n - m + 1}{(m-1)!}\Lambda_n^m \exp[K_2 V(r_n)]\,. \tag{6.27}$$

Обозначим

$$u_{n,m}(z) = \left[\frac{\varphi_n(z)}{z-a_n}\right]^{(m-1)}, \; m = 1, \ldots, q_n, n \in \mathbb{N}\,.$$

Оценим $u_{n,m}(z)$ при $z \in \mathbb{C}_+$, $z \notin C(a_n, \Lambda_n/2)$. Заметим, что если $|t - z| = \Lambda_n/4$, то, во-первых,

$$|t - a_n| \geqslant \Lambda_n/4, \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{6.28}$$

во-вторых, $|t-\bar{a}_n| \geqslant \Im a_n - \Lambda_n/4 \geq 3\Im a_n/4$ $(n \in \mathbb{N})$, $|z-\bar{a}_n| \leq |z-t| + |t-\bar{a}_n| = \Lambda_n/4 + |t-\bar{a}_n| \leqslant \Im a_n/4 + |t-\bar{a}_n| \leqslant 7|t-\bar{a}_n|/3$, и $|t-\bar{a}_n| \leqslant |z-t| + |z-\bar{a}_n| = \Lambda_n/4 + |z-\bar{a}_n| \leqslant \Im a_n/4 + |z-\bar{a}_n| \leqslant 5|z-\bar{a}_n|/4$, т.е.

$$3|z-\bar{a}_n|/7 \leqslant |t-\bar{a}_n| \leq 5|z-\bar{a}_n|/4\,. \tag{6.29}$$

Кроме того, если $|z-t| = \Lambda_n/4$, то

$$|t+i\Lambda_n-\bar{a}_n| \geqslant 3\Lambda_n/4 + \Im z + \Im a_n\,. \tag{6.30}$$

Воспользовавшись интегральной формулой Коши для производных по окружности $C_{z,n} = \{t : |t-z| = \Lambda_n/4\}$, из (6.25), (6.28), (6.29) и (6.30), получим

$$|u_{n,m}(z)| = \frac{(m-1)!}{2\pi}\left|\int\limits_{C_{z,n}} \frac{\varphi_n(t)\,dt}{(t-a_n)(t-z)^m}\right| \leqslant \frac{4^m(m-1)!}{\Lambda_n^m}\max_{t\in C_{z,n}}|\varphi_n(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4^m 49(m-1)!(\Im a_n)^2}{9\Lambda_n^m|z-\bar{a}_n|^2}\left(\frac{\sqrt{2}(|z|+1/4)}{\sqrt{1+r_n^2}}\right)^3\frac{|g(\sqrt{2}(|z|+1/4))|}{|g(a_n)|}\times$$
$$\times\max_{t\in C_{z,n}}\exp[\Re(\beta_n(a_n)-\beta_n(t))]\,.$$

Отсюда получим окончательно, с учетом (6.21), (6.22) и (6.30):

$$\begin{gathered}|u_{n,m}(z)| \leqslant \frac{4^m 49(m-1)!e^{K_1}(\sqrt{2}(|z|+1/4))^3}{9\Lambda_n^m|z-\bar{a}_n|^2}\frac{(\Im a_n)^2}{(1+r_n^2)^{\frac{3}{2}}}\times\\ \times\frac{|g(\sqrt{2}(|z|+1/4))|}{|g(a_n)|}\exp\left[-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\Im a_k)^2}{(3\Lambda_n/4+\Im z+\Im a_k)^2(1+r_k^2)^{\frac{3}{2}}}\right],\end{gathered} \tag{6.31}$$

$m = 1, \ldots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Далее из (6.23), (6.27) и (6.31) получаем, что при $z \in \mathbb{C}_+$, $z \notin$

$C(a_n, \Lambda_n/2)$ справедливо неравенство:

$$
|P_n(z)| \leqslant \sum_{m=1}^{q_n} |\alpha_{nm}||u_{nm}(z)| \leqslant \frac{49}{9}\exp[K_3 V(r_n)]\times
$$
$$
\times\frac{(\sqrt{2}(|z|+1/4))^3(\Im a_n)^2}{(1+r_n^2)^{\frac{3}{2}}|z-\bar{a}_n|^2}\frac{|g(\sqrt{2}(|z|+1/4))|}{|g(a_n)|}\sum_{m=1}^{q_n}4^m(q_n-m+1)\times
$$
$$
\times\exp\left[-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\Im a_k)^2}{(3\Lambda_n/4+\Im z+\Im a_k)^2(1+r_k^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\leqslant\frac{|g(\sqrt{2}(|z|+1/4))|}{|g(a_n)|}\times
$$
$$
\times\frac{(\Im a_n)^2}{|z-\bar{a}_n|^2(1+r_n^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{49}{18}q_n(q_n+1)\exp[K_3V(r_n)+q_n\ln 4]\times
$$
$$
\times(\sqrt{2}(|z|+1/4))^3\exp\left[-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\Im a_k)^2}{(3\Lambda_n/4+\Im z+\Im a_k)^2(1+r_k^2)^{\frac{3}{2}}}\right],\quad n\in\mathbb{N}. \tag{6.32}
$$

Отсюда получим из (6.32) при $z\in\mathbb{C}_+$, $z\notin C(a_n,\Lambda_n/2)$:

$$
\begin{gathered}
|P_n(z)|\leqslant\exp[K_4V(r_n)](\sqrt{2}(|z|+1/4))^3\times\\
\frac{|g(\sqrt{2}(|z|+1/4))|}{|g(a_n)|}\frac{(\Im a_n)^2}{|z-\bar{a}_n|^2(1+r_n^2)^{\frac{3}{2}}}\times\\
\times\exp\left[-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\Im a_k)^2}{(3\Lambda_n/4+\Im z+\Im a_k)^2(1+r_k^2)^{\frac{3}{2}}}\right],\ n\in\mathbb{N}.
\end{gathered}\tag{6.33}
$$

Далее заметим, что если $|t-a_n|\leqslant\Lambda_n/2$, и $|z-a_n|=\Lambda_n/2$, то

$$
|z|\leqslant|t|+1 \tag{6.34}
$$

и

$$
3|t-\bar{a}_n|/5\leqslant|z-\bar{a}_n|\leqslant5|t-\bar{a}_n|/3. \tag{6.35}
$$

Применяя принцип максимума модуля к аналитической в $\mathbb{C}_+$ функции $\Phi_n(z)=E(z)P_n(z)$, используя неравенства (6.33), (6.34), (6.35) и лемму 6.5 получим при $t\in C(a_n,\Lambda_n/2)$, учитывая, что $\Im t\geqslant\Im z/4$,

$$
\begin{gathered}
|\Phi_n(t)|\leqslant\max_{|z-a_n|=\Lambda_n/2}|E(z)||P_n(z)|\leqslant\exp[K_5(V(r_n)+V(|z|))]\times\\
\times\frac{|g(\sqrt{2}(|z|+1/4))|}{|g(a_n)|}\frac{25(\Im a_n)^2}{9|t-\bar{a}_n|^2(1+r_n^2)^{\frac{3}{2}}}\times\\
\times\exp\left[-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\Im a_k)^2}{(3\Lambda_n/4+4\Im t+\Im a_k)^2(1+r_k^2)^{\frac{3}{2}}}\right].
\end{gathered}\tag{6.36}
$$

В силу (6.33) неравенство (6.36) справедливо при всех $t \in \mathbb{C}_+$. Обозначим

$$\lambda_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\Im a_k)^2}{(3\Lambda_n/4 + 4\Im z + \Im a_k)^2 (1+r_k^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$

так, что

$$\lambda_n(z) - \lambda_{n+1}(z) = \frac{(\Im a_n)^2}{(3\Lambda_n/4 + 4\Im z + \Im a_n)^2 (1+r_n^2)^{\frac{3}{2}}}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Ясно, что $\lambda_n(z) \downarrow 0$ при $n \to \infty$, $z \in \mathbb{C}_+$. Замечая, что при $z \in \mathbb{C}_+$ выполняется неравенство

$$3\Lambda_n/4 + 4\Im z + \Im a_n \leqslant 4\Im z + 7\Im a_n/4 \leqslant 4(\Im z + \Im a_n) \leqslant 4|z - \bar{a}_n|\,,$$

получим из (6.36):

$$|\Phi_n(z)| \leqslant 16 \exp[-\lambda_n(z)][\lambda_n(z) - \lambda_{n+1}(z)] \times \\ \times \frac{\exp[MV(r_n) + MV(|z|)]|g(\sqrt{2}(|z|+1/4))|}{|g(a_n)|}.$$

Воспользовавшись элементарным неравенством $t \leqslant e^t - 1$, $t \geqslant 0$, при $t = \lambda_n(z) - \lambda_{n+1}(z)$, получим далее

$$|\Phi_n(z)| \leqslant \exp[K_5(V(r_n) + V(|z|))][\exp[-\lambda_{n+1}(z)] - \\ - \exp[-\lambda_n(z)]]\frac{|g(\sqrt{2}(|z|+1/4))|}{|g(a_n)|}\,. \tag{6.37}$$

Выберем целую функцию $g(z)$ вполне регулярного роста при порядке $\rho(r)$, индикатор которой равен $K_5 + 1$ и нули которой расположены на отрицательной мнимой полуоси $i\mathbb{R}_- = \{z : \Im z \leq -1\}$ так, чтобы функция $F(z)$, определяемая рядом (6.26), принадлежала классу $[\rho(r), \infty)_+$.

Вне C^0-множества выполняется асимптотическое равенство [19]:

$$\ln|g(z)| \approx (K_5 + 1)V(|z|)\,.$$

Поскольку нули функции $g(z)$ расположены на полуоси $i\mathbb{R}_-$, то можно считать, что исключительные круги, образующие C^0-множество расположены в нижней полуплоскости. Тогда неравенство

$$\ln|g(a_n)| \geqslant K_5 V(r_n)$$

выполняется для всех достаточно больших n. Умножая, если есть необходимость, функцию $g(z)$ на достаточно большое положительное число, можно считать, что это неравенство выполняется для всех натуральных n.

Из (6.37) тогда получаем для любого натурального $N \geqslant 1$:

$$|E(z)\sum_{n=1}^{N} P_n(z)| \le \sum_{n=1}^{N} |E(z)P_n(z)| \leqslant$$
$$\exp[K_6 V(|z|)]\{\exp[-\lambda_{N+1}(z)] - \exp[-\lambda_1(z)]\} \leqslant \exp[K_6 V(|z|)]\,.$$

Отсюда следует сходимость ряда (6.36) на компактах в $\mathbb{C}_+$ и принадлежность функции F классу $[\rho(r), \infty)_+$. Для принадлежности функции F классу $[\rho(r), \infty)_+^h$ необходимо еще выполнение условия Б.Я. Левина. Заметим, что каноническая функция E принадлежит классу $[\rho(r), \infty)_+^h$. Из результатов работы [19] следует, что вне множества C_η со сколь угодно малой верхней плотностью $\eta > 0$ всюду в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ выполняется неравенство:

$$\log|E(z)| \geqslant -M_\eta V(|z|)\,.$$

Пусть $g_1(z)$ – целая функция вполне регулярного роста при порядке $\rho(r)$, индикатор которой равен $2K_5 + M_\eta + 1$. Тогда вне C^0-множества выполняется неравенство:

$$\log|g_1(z)| \geqslant (2K_5 + M_\eta)V(|z|)\,.$$

Множество $\tilde{C}_\eta = C_\eta \cup C^0$ имеет верхнюю плотность не больше, чем η. Вне $\tilde{C}_\eta$ справедливо неравенство:

$$\log|g_1(z)E(z)| \geqslant 2K_5 V(|z|)\,,$$

всюду в $\mathbb{C}_+$.

Функция

$$F_1(z) = F(z) + g_1(z)E(z)$$

обладает свойством (6.5) и вне $\tilde{C}_\eta$-множества справедлива оценка:

$$\log|F_1(z)| = \log|g_1(z)E(z)| + \log\left|1 + \frac{F(z)}{g_1(z)E(z)}\right| \geqslant$$
$$2K_5 V(|z|) + \log(1 - 1/e)\,.$$

Следовательно, функция F_1 принадлежит классу $[\rho(r), \infty)_+^h$. Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) теоремы 6.1 доказана.

7 СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

7.1 Введение. Классы функций в верхней полуплоскости

Пусть v – субгармоническая функция в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $M(v,r) = \max\limits_{0\le\theta\le 2\pi} v(re^{i\theta})$. *Порядком и нижним порядком* функции v называются, соответственно, величины

$$\beta[\gamma] = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(v,r)}{\ln r}, \quad \alpha[\gamma] = \liminf_{r\to\infty} \frac{\ln M(v,r)}{\ln r}\,.$$

Порядком и нижним порядком целой функции f называются, соответственно, порядок и нижний порядок субгармонической функции $\ln|f|$.

В работе [86] рассматривались целые функции, нули которых лежат на конечной системе лучей. В частности, доказано, что если f – целая функция бесконечного порядка с положительными нулями, то её нижний порядок также равен бесконечности. Этот результат легко обобщается на субгармонические функции в комплексной плоскости: если риссовская мера субгармонической во всей в комплексной плоскости функции v, бесконечного порядка, сосредоточена на положительной полуоси, то её нижний порядок также равен бесконечности. Мы доказываем аналогичный результа для функций, субгармонических в полуплоскости.

Обозначим через $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$ верхнюю полуплоскость комплексного переменного z. Через $C(a,r)$ будем обозначать открытый круг радиуса r с центром в точке a; через Ω_+ – пересечение множества Ω с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$: $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{C}_+$; $\overline{G}$ означает замыкание множества G. Если $0 < r_1 < r_2$, то $D_+(r_1,r_2) = \overline{C_+(0,r_2)\backslash C_+(0,r_1)}$ означает замкнутое полукольцо.

Пусть SK – класс субгармонических функций в $\mathbb{C}_+$, имеющих положительную гармоническую мажоранту в любой ограниченной области в $\mathbb{C}_+$. Функции класса $v(z)$ SK обладают следующими свойствами [**?**]:

a) $v(z)$ имеет некасательный предел $v(t)$ почти всюду на вещественной оси, $v(t) \in L^1_{loc}(-\infty,\infty)$;

b) на вещественной прямой существует знакопеременная мера ν такая, что

$$\lim_{y\to+0} \int\limits_a^b v(t+iy)\,dt = \nu([a,b]) - \frac{1}{2}\nu(\{a\}) - \frac{1}{2}\nu(\{b\})\,.$$

Мера ν называется *граничной мерой* функции v;

c) $d\nu(t) = v(t)\,dt + d\sigma(t)$, где σ – сингулярная мера относительно меры Лебега.

Для функции $v \in SK$ определим, следуя [21], *полную меру* λ как

$$\lambda(K) = 2\pi \int\limits_{\mathbb{C}_+ \cap K} \Im\zeta\, d\mu(\zeta) - \nu(K)\,,$$

где μ риссовская мера функции v.

Субгармоническая в $\mathbb{C}_+$ функция v называется *истинно* субгармонической, если $\limsup_{z\to t} v(z) \le 0$ для любого вещественного числа $t \in \mathbb{R}$. Класс истинно субгармонических функций обозначим через JS. Полная мера функции $v \in JS$ является положительной мерой, чем и обоснован термин "истинно субгармоническая функция".

Класс истинно дельта-субгармонических функций $J\delta$ определяется как разность $J\delta = JS - JS$. Заметим, что $J\delta$ – есть наиболее широкий класс δ-субгармонических функций в полуплоскости, для которых можно определить неванлинновскую характеристику.

Справедливы следующие утверждения [21]:

Утверждение 1. $JS \subset SK$.

Утверждение 2. $J\delta = SK - SK$.

Из утверждения 2 следует, что $SK \subset J\delta$. Тем самым мы можем в дальнейшем при рассмотрении субгармонических функций ограничится классом JS, так как функция класса SK представляется в виде разности двух истинно субгармонических функций.

Для функций $v \in J\delta$ справедливо представление в полукруге $z \in C_+(0,R)$:

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\overline{C_+(0,R)}} \frac{G(z,\zeta)}{\Im\zeta}\, d\lambda(\zeta) + \frac{R}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\partial G(z,Re^{i\varphi})}{\partial n} v(Re^{i\varphi})\, d\varphi\,, \tag{7.1}$$

где $G(z,\zeta)$ – функция Грина полукруга, $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ – означает производную по внутренней нормали, ядро под знаком двойного интеграла продолжается на вещественную ось по непрерывности при $|t| \le R$.

Для заданной меры λ обозначим через $\lambda(t) = \lambda(\overline{C(0,t)})$. Пусть $v \in J\delta$, $v = v_+ - v_-$, λ – полная мера функции v, $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ – жорданово разложение меры λ. Введем следующие характеристики функции v:

$$m(r,v) := \frac{1}{r}\int_0^\pi v_+(re^{i\varphi})\sin\varphi\, d\varphi, \quad N(r,v,r_0) := \int_{r_0}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3}\, dt\,,$$

$$T(r,v,r_0) := m(r,v) + N(r,v,r_0) + m(r_0,-v), \quad r > r_0\,,$$

где r_0 – произвольное, как правило фиксированное, положительное число (при желании можно считать $r_0 = 1$), которое в обозначениях (если это не вызывает недоразумений) мы будем опускать (например, вместо $T(r, v, r_0)$ писать $T(r, v)$ и т.д.).

Отметим формулу Карлемана в обозначениях Гришина:

$$\frac{1}{r^k}\int_0^\pi v(re^{i\varphi})\sin k\varphi\,d\varphi = \int_{r_0}^r \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt + \frac{1}{r_0^k}\int_0^\pi v(r_0e^{i\varphi})\sin k\varphi\,d\varphi\,,$$

где

$$d\lambda_k(\tau e^{i\varphi}) = \frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}\tau^{k-1}\,d\lambda(\tau e^{i\varphi})$$

(функция $\sin k\varphi/\sin\varphi$ при $\varphi = 0,\ \pi$, определяется по непрерывности). Положим $\lambda_k(r) = \lambda_k(\overline{C(0, r)})$.

В частности, для $k = 1$ имеем

$$\frac{1}{r}\int_0^\pi v(re^{i\varphi})\sin\varphi\,d\varphi = \int_{r_0}^r \frac{\lambda(t)}{t^3}\,dt + \frac{1}{r_0}\int_0^\pi v(r_0e^{i\varphi})\sin\varphi\,d\varphi\,. \tag{7.2}$$

Формула (7.2) может быть записана как

$$T(r, v) = T(r, -v)\,. \tag{7.3}$$

Строго положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на полуоси $[0, +\infty)$, называется *функцией роста*.

Порядком и нижним порядком функции роста γ называются величины:

$$\beta[\gamma] = \limsup_{r\to\infty}\frac{\ln\gamma(r)}{\ln r}, \quad \alpha[\gamma] = \liminf_{r\to\infty}\frac{\ln\gamma(r)}{\ln r}\,.$$

Порядком и нижним порядком функции $v \in J\delta$ называются величины $\beta[rT(r, v)]$ и $\alpha[rT(r, v)]$.

7.2 Коэффициенты Фурье дельта-субгармонических функций

Коэффициенты Фурье функции $v \in J\delta$ определяются формулой [42]:

$$c_k(r, v) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi v(re^{i\theta})\sin k\theta\,d\theta, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Пусть λ – полная мера функции $v \in J\delta$, тогда [42]:

$$c_k(r,v) = \alpha_k r^k + \frac{2r^k}{\pi}\int_{r_0}^{r}\frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt, \quad k \in \mathbb{N}\,, \tag{7.4}$$

где $\alpha_k = r_0^{-k} c_k(r_0, v)$, а также:

$$c_k(r,v) = \alpha_k r^k + \frac{r^k}{\pi k r_0^{2k}}\iint_{\overline{C_+(0,r_0)}}\frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta) +$$

$$\frac{r^k}{\pi k}\iint_{D_+(r_0,r)}\frac{\sin k\varphi}{\tau^k \Im\zeta}\,d\lambda(\zeta) - \frac{1}{r^k \pi k}\iint_{\overline{C_+(0,r)}}\frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta)\,, \tag{7.5}$$

где $\zeta = \tau e^{i\varphi}$.

Из определения $c_k(r,v)$ следует неравенство:

$$|c_k(r,v)| \le \frac{2k}{\pi}\int_0^{\pi}|v(re^{i\varphi})|\sin\varphi\,d\varphi\,.$$

Отсюда, с учетом равенства (7.3), получаем

$$rT(r,v) \ge \frac{\pi}{2k}|c_k(r,v)|, \quad k = 1,2,\ldots\,. \tag{7.6}$$

7.3 Функции с полной мерой на мнимой полуоси

Основным результатом раздела является следующая теорема.

Теорема 7.1. *Если $v \in SK$ – субгармоническая функция в $\mathbb{C}_+$ бесконечного порядка с полной мерой λ на мнимой полуоси $\mathbb{Y}_+ = \{z : \Im z = iy, y > 0\}$, то ее нижний порядок равен бесконечности.*

Доказательство. Будем считать, что $0 \notin \operatorname{supp} v$. Так как λ сосредоточена на полуоси $\mathbb{Y}_+$, то из формул (7.5) для коэффициентов Фурье функции v находим:

$$c_n(r,v) = \alpha_n r^n + \frac{r^n}{\pi k n_0^{2n}}\sin\frac{\pi n}{2}\int_0^{r_0} t^{n-1}d\lambda(t) +$$

$$\frac{r^n \sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n}\int_{r_0}^{r}\frac{d\lambda(t)}{t^{n+1}} - \frac{1}{r^n \pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\int_0^{r} t^{n-1}d\lambda(t),\ n = 1,2,\ldots\,.$$

Выбирая r_0 так, чтобы $C(0,r_0) \notin \operatorname{supp} v$, получим отсюда:

$$c_n(r,v) = \alpha_n r^n + \frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\int_{r_0}^{r}\Big[\frac{1}{t}\Big(\frac{r}{t}\Big)^n - \frac{1}{t}\Big(\frac{t}{r}\Big)^n\Big]d\lambda(t)\,. \tag{7.7}$$

Интегрируя дважды по частям в формулах (7.7), получим:

$$c_n(r,v) = \alpha_n r^n + \frac{2}{\pi}\tilde{N}(r)\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{(n+1)r^n}{\pi}\sin\frac{\pi n}{2}\times$$
$$\int_{r_0}^{r}\frac{\tilde{N}(r)}{t^{n+1}}\,dt - \frac{n-1}{\pi r^n}\sin\frac{\pi n}{2}\int_{r_0}^{r} t^{n-1}\tilde{N}(r)dt\,, \tag{7.8}$$

где $\tilde{N}(r) = \displaystyle\int_{r_0}^{r}\frac{\lambda(t)}{t^2}dt.$

Так как

$$\frac{n-1}{\pi r^n}\int_{r_0}^{r} t^{n-1}\tilde{N}(r)dt \le \frac{\tilde{N}(r)(n-1)}{\pi r^n}\int_{0}^{r} t^{n-1}dt = \frac{\tilde{N}(r)}{\pi}\,,$$

то из (7.8) при $n = 1 + 4\pi k$, $k = 1, 2, \ldots$, получаем

$$\frac{c_n(r,v)}{r^n} \ge \alpha_n + \frac{n+1}{\pi}\int_{r_0}^{r}\frac{\tilde{N}(r)}{t^{n+1}}\,dt + \frac{\tilde{N}(r)}{\pi r^n}\,. \tag{7.9}$$

Если функция $\tilde{N}(r)$ имеет бесконечный порядок, то интеграл, стоящий в правой части этого неравенства, неограничен при $r \to \infty$, так как

$$\int_{r}^{\infty}\frac{\tilde{N}(t)}{t^{n+1}}\,dt \ge \frac{\tilde{N}(r)}{nr^n}, \quad n = 1, 2, \ldots\,,$$

а правая часть этого неравенства может быть сделана сколь угодно большой при подходящем выборе r. Учитывая это и неравенство (7.3), из (7.5), получаем требуемое утверждение.

Если $\tilde{N}(r)$ имеет конечный порядок, то существуют положительные числа $K > 0$ и $\rho > 0$ такие, что $\tilde{N}(r) \le Kr^\rho$ для всех $r > 0$. Можно считать ρ нецелым. Отсюда следует, что

$$K2^\rho r^\rho \ge \tilde{N}(2r) \ge \int_{r}^{2r}\frac{\lambda(t)}{t^2}\,dt \ge \lambda(r)\int_{r}^{2r}\frac{dt}{t^2} = \frac{\lambda(r)}{2r}\,,$$

т.е.

$$\lambda(r) \le K2^{\rho+1}r^{\rho+1}\,.$$

В этом случае из работы [21] следует, что существует функция $g \in JS$ порядка ρ с полной мерой λ. Тогда функция $G = v - g \in J\delta$ и $\lambda_G \equiv 0$. Далее нам понадобится лемма.

Лемма 7.1. *Если $G \in J\delta$ и $\lambda_G \equiv 0$, то $G(z) = \Im f(z)$, где $f(z)$ – целая вещественная функция.*

Доказательство. Напомним [33], что целая функция называется вещественной, если $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

Так как полная мера функции G равна нулю, то из (7.1) следует, что при любом $R > 0$

$$G(z) = \frac{R}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\partial G(z, Re^{i\varphi})}{\partial n}\, G(Re^{i\varphi})\, d\varphi\,,\, z \in C_+(0,R)\,.$$

В правой части стоит гармоническая в полукруге $C_+(0,R)$ функция, непрерывно продолжающаяся нулем на интервале $(-R,R)$. Поскольку R – произвольное положительное число, то функция $G(z)$ является гармонической в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, непрерывно продолжающейся нулем на вещественную ось. По принципу симметрии эта функция продолжается как гармоническая в нижнюю полуплоскость. Таким образом, существует гармоническая во всей плоскости функция $h(z)$, обращающаяся в нуль на вещественной оси и такая, что $G(z) = h(z)$ при $\Im z > 0$.

Пусть $-h_1(z)$ – функция, гармонически сопряженная с функцией $h(z)$. Тогда $f(z) = h_1(z) + ih(z)$ есть целая функция, вещественная на вещественной оси и $h(z) = \Im f(z)$. Лемма доказана.

Согласно лемме $G(z) = \Im f(z)$, где $f(z)$ – целая вещественная функция,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,.$$

Если лишь конечное число $a_n \neq 0$, то $f(z)$ – многочлен, следовательно G и v имеют конечный порядок, что противоречит условию.

Далее

$$c_n(r,G) = a_n r^n\,, n = 1, 2, \ldots\,.$$

Тогда из неравенства

$$rT(r,v) \geq rT(r,G) - rT(r,g) \geq \frac{\pi}{2n}\left|c_n(r,G)\right| + O(r^{\rho}) \geq$$
$$\frac{1}{2}\left|a_n\right| r^n + O(r^{\rho})\,, r \to \infty\,, n = 1, 2, \ldots\,,$$

следует, что $\alpha[rT(r,v)] = \infty$. Теорема доказана.

8 ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО (γ,ε)-ТИПА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

8.1 Введение. Классы функций в верхней полуплоскости

Обозначим через $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ верхнюю полуплоскость комплексного переменного z. Через $C(a,r)$ будем обозначать открытый круг радиуса r с центром в точке a; через Ω_+ – пересечение множества Ω с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$: $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{C}_+$; $\overline{G}$ означает замыкание множества G. Если $0 < r_1 < r_2$, то $D_+(r_1,r_2) = \overline{C_+(0,r_2)\setminus C_+(0,r_1)}$ означает замкнутое полукольцо.

Пусть SK – класс субгармонических функций в $\mathbb{C}_+$, имеющих положительную гармоническую мажоранту в любой ограниченной области в $\mathbb{C}_+$. Функции класса $v(z)$ SK обладают следующими свойствами [21]:

a) $v(z)$ имеет некасательный предел $v(t)$ почти всюду на вещественной оси, $v(t) \in L^1_{loc}(-\infty,\infty)$;

b) на вещественной прямой существует знакопеременная мера ν такая, что

$$\lim_{y\to+0}\int\limits_a^b v(t+iy)\,dt = \nu([a,b]) - \frac{1}{2}\nu(\{a\}) - \frac{1}{2}\nu(\{b\})\,.$$

Мера ν называется граничной мерой функции v;

c) $d\nu(t) = v(t)\,dt + d\sigma(t)$, где σ – сингулярная мера относительно меры Лебега.

Для функции $v \in SK$ определим, следуя [21], полную меру λ как

$$\lambda(K) = 2\pi\int\limits_{\mathbb{C}_+\cap K}\operatorname{Im}\zeta\,d\mu(\zeta) - \nu(K)\,,$$

где μ риссовская мера функции v.

Мера λ обладает следующими свойствами:

1) λ – конечная мера на каждом компакте $K \subset \mathbb{C}$,

2) λ – положительная мера вне $\mathbb{R}$,

3) λ равна нулю в полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$.

Наоборот, если мера λ удовлетворяет условиям 1) – 3), то существует функция $v \in SK$, с полной мерой равной λ. Совокупность условий 1) – 3) в дальнейшем будем обозначать через {G}, если, кроме того, мера λ неотрицательная и на $\mathbb{R}$, то через $\{\mathrm{G}^+\}$.

Если D – ограниченная область в $\mathbb{C}_+$, $D_1 = D \cup (\partial D \cap \mathbb{R})$, $v \in SK$, $z \in D$, тогда

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{D_1} \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right| \, d\lambda(\zeta) + h(z)\,,$$

где h – гармоническая функция в D, а если $[a,b] \subset \{\mathbb{R} \cap \partial D\}$, то h допускает непрерывное продолжение нулем на (a,b), ядро $\dfrac{1}{\operatorname{Im}\zeta} \ln\left|\dfrac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right|$ считается продолженным по непрерывности на вещественную ось. Полная мера λ определяет функцию $v \in SK$ так же как мера Рисса μ определяет субгармоническую функцию в $\mathbb{C}$. Точнее, если функции v_1, $v_2 \in SK$ и каждая имеет полную меру λ, то существует вещественная целая функция g такая, что $v_2(z) - v_1(z) = \operatorname{Im} g(z)$, $z \in \mathbb{C}_+$.

Субгармоническая в $\mathbb{C}_+$ функция v называется истинно субгармонической, если $\limsup\limits_{z \to t} v(z) \le 0$ для любого вещественного числа $t \in \mathbb{R}$. Класс истинно субгармонических функций обозначим через JS. Полная мера функции $v \in JS$ является положительной мерой, чем и обоснован термин "истинно субгармоническая функция". Отметим также, что множество JS является конусом, т.е., если v_1, $v_2 \in JS$, $\alpha \ge 0$, то $v_1 + v_2$, $\alpha v_1 \in JS$.

Класс истинно дельта-субгармонических функций $J\delta$ определяется как разность $J\delta = JS - JS$. Заметим, что $J\delta$ – есть наиболее широкий класс δ-субгармонических функций в полуплоскости, для которых можно определить неванлинновскую характеристику.

Справедливы следующие утверждения [21]:

Утверждение 1. $JS \subset SK$.

Утверждение 2. $J\delta = SK - SK$.

Из утверждения 2 следует, что $SK \subset J\delta$. Тем самым мы можем в дальнейшем при рассмотрении субгармонических функций ограничится классом JS, так как функция класса SK представляется в виде разности двух истинно субгармонических функций.

Для функций $v \in J\delta$ справедливо представление в полукольце $z \in$

$D_+(R_1, R_2)$:

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{D_+(R_1,R_2)} K(z,\zeta)\, d\lambda(\zeta) +$$

$$+\frac{R_2}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z, R_2 e^{i\varphi})}{\partial n} v\left(R_2 e^{i\varphi}\right)\, d\varphi + \tag{8.1}$$

$$+\frac{R_1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z, R_1 e^{i\varphi})}{\partial n} v(R_1 e^{i\varphi})\, d\varphi\,,$$

и в полукруге $z \in C_+(0, R)$:

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\overline{C_+(0,R)}} \frac{G(z,\zeta)}{\operatorname{Im}\zeta}\, d\lambda(\zeta) +$$

$$+\frac{R}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z, R e^{i\varphi})}{\partial n} v(R e^{i\varphi})\, d\varphi\,, \tag{8.2}$$

где $G(z,\zeta)$ – функция Грина полукруга, $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ – означает производную по внутренней нормали, ядро под знаком двойного интеграла продолжается на вещественную ось по непрерывности при $|t| \le R$.

Для заданной меры λ обозначим через $\lambda(t) = \lambda(\overline{C(0,t)})$. Пусть $v \in J\delta$, $v = v_+ - v_-$, λ – полная мера функции v, $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ – жорданово разложение меры λ. Введем следующие характеристики функции v:

$$m(r,v) := \frac{1}{r} \int\limits_0^\pi v_+(re^{i\varphi}) \sin\varphi\, d\varphi, \quad N(r,v,r_0) := \int\limits_{r_0}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3}\, dt\,,$$

$$T(r,v,r_0) := m(r,v) + N(r,v,r_0) + m(r_0,-v), \quad r > r_0\,,$$

где r_0 – произвольное, как правило фиксированное, положительное число (при желании можно считать $r_0 = 1$), которое в обозначениях (если это не вызывает недоразумений) мы будем опускать (например, вместо $T(r,v,r_0)$ писать $T(r,v)$ и т.д.).

Обозначим

$$d\lambda_k(\tau e^{i\varphi}) = \frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi} \tau^{k-1}\, d\lambda(\tau e^{i\varphi})$$

(функция $\sin k\varphi / \sin\varphi$ при $\varphi = 0$, π, определяется по непрерывности). Положим $\lambda_k(r) = \lambda_k(\overline{C(0,r)})$. Справедливо неравенство, которое будет использоваться в дальнейшем:

$$|\lambda_k(r)| \le kr^{k-1}|\lambda|(r)\,. \tag{8.3}$$

Действительно,

$$|\lambda_k(r)| = \left|\iint\limits_{C(0,r)} d\lambda_k(\zeta)\right| = \left|\iint\limits_{C(0,r)} \frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}\tau^{k-1}\,d\lambda(\zeta)\right| \le$$
$$m\iint\limits_{C(0,r)} \tau^{k-1}\,d|\lambda|(\zeta) \le kr^{k-1}|\lambda|(r)\,.$$

Отметим формулу Карлемана в обозначениях Гришина:

$$\frac{1}{r^k}\int\limits_0^\pi v(re^{i\varphi})\sin k\varphi\,d\varphi = \int\limits_{r_0}^r \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt + \frac{1}{r_0^k}\int\limits_0^\pi v(r_0e^{i\varphi})\sin k\varphi\,d\varphi\,, \tag{8.4}$$

В частности, для $k = 1$ имеем

$$\frac{1}{r}\int\limits_0^\pi v(re^{i\varphi})\sin\varphi\,d\varphi = \int\limits_{r_0}^r \frac{\lambda(t)}{t^3}\,dt + \frac{1}{r_0}\int\limits_0^\pi v(r_0e^{i\varphi})\sin\varphi\,d\varphi\,. \tag{8.5}$$

Формула (8.5) может быть записана как

$$T(r,v) = T(r,-v)\,. \tag{8.6}$$

Используя теорию эллиптических функций (см., например, [2]) можно получить разложения ядра в формуле (8.1) при $R_1 = qR$, $R_2 = R/q$, $q \in (0,1)$, $z = re^{i\theta}$, $\zeta = \tau e^{i\varphi}$:

$$\begin{gathered} G(z,\zeta) = 2\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m(1-q^{4m})}\left(\frac{\tau}{r}\right)^m\left(1-\frac{q^{2m}r^{2m}}{R^{2m}}\right)\times \\ \left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{\tau^{2m}}\right)\sin m\theta\sin m\varphi, \qquad qR \le \tau < r < \frac{1}{q}R\,, \end{gathered} \tag{8.7}$$

$$\begin{gathered} G(z,\zeta) = 2\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m(1-q^{4m})}\left(\frac{r}{\tau}\right)^m\left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{r^{2m}}\right)\times \\ \left(1-\frac{q^{2m}\tau^{2m}}{R^{2m}}\right)\sin m\theta\sin m\varphi, \qquad qR \le r < \tau \le \frac{1}{q}R\,, \end{gathered} \tag{8.8}$$

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial n} = \frac{2}{t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(1-q^{4m})}\left(\frac{t}{r}\right)^m\left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{t^{2m}}\right)\times \tag{8.9}$$
$$\left(1-\frac{q^{2m}r^{2m}}{R^{2m}}\right)\sin m\theta, \qquad qR\le |t|\le r\le R/q\,,$$

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial n} = \frac{2}{t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(1-q^{4m})}\left(\frac{r}{t}\right)^m\left(1-\frac{q^{2m}t^{2m}}{R^{2m}}\right)\times \tag{8.10}$$
$$\left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{r^{2m}}\right)\sin m\theta, \qquad qR\le r\le |t|\le R/q\,,$$

$$\frac{\partial G\left(z,qRe^{i\varphi}\right)}{\partial n} = \frac{4}{qR}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{4m}}\left(\frac{qR}{r}\right)^m\times \tag{8.11}$$
$$\left(1-\frac{q^{2m}r^{2m}}{R^{2m}}\right)\sin m\theta\sin m\varphi\,,$$

$$\frac{\partial G\left(z,\frac{1}{q}Re^{i\varphi}\right)}{\partial n} = \frac{4q}{R}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{4m}}\left(\frac{qr}{R}\right)^m\times \tag{8.12}$$
$$\left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{r^{2m}}\right)\sin m\theta\sin m\varphi\,.$$

Аналогичные разложения ядра в формуле (8.2) имеют вид:

$$G(z,Re^{i\varphi}) = \begin{cases} 2\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{r}{\tau}\right)^m\left(1-\frac{\tau^{2m}}{R^{2m}}\right)\sin m\theta\sin m\varphi\,, \\ \hfill 0\le r<\tau\le R, \\ 2\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{\tau}{r}\right)^m\left(1-\frac{r^{2m}}{R^{2m}}\right)\sin m\theta\sin m\varphi\,, \\ \hfill 0\le \tau<r\le R\,. \end{cases} \tag{8.13}$$

$$\frac{\partial G(z,Re^{i\varphi})}{\partial n} = 4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^m}{R^{m+1}}\sin m\theta\sin m\varphi\,, \tag{8.14}$$

8.2 Сферические гармоники функций класса $J\delta$

Сферическими гармониками функции $v\in J\delta$ называются функции

$$c_k(\theta,r,v) = \frac{2\sin k\theta}{\pi}\int\limits_0^{\pi} v(re^{i\varphi})\sin k\varphi\,d\varphi,\ \theta\in[0,\pi],\quad k\in\mathbb{N}\,.$$

Пусть λ – полная мера функции $v \in J\delta$, величина λ_k определена выше. Тогда

$$c_k(\theta, r, v) = \alpha_k r^k + \frac{2r^k \sin k\theta}{\pi} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\, dt, \quad k \in \mathbb{N}\,, \tag{8.15}$$

где $\alpha_k = \dfrac{2}{\pi} r_0^{-k} c_k(\theta, r_0, v)$ (здесь и далее r_0 – фиксированное положительное число, например, $r_0 = 1$).

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралу в правой части (8.15), получаем

$$\begin{gathered} c_k(\theta, r, v) = \alpha_k r^k + \frac{r^k \sin k\theta}{\pi k r_0^{2k}} \iint\limits_{\overline{C_+(0,r_0)}} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta} \tau^k\, d\lambda(\zeta) + \\ \frac{r^k \sin k\theta}{\pi k} \iint\limits_{D_+(r_0,r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im}\zeta}\, d\lambda(\zeta) - \frac{\sin k\theta}{r^k \pi k} \iint\limits_{\overline{C_+(0,r)}} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta} \tau^k\, d\lambda(\zeta) \end{gathered} \tag{8.16}$$

(здесь и всюду ниже $\zeta = \tau e^{i\varphi}$).

8.3 Суб- и δ-субгармонические функции конечного (γ, ε)-типа

Строго положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на полуоси $[0, +\infty)$, называется функцией роста.

Порядком и нижним порядком функции роста γ называются величины:

$$\beta[\gamma] = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln \gamma(r)}{\ln r}, \quad \alpha[\gamma] = \liminf_{r\to\infty} \frac{\ln \gamma(r)}{\ln r}\,.$$

Порядком и нижним порядком функции $v \in J\delta$ называются величины $\beta[rT(r, v)]$ и $\alpha[rT(r, v)]$.

Пусть $\varepsilon(r)$ – невозрастающая функция на $[0; +\infty]$, такая что $\varepsilon(0) = 1$, и для некоторого $\eta > 1$ неравенство

$$\varepsilon(r + r\varepsilon(r)) \geq (\varepsilon(r))^\eta \tag{8.17}$$

верно для всех больших r и для некоторых $\eta > 1$.

Обозначим класс таких функций через $\mathcal{E}$.

Пусть для $v \in J\delta$ $v = v_+ - v_-$, λ – полная мера v, а $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ – жорданово разложение λ.

Пусть γ – функция роста, такая что выполняется условие:

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\gamma(r)}{r} > 0\,, \tag{8.18}$$

а $\varepsilon(r)$ – функция класса $\mathcal{E}$. Следуя Хабибуллину, введем определение.

Определение *Пусть γ – функция роста и $\varepsilon \in \mathcal{E}$. Функция $v \in J\delta$, $0 \notin \operatorname{supp}\lambda_v$, $v(0) = 0$, называется функцией конечного (γ, ε)-типа, если существуют постоянные α, A и $B > 0$ такие, что*

$$T(r, v) \leq \frac{A}{r(\varepsilon(r))^\alpha}\gamma(r + B\varepsilon(r)r)\,.$$

Обозначим класс таких функций через $J\delta((\gamma, \varepsilon))$.

Лемма 8.1 *Класс $J\delta((\gamma, \varepsilon))$ – действительное пространство и $JS((\gamma, \varepsilon))$ – конус.*

Это следует из (8.6) и неравенства $T\left(r, \sum v_j\right) \leq \sum T\left(r, v_j\right)$.

Положительная мера λ в комплексной плоскости называется *мерой конечного* (γ, ε)*-типа*, если существуют положительные постоянные α, A и B такие, что для всех $r > 0$,

$$\lambda(r) \leq \frac{Ar}{(\varepsilon(r))^\alpha}\gamma(r + B\varepsilon(r)r)\,. \tag{8.19}$$

Положительная мера λ имеет *конечную* (γ, ε)*-плотность*, если существуют положительные постоянные α, A и B такие, что

$$N(r, \lambda) := \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda(t)}{t^3}\,dt \leq \frac{A}{r(\varepsilon(r))^\alpha}\gamma(r + B\varepsilon(r)r)\,. \tag{8.20}$$

Лемма 8.2 *Если λ – мера конечной (γ, ε)-плотности, то она является мерой конечного (γ, ε)-типа.*

Доказательство. Имеем

$$N(r(1 + \varepsilon(r)), \lambda) = \int\limits_{r_0}^{r(1+\varepsilon(r))} \frac{\lambda(t)}{t^3}\,dt \geq$$

$$\int\limits_{r}^{r(1+\varepsilon(r))} \frac{\lambda(t)}{t^3}\,dt \geq \frac{\lambda(r)}{r^2(1 + \varepsilon(r))^2}\ln(1 + \varepsilon(r))\,.$$

Это неравенство и элементарное неравенство

$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}, \quad x \geq 0\,, \tag{8.21}$$

приводит к неравенству

$$N(r(1+\varepsilon(r)),\lambda) \geq \frac{\lambda(r)\varepsilon(r)}{r^2(1+\varepsilon(r))^3}\,. \tag{8.22}$$

Далее, из (2.17) получаем

$$N(r(1+\varepsilon(r)),\lambda) \leq \frac{A\gamma(r(1+\varepsilon(r)) + B\varepsilon(r(1+\varepsilon(r)))r(1+\varepsilon(r)))}{r(1+\varepsilon(r))(\varepsilon(r(1+\varepsilon(r))))^{\alpha}} \leq$$
$$\frac{A\gamma(r + r\varepsilon(r) + 2Br\varepsilon(r))}{r(1+\varepsilon(r))(\varepsilon(r))^{\alpha\eta}}\,.$$

Из последнего неравенства и (8.22) следует неравенство (8.20) для некоторых постоянных α, A и B.

8.4 Критерий принадлежности функции классу $J\delta((\gamma,\varepsilon))$

Теорема 8.1. *Пусть γ – функция роста, ε – функция класса $\mathcal{E}$ и пусть $v \in J\delta$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $v \in J\delta((\gamma,\varepsilon))$;

(2) *мера $\lambda_+(v)$ (или $\lambda_-(v)$) имеет конечную (γ,ε)-плотность и*

$$|c_k(\theta,r,v)| \leq \frac{A\gamma(r + B\varepsilon(r)r)}{(\varepsilon(r))^{\alpha}}, \quad k \in \mathbb{N}\,, \tag{8.23}$$

для некоторых положительных α, A, B и всех $r > 0$.

Здесь $\lambda(v)$=$\lambda_+(v)$–$\lambda_-(v)$ – полная мера, соответствующая функции v.

Доказательство. Докажем 1) $\Longrightarrow$ 2). Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 8.3 *Пусть $v \in J\delta((\gamma,\varepsilon))$. Тогда каждая из мер $\lambda_+(v)$ и $\lambda_-(v)$ имеет конечную (γ,ε)-плотность и справедливо следующее неравенство:*

$$\int_0^{\pi} |v(re^{i\varphi})| \sin\varphi\, d\varphi \leq \frac{A}{(\varepsilon(r))^{\alpha}}\gamma(r + B\varepsilon(r)r)\,. \tag{8.24}$$

Доказательство. Мера $\lambda_-(v)$ имеет конечную (γ,ε)-плотность по определению класса $J\delta((\gamma,\varepsilon))$. Тот факт, что $\lambda_+(v)$ имеет конечную (γ,ε)-плотность, следует из (8.6). Подобная формула приводит к следующему результату:

$$\int\limits_0^\pi v_\pm(re^{i\varphi})\sin\varphi\,d\varphi \le \frac{A}{(\varepsilon(r))^\alpha}\gamma(r+B\varepsilon(r)r)\,.$$

Из этого следует (8.24). Теорема доказана.

Из (8.24) следует, что для функции $v\in JS((\gamma,\varepsilon))$

$$|c_k(\theta,r,v)| \le \int\limits_0^\pi |v(re^{i\varphi})||\sin k\varphi|\,d\varphi \le \frac{Ak}{(\varepsilon(r))^\alpha}\gamma(r+B\varepsilon(r)r)\,. \tag{8.25}$$

Из формулы (8.4) следует, что

$$c_k(\theta,r,v) = \frac{c_k(\theta,r(1+\varepsilon(r)),v)}{(1+\varepsilon(r))^k} - \frac{2r^k\sin k\theta}{\pi}\int\limits_r^{r(1+\varepsilon(r))}\frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt\,, \tag{8.26}$$

Используя элементарное неравенство

$$\frac{k}{(1+a)^k} \le \frac{1}{\ln(1+a)} \le \frac{2}{a},\quad 0<a\le 1\,,$$

и (8.25), мы можем оценить первое слагаемое в правой части (8.26).

$$\begin{gathered}\left|\frac{c_k(\theta,r(1+\varepsilon(r)),v)}{(1+\varepsilon(r))^k}\right| \le \\ \frac{Ak\gamma(r(1+\varepsilon(r))+B\varepsilon(r(1+\varepsilon(r)))r(1+\varepsilon(r)))}{(1+\varepsilon(r))^k(\varepsilon(r(1+\varepsilon(r))))^\alpha} \le \\ \frac{2A\gamma(r+B_1\varepsilon(r)r)}{(\varepsilon(r))^{\alpha+1}}\,.\end{gathered} \tag{8.27}$$

Используя (8.3) и (8.19), оценим второе слагаемое в правой части (8.26)

$$\begin{gathered}\left|\frac{2r^k\sin k\theta}{\pi}\int\limits_r^{r(1+\varepsilon(r))}\frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt\right| \le \frac{2kr^k}{\pi}\int\limits_r^{r(1+\varepsilon(r))}\frac{|\lambda(t)|}{t^{k+2}}\,dt \le \\ \frac{Akr^k\gamma(r+B\varepsilon(r)r)}{(\varepsilon(r))^\alpha}\int\limits_r^{r(1+\varepsilon(r))}\frac{dt}{t^{k+1}} \le \frac{A\gamma(r+B\varepsilon(r)r)}{(\varepsilon(r))^\alpha}\,.\end{gathered} \tag{8.28}$$

) Неравенство (8.23) получаем из (8.27) и (8.28).

1) $\Longrightarrow$ 2) доказано. Докажем теперь 2) $\Longrightarrow$ 1).

Допустим, что условие 2) теоремы выполнено. Из этого следует, согласно неравенству

$$|c_1(r,v)| \le A\frac{\gamma(r+B\varepsilon(r)r)}{(\varepsilon(r))^\alpha}$$

и формуле (8.5), что если одна из мер $\lambda_+(v)$ или $\lambda_-(v)$ имеет конечную (γ,ε)-плотность, то вторая мера также имеет конечную (γ,ε)-плотность, и поэтому $|\lambda|$ имеет конечную (γ,ε)-плотность. Теперь оценим $v_+(z)$, используя формулу (8.2). Принимая во внимание разложение (8.14) в ряд Фурье, получим

$$\left|\frac{R}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\partial G(z,Re^{i\varphi})}{\partial n} v(Re^{i\varphi})\,d\varphi\right| \le \left|\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sum_{m=1}^\infty \frac{r^m}{R^m}\sin m\theta \sin m\varphi\, v(Re^{i\varphi})\,d\varphi\right|$$
$$= \left|\sum_{m=1}^\infty \left(\frac{r}{R}\right)^m c_m(\theta,R,v)\right| \le \frac{A\gamma(R+B\varepsilon(R)R)}{(\varepsilon(R))^\alpha}\sum_{m=1}^\infty\left(\frac{r}{R}\right)^m, \quad z=re^{i\theta}\,.$$

Положим $R=r(1+\varepsilon(r))$. Тогда

$$\left|\frac{R}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\partial G(z,Re^{i\varphi})}{\partial n} v(Re^{i\varphi})\,d\varphi\right| \le \frac{A\gamma\big(r+r\varepsilon(r)+Br(1+\varepsilon(r))\varepsilon(r+r\varepsilon(r))\big)}{\big(\varepsilon(r+r\varepsilon(r))\big)^\alpha}\times$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(1+\varepsilon(r))^k} \le \frac{A_1\gamma\big(r+B_1r\varepsilon(r)\big)}{\big(\varepsilon(r)\big)^{\alpha_1}}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{(1+\varepsilon(r))^k} = \frac{A_1\gamma\big(r+B_1r\varepsilon(r)\big)}{\big(\varepsilon(r)\big)^{\alpha_1+1}}\,.$$

Так как функция $K(z,\zeta)$ в (8.2) неотрицательна, то

$$v_+(z) \le \frac{1}{2\pi}\iint_{\overline{C_+(0,R)}} K(z,\zeta)\,d\lambda_-(\zeta) + \frac{A_1\gamma\big(r+B_1r\varepsilon(r)\big)}{\big(\varepsilon(r)\big)^{\alpha_1+1}}\,.$$

Используя ортогональность системы полиномов $\{\sin k\theta\}$, $k=1,2,...$, на отрезке $[0,\pi]$ и (8.13), получаем

$$\int_0^\pi v_+(z)\sin\theta\,d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left\{\left[\iint_{\overline{C_+(0,r)}} + \iint_{D_+(r,R)}\right] K(z,\zeta)\,d\lambda_-(\zeta)\right\}$$

$$\times\sin\theta\,d\theta + \frac{2A_1\gamma\big(r+B_1r\varepsilon(r)\big)}{\big(\varepsilon(r)\big)^{\alpha_1+1}} \le \frac{1}{2}\iint_{\overline{C_+(0,r)}} \frac{\sin\varphi}{\Im\zeta}\frac{\tau}{r}\,d\lambda_-(\zeta)+$$

$$\frac{1}{2}\iint_{D_+(r,R)} \frac{\sin\varphi}{\Im\zeta}\frac{r}{\tau}\,d\lambda_-(\zeta) + \frac{2A_1\gamma\big(r+B_1r\varepsilon(r)\big)}{\big(\varepsilon(r)\big)^{\alpha_1+1}} \le \frac{1}{2r}\iint_{\overline{C_+(0,R)}} d\lambda_-(\zeta)+$$

$$\frac{2A_1\gamma\big(r+B_1r\varepsilon(r)\big)}{\big(\varepsilon(r)\big)^{\alpha_1+1}} \le \frac{\lambda_-(R)}{2r} + \frac{2A_1\gamma\big(r+B_1r\varepsilon(r)\big)}{\big(\varepsilon(r)\big)^{\alpha_1+1}}\,.$$

Так как мера λ_- имеет конечную (γ,ε)-плотность, то $v\in J\delta((\gamma,\varepsilon))$.

Теорема доказана.

Теорема 8.2 *Пусть γ – функция роста, $\varepsilon\in\mathcal{E}$ и $v\in JS$. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) $v\in JS((\gamma,\varepsilon))$;

2)
$$|c_k(\theta,r,v)| \le \frac{A\gamma(r+B\varepsilon(r)r)}{(\varepsilon(r))^\alpha},\quad k\in\mathbb{N}\,,$$

для некоторых положительных α, A, B и $r>0$.

Эта теорема является следствием из теоремы 8.1, так как мера λ_- равна тождественно нулю для функций из класса JS.

9 КАНОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДОПУСТИМЫХ МЕР В ПОЛУПЛОСКОСТИ

9.1 Постановка задачи

Многие важные результаты в теории субгармонических функций получаются с использованием формул представления этих функций. Наиболее известная их них формула Пуассона-Иенсена, которая дачт представление субгармонической функции в круге. Отметим также формулы Неванлинны, Симидзу-Альфорса, Карлемана, Левина, которые приведены в [14]. Теория субгармонических функций в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$, созданная А.Ф. Гришиным [21], в значительной мере опирается на открытые им интегральные формулы. Аналогичные формулы при различных ограничениях получали другие авторы [13], [77], [80].

В теории субгармонических функций часто возникает обратная задача: по заданной мере построить субгармоническую функцию, мера которой в точности совпадает с заданной мерой. Классические формулы Вейерштрасса, Адамара дают представление целых функций конечного порядка, нули которых совпадают с заданной последовательностью. Эти формулы были обобщены в работах Рубела [96], Хабибуллина [59], [60], Малютина и Герасименко [48], Малютина и Садыка [45], Денга [70], и др. Целью настоящей статьи является получить аналогичные формулы для мер конечного γ-типа, распределенных в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Основным инструментом работы является метод рядов Фурье, развитый в работах Рубела и Тейлора для мероморфных функций, и распространенный К.Г. Малютиным на дельта-субгармонические функции в полуплоскости [42].

Мы вводим понятие канонической функции меры конечного γ-типа, распределенной в верхней полуплоскости, которая в случае дискретной меры совпадает с определением канонического произведения Неванлинны, построенного по нулям функции, аналитической в верхней полуплоскости [13].

В дальнейшем будем пользоваться терминологией работы [42]. Кроме того, следуя Титчмаршу [52], будем пользоваться следующими названиями и обозначениями. Если в некотором рассуждении встречается число, не зависящее от основных переменных, то оно называется постоянной. Для обозначения абсолютных положительных постоянных, не обязательно одних и тех же, мы пользуемся буквами A, B. Может встретиться утверждение вроде "$|f(z)| < A\gamma(Br)$, следовательно, $3|f(z)| < A\gamma(Br)$", которое не должно вызывать недоразумений.

9.2 Меры в верхней полуплоскости

Пусть λ – мера, удовлетворяющая условиям $\{G^+\}$, γ – некоторая функция роста. Для $k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$S_+(r;k,\lambda) = \frac{1}{\pi k}\iint_{D_+(r_0,r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \Im\zeta}\,d\lambda(\zeta) + \frac{1}{\pi k r_0^{2k}}\iint_{\overline{C_+(0,r_0)}} \frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta)\,,$$

где $\zeta = \tau e^{i\varphi}$, $r_0 > 0$ – фиксированное число,

$$S_+(r_1,r_2;k,\lambda) = S_+(r_2;k,\lambda) - S_+(r_1;k,\lambda), \quad r_1 \le r_2\,,$$

$$S'_+(r;k,\lambda) = \frac{1}{\pi k r^k}\iint_{\overline{C_+(0,r)}} \frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta)\,,$$

при этом символ λ, если это не вызывает недоразумений, будем опускать.

Мера λ называется *γ-сбалансированной*, если существуют положительные постоянные A, B, при которых

$$|S_+(r_1,r_2;k,\lambda)| \le \frac{A\gamma(Br_1)}{r_1^k} + \frac{A\gamma(Br_2)}{r_2^k}\,, \qquad (9.1)$$

для всех $r_2 > r_1 > 0$ и $k = 2, 3, \ldots$.

Мера λ называется *γ-допустимой*, если она γ-сбалансированна и имеет конечную γ-плотность.

Мера λ называется *γ-взвешенной*, если существуют последовательность вещественных чисел $\alpha = \{\alpha_k\}$ и положительные постоянные A, B, при которых для всех $r > 0$, $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|\alpha_k + S_+(r;k,\lambda)| \le \frac{A\gamma(Br)}{r^k}\,. \qquad (9.2)$$

В работе [42] было введено следующее определение. Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}$ – некоторая последовательность вещественных чисел. Функции

$$c_k(r;\lambda,\alpha) = r^k(\alpha_k + S_+(r;k)) - S'_+(r;k), \quad k \in \mathbb{N}\,, \qquad (9.3)$$

называются *коэффициентами Фурье пары* (λ, α).

Пара (λ, α) называется *γ-допустимой*, если мера λ имеет конечную γ-плотность и существуют положительные постоянные A, B, при которых

$$|c_k(r;\lambda,\alpha)| \le A\gamma(Br), \quad r>0,\ k\in\mathbb{N}\,. \tag{9.4}$$

Мы введем понятие коэффициентов Фурье меры, которое не зависит от выбора последовательности чисел α, а зависит только от самой меры.

Пусть γ – функция роста, а мера λ является γ-допустимой. Положим $p[\gamma]=\infty$, если для всех $p\in\mathbb{N}$

$$\liminf_{r\to\infty}\gamma(r)r^{-p}>0\,,$$

и

$$p[\gamma]=\min\left\{p : p\in\mathbb{N}, \liminf_{r\to\infty}\gamma(r)r^{-p}=0\right\},$$

в противном случае.

Для $1\le k<p[\gamma]$ обозначим через $r'_k=\inf r_k$, где нижняя грань берется по всем r_k, для которых неравенство

$$\frac{\gamma(Br_k)}{r_k^k}\le 2\frac{\gamma(Br)}{r^k} \tag{9.5}$$

выполняется для всех $r>0$, а число B удовлетворяет неравенству (9.1). Для этих k определим

$$\alpha_k=-S_+(r'_k;k). \tag{9.6}$$

Если $p[\gamma]<\infty$, то по определению $p[\gamma]$ существует последовательность $\{r_j\}$, $r_j\uparrow\infty$ при $j\to\infty$, такая, что

$$\lim_{j\to\infty}\gamma(Br_j)r_j^{-p[\gamma]}=0. \tag{9.7}$$

Тогда для $k\ge p[\gamma]$ положим

$$\alpha_k=-\lim_{j\to\infty}S(r_j;k)\,. \tag{9.8}$$

Определение *Пусть в определении* (9.3) *в качестве последовательности α взяты числа, определяемые формулой* (9.6), *с заменой r_k на r'_k, и формулой* (9.8). *Тогда коэффициенты Фурье пары (λ,α) называются коэффициентами Фурье меры λ (соответствующими функции роста $\gamma(r)$).*

Покажем корректность этого определения в случае, когда мера λ γ-допустима. По предположению имеем

$$|S_+(r_m,r_j;k,)|\le\frac{A\gamma(Br_m)}{r_m^k}+\frac{A\gamma(Br_j)}{r_j^k}.$$

Отсюда следует фундаментальность последовательности $\{S_+(r_j;k)\}$ для $k \geq p[\gamma]$. Докажем, что предел в (9.8) не зависит от выбора последовательности $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию (9.7). Действительно, пусть $\{r_j^1\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{r_j^2\}_{j=1}^{\infty}$ две такие последовательности, а α_k^1 и α_k^2 – соответствующие им пределы в (9.8). При заданном $\varepsilon > 0$ выберем номер j_0 так, чтобы при $j \geq j_0$ выполнялись неравенства

$$|\alpha_k^1 + S(r_j^1;k)| \leq \varepsilon, \quad |\alpha_k^2 + S(r_j^2;k)| \leq \varepsilon\,.$$

Тогда

$$|\alpha_k^1 - \alpha_k^2| \leq |\alpha_k^1 + S(r_j^1;k)| + |\alpha_k^2 + S(r_j^2;k)| + |S(r_j^1, r_j^2;k)| \leq$$
$$2\varepsilon + \frac{A\gamma(Br_j^1)}{(r_j^1)^k} + \frac{A\gamma(Br_j^2)}{(r_j^2)^k}\,.$$

И эта разность может быть сделана как угодно малой в силу условия (9.6).

Определение *Коэффициенты Фурье меры λ называются γ-допустимыми, если они удовлетворяют неравенству* (9.4).

Лемма 9.1 *Коэффициенты Фурье $c_n(r,\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, меры λ являются γ-допустимыми тогда и только тогда, когда мера λ является γ-допустимой.*

Доказательство. Пусть коэффициенты Фурье меры λ являются γ-допустимыми. Отметим неравенство [42, Лемма 4]:

$$|S'_+(r,k)| \leq \frac{\lambda(r)}{\pi r} \leq \frac{N(er,\lambda)re^2}{\pi}\,. \tag{9.9}$$

Из неравенства

$$|c_1(r,\lambda)| < A\gamma(Br)$$

и формулы (9.3) при $k=1$ получаем

$$\left| r\left(\alpha_1 + \frac{1}{\pi}\int_{r_0}^{r}\frac{d\lambda(t)}{t^2} + \frac{\lambda(r_0)}{\pi r_0^2} - \frac{\lambda(r)}{\pi r^2}\right)\right| \leq A\gamma(Br)\,.$$

Отсюда интегрированием по частям в левой части неравенства легко получить конечную γ-плотность меры λ.

Из неравенств (9.4) и (9.9) при $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$r^k|\alpha_k + S_+(r;k)| = |c_k(r;\lambda,\alpha) + S'_+(r;k)| \leq A\gamma(Br) + \frac{N(r,\lambda)r}{\pi\ln 2} \leq A_1\gamma(Br)\,.$$

Таким образом, мера λ является γ-взвешенной. По теореме 3 из [42] она является γ-допустимой.

Наоборот, пусть мера λ является γ-допустимой. Тогда

$$|c_k(r;\lambda)| \le r^k|\alpha_k + S_+(r;k)| + |S'_+(r;k)|\,, \tag{9.10}$$

Если $1 \le k < p[\gamma]$, то

$$|\alpha_k + S_+(r;k)| = S_+(r'_k, r; k) \le \frac{A\gamma(Br_k)}{r_k'^k} + \frac{A\gamma(Br)}{r^k} \le 3\frac{A\gamma(Br)}{r^k}\,. \tag{9.11}$$

Если же $k \ge p[\gamma]$, то

$$|\alpha_k + S_+(r;k)\Big| \le \lim_{j\to\infty} S_+(r, r_j; k) \le \frac{A\gamma(Br)}{r^k} + \lim_{j\to\infty}\frac{A\gamma(Br_j)}{r_j^k} = \frac{A\gamma(Br)}{r^k}\,. \tag{9.12}$$

Из неравенств (9.10), (9.11) и (9.12) следует, что $c_k(r;\lambda)$ удовлетворяют условию (9.4). Лемма доказана.

Введем теперь понятие канонической функции γ-допустимой меры λ. Пусть $c_k(r) = c_k(r;\lambda)$ – коэффициенты Фурье меры λ. Положим

$$\Phi(se^{i\varphi}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(s)\sin k\varphi\,.$$

Для $s > 0$ полагаем

$$P_s(z) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\overline{C_+(0,s)}} K(z,\zeta)\,d\lambda(\zeta), \quad a_s(z) = \frac{s}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial G(z, se^{i\varphi})}{\partial n}\Phi(se^{i\varphi})\,d\varphi\,,$$

$$v_s(z) = a_s(z) + P_s(z)\,,$$

где $G(z,\zeta)$ – функция Грина полукруга $C_+(0,s)$, $\dfrac{\partial G(z,se^{i\varphi})}{\partial n}$ – ее производная по внутренней нормали, и функция $K(z,\zeta) = \dfrac{G(z,\zeta)}{\Im\zeta}$ продолжается по непрерывности в точки вещественной оси $|t| \le R$.

Положим теперь $v(z) = v_s(z)$ при $|z| < s$.

Определение *Функция $v(z)$ называется канонической функцией меры λ.*

Теорема 9.1 *Каноническая функция γ-допустимой меры λ принадлежит классу JS, ее коэффициенты Фурье совпадают с коэффициентами Фурье меры λ, а ее полная мера совпадает с мерой λ.*

Доказательство. Прежде всего докажем вспомогательную лемму.

Лемма 9.2 *Пусть v_1, v_2 – субгармонические функции в полукруге $C_+(0,R)$, имеющие при всех $k \in \mathbb{Z}$ одинаковые коэффициенты Фурье. Тогда $v_1 \equiv v_2$.*

Доказательство. Так как при любом r, $0 < r < R$, коэффициенты Фурье функций v_1 и v_2 равны, то почти для всех $\theta \in [0, \pi]$ при любом фиксированном r, $v_1(re^{i\theta}) = v_2(re^{i\theta})$ [63, стр. 54]. Утверждение леммы тогда следует из равенства

$$v(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \iint_{|\zeta - z| \le \varepsilon} v(\zeta)\, ds(\zeta)\,,$$

где $ds(\zeta)$–элемент площади. Это можно получить переходом к повторному интегралу

$$v(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \iint v(z + se^{i\theta}) s\, ds\, d\theta$$

по области $|z| - \varepsilon \le s \le |z| + \varepsilon$, $\theta_1(s) \le \theta \le \theta_2(s)$.

Докажем теперь теорему. Согласно (9.4) для каждого $s > 0$ функция $\Phi(se^{i\varphi})$ принадлежит классу $\mathbf{D^2}$ ([64]), где $\mathbf{D^2}$ – множество распределений порядка не выше 2.

Функция $v_s(z)$, очевидно, субгармонична в полукруге $C_+(0, s)$. Покажем, что $c_k(r; v_s) = c_k(r)$ при $r \le s$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$P_s(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(r) \sin k\theta\,.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда, используя разложение [13]

$$\frac{\partial G\left(re^{i\theta}, se^{i\varphi}\right)}{\partial n} = \frac{4}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{s^m} \sin m\theta \sin m\varphi$$

и находя коэффициенты Фурье функции $a_s(re^{i\theta})$, получаем

$$c_k(r, v_s) = \left(\frac{r}{s}\right)^k c_k(s) + d_k(r)\,. \tag{9.13}$$

Коэффициенты Фурье функции $P_s(re^{i\theta})$ находятся из формулы:

$$d_k(r) = \alpha_k(P_s) + \frac{r^k}{\pi k r_0^{2k}} \iint_{\overline{C_+(0, r_0)}} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta} \tau^k\, d\lambda(\zeta) +$$
$$\frac{r^k}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta \tau^k}\, d\lambda(\zeta) - \frac{1}{r^k \pi k} \iint_{\overline{C_+(0, r)}} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta} \tau^k\, d\lambda(\zeta)\,.$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая, что $P_s(se^{i\theta}) = 0$, $\theta \in$

$[0, \pi]$, находим

$$\alpha_k(P_s) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{r_0}^{s}\frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt = -\frac{1}{\pi k r_0^{2k}}\iint_{\overline{C_+(0,r_0)}}\frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta) -$$
$$\frac{1}{\pi k}\iint_{D_+(r_0,s)}\frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta\tau^k}\,d\lambda(\zeta) + \frac{1}{\rho^{2k}\pi k}\iint_{\overline{C_+(0,s)}}\frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta)\,.$$

Подставляя это представление в выражение для $d_k(r)$, получим

$$d_k(r) = -\frac{1}{r^k\pi k}\iint_{\overline{C_+(0,r)}}\frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta) -$$
$$\frac{r^k}{\pi k}\iint_{D_+(r,s)}\frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta\tau^k}\,d\lambda(\zeta) + \frac{r^k}{\pi k\rho^{2k}}\iint_{\overline{C_+(0,r)}}\frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta)\,.$$

Кроме того, по определению коэффициентов меры имеем

$$\left(\frac{r}{s}\right)^k c_k(s) = r^k\left[\alpha_k + \frac{1}{\pi k r_0^{2k}}\iint_{\overline{C_+(0,r_0)}}\frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta) +\right.$$
$$\left.\frac{1}{\pi k}\iint_{D_+(r_0,s)}\frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta\tau^k}\,d\lambda(\zeta)\right] - \frac{r^k}{\pi k s^{2k}}\iint_{\overline{C_+(0,s)}}\frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta)\,,$$

где α_k определены равенствами (9.4) и (9.6).

Подставляя это выражение и выражение для $d_k(r)$ в (9.13), получаем требуемое равенство для $k \in \mathbb{N}$.

Если $s' > s$, то функция $v_{s'}$ является продолжением функции v_s. Действительно, при $0 \le r < s$ имеем $c_k(r, v_s)$=$c_k(r)$= $c_k(r, v_{s'})$, и по лемме 9.2 $v_s(z) \equiv v_{s'}(z)$, если $z \in C_+(0, s)$.

Положим теперь $v(z) = v_s(z)$ при $|z| < s$. Очевидно, функция $v(z)$ субгармоническая и удовлетворяет требованиям теоремы. Единственность ее следует из леммы 9.2. Теорема доказана.

9.3 Случай уточненного порядка в смысле Бутру

В теории субгармонических функций в полуплоскости известно следующее утверждение, которое является аналогом условия Линделефа для целых функций конечного порядка. Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок в смысле Валирона, $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r) = \rho > 1$. Для того, чтобы мера λ, удовлетворяющая условиям $\{\mathrm{G}^+\}$, была полной мерой субгармонической функции $v(z)$ конечного $V(r) = r^{\rho(r)}$-роста, необходимо и достаточно, чтобы при нецелом ρ выполнялось неравенство

$$\lambda(r) \le KrV(r), \quad K > 0\,,$$

а при целом ρ, чтобы еще дополнительно функция

$$\frac{r^\rho}{V(r)}[c + S_+(r;\rho,\lambda)]$$

при некотором c была ограниченной функцией от r.

Следующая лемма является обобщением этого утверждения на случай, когда $\rho(r)$ является уточненным порядком в смысле Бутру.

Лемма 9.3 *Пусть* $\gamma(r) = V(r) = r^{\rho(r)}$, *где* $\rho(r)$ *– уточненный порядок в смысле Бутру*, $1 < \beta = \liminf\limits_{r\to\infty} \rho(r)$, $\rho = \limsup\limits_{r\to\infty} \rho(r)$, λ *– мера, удовлетворяющая условиям* $\{\mathrm{G}^+\}$. *Справедливы такие утверждения*:

1) *мера* λ *имеет конечную* γ*-плотность тогда и только тогда, когда*

$$\lambda(r) \le KrV(r), \quad K > 0\,; \tag{9.14}$$

2) λ γ*-допустима тогда и только тогда, когда она удовлетворяет неравенству* (9.14) *и при всех целых* k, *удовлетворяющих неравенству* $\beta \le k \le \rho$, *существуют вещественные числа* α_k *такие, что функции*

$$\frac{1}{L_k(r)}[\alpha_k + S_+(r;k,\lambda)]$$

являются ограниченными функциями от r, *где* $L_k(r) = \dfrac{V(r)}{r^k}$;

3) *если* $[\beta] < \beta \le \rho < [\beta] + 1$, *то каждая мера* μ, *удовлетворяющая неравенству* (9.14), *является* γ*-допустимой.*

Доказательство. 1) Тот факт, что каждая мера λ, имеющая конечную γ-плотность, является мерой конечного γ-типа, был отмечен выше. Неравенство (9.14) следует из леммы 9.2.

Наоборот, пусть выполнено условие (9.14). Тогда, используя неравенство (2.4) при $\lambda = 2$, получим

$$N(r,\lambda) \le K\int_{r_0}^{r} \frac{V(r)}{r^2}\,dr \le \frac{K_1 V(r)}{r(\beta - 1)}, \quad K_1 > 0\,.$$

2) Пусть $k < \beta$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда, применяя неравенство (2.4) при $\lambda = k+1$, получаем (считая, что $r_1 \le r_2$)

$$|S_+(r_1, r_2, k, \lambda)| \le \frac{1}{\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{d\lambda(t)}{t^{k+1}} = \frac{\lambda(t)}{\pi t^{k+1}}\Big|_{r_1}^{r_2} + \frac{k+1}{\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+2}}\,dt \le$$

$$\le \frac{KV(r_2)}{\pi r_2^k} + \frac{K(k+1)}{\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{V(t)}{t^{k+1}}\,dt \le$$

$$K\frac{V(r_2)}{\pi r_2^k} + \frac{K(k+1)}{\pi}\,\frac{V(r_2)}{(\beta-k)r_2^k} + o\left(\frac{V(r_2)}{r_2^k}\right), \quad r\to\infty\,.$$

Аналогичная оценка получается и при $k > \rho$, $k \in \mathbb{N}$:

$$|S_+(r_1, r_2, k, \lambda)| \le K\frac{V(r_1)}{r_1^k} + \frac{K(k+1)}{\pi}\,\frac{V(r_1)}{(k-\rho)r_1^k} + o\left(\frac{V(r_1)}{r_1^k}\right), \quad r\to\infty\,.$$

Если k удовлетворяет неравенству $\beta \le k \le \rho$, то по предположению функции $[\alpha_k + S_+(r; k, \lambda)]/L_k(r)$ ограничены сверху числом $K_2 > 0$. Тогда

$$|S_+(r_1, r_2, k, \lambda)| \le |\alpha_k + S_+(r_1; k, \lambda)| + |\alpha_k + S_+(r_2; k, \lambda)| \le$$

$$K_2(L_k(r_1) + L_k(r_2)) = K_2\left(\frac{V(r_1)}{r_1^k} + \frac{V(r_2)}{r_2^k}\right),$$

т.е. мера λ является γ-сбалансированной, а значит и γ-допустимой. Обратное следут из теоремы 3 работы [42].

3) Утверждение является следствием п.1) и п.2).

Рассмотрим теперь вид канонической функции меры в случае функции роста, определяемой порядком Бутру. Это представление указывает на то, что понятие канонической функции меры в общем случае является обобщением классических понятий, в частности, представления аналитической в $\mathbb{C}_+$ функции конечного порядка в виде произведения канонических множителей и интеграла по вещественной оси [13], теорема 3.2. Нам понадобится следующая теорема 5 из работы [42].

Теорема 9.2 *Пусть $c_k(r) = c_k(r; \lambda, \alpha)$ – коэффициенты Фурье пары (λ, α), удовлетворяющие условию*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} c_k(r) \le C(r), \quad r > 0\,. \tag{9.15}$$

Тогда существует единственная субгармоническая функция v такая, что ее полная мера $\lambda(v) = \lambda$ и $c_k(r; v) = c_k(r)$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $r > 0$.

Обозначим

$$K_p(z,\zeta) = \frac{1}{\Im\zeta}\Re\left[\ln\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta} + \sum_{k=1}^{p}\frac{z^k}{k}\left(\frac{1}{\zeta^k} - \frac{1}{\bar\zeta^k}\right)\right], \quad p = 1, 2, \ldots\,.$$

$$K_0(z,\zeta) = \frac{1}{\Im\zeta} \ln \left| \frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}} \right| .$$

Здесь и ниже мы рассматриваем однозначную ветвь функции $\ln z$ в комплексной плоскости с разрезом по отрицательной полуоси.

Теорема 9.3 *Пусть λ – γ-допустимая мера в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, обладающая свойствами $\{\mathrm{G}^+\}$, и не нагружает некоторую окрестность нуля. Пусть $\gamma(r) = V(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ – уточненный порядок в смысле Бутру, $\beta = \liminf\limits_{r\to\infty} \rho(r)$, $\rho = \limsup\limits_{r\to\infty} \rho(r)$. Тогда ее каноническая функция $v(z)$ имеет следующий вид:*

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K_0(z,\zeta)\, d\lambda_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint K_p(z,\zeta)\, d\lambda_2(\zeta)\,, \qquad (9.16)$$

где, λ_1 – сужение меры λ на круг $C(0,1)$, $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$, $p = [\rho]$.

Доказательство. Обозначим через $F(z)$ функцию, определяемую правой частью формулы (9.16). Ее полная мера равна λ [21]. Так как полные меры $v(z)$ и $F(z)$ совпадают, то по теореме 9.2 достаточно показать, что их коэффициенты Фурье равны. Переопределив значения функции $V(r)$ на конечном отрезке, можно считать, что в неравенстве (9.5) числа r'_k выбраны так, что мера λ не нагружает круги $C(0,r'_k)$. Тогда в формуле (9.6) числа $\alpha_k = 0$, $k \le p$. Для $k > p$ имеем $\alpha_k = -S(\infty;k)$.

Получаем, что коэффициенты Фурье функции $F(z)$ определяются формулами

$$c_k(r;F) = r^k(\beta_k + S_+(r;k,\lambda_F)) - S'_+(r;k,\lambda_F), \quad k \in \mathbb{N}\,, \qquad (9.17)$$

где $\beta_k = c_k(r_0;F)$. Поэтому в силу определения коэффициентов Фурье меры достаточно доказать, что $\beta_k = \alpha_k$ при $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $r_0 = \min_{k\le p} r'_k$. Поскольку при $|z| < |\zeta|$

$$\ln K_p(z,\zeta) = -\Re \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{z^k}{k}\left(\frac{1}{\zeta^k} - \frac{1}{\bar{\zeta}^k}\right) = -2 \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{r^k}{k\tau^k} \sin k\theta \sin k\varphi\,,$$

где $z = re^{i\theta}, \zeta = \tau e^{i\varphi}$, то при $k \le p$ $c_k(r_0,F) = 0$. Из (9.17) получаем тогда, что и $\beta_k = 0$ при $k \le p$, а из неравенства (9.9), после деления обеих частей (9.17) на r^k и переходом к пределу при $r \to \infty$, получаем, что $\beta_k = -S(\infty;k,\lambda_F) = -S(\infty;k,\lambda)$ при $k > p$.

Что и требовалось доказать.

10 ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В разделе изучены варианты теорем о существовании решений многозначных включений в евклидовых пространствах, в том числе теорем о неподвижной точке для многозначных отображений, основанных на обобщении “условия острого угла” [30]. Направление исследования инспирировано работами К.Н. Солтанова [51], в которых разработан метод нахождения неподвижных точек для разрывных отображений. Другие подходы к установлению наличия неподвижных точек можно найти в [25].

Пусть E^n — n-мерное евклидово (вещественное или комплексное) пространство, $\langle *, * \rangle$ — скалярное произведение в E^n , $conv\ A$ — выпуклая оболочка множества A.

Далее будем рассматривать многозначные (в их числе однозначные и разрывные) отображения подмножеств евклидового пространства. Если $F_1, F_2 : X \to Y$ — два многозначных отображения, то будем говорить, что F_2 есть сужением отображения F_1 , если $F_1(x) \supset F_2(x) \neq \varnothing$ для всех точек $x \in X$. Скажем, что на множестве A отображение F удовлетворяет “условию (строгого) острого угла”, если выполнено условие $Re\langle x, y \rangle$ $(>)$ ≥ 0 для всех пар точек $x \in A$, $y \in F(x)$. Под отображением $G = Id - F$ понимаем многозначное отображение $G : X \to X$, ставящее в соответствие точке $x \in X$ множество точек $G(x) = \{x - y |\ y \in F(x)\}$.

Теорема 10.1. *Пусть D — область евклидова пространства E^n, которая содержит начало координат. Пусть $K \subset \overline{D}$ — подмножество в замыкании этой области, обладающее следующим свойством (α): на каждом луче, выходящем из начала координат, лежит хотя бы одна точка, принадлежащая K. Пусть ограничение многозначного отображения $F : \overline{D} \to E^n$ на подмножество K удовлетворяет “условию острого угла” и $conv\ F(K)$ — компакт. Тогда, если $F(\overline{D}) \supset conv\ F(K)$, то $0 \in F(\overline{D})$.*

Доказательство. Предположим, что $0 \notin F(\overline{D})$. Следовательно, $0 \notin conv\ F(K)$. Тогда, согласно геометрической форме теоремы Хана-Банаха, существует гиперплоскость L, которая отделяет начало координат от $conv\ F(K)$. Выберем луч l, выходящий из начала координат перпендикулярно к гиперплоскости L и направленный в сторону противоположную этой гиперплоскости. Согласно условию (α) этот луч пересечет множество K. Выберем точку $x \in l \cap K$. С одной стороны точка $F(x) \in F(K) \subset conv\ F(K)$, а с другой, согласно "условию острого угла", образ должен находиться в том же полупространстве по отношению к гиперплоскости L, что и точка x. Полученное противоречие доказывает теорему.

Поскольку мы не требовали от отображения F ни однозначности, ни непрерывности, то, очевидно, справедливо следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть $K \subset \overline{D}$ — подмножество области $\overline{D}$, обладающее свойством (α). Пусть ограничение многозначного отображения $F : \overline{D} \to E^n$ на подмножество K имеет сужение F_1, которое удовлетворяет "условию острого угла" и $conv\ F_1(K)$ — компакт. Тогда, если $F(\overline{D}) \supset conv\ F_1(K)$, то $0 \in F(\overline{D})$.*

Следствие 2. *Пусть $K \subset \overline{D}$ — подмножество области $\overline{D}$, обладающее свойством (α). Пусть ограничение многозначного отображения $G = Id - F : \overline{D} \to E^n$ на подмножество K имеет сужение G_1, которое удовлетворяет "условию острого угла" и $conv\ G_1(K)$ — компакт. Тогда, если $G(\overline{D}) \supset conv\ G_1(K)$, то отображение F имеет неподвижную точку $x \in F(x)$.*

Теорема 10.2. *Пусть D — область евклидова пространства E^n, которая содержит начало координат. Пусть $K \subset \overline{D}$ — подмножество в замыкании этой области, обладающее свойством (α). Пусть ограничение многозначного отображения $F : \overline{D} \to E^n$ на подмножество K удовлетворяет "условию строгого острого угла". Тогда, если $F(\overline{D}) \supset conv\ F(K)$, то $0 \in F(\overline{D})$.*

Доказательство. Предположим, что $0 \notin F(\overline{D})$ и, следовательно, $0 \notin conv\ F(K)$. Внутренность $Int\ (conv\ F(K))$ будет выпуклым открытым множеством, не содержащим начало координат. Если $Int\ (conv\ F(K)) = \varnothing$, то множество $conv\ F(K)$ полностью лежит в некоторой гиперплоскости, поэтому существует гиперплоскость L, которая проходит через начало координат и которая или полностью содержит множество $conv\ F(K)$ или с ним не пересекается. Если же $Int\ (conv\ F(K)) \neq \varnothing$, то существует гиперплоскость L, которая проходит через начало координат и не пересекает множество $Int\ (conv\ F(K))$. Для произвольного выпуклого множества A с непустой внутренностью $Int\ A \neq \varnothing$ справедливо $\overline{Int\ A} = \overline{A}$. Следовательно, в обоих случаях множество $conv\ F(K)$ полностью лежит в одном из замкнутых полупространств, на которые плоскость L разбивает пространство. Теперь, как и в случае теоремы 1, выберем луч l, выходящий из начала координат перпендикулярно к гиперплоскости L и направленный в сторону, противоположную полупространству, содержащему множество *conv* $F(K)$. Согласно условию теоремы этот луч пересечет множество K. Выберем точку в пересечении $x \in l \cap K$. Согласно "условию строгого острого угла", ећ образ $F(x)$ должен находиться во внутренности того же полупространства по отношению к гиперплоскости L, что и точка x и, естественно, не может принадлежать *conv* $F(K)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Аналогично следствию 1 справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть* $K \subset \overline{D}$ *— подмножество области* $\overline{D}$, *обладающее свойством* (α). *Пусть ограничение многозначного отображения* $F : \overline{D} \to E^n$ *на подмножество* K *имеет сужение* F_1 , *которое удовлетворяет "условию строгого острого угла". Тогда, если* $F(\overline{D}) \supset$ *conv* $F_1(K)$, *то* $0 \in F(\overline{D})$.

Следствие 4. *Пусть* $K \subset \overline{D}$ *— подмножество области* $\overline{D}$, *обладающее свойством* (α). *Пусть ограничение многозначного отображения* $G = Id - F : \overline{D} \to E^n$ *на подмножество* K *имеет сужение* G_1, *которое удовлетворяет "условию строгого острого угла". Тогда, если* $G(\overline{D}) \supset$ *conv* $G_1(K)$, *то отображение* F *имеет неподвижную точку* $x \in F(x)$.

Замечание 1. Если в предыдущих результатах $K \subset D$ (подмножество лежит во внутренности области), то все изложенные результаты остаются справедливыми, если рассматривать отображения открытой области.

Замечание 2. Для справедливости предыдущих результатов достаточно существования в пространстве E^n инвариантного относительно рассматриваемого отображения подпространства T (т.е. $F(T) \subset T$), для ограничения F на которое должны выполняться условия соответственных утверждений.

Пример. Пусть $f : B^2 \to B^2$ — разрывное однозначное отображение замкнутого единичного круга на себя со следующими свойствами. Если будем рассматривать граничную окружность ∂B^2 как множество точек $S = \{z = e^{i\varphi},\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$, то пусть

$$f(e^{\varphi}) = \begin{cases} e^{\varphi - \pi/2}\ , & 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ e^{\varphi + \pi/2}, & \pi/2 < \varphi \le \pi \\ e^{\varphi}, & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

На внутренности круга пусть f — произвольный гомеоморфизм внутренности круга B^2 на открытый единичный полукруг $B^2_- = \{z \in$

$Int\ B^2, Im\ z < 0\}$. Очевидно, что образ $f(B^2)$ совпадает с выпуклой оболочкой множества $f(S^1)$, но $0 \notin f(B^2)$.

Этот пример показывает, что в обеих теоремах есть ограничения, которые невозможно существенно ослабить. В теореме 1 — это требование компактности $conv\ F(K)$, а в теореме 2 — "условие строгого острого угла".

ВЫВОДЫ

Важными характеристиками субгармонической функции является ее порядок и тип. Во втором разделе рассматриваются функции, рост которых определяется некоторой функцией роста $\gamma(r)$. Эффективным методом при изучении классов таких функций является метод рядов Фурье, который был применен Л. Рубелом и Б. Тейлором [98] для изучения свойств мероморфных функций. На случай дельта-субгармонических функций этот метод был распространен Я. В. Василькивом и К. Г. Малютиным. Мы дополняем их исследования, обобщая канонические представления целых и мероморфных функций произвольного гамма-роста, полученные в работах Л. Рубела и Б. Тейлора, аналогичными представлениями суб- и дельта-субгармонических функций. Классическая теорема Адамара утверждает, что любая субгармоническая функция v порядка ρ, $0 < \rho < \infty$, $v(0) = 0$, может быть представлена в виде

$$v(z) = \operatorname{Re} P_p(z) + \iint \ln\left|E\left(\frac{z}{\zeta}, p\right)\right| \, d\mu(\zeta), \quad p = [\rho]\,,$$

где $P_p(z)$ – многочлен степени не выше p, $E(u, p)$ – первичный множитель Вейерштрасса рода p, μ – риссовская мера функции v.

Теоремы 2.1 и 2.4 являются новыми теоремами такого типа. Они находят своё применение при изучении замкнутых идеалов целых функций и при решении задач свободной интерполяции в классах целых функций конечного гамма-типа. Кроме того, если теорема 2.1 является обобщением результатов Л. Рубела и Б. Тейлора на случай субгармонических функций, то теорема 2.4 не имеет аналогов в предшествующих работах и является принципиально новой. Важным результатом второго раздела является и теорема 2.2, обеспечивающая существование равномерно гамма-сбалансированных остатков для любой меры, которая является мерой Рисса субгармонической в комплексной плоскости функции $v(z)$. Во втором разделе доказан также ряд лемм, которые имеют как самостоятельное значение, так и применяются при доказательстве других утверждений.

Представляет также интерес новое доказательство теоремы 2.1, в которой сформулированы критерии принадлежности дельта-субгармонической функции к заданнаму классу функций, определяемому некоторой функцией роста.

Для классов субгармонических функций конечного порядка заслуживает внимания теорема 2.3, в которой доказывется эквивалентность представлений в смысле Вейерштрасса и обобщённых канонических представлений, вводимых в работе.

Теория целых функций вполне регулярного роста (в.р.р.) относительно функции $\gamma(r)$, близкой к степенной, созданная в конце 30-х годов XX века независимо друг от друга Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером, занимает видное место в комплексном анализе. Исследования по этой теории продолжаются, одновременно расширяется круг ее приложений – от теории характеристических функций вероятностных законов и аналитической теории дифференциальных уравнений до теории краевых задач, представления аналитических функций рядами экспонент и теории субгармонических функций. А. Ф. Гришин перенес теорию Левина-Пфлюгера на субгармонические функции в комплексной плоскости. Используя метод рядов Фурье, А. А. Кондратюк, обобщил теорию Левина-Пфлюгера целых функций вполне регулярного роста на мероморфные функции произвольного γ-типа. Эти обобщения были сделаны им в двух направлениях: 1) рост функций измерялся относительно произвольной функцией роста $\gamma(r)$; 2) были введены и исследованы классы мероморфных в комплексной плоскости функций в.р.р.

В работе рассматриваются суб- и дельта-субгармонические функции вполне регулярного роста в полуплоскости. Техническим аппаратом при изучении классов таких функций является теория полной меры, который была разработана А. Ф. Гришиным. Используя теорию полной меры и метод рядов Фурье, К. Г. Малютин получил ряд фундаментальных результатов для суб- и дельта-субгармонических функций произвольного гамма-роста, которые являются аналогами соответствующих результатов Л. Рубела, Б. Тейлора, Д. Майлза. Четвертый раздел является логическим продолжением работ К. Г. Малютина и Н. Садыка и посвящён теории роста суб- и дельта-субгармонических функций в полуплоскости. Классическая теорема А. А. Кондратюкаа утверждает, что коэффициенты Фурье любой мероморфной функции f порядка γ регулярно растут на бесконечности. Теорема 4.5 является новой теоремой такого типа.

Как и в случае плоскости важным результатом четвертого раздела является и теорема 4.6, обеспечивающая принадлежность идикатора $h(\theta, v)$ классу $L_2[0, \pi]$.

В четвертом разделе мы предполагали при определении классов растущих функций, что функция роста $\gamma(r)$ удовлетворяет условию (3.5). Оно необходимо, если мы хотим использовать для определения роста классическую неванлинновскую характеристику $T(r,v)$, т.к. неравенство $T(r,v) \le A\gamma(Br)/r$ уже накладывает это ограничение на функцию роста γ. Если мы хотим рассматривать общий случай, без всяких ограничений на функцию роста (например, случай $\gamma(r) = r^\rho$, $0 < \rho < 1$), то мы должны использовать более сложную характеристику, чем неванлинновская, а именно $v \in J\delta(\gamma(r))$, если

$$m(r_2, v) + m(r_1, -v) + \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda_-(t)}{t^3}\,dt \le \frac{A}{r_1}\gamma(Br_1) + \frac{A}{r_2}\gamma(Br_2)$$

для всех $r_2 > r_1 > 0$. В этом случае все утверждения нашей работы имеют место, а их доказательство автоматически повторяет приведенные выше рассуждения.

Заметим, что это определение и определение, данное выше, совпадают если функция роста удовлетворяет условию (3.5).

Введенное в статье определение порядка, в случае когда функция v является субгармонической в полуплоскости и $\gamma(r) = r^\rho$, совпадает с определением введенным Л. И. Ронкиным и отличается от определения формального порядка, введенного А. Ф. Гришиным, и эквивалентных между собой определений порядка Е. Титчмарша и Н. В. Говорова. Однако, все эти понятия совпадают при $\rho > 1$. Качественное их отличие возникает при $\rho \le 1$. В этом случае наше определение является наиболее широким, т.е. субгармоническая функция конечного порядка в смысле А. Ф. Гришина или Титчмарша–Говорова является функцией конечного порядка в смысле определения данного в статье.

В пятом разделе получены два критерия разрешимости задачи простой свободной интерпорляции в классе целых функций, заранее не фиксированного нормального типа относительно нулевого уточнённого порядка $\rho(r)$. В формулировке первого критерия участвует мера, порождённая узлами интерполяции, в формулировке второго – каноническое произведение, порождённое этими узлами. В предшествующей работе А.В. Братищева и Ю.Ф. Коробейника такая задача рассматривалась при очень жёстких ограничениях на уточнённый порядок $\rho(r)$, и тем не менее, часть результатов этой работы, относящаяся к нулевому уточнённому порядку нуждается в корректировке. Основным результатом раздела являются две теоремы — Теорема 5.6 и теорема 5.7. Отметим, что в случае, когда $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$ в теоремах, аналогичных теоремам 5.6 и 5.7 нет аналога условия 3). Дело в том, что в этом случае, как показал К. Малютин, условие 3) является следствием предыдущих условий. Однако его рассуждения не распространяются на случай, когда $\rho = 0$. Поэтому в теоремах 5.6 и 5.7 появляется специфическое условие 3). В заключение раздела мы приводим теоремы 5.8 – 5.11, которые можно рассматривать как примеры на применение теорем 5.6 и 5.7, и которые, на наш взгляд, имеют самостоятельный интерес.

В шестом разделе рассматривается задача кратной интерполяции в классе аналитических в верхней полуплоскости функций нулевого порядка и типа не выше нормального. Задача относится к классу задач свободной интерполяции, которые впервые начал рассматривать А.Ф. Леонтьев. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи. Полученные критерии формулируются как в терминах канонических произведений, построенных по узлам интерполяции, так и в терминах неванлинновской меры, определяемой этими узлами. Работа является продолжением исследований К. Малютина, рассматривавшего аналогичные задачи в классах аналитических в полуплоскости функций ненулевого порядка. Основным результатом этого раздела является теорема 6.1.

Седьмой раздел посвящен субгармоническим функциям бесконечного порядка в полуплоскости с полной мерой на мнимой полуоси. Здесь доказан (теорема 7.1) аналог одного утверждения из работы [86], в которой рассматривались целые функции, нули которых лежат на конечной системе лучей. В частности, доказывалось, что если f – целая функция бесконечного порядка с положительными нулями, то её нижний порядок также равен бесконечности.

В восьмом разделе получены (теорема 8.1) критерии принадлежности дельта-субгармонической функции к классу функций конечного (γ, ε)-типа в полуплоскости. Эти критерии формулируются в терминах коэффициентов Фурье этой функции. Классы мероморфных функций конечного (γ, ε)-типа были введены Б.Н. Хабибуллиным. Настоящая работа является естественным продолжением его исследований.

Девятый раздел посвящен обобщению классических результатов Адамара, Вейерштрасса, Неванлинны о представлении функций на случай дельта-субгармонических функций в полуплоскости произвольного гамма-роста. Мы вводим понятие канонической функции меры конечного γ-типа, распределенной в верхней полуплоскости, которая в случае дискретной меры совпадает с определением канонического произведения Неванлинны, построенного по нулям функции, аналитической в верхней полуплоскости [13]. Основной результат теорема 9.1.

В десятом разделе исследуются избранные вопросы интегральной геометрии. Затронутая проблематика связывает в один узел проблемы комплексного анализа, топологии и элементы выпуклого анализа. Основной цикл рассматриваемых задач — это вопросы топологической классификации обобщенно выпуклых множеств в комплексных пространствах. Среди таких множеств важную роль играют линейно выпуклые и сильно линейно выпуклые множества. Геометрические свойства этих множеств, в отличие от аналитических их свойств, до последнего времени были мало исследованыю Решен ряд проблем, поставленных Л.А. Айзенбергом, по геометрическому описанию сильно линейно выпуклых множеств. Показано, что эти множества являются естественным классом, на котором можно постро- ить комплексную теорию, аналогичную вещественному выпуклому анализу. Все классические результаты выпуклого анализа находят в подходящей интерпретации комплексную трактовку. Использование в доказательствах групп когомологий позволяет преодолеть сложность, связанную с тем, что комплексная гиперплоскость не разбивает пространство. Решенные здесь задачи позволяют по-новому взглянуть на утверждения выпуклого анализа и распространить их на более широкий класс множеств даже в вещественном случае. Впервые для решения задач, которые вообще не удавалось решить, применен метод многозначных отображений. Исследование графиков этих отображений приводит к нахождению простых и окончательных решений задач описания глобальных свойств множества по известным свойствам его сечений линейными многообразиями. Изучаются классы отображений, инвариантные на обобщенно выпуклых множествах. Приводится решение ряда основных задач обобщенной выпуклости. Но разработанные в ней понятия и методы позволяют ставить вопрос о решении многих других задач комплексного анализа и применения геометрических и топологических методов в анализе.

Изучены варианты теорем о существовании решений многозначных включений в евклидовых пространствах, в том числе теорем о неподвижной точке для многозначных отображений, основанных на обобщении “условия острого угла” [30]. Направление исследования инспирировано работами К.Н. Солтанова [51], в которых разработан метод нахождения неподвижных точек для разрывных отображений. Другие подходы к установлению наличия неподвижных точек можно найти в [25]. Основной результат — теорема 10.1.

Перечень ссылок

[1] Т. И. Абанина, *Интерполяционная задача в пространствах целых функций сколь угодно быстрого роста*, Изв. вузов. Матем., **4** (1990), 72–74.

[2] Н.И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.

[3] Н.И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов*, ГИФМЛ, М., 1961.

[4] Н.И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.

[5] А.В. Братищев, *Об интерполяционной задаче в некоторых классах целых функций*, Сиб. мат. журн., **17**, (1976), № 1, 30–40.

[6] А.В. Братищев, Ю.Ф. Коробейник, *Кратная интерполяционная задача в пространстве целых функций заданного уточненного порядка*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **40**:5 (1976), 1102–1127.

[7] М. Брело М. *Основы классической теории потенциала*, Мир, М., 1964.

[8] Я.В. Васильків, *Деякі властивості δ-субгармонічних функцій скінченного λ-типу*, Вісн. Львів. у-ту, Сер. мех.-мат., **21** (1983), 14–21.

[9] Я.В. Василькив, *Исследование асимптотических свойств целых и субгармонических функций методом рядов Фурье: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.01*, Львов, 1986.

[10] И.Н. Векуа, *Обощенные аналитические функции*, Наука, М., 1988.

[11] О.В. Веселовська, *Аналог теоремы Майлза для δ-субгармонических в $\mathbb{R}^n$ функций*, Укр. мат. ж., **36**:6 (1984)/, 694–698.

[12] С. А. Виноградов, В. П. Хавин, *Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций.II*, Исследования по линейным

операторам и теории функций. VI, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **56**, (1976), 12–56.

[13] Н. В. Говоров *Краевая задача Римана с бесконечным индексом*, Наука, М., 1986.

[14] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, М., 1972.

[15] 1. А.А. Гольдберг, Б.Я. Левин, И.В. Островский, *Целые и мероморфные функции*, Итоги науки и техн., Соврем. пробл. мат., **85**, ВИНИТИ, 1991.

[16] А.А. Гольдберг, Н.В. Зоболоцкий, *Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка*, Матем. заметки, **34**:2 (1983), 227–236.

[17] И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Наука, М., 1965.

[18] И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения* , Наука, М., 1967.

[19] А. Ф. Гришин, *О регулярности роста субгармонических функций*, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, **7** (1968), 59–84.

[20] А.Ф. Гришин, *Субгармонические функции конечного порядка: дис. … доктора физ.-мат. наук: 01.01.01*, Харьков, 1992.

[21] А.Ф. Гришин, *Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций*, Математическая физика, анализ, геометрия. **1**:2 (1994), 193–215.

[22] А.Ф. Гришин, Т.И. Малютина, *Об уточненном порядке*, Комплексный анализ и математическая физика, Сб. статей, Красноярский госуниверситет, Красноярск (1998), 10–24.

[23] А.Ф. Гришин, А.М. Руссаковский, *Свободная интерполяция целыми функциями*, Теория функций, функцион. анализ и их прил., **44** (1985), 32–42.

[24] Е.Б. Дынкин, *Марковские процессы*, ГИФМЛ, М., 1963.

[25] Ю.Б. Зелинский, *Многозначные отображения в анализе* // Наукова думка, Киев, 1993.

[26] А.А. Кондратюк, *Метод рядов Фурье и Фурье-Лапласа для мероморфных и субгармонических функций вполне регулярного роста: дис. ... доктора физ.-мат. наук: 01.01.01*, Киев, 1986.

[27] А.А. Кондратюк, *О методе сферических гармоник для субгармонических функций*, Мат. сб., . **116**:2 (1981), 147–165.

[28] А.А. Кондратюк, *Сферические гармоники и субгармонические функции*, Мат. сб., . **125**:2 (1984), 147–166.

[29] А.А. Кондратюк, *Ряды Фурье и мероморфные функци*, Вища школа, Львов, 1988.

[30] М.А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, Гостехиздат, М., 1956.

[31] Н.С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966.

[32] Г. П. Лапин, *О целых функциях конечного порядка, принимающих вместе с производными заданные значения в заданных точках*, Сиб. мат. журн., **6**:6 (1965), 1267–1281.

[33] Б.Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, ГИТТЛ, М., 1956.

[34] Б.Я. Левин, Н.Т. Уен, *Об интерполяционной задаче в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка*, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, **22** (1975), 77–85.

[35] А. Ф. Леонтьев, *Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка*, Докл. АН СССР, **5**, (1948), 785–787.

[36] А. Ф. Леонтьев, *Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка нормального типа*, Докл. АН СССР, **66**, (1949), № 2, 153–156.

[37] А. Ф. Леонтьев, *К вопросу об интерполяции в классе целых функций конечного порядка* // Матем. сб., **4**:1 (1957), 81–96.

[38] Ю.В. Линник, И.В. Островский *Разложения случайных величин и векторов*, Наука, М., 1972.

[39] Ю.И. Любарский, М. Л. Содин, *Аналоги функций типа синуса для выпуклых областей*, ФТИНТ, Харьков, 1986. (Препринт 17, АН УССР)

[40] К.Г. Малютин, *Интерполяция голоморфными функциями: дис. канд. физ.-мат. наук*, Харьков, 1980.

[41] К. Г. Малютин, *Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа*, Матем. сб., **184**:2 (1993), 129–144.

[42] К. Г. Малютин, *Ряды Фурье и δ-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости*, Матем. сб., **192**:6 (2001), 51–70.

[43] К. Г. Малютин, *Ряды Фурье и δ-субгармонические функции*, Труды ИПММ НАН Украины.,**3** (1998), 146–157.

[44] К. Г. Малютин, Н.М. Садык, *Дельта-субгармонические функции вполне регулярного роста в полуплоскости*, Доклады РАН, **380**:3 (2001), 1–3.

[45] К. Г. Малютин, Н. М. Садык, *Представление субгармонических функций в полуплоскости*, Матем. сб., **198**:12 (2007), 47–62.

[46] К. Г. Малютин, *Модифицированный метод Джонса для решения задач кратной интерполяции в полуплоскости*, Математический форум. Исследования по математическому анализу / отв. ред. Коробей- ник Ю. Ф. и Кусраев А. Г.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, **3**, (2009), 143–164.

[47] К.Г. Малютин, В.А. Герасименко, *Свободная интерполяция целыми функциями конечного гамма-типа*, Математичнi Студiї, **28**:1 2007, 45–50.

[48] К. Г. Малютин, В.А. Герасименко, *Обобщенные канонические произведения в комплексной плоскости* , Вiсн. Харкiвського нацiонального у-ту. Серүя «Математика, прикладна математика ү механүка», **57**:790 (2007), 198–205.

[49] П.А. Мейер, *Вероятность и потенциалы*, Мир,М., 1973.

[50] И.И. Привалов, *Субгармонические функции*, ГИТТЛ, Москва–Ленинград, 1937.

[51] К.Н. Солтанов, *О нелинейных отображениях и разрешимости нелинейных уравнений* , Докл. АН СССР, **289**:6 (1986), 1318—1323.

[52] Е. Титчмарш, *Теория функций*, Наука, М., 1980.

[53] Г.Д. Трошин, *Об интерполировании функций, аналитических в угле*, Матем. сб., **39(81)**:2 (1956), 239—252.

[54] Н.Т. Уен, *Интерполяционная задача в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа*, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, **24** (1975), 106–127.

[55] Н.Т. Уен, *Интерполирование с кратными узлами в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка*, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, **29** (1978), 109–117.

[56] Н.Т. Уен, *Интерполирование с кратными узлами в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа*, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, **31** (1979), 119–129.

[57] О. С. Фирсакова, *Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций*, Докл. АН СССР, **120**:3 (1958), 477–480.

[58] Б.Н. Хабибуллин., *Рост целых функций с заданными нулями и представления мероморфных функций*, Матем. Заметки, **73**:1 (2003), 120–134.

[59] Б. Н. Хабибуллин, *Последовательности нулей голомофных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты*, Матем. сб., **198**:2, (2007), 121–160.

[60] Б. Н. Хабибуллин, *Последовательности нулей голомофных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты. II. Целые функции*, Матем. сб., **200**:2 (2009), 129–158.

[61] Дж.А. Хант, *Марковские процессы и потенциалы*, ИЛ, М., 1962.

[62] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, Мир, М., 1980.

[63] Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении. I*, Мир, М., 1985.

[64] Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении. II*, Мир, М., 1985.

[65] Р.С. Юлмухаметов, *Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций*, Сиб. мат. журнал, **26**:4 (1985), 159–175.

[66] Р.С. Юлмухаметов, *Аппроксимация субгармонических функций*, Anal. Math., **11**:3 (1985), 257–282.

[67] Р.С. Юлмухаметов, *Аппроксимация однородных субгармонических функций* // Матем. сб., **134**:4 (1987), 511–529.

[68] V.S. Azarin, *Growth theory of subharmonic functions* ,Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2009.

[69] N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels, *Regular variation*, Cambridge university press, Cambridge, London, New-York, New Rochele, Melburn, Sydney, 1987.

[70] G. Deng, *Growth Estimates and Integral Representations of Harmonic and Subharmonic Functions*, arXiv:0906.1679vl, [math.FA] (2009), 1–154.

[71] J.L. Doob, *Classical Potential Theory and Its Probabiliste Counterpart*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1984.

[72] B. Fuglede, *Finely harmonic Functions* , Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[73] O.P. Gnatiuk, A. A. Kondratyuk, *Subharmonic functions and electric fields in ball layers*, Mat. Stud., **34**:2 (2010), 180–192.

[74] O.P. Gnatiuk, A. A. Kondratyuk, *Subharmonic functions and electric fields in ball layers. II*, Mat. Stud., **35**:1 (2011), 50–59.

[75] A. F. Grishin, T. I. Malyutina, *General properties of subharmonic functions of finite order in a complex half-plane*, Вестн. Харьк. нац. ун-та. Сер. матем., прикл. матем. и механика., **475** (2000), 20—44.

[76] F. Hartogs, *Zur Theorie der analytischen Functionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen,insbesondere über die Darstellung derselber durch Reihen welche nach Potentzen einer Veränderlichen fortschreiten*, Math. Ann., **62** (1906), 1–88.

[77] W. K. Hayman, *Questions of regularity connected with Phragmen-Lindelöf principle*, J. Math. pure et appl., **35**, 1956.

[78] W.K. Hayman, *Subharmonic functions. Vol. 2*, London Mathematical Society Monographs, 20.Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London, 1989.

[79] A. Huber, *On subharmonic functions and differntial geometry in the large*, Comm. Math. Helv., **32** (1957), 13–72.

[80] Jun-Iti Ito, *Subharmonic functions in half-plane*, Trans. Am. Math. Soc., **129**:3 (1967).

[81] A. Ya. Khrystiyanyn, *One criterion of γ-type finiteness of an analytic in a half-plane function*, Matematychni studii, **2**:2 (2004), 151–169.

[82] A. Ya. Khrystiyanyn , A.A. Kondratyuk, *On the Nevanlinna theory for meromorphic function on annuli. I*, Matematychni studii, **23**:1 (2005), 19–30.

[83] A. Ya. Khrystiyanyn , A.A. Kondratyuk, *On the Nevanlinna theory for meromorphic function on annuli. II*, Matematychni studii, **24**:1 (2005), 57–68.

[84] Yu. Lyubarskii, Eu. Malinnikova, *On approximation of subharmonic functions*, J. d'Analyse Math., **83** (2001), 121–149.

[85] J.B. Miles, *Quotient representations of meromorphic functions*, J. d′ Analyse Math., **25** (1972), 371-388.

[86] J. B. Miles, *On entire functions of infinite order with radially distributed zeros*, Pacif. J. Math., **81**:1 (1979), 131 –157.

[87] J.A. Miles, *Fourier series method in value distribution theory*, Math. Rep. Ser., **10** (2006), 129-158.

[88] J.B. Miles, D.F. Shea , *An extremal problem in value distribution theory*, Pasif. J. Math., **81**:1 (1979), 131–157.

[89] P. Noverraz *Fonctions plurisousharmoniques et analtiques dans les espaces vectoriels topologiques complexes*, Ann. Inst. Fourier **19**:2 (1969), 419-493.

[90] G. Polya. *Bemerkugen über unendlichen Folgeundganzen Functionen* // Math. Ann., **88** (1923), 169–183.

[91] Yu.S. Protsyk, *Subharmonic functions of finite (γ, ε)-type*, Mat. Stud. **24**:1 (2005), 39-56.

[92] T. Rado, *Subharmonic functions*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1937.

[93] N.V. Rao, D.F. Shea, *Growth problems for subharmonic functions of finite order in space*, Trans. Amer. Math. Soc., **230** (1977), 347–370.

[94] F. Riesz, *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport a la theorie du potential*, Acta Math., **48** (1926), 329–343.

[95] F. Riesz, *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport a la theorie du potential*, Acta Math., **54** (1930), 321–360.

[96] L. A. Rubel, *A generalised canonical product*, In book: Contemporary Problems in the Theory of Analytic Functions, Nauka, Moscow, 1966, 264Ц270.

[97] L.A. Rubel, *Entire and meromorphic functions*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1996.

[98] L.A. Rubel, B.A. Taylor, *A Fourier series method for meromorphic and entire functions*, Bull. Soc. Math. France, **96** (1968), 53–96.

[99] K.N. Soltanov, *Remarks on Separation of Convex Sets, Fixed-Point Theorem and Applications in Theory of Linear Operators*, Fixed Point Theory and Applications, 2007.

[100] K. N. Soltanov, *On semi-continuous mappings, equations and inclusions in the Banach space*, Hacettepe J. Math. Statist., **37** (2008), 9–24.

[101] M. Tsuji, *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, Tokyo, 1959.