

Пространственно-временные колебания релаксационного и предтурбулентного типа в идеальных ограниченных аморфных сплавах

И.Б. Краснюк¹, Т.Н. Мельник¹, Р.М. Таранец², В.М. Юрченко¹

¹ Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина,
ул. Р. Люксембург, 72, 340002 Донецк, Украина,

² Институт прикладной математики и механики НАНУ,
ул. Р. Люксембург, 74, 340002 Донецк, Украина

(Получено 16.01.2013; в отредактированной форме – 27.03.2013; опубликовано online 17.10.2013)

Определяются условия возникновения осциллирующих распределений, в виде суперпозиции двух бегущих волн, при поверхностно-индуцированной кристаллизации квазибинарного вулканического расплава. Показано, что изменение условий охлаждения на поверхностях плоских стенок, ограничивающих расплав, приводит к изменению поверхностной структуры вулканического расплава, то есть к формированию поверхностных бегущих волн, которые (проникая внутрь аморфного расплава) возбуждают различные типы импульсных колебаний в объеме. В случае идеального расплава, когда объемными возмущениями можно пренебречь, решение задачи стремится к асимптотически периодическим кусочно-постоянным функциям. В случае неидеального расплава возникает конкуренция между поверхностными и объемными колебаниями, и решение задачи стремится к асимптотически квазипериодическим функциям.

Ключевые слова: Аморфный расплав, Разностное уравнение с квазипериодическими возмущениями, Бифуркации удвоения периода.

PACS numbers: 61.43.Er, 61.25.Mv, 61.30.Hn

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при высокотемпературном отжиге бинарных аморфных сплавов имеет место структурная релаксация, которая приводит к началу кристаллизации металлического стекла (см. [1]), например, в металлических стеклах при нагреве с малой скоростью при $T > T_g$, где T_g – температура стеклования, возникают новые аморфные конфигурации. При уменьшении температуры отжига в аморфных сплавах имеет место фазовое расслоение и кристаллизация. В типичных ситуациях (при достаточно быстром нагреве) кристаллизация заканчивается при $T < T_g$ (см. [2-14]). В данной работе определяются условия существования ритмического режима кристаллизации при направленном затвердевании магматических расплавов, которые охлаждаются в плоских магматических камерах. При этом рассматривается математическая модель динамики затвердевания силикатных расплавов, которая позволяет определить пространственно-временные изменения состава при изменении параметров охлаждения. В самом деле, нетрудно построить соответствующую бифуркационную диаграмму, определяющую при больших временах те или иные волновые структуры при стекловании расплава. Таким образом, мы рассмотрим математическую модель процесса непрерывного затвердевания в металлических бинарных расслаивающихся ограниченных системах, которая позволяет получить бифуркационную диаграмму, определяющую морфологическую структуру расплава при охлаждении.

Эта диаграмма показывает, что в зависимости от условий охлаждения расплава, можно получить ритмические процессы кристаллизации релаксационного (см. Рис. 1), предтурбулентного и турбулентного типа. Соответствующий качественный (и чис-

ленный) анализ показывает, что такие колебания связаны с динамикой переохлаждения на поверхностях $x = 0$ и $x = l$ магматической камеры (Рис. 2). Изменение переохлаждения может происходить, как показано на Рис. 3.

Ниже для конкретных исследований структурных изменений, которые происходят в процессе фазового расслоения и кристаллизации на “атомном” уровне мы рассмотрим известную модель фазового поля [15], которая представляет собой систему двух связанных уравнений для несохраняющегося параметра порядка и температуры.

Так, в аморфных сплавах типа металл-металлоид равновесные фазы не образуются непосредственно из аморфной матрицы, то есть кристаллизация происходит с образованием одной или нескольких метастабильных фаз (такая ситуация имеет место в достаточно узком концентрационном интервале [1]). Известно также, что при изотермическом отжиге образуются дендритные кристаллы, которые “беспорядочно” зарождаются в аморфной матрице. Ниже, на примере краевой задачи для системы уравнений фазового поля [15], мы покажем, что такие дендритные кристаллы имеют “промежуточную” пространственно-временную фазу, которая является фазой релаксационного (Рис.1), предтурбулентного и турбулентного типа согласно классификации Шарковского (см. [16]).

2. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОБИНАРНОГО МАГМАТИЧЕСКОГО РАСПЛАВА

Мы рассмотрим непрерывную кристаллизацию псевдобинарного магматического расплава, который заполняет ограниченную интрузивную камеру (Рис. 2).

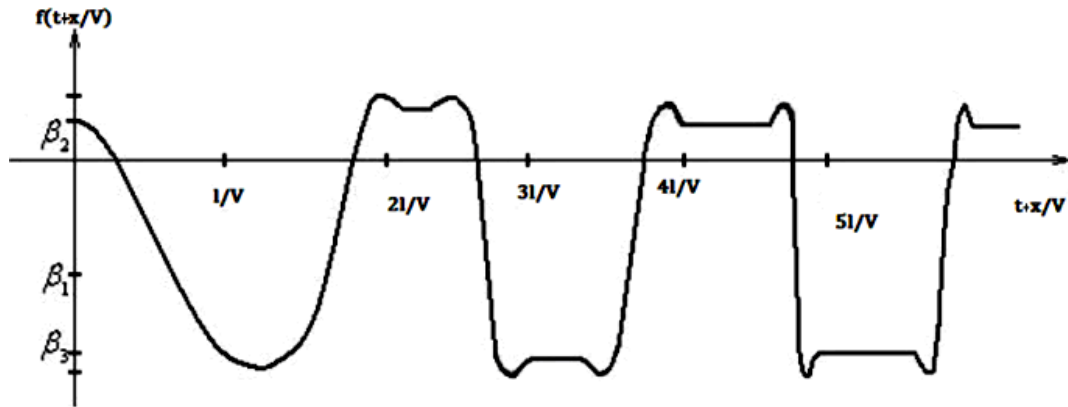


Рис. 1 – Изменение средней безразмерной концентрации анортита An в затвердевшей породе в процессе кристаллизации расплава. Релаксационные колебания сопровождаются “выбросами” в окрестности разрывов. Такого рода сходимость последовательности непрерывных функций к многозначной функции получила название явления Гиббса [21]. Здесь V – скорость распространения бегущей волны (характерные изменения скорости кристаллизации составляют $\approx 10^{-7}$ м/с), β_2 , β_3 – “концентрации” одной из компонент бинарной смеси после расслоения расплава при охлаждении, β_3 – неустойчивое состояние магматического расплава. Функция $f(\cdot)$ описывает одну из двух встречных бегущих волн. Сумма таких волн представляет собой искоемую концентрацию (или параметр порядка).

Выделим область $x_k^l \leq x \leq x_f^l$, которая характеризуется наибольшим значением переохлаждения ΔT . Ширина этой области может составлять 0.1 [22]. В данной области протекают основные эволюционные процессы образования структуры затвердевающего расплава. В то же время, для почти идеальной магмы в области (3) имеет место лишь слабый рост уже образовавшихся в области (2) структур. Выделенную часть (2), усредненную на интервале $x_k^l \leq x \leq x_f^l$, мы будем рассматривать как “границу” динамической системы, на которой происходит теплообмен с окружающей средой. Аналогичную процедуру можно организовать на левой стенке магматической камеры.

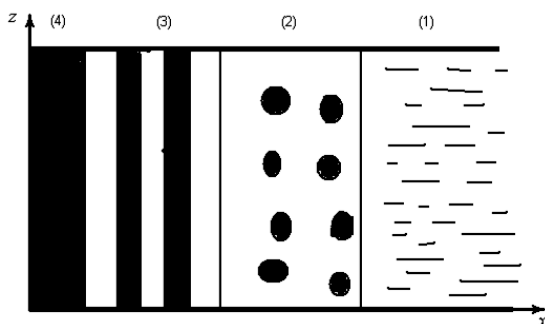


Рис. 2 – Схема модели двухфазной зоны: (1) – жидкость, (2) – активная область двухфазной зоны, (3) – область медленного роста твердой фазы в слабой гетерогенной зоне (в почти идеальном расплаве), (4) – затвердевшая порода (диопсид-анортит $Di-An$)

Таким образом, на плоских стенках камеры будут происходить сильно нелинейные по времени динамические процессы, а в объеме идеальной магмы – почти линейные динамические процессы. Это наблюдение будет учитываться при постановке краевой задачи. В результате чего приповерхностный слой магмы интенсивно эволюционирует. При этом различают первичные и вторичные магмы: первичные магмы имеют однородный состав, а вторичные изме-

няют свой состав и образуют различные серии (по нашей классификации, эти серии являются сериями релаксационного типа или сериями предтурбулентного типа с конечным или бесконечным числом магматических складок).

Таким образом, мы рассматриваем затвердевание псевдобинарного расплава в интервале температур ликвидус-солидус с образованием двухфазной зоны, которая состоит из кристаллитов твердой фазы и межкристаллитной жидкости. Мы показываем, каким образом при охлаждении могут возникать кристаллиты в ограниченном объеме, которые имеют пластинчатую структуру. Параметр порядка f_s характеризует сечение (долю) твердой фазы в двухфазной зоне. Оказывается, что эта доля (в виде полосы) распределена асимптотически периодически дискретным образом (с конечным числом линий перемежаемости твердой и жидкой фаз) на интервале $0 < x < l$, где l – расстояние между двумя плоскими стенками интрузивной камеры.

Рассматриваемая ниже математическая модель описывает условия формирования пластинчатых структур при кристаллизации вулканического расплава (см. [22, 25, 26, 27]). При этом исследуются возникновение и рост дисперсной фазы в расплавах, а также формирование композитной стержневой структуры при направленной кристаллизации расплава. К таким расплавам относятся металлические системы, в которых имеет место монотектическая реакция $A: L_1 \mapsto S + L_2$, что означает, что жидкость L_1 переходит в твердую фазу S и вторую жидкость L_2 . При температуре $T < T_g$ гомогенная жидкость становится неустойчивой и распадается на две различные жидкие фазы: матричную (а) и дисперсную (б). При дальнейшем охлаждении первой кристаллизуется (а) – жидкость; и лишь затем – (б) – жидкость. В результате наблюдаются как глобулярные, так и волокнистые структуры (по терминологии данной работы – колебания релаксационного и (пред) турбулентного типа).

Каким же образом магма превращается в горную породу? Кристаллизация происходит не мгновенно, а

в определенном интервале температур. Пусть фронт двухфазной зоны движется вдоль оси x и для простоты вдоль оси z выполним усреднение. Начало отсчета находится на левой стенке камеры, которая отделяет вмещающую породу от расплава (Рис. 2). Предположим, что расплав интрузива обменивается с внешней средой теплом через боковые поверхности интрузива по формальным законам:

$$\begin{aligned} \varphi_i(k, t) &= G_k[\varphi(k, t), \theta(k, t)], \\ \theta_i(k, t) &= F_k[\theta(k, t), \varphi(k, t)], \quad k = 0, l. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь, для простоты, $G_k, F_k: I \times I \mapsto I$ – произвольные функции, отображающие открытый ограниченный квадрат $I \times I$ в интервал I ; $\theta = (T - T_c) / \Delta T_k$; T_c – средняя температура вмещающей породы, которая ниже температуры расплава; $\Delta T_k = T_{liq0} - T_e$, где T_{liq0} – температура ликвидуса, T_e – температура гетерофазной зоны. $\varphi(x, t)$ – несохраняющийся параметр порядка, например, разность концентраций двух несмешивающихся фаз бинарной системы. Мы положим $\varphi = f_{solid} - f_{liq}$, где f_{solid} – доля твердой фазы, а f_{solid} – доля жидкой фазы, причем $f_{solid} + f_{liq} = 1$. Так же будем считать, что через боковые поверхности, контактирующие с вмещающей породой, концентрационные потоки отсутствуют, то есть выполняются граничные условия Неймана:

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(l, t) = 0.$$

Заметим, что в [5] предполагалось, что средняя температура вмещающей породы T_c ниже температуры расплава, а боковые поверхности расплава обмениваются с вмещающей породой теплом (вдоль оси x) по закону Ньютона-Рихтера с коэффициентом теплообмена α_c . Предположим, что: 1) поперечный размер интрузивного тела $2x_0$ достаточно мал: так, что внутренним термическим сопротивлением тела можно пренебречь по сравнению с внешним сопротивлением, что равносильно выполнению оценки $x_0 / \lambda \ll 1 / \alpha_c$, где λ – теплопроводность магмы (это требование позволяет рассматривать задачу в одномерной геометрии); 2) физические параметры среды равны средним значениям в соответствующих интервалах изменения величин; 3) движением расплава можно пренебречь, так как оно определяется лишь усадочными явлениями при кристаллизации (см. [5]). В результате для магматического расплава усредненные (по сечению интрузива) уравнения тепломассообмена с учетом роста твердой фазы можно записать в виде [5]:

$$c \rho_{liq} T_t = \lambda T_{zz} - \alpha_c x_0^{-1} (T - T_c) + \Delta H \varphi_t, \quad (2)$$

где $\Delta H = \rho_{solid} \chi_0$; ρ_{solid} – плотность твердой фазы, χ_0 – теплота плавления псевдобинарной системы; c – удельная теплоемкость, ρ_{liq} – плотность жидкой фазы, T – температура, φ – доля твердой фазы в расплаве. Уравнение (2) является объектом исследования в

работе [5].

Пусть плотность внутренней энергии имеет вид:

$$e = u(T)v(\varphi) + w(\varphi), \quad (3)$$

где $u(\cdot)$ – строго возрастающая функция. Здесь первое слагаемое представляет кинетическую энергию: например, $u(T) = 0.5k_B T$, где k_B – постоянная Больцмана, $v(\varphi)$ – число степеней свободы на единицу объема, $w(\varphi)$ – потенциальная энергия. Соответствующее уравнение непрерывности имеет вид (см. [15]):

$$e_t = -\text{div} \left(M \text{grad} \frac{1}{u} \right). \quad (4)$$

Тогда из (3),(4) следует, что

$$v(\varphi)u_t - \lambda(\varphi)\varphi_t = -\text{div} \left(M \text{grad} \frac{1}{u} \right). \quad (5)$$

Здесь коэффициент M может зависеть от φ и e ,

$$\lambda(\varphi) = -e'(\varphi) = -(u(T)v'(\varphi) + w'(\varphi)),$$

где функция $\lambda(\varphi)$ характеризует скрытое тепловыделение. В дальнейшем, мы полагаем $v(\varphi) = 1$ и $w(\varphi) = -a\varphi^2 + b\varphi + c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$. Тогда в одномерной геометрии уравнение (5) можно переписать в следующем виде:

$$T_t + (-2a\varphi + b)\varphi_t = -(M(T)(T^{-1})_x)_x. \quad (6)$$

Положим в уравнении (6) $M = k_2 T^2$, что приводит к уравнению:

$$T_t + (-2a\varphi + b)\varphi_t = k_2 T_{xx}. \quad (7)$$

Пусть τ_θ – время релаксации температуры к равновесной и T_c – температура фазового расслоения гомогенного расплава. Тогда замена $t'' = t / \tau_\theta$, $\theta = T / T_c$, $x \mapsto x / l$, приводит уравнение (7) к виду:

$$\theta_{t''} + \left(-\frac{2a}{T_c} \varphi + \frac{b}{T_c} \right) \varphi_{t''} = D_\theta \theta_{xx}, \quad (8)$$

где $D_\theta = \tau_\theta k_2 / l^2$.

Для описания поведения доли твердой фазы в расплаве воспользуемся уравнение Аллена-Каана:

$$\varphi_t = K(\zeta_b^2 \varphi_{xx} - f'_\varphi(\varphi, \theta)), \quad \theta = T / T_c,$$

где свободная энергия, f нормированная на величину $k_B T$, имеет вид

$$f(\varphi, T) = \chi \theta \varphi (1 - \varphi) + (1 - \theta)(-a\varphi^2 + b\varphi + c) + \log \theta,$$

где ζ_b – объемная корреляционная длина магматического расплава, параметр K имеет размерность [1/сек] и пропорционален частоте возникновения зародышей твердой фазы в расплаве.

Первое слагаемое в свободной энергии определяется по форме избыточной энергии. Избыточная энергия ΔE_{AB} образования твердого раствора из смеси чистых компонентов сорта A и B определяется нордгеймовской кривой $\Delta E_{AB} \approx \chi c_A(1-c_B)$, где c_A и c_B – это соответствующие концентрации. Параметр $\chi = E_{mix} / k_B T$ (здесь E_{mix} – энергия смешения) характеризует корреляцию между расположением соседних атомов, то есть ближний порядок. В самом деле, если $E_{mix} = 0$, то такие системы называются идеальными твердыми растворами. Данная кривая будет расположена выпуклостью вверх или вниз в зависимости от того будет ли $E_{mix} < 0$ или $E_{mix} > 0$ (см. [15, Рис. 1.10]). Во втором случае взаимодействие, то есть притяжение между разнородными атомами будет сильнее (в среднем), чем взаимодействие (притяжение) между одинаковыми атомами будет сильнее, чем взаимодействие между разными атомами. При заданном значении E_{mix} , чем выше температура, тем слабее корреляция. Далее, мы покажем, что χ является бифуркационным параметром. Его изменение приводит к бифуркациям удвоения периода распределения (при больших временах) параметра порядка в кристаллической магме.

Теперь запишем данное уравнение в безразмерном виде:

$$\varphi_t = D_\varphi \varphi_{xx} - f'_\varphi(\varphi, \theta), \quad (9)$$

где $x \mapsto x/l$, $D_\varphi = K \tau_\varphi^2$, $t = t' / \tau_\varphi$, τ_φ – время релаксации доли твердой фазы в расплаве. Заметим, что $f(\varphi, T_c) = \chi \varphi(1-\varphi)$.

Уравнение (9) в окрестности критической температуры $\theta = 1$ можно записать в виде

$$\varphi_t = D_\varphi \varphi_{xx} + \alpha \varphi + \beta \theta, \quad (10)$$

где $\alpha = 2\chi$, $\beta = -\chi$. Заметим, что $t'' = \frac{\tau_\varphi}{\tau_\theta} t'$. Тогда

уравнение (8) для единого безразмерного времени t' принимает вид:

$$\theta_t + \left(-\frac{2a}{T_c} \varphi + \frac{b}{T_c} \right) \varphi_t = \frac{\tau_\varphi D_\theta}{\tau_\theta} \theta_{xx}. \quad (11)$$

Полагая $t' = t$, из (10) и (11) мы выводим следующее уравнение:

$$\varphi_{tt} + \frac{\alpha \tau_\varphi D_\theta}{\tau_\theta} \varphi_{xx} = \left(D_\varphi + \frac{\tau_\varphi D_\theta}{\tau_\theta} \right) \varphi_{xxt} + \left(\alpha + \beta \left(\frac{2a}{T_c} \varphi - \frac{b}{T_c} \right) \right) \varphi_t - \frac{\tau_\varphi D_\theta D_\theta}{\tau_\theta} \varphi_{xxxx}. \quad (12)$$

Рассмотрим (12) в окрестности среднего состава, т.е. $\varphi = 1/2$, тогда мы приходим к следующему уравнению:

$$\varphi_{tt} - V^2 \varphi_{xx} = \alpha_1 \varphi_t + \alpha_2 \varphi_{xxt} + \alpha_3 \varphi_{xxxx}, \quad (13)$$

где для удобства введены следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{\beta(a-b)}{T_c}, \quad \alpha_2 = D_\varphi + \frac{\tau_\varphi D_\theta}{\tau_\theta},$$

$$\alpha_3 = -\frac{\tau_\varphi D_\theta D_\theta}{\tau_\theta}, \quad V^2 = -\frac{\alpha \tau_\varphi D_\theta}{\tau_\theta}.$$

3. РЕДУКЦИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Будем искать решения уравнения (13) в виде суммы двух бегущих волн:

$$\varphi(x, t) = f(t + x/V) + g(t - x/V), \quad (14)$$

где f и g – заданные функции, V – параметр задачи, определяющий скорость распространения фронта кристаллизации расплава. Подстановка представления (14) в уравнение (13) приводит к двум линейным независимым обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\alpha_1 f'(\zeta) + \alpha_2 V^{-2} f'''(\zeta) + \alpha_3 V^{-4} f^{(iv)}(\zeta) = 0, \quad (15)$$

$$\alpha_1 g'(\eta) + \alpha_2 V^{-2} g'''(\eta) + \alpha_3 V^{-4} g^{(iv)}(\eta) = 0, \quad (16)$$

где $\zeta = t + x/V$, $\eta = t - x/V$. Интегрирование уравнения (15) от точки $\zeta_0 = t$ до точки $\zeta_1 = t + l/V$ приводит к уравнению:

$$\alpha_1 f(t + l/V) + \alpha_2 V^{-2} f''(t + l/V) + \alpha_3 V^{-4} f'''(t + l/V) = \alpha_1 f(t) + \alpha_2 V^{-2} f''(t) + \alpha_3 V^{-4} f'''(t). \quad (17)$$

Интегрирование уравнения (16) от точки $\eta_0 = t$ до точки $\eta_1 = t - l/V$ приводит к уравнению:

$$\alpha_1 g(t) + \alpha_2 V^{-2} g''(t) + \alpha_3 V^{-4} g'''(t) = \alpha_1 g(t - l/V) + \alpha_2 V^{-2} g''(t - l/V) + \alpha_3 V^{-4} g'''(t - l/V). \quad (18)$$

Введем обозначения

$$Y_1(t) = f(t + l/V) - f(t), \quad Y_2(t) = g(t) - g(t - l/V).$$

Тогда из (17) и (18) вытекают уравнения

$$\alpha_1 Y_1(t) + \alpha_2 V^{-2} Y_1''(t) + \alpha_3 V^{-4} Y_1'''(t) = 0, \quad (19)$$

$$\alpha_1 Y_2(t) + \alpha_2 V^{-2} Y_2''(t) + \alpha_3 V^{-4} Y_2'''(t) = 0. \quad (20)$$

Характеристическое уравнение соответствующее (19) имеет вид:

$$ak^3 + bk^2 + d = 0, \quad (21)$$

где $a = \alpha_3 V^{-4}$, $b = \alpha_2 V^{-2}$, $d = \alpha_1$. Замена $k = z - b/3a$ приводит уравнение (21) к каноническому виду:

$$z^3 + pz + q = 0, \quad (22)$$

где $p = -b^2/3a^2$, $q = 2b^3/27a^3 + d/a$. Кубическое уравнение (22) имеет следующие корни: $z_1 = A + B$, $z_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i \frac{A-B}{2} \sqrt{3}$, где $A, B = \sqrt[3]{(-q/2) \pm \sqrt{Q}}$ и $Q = (p/3)^3 + (q/2)^2 = 1/4 (a_1/a_3)^2 V^8 + a_1 a_2^3 / 27 a_3^4 V^{10}$. В ситуации, когда $Q \leq 0$, т.е. $a_1 \in [-4a_2^3 V^2 / 27 a_3^2, 0]$, уравнение (22) будет иметь три действительных корня. Этот случай не представляет интереса с точки зрения физического приложения, так как приводит либо к монотонному затуханию, либо к монотонному возрастанию объемных возмущений. Поэтому мы ограничимся случаем, когда $Q > 0$, т.е. $a_1 < -4a_2^3 V^2 / 27 a_3^2$ или $a_1 > 0$, и уравнение (22) имеет один вещественный и два комплексно-сопряженных корня. В результате решение исходного уравнения (19) имеет вид:

$$Y_1(t) = C_1 e^{(A+B)t} + C_2 e^{-(A+B)t} \cos\left(\frac{(A-B)\sqrt{3}}{2} t\right) + C_3 e^{-(A+B)t} \sin\left(\frac{(A-B)\sqrt{3}}{2} t\right), \quad (23)$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные. Удобно переписать равенство (23) в виде

$$Y_1(t) = \bar{C}_1 e^{(A+B)t} + \bar{C}_2 e^{-(A+B)t} \sin\left(\bar{\phi} + \frac{(A-B)\sqrt{3}}{2} t\right). \quad (24)$$

Аналогично, мы находим, что

$$Y_2(t) = \bar{\bar{C}}_1 e^{(A+B)t} + \bar{\bar{C}}_2 e^{-(A+B)t} \sin\left(\bar{\bar{\phi}} + \frac{(A-B)\sqrt{3}}{2} t\right). \quad (25)$$

Здесь $\bar{\phi}$ и $\bar{\bar{\phi}}$ суть фазы, зависящие от соответствующих постоянных. Из (24) и (25) вытекают соотношения:

$$Y_1'(t) = (A+B)\bar{C}_1 e^{(A+B)t} + (A+B)\bar{C}_2 e^{-(A+B)t} \sin\left(\bar{\phi} + \frac{(A-B)\sqrt{3}}{2} t\right) + \frac{(A-B)\sqrt{3}}{2} \bar{C}_2 e^{-(A+B)t} \cos\left(\bar{\phi} + \frac{(A-B)\sqrt{3}}{2} t\right). \quad (26)$$

Аналогично,

$$Y_2'(t) = (A+B)\bar{\bar{C}}_1 e^{(A+B)t} + (A+B)\bar{\bar{C}}_2 e^{-(A+B)t} \sin\left(\bar{\bar{\phi}} + \frac{(A-B)\sqrt{3}}{2} t\right) + \frac{(A-B)\sqrt{3}}{2} \bar{\bar{C}}_2 e^{-(A+B)t} \cos\left(\bar{\bar{\phi}} + \frac{(A-B)\sqrt{3}}{2} t\right). \quad (27)$$

Теперь заметим, что из определения функций $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ вытекает следующее функциональное соотношение:

$$f'(t+l/V) + g'(t-l/V) = f'(t) + g'(t) + Y_1'(t) - Y_2'(t). \quad (28)$$

Из равенства (28), в силу граничных условий (1) следует, что

$$G_1[f(t+l/V) + g(t-l/V)] = G_1[f(t) + g(t)] + Y_1'(t) - Y_2'(t). \quad (29)$$

Заметим, что из граничных условий $\varphi_x(0,t) = \varphi_x(l,t) = 0$ вытекают соотношения

$$f(t) = g(t) + c_0, f(t+l/V) = g(t-l/V) + c_l, \quad (30)$$

где c_0, c_l – постоянные такие, что $c_0 = f(0) - g(0)$, $c_l = f(l/V) - g(-l/V)$. Возьмем $c_0 = c_l = 0$. Тогда из (30) вытекает, что равенство (29) можно записать в виде:

$$G_1[2f(t+l/V)] = G_1[2f(t)] + Y_1'(t) - Y_2'(t). \quad (31)$$

В качестве G_1 возьмем тождественное отображение, т.е. $G_1 : f \mapsto f$, и обозначим $2f \mapsto f$. Тогда из (31) мы выводим следующее разностное уравнение с квазипериодическими возмущениями:

$$f(t+l/V) = G_1[f(t)] + Y_1'(t) - Y_2'(t). \quad (32)$$

Далее воспользуемся приближением $e^{\pm(A+B)t} \approx 1 \pm (A+B)t$, где $A+B \propto V^{4/3} \ll 1$. После подстановки этого приближения в (26) и (27) мы видим, что слагаемыми порядка $(A+B)^2$ и $(A+B)(A-B)$ можно пренебречь на любом достаточно большом конечном временном интервале $0 < t < t' = t'(V)$, где $t' \rightarrow +\infty$ когда $V \rightarrow +0$. Для простоты рассмотрим случай $\bar{C}_2 = \bar{\bar{C}}_2$, что несколько ограничивает выбор допустимых начальных условий соответствующей краевой задачи, так как эти постоянные зависят от начальных условий в угловых точках. В результате при достаточно малых скоростях распространения кристаллического фронта в магматической лаве можно для достаточно большого (но конечного) интервала времени воспользоваться приближенным соотношением

$$Y_1'(t) - Y_2'(t) \approx \kappa_1 (A+B) + \kappa_2 \cos\left(\omega + \frac{\bar{\phi} + \bar{\bar{\phi}} + (A-B)\sqrt{3}t}{2}\right), \quad (33)$$

где

$$\kappa_1 = \bar{C}_1 - \bar{\bar{C}}_1, \kappa_2 = \bar{C}_2 \sqrt{4(A+B)^2 + 3(A-B)^2} \sin\left(\frac{\bar{\phi} - \bar{\bar{\phi}}}{2}\right),$$

$$\cos \omega = \frac{2(A+B)}{\sqrt{4(A+B)^2 + 3(A-B)^2}},$$

$$\sin \omega = \frac{(A-B)\sqrt{3}}{\sqrt{4(A+B)^2 + 3(A-B)^2}}.$$

Тогда из (32), учитывая (33), следует

$$f(t+l/V) = G_l[f(t)] + \kappa_1(A+B) + \kappa_2 \cos \left(\omega + \frac{\bar{\phi} + \bar{\phi} + (A-B)\sqrt{3}t}{2} \right). \quad (34)$$

В самом деле, на временах $t \ll (A+B)^{-2} \max_{k=1,2} \bar{C}_k^{-1}$ решения уравнений (32) и (34) мало отличаются так, что в пределе при $V \rightarrow +0$ или $\bar{C}_k \rightarrow 0$ разница между решениями (в метрике Хаусдорфа) стремится к нулю.

Рассмотрим однопараметрическое семейство $G_a := G_l(\varphi) + a$, $a = \kappa_1(A+B)$ гладких отображений отрезка $I = [-1, 1]$ в себя. Предположим, что существует единственная критическая точка $\varphi_c(a) = 0$, которая является точкой максимума при всех значениях параметра a . Тогда любое отображение гомеоморфное данному будем называть унимодальным. При этом все отталкивающие и притягивающие точки переходят друг в друга. Для таких семейств отображений удастся проследить не только за отдельными бифуркациями, но и, изменяя параметр a на некотором конечном промежутке, увидеть бесконечную последовательность бифуркаций циклов. Например, для логистического отображения $\tilde{G}_a = a\varphi(1-\varphi)$ изменение параметра от $a = 3$ до $a = 3.57$ приводит к последовательности бифуркаций удвоения периода, т.е. существует последовательность интервалов (a_k, a_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$ такая что если $a \in (a_k, a_{k+1})$, то у отображения существуют циклы периода $1, 2, 2^2, \dots, 2^k, \dots$, кроме того, если $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 3.57$, тогда существует $\lim_{k \rightarrow \infty} (3.57 - a_k)^{1/k} = \delta$, где $\delta = 4.6692\dots$ - универсальная константа, не зависящая от семейства G_a , (см. [23, 24]). При $a > 3.57$ у отображения существуют циклы, удовлетворяющие универсальному порядку Шарковского:

$$1 < 2 < 4 < 8 < \dots < 2^k < \dots < 2^k \times 7 < 2^k \times 5 < 2^k \times 3 \dots < 2 \times 7 < 2 \times 5 < 2 \times 3 < \dots < 7 < 5 < 3,$$

а именно, если отображение имеет цикл периода m , то у него имеется и цикл любого периода меньше m .

Для класса унимодальных отображений $G_l: I \mapsto I$, где I - некоторый открытый ограниченный интервал, качественное поведение решений уравнения (34) при $\kappa_2 = 0$, когда $t \rightarrow \infty$ известно (см., например, [16]). Известен аттрактор соответствующей динамической системы в бесконечномерном фазовом пространстве, порождаемой уравнением (34) при $\kappa_2 = 0$ для некоторого множества начальных функций, заданных на интервале $[-l/V, 0)$.

Положим $t = n$, где $n = 0, 1, \dots$, и для упрощения записи возьмем $l/V = 1$. Возьмем $G_l(s) = \mu - s^2$ и вместо уравнения (34) рассмотрим его дискретный аналог:

$$f_{n+1} = \bar{\mu} - f_n^2 + \kappa_2 \cos 2\pi\varpi_n, \quad \bar{\mu} = \mu + \kappa_1(A+B), \quad (35)$$

$$\varpi_{n+1} = \varpi_n + \gamma, \quad \gamma = \frac{(A-B)\sqrt{3}}{4\pi}. \quad (36)$$

Отметим, что в уравнении (34) параметры, связанные с отображением G_l , характеризуют поверхностные возмущения в расплаве, а параметры $\kappa_1(A+B)$ и κ_2 соответствуют объемным возмущениям. При изменении каждого из этих параметров (при фиксированных остальных параметрах) мы имеем цепочку бифуркаций параметра порядка $T1 \mapsto T2 \mapsto T4 \mapsto C \mapsto D$ (см. [17-20]), где последняя бифуркация соответствует "лавинообразному" извержению вулкана. Различные динамические режимы для различных значений параметров $\bar{\mu}$ и κ_2 показаны на Рис.3. Как видим, существует область D , где траектории динамической системы, соответствующей уравнениям (35), (36) уходят на бесконечность при $t \rightarrow \infty$, что соответствует "разрушению" вулканического канала. Существуют квазипериодические траектории на торе $T1$: при этом тор задается единственной инвариантной кривой (Рис. 4). Далее существуют траектории на торе $T2$, который состоит из двух инвариантных кривых (Рис. 4). Между квазипериодическими движениями на торе и хаотическим поведением траекторий мы находим странные нехаотические аттракторы: этот режим не является хаотическим, поскольку, как показано в [19], показатель Ляпунова в области $0.35 < \kappa_2 < 0.45$ является отрицательным. Напомним, что значения κ_2 зависят от структуры начальных распределений краевой задачи, так что здесь мы имеем чувствительную зависимость от начальных данных.

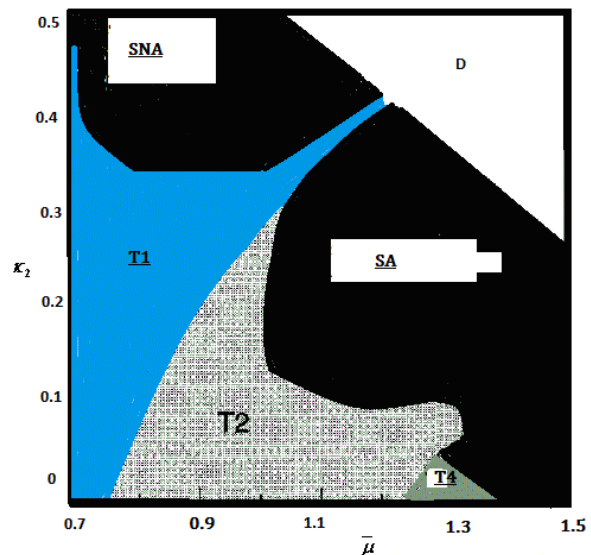


Рис. 3 – Обобщенная бифуркационная диаграмма Кузнецова – Пиковского [17], κ_2 – амплитуда объемных колебаний, SNA – странный нехаотический аттрактор, SA – странный аттрактор, D – область неограниченных колебаний, T1, T2, T4 – бифуркации удвоения тора

Таким образом, выше исследована начально-краевая задача на примере системы уравнений фазового поля, которая описывает образование полосчатой химической неоднородности при ритмической

кристаллизации природных расплавов. Показано, что одним из возможных механизмов формирования полосчатых структур является установление при направленном затвердевании расплава ритмического режима кристаллизации волнового типа.

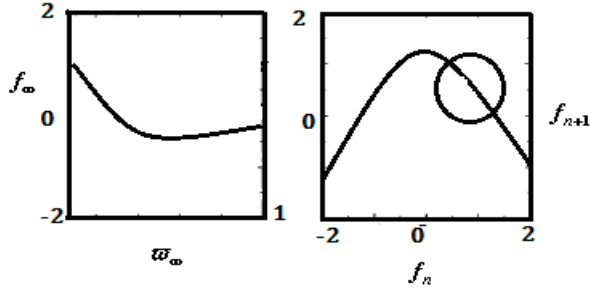


Рис. 4 – Предельное распределение в магматическом расплаве при $\bar{\mu} = 0.8$, $\kappa_2 = 0.3$

При этом рассматриваются идеальные ($\kappa_2 = 0$) и неидеальные расплавы ($\kappa_2 \neq 0$). В первом случае, мы получаем периодические (по автомодельным переменным ζ и η) предельные распределения неоднородностей, показанные на Рис. 1, Во втором случае, мы получаем квазипериодические распределения на торе Рис. 4. В общей ситуации, мы получаем известную бифуркационную диаграмму Пиковского-Кузнецова-Фойделя [17] (Рис. 3). В нашем случае параметры $\bar{\mu}$, κ_2 зависят от всех параметров исходной краевой задачи, поэтому диаграмма Пиковского-Кузнецова-Фойделя является всего лишь одним из возможных сечений реальной многомерной бифуркационной диаграммы для исходной задачи.

4. ПРИМЕР

В данном пункте мы приведем пример применения предыдущих результатов. Заметим, что в [5] для параметра порядка $\varphi = f_{sol} - f_{liq}$ рассматривалось обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{d_1(v_T)} F(\Delta T), \quad (37)$$

где d_1 – расстояние между первичными осями дендритов; v_T – скорость охлаждения; $F(\Delta T)$ – феноменологический закон, характеризующий зависимость линейной скорости роста кристаллов от среднего переохлаждения ΔT расплава в зоне. В отличие от [5], мы предлагаем взять (37) в качестве граничных условий, которые описывают либо рост, либо убывание параметра порядка на границе. Например, рассмотрим граничные условия вида:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda_1 - h_1 \varphi \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda_2 - h_2 \varphi \Big|_{x=l}. \quad (38)$$

где λ_k и h_k – некоторые заданные эмпирические параметры. Условия (38) приводят к следующему функциональному соотношению:

$$h_2 \varphi(l, t) - \lambda_2 = C_0 | h_1 \varphi(0, t) - \lambda_1 |^{h_2/h_1}, \quad (39)$$

где $C_0 = (h_2 \varphi(l, 0) - \lambda_2) | h_1 \varphi(0, 0) - \lambda_1 |^{-h_2/h_1}$. Таким образом, дифференциальные граничные условия (38) допускают редукцию к двухточечным функциональным граничным условиям. Для простоты возьмем $\lambda_1 = 0$ и $h_2/h_1 = 2$. Тогда из (39) следует, что

$$\varphi(l, t) = \frac{\lambda_2}{2h_1} + \frac{C_0 h_1}{2} \varphi^2(0, t). \quad (40)$$

Итак, динамические граничные условия (38) связаны с функциональными условиями (40). Как вытекает из результатов пункта 3, соответствующая краевая задача допускает редукцию к разностному уравнению (32), где $G_l: \varphi \mapsto \lambda_2/2h_1 + C_0 h_1 \varphi^2/2$. Соответствующая бифуркационная диаграмма аналогична диаграмме на Рис. 3, построенной для логистического отображения, так как последнее гомеоморфно квадратичному отображению.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучается математическая модель, которая описывает поверхностно-индуцированные и объемно-индуцированные процессы затвердевания в ограниченном магматическом расплаве. Данная модель основана на исследовании известной модели фазового поля [15]. Для таких уравнений рассматриваются динамические граничные условия, которые описывают процессы рождения-уничтожения зародышей кристаллической фазы на плоских стенках, ограничивающих расплав. При этом температура на поверхности считается заданным параметром. Показано, что при поверхностной кристаллизации в магме, когда $t \rightarrow \infty$, возникают периодические кусочно-постоянные пространственно-временные распределения релаксационного, предтурбулентного и турбулентного типа. При объемной кристаллизации в магме возникают асимптотически квазипериодические пространственно-временные распределения на торе, которые удовлетворяют бифуркациям удвоения периода при изменении параметров задачи вплоть до перехода к странным нехаотическим и странным хаотическим распределениям соответственно.

Spatial-Temporal Oscillations of Relaxation and Pre-Turbulent Type in Ideal Confined Amorphous Alloys

I.B. Krasnyuk¹, T.N. Melnik¹, R.M. Taranets², V.M. Yurchenko¹¹ Donetsk Institute for Physics and Engineering named after A.A. Galkin of NASU, 72, R. Luxemburg Str., 340004 Donetsk, Ukraine² Institute of Applied Mathematics and Mechanics, 74, R. Luxemburg Str., 340004 Donetsk, Ukraine

The conditions for oscillating distributions at surface-induced crystallization of a quasi-binary volcanic melt, as a superposition of two travelling waves, are found. It is shown that change in the cooling conditions on the surfaces of flat walls which confine the melt leads to the change in the surface structure, i.e. surface amorphous-crystal waves penetrating the amorphous melt and initiating different types of pulse oscillations in the bulk in turn. For ideal melts, when bulk perturbations can be neglected, the solution tends to an asymptotically periodic piecewise-constant function. In the case of non-ideal melts, competition between surface and volume fluctuations arises and solution tends to an asymptotically quasi-periodic function.

Keywords: Amorphous melt, Difference equation with quasi-periodic perturbations, Period-doubling bifurcations.

Просторово-часові коливання релаксаційного та претурбулентного типу в ідеальних обмежених аморфних сплавах

И.Б. Краснюк¹, Т.М. Мельник¹, Р.М. Таранець², В.М. Юрченко¹¹ Донецький фізико-технічний інститут на ім. О.О. Галкіна, вул. Р. Люксембург, 72, 340003 Донецьк, Україна² Інститут прикладної математики та механіки, вул. Р. Люксембург, 74, 340002 Донецьк, Україна

Визначаються умови виникнення осцилюючих розподілів у вигляді суперпозиції двох хвиль, що рухаються, при поверхнево-індукованої кристалізації квазібінарного вулканічного розплаву. Показано, що зміна умов охолодження на поверхнях плоских стінок, що обмежують розплав, призводить до зміни поверхневої структури вулканічного розплаву, тобто до формування поверхневих хвиль, що рухаються, які (проникаючи всередину аморфного розплаву) збуджують різні типи імпульсних коливань в об'ємі. У разі ідеального розплаву, коли об'ємними збуреннями можна знехтувати, розв'язок задачі сходиться до асимптотично періодичної кусочно-сталой функції. У разі неідеального розплаву виникає конкуренція між поверхневими та об'ємними коливаннями, і розв'язок задачі сходиться до асимптотично квазіперіодичної функції.

Ключові слова: Аморфний розплав, Різницеве рівняння з квазіперіодичними збуреннями, Біфуркації подвоєння періоду.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Y.Z. Zhang, et al., *J. Non-Cryst. Solids* **117**, 259, (2009).
2. K. Lu, J.T. Wang, *Scripta Metal.* **21**, 1185 (1987).
3. А.И. Михайлов, *Физика и химия обработки материалов* No 5, 146 (1983).
4. Т.И. Муничина, *Межвуз. сборник. научных трудов*, 46 (Саранск: 2006).
5. В.К. Черепанова, *Физическая мезомеханика* **12** No 6, 105 (2009).
6. А.А. Чернов, *Прикладная механика и теоретическая физика* **44**, No 5, 80 (2003).
7. О.Э. Мельник, *Нестационарная модель динамики вулканического извержения с учетом кристаллизации и фильтрации газа через магму*, Доклады Академии Наук. 377, No. 5, 629-633 (2001).
8. Ye.S. Persikov, V.A. Zharikov, P.G. Bukhtiyarov, S.F. Pol'skoy, *Eur. J. Mineral.* **2** No 7, 621 (1990).
9. E.S. Persikov, *Adv. Phys. Geochem.* **4** No 4, 1 (1991).
10. А.Н. Колмогоров, *Известия АН СССР* **7**, 355 (1937).
11. R. Uhlmann, *J. Non-Cryst. Solids* **7**, 337 (1972).
12. H.A. Davies, *Phys. Chem. Glasses* **17** No 5, 159 (1976).
13. A.A. Proussevitch, D.L. Sahagian, *J. Geophys. Res.* **101** No. 8, 17447 (1996).
14. В.П. Скрипов, В.П. Коверда, *Спонтанная кристаллизация переохлажденных жидкостей* (Москва: Наука: 1984).
15. P.C. Fife, O. Penrose, *Differential Equations* No 16, 1 (1995).
16. А.Н. Шарковский, Ю.Л. Майстренко, Е.Ю. Романенко, *Разностные уравнения и их приложения* (Киев: Наукова Думка: 1986).
17. U. Feudel, S. Kuznetsov, A. Pikovsky, *Strange Nonchaotic Attractors between Order and Chaos in quasi-periodical forced systems Strange Nonchaotic* (World Scientific: Singapore: 2006).
18. Б.П. Безручко, С.П. Кузнецов, А.С. Пиковский, Е.П. Селезнев, У. Фойдель, *Известия вузов* **77** No 1/2, 3 (1977).
19. С.П. Кузнецов, *Письма в ЖЭТФ* **39**, 113 (1984).
20. Б.П. Безручко, С.П. Кузнецов, А.С. Пиковский, Е.П. Селезнев, У. Фойдель, *Известия вузов* **85** No 1/2, 3 (1984).
21. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды* (В 2-х томах) (Москва: Мир: 1965).
22. В.К. Черепанова, *Математические модели термодинамических процессов при фазовых превращениях в природных и динамических системах* (Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук) (Новосибирск: 2012).
23. В.А. Добрынский, *Математические заметки* **63** No 5, 679 (1998).
24. А.Н. Шарковский, С.Ф. Коляда, А.Г. Сивак, В.В. Федоренко, *Динамика одномерных отображений* (Киев: Наукова Думка: 1986).
25. V.K. Cherepanova, A.N. Cherepanov, V.N. Sharapov, S.I. Plaksin, *Geochem. Int.* **47**, 454 (2009).
26. Marcello Lappa, *Int. J. Multiscale Com.* **9** No 2, 149 (2011).
27. V.N. Sharapov, A.S. Lapukhov, B.V. Guzman, V.K. Cherepanova, *Russ. Geol. Geophys.* **53**, No 9, 837 (2012).