

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Сушко Тетяна Сергіївна

УДК 539.3

**ДВОВИМІРНІ СТАТИЧНІ ТА СТАЦІОНАРНІ ХВИЛЬОВІ ПОЛЯ
У кусково-однорідних П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ тілах**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ-2005

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Сумському державному університеті
Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник – доктор фізико-математичних наук, професор
Фильштинський Леонід Аншелович,
Сумський державний університет,
завідувач кафедри прикладної математики і механіки.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Сенченков Ігор Костянтинівич,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
головний науковий співробітник відділу термопружності;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Куценко Олексій Григорович,
Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка,
доцент кафедри механіки суцільних середовищ.

Провідна установа – Донецький національний університет.

Захист відбудеться "22" червня 2005 р. о 15⁰⁰ годині на засіданні
спеціалізованої вченої ради К 26.001.21 у Київському національному
університеті імені Тараса Шевченка за адресою:
03127, м. Київ, просп. Глушкова, 2, корп. 7, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Київського національного
університету ім. Тараса Шевченка за адресою:
01033, м.Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий " 14 " травня 2005 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради

Кепич Т.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

На цей час створено велику кількість різноманітних елементів п'єзоелектронної техніки, на основі яких розробляються ефективні пристрої радіоелектроніки, акустики, автоматики, обчислювальної та виміральної техніки. Науковою базою для розрахунку ефективності, динамічних якостей і надійного функціонування таких пристроїв є теорія електропружності, що враховує сегнетоелектричні, п'єзоелектричні, піроелектричні та інші ефекти, властиві п'єзокерамічним матеріалам.

Актуальність теми. Незважаючи на значну кількість робіт з проблем теорії електропружності, строгі результати до цього часу отримані лише для деяких канонічних тіл, тому що взаємний зв'язок електричного поля і поля механічних напружень істотно ускладнює аналіз електропружних полів у п'єзоперетворювачах при загальних умовах механічного та електричного навантажень. Вивчення статичних і стаціонарних хвильових процесів у п'єзоелектричних середовищах складної геометрії, зокрема у складених тілах з дефектами, вимагає розвитку й удосконалення методів розв'язування задач електропружності.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Проведені в дисертаційній роботі дослідження пов'язані з фундаментальними науково-дослідними роботами (НДР), що проводилися на кафедрі математичної фізики (нині - кафедра прикладної математики і механіки) Сумського державного університету: "Аналіз і синтез фізичних полів у композитних матеріалах різних класів і конструкціях з них" (№ державної реєстрації 0194U008456, 1994-1996 рр.), "Розробка математичних методів розв'язування прямих і зворотних задач електромагнітопружності для кусково-однорідних тіл, пластин і оболонок" (№ державної реєстрації 0197U016611, 1997-1999 рр.). Частина результатів дисертаційної роботи була використана у звітах за зазначеними НДР за 1995-1999 рр.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розроблення й узагальнення методів розв'язування статичних і стаціонарних динамічних двовимірних граничних задач електропружності для нескінченних складених п'єзокерамічних тіл (випадок антиплоскої деформації), а також розвиток методів дослідження локальних властивостей електропружних полів в околі вершини клиноподібної області для різних типів механічних та електричних граничних умов на зовнішніх гранях клина. Для досягнення сформульованих цілей необхідно:

на основі комплексних представлень і фундаментальних розв'язків двовимірних задач електропружності для складеного п'єзокерамічного простору побудувати інтегральні представлення розв'язків граничних задач;
відповідні граничні задачі звести до інтегральних рівнянь;
одержати характеристичні рівняння двовимірних сингулярних задач для п'єзокерамічних клиноподібних тіл;
побудувати функції Гріна для складеного п'єзокерамічного клина, що відповідають дії зосереджених зсувних зусиль або електричних зарядів;
побудувати фундаментальний розв'язок динамічних рівнянь електропружності, що відповідають гармонійним коливанням складеного п'єзокерамічного простору (антиплоска деформація);
методом сингулярних інтегральних рівнянь дослідити стаціонарні хвильові поля у складеному п'єзокерамічному просторі з тунельною порожниною;
розробити процедури чисельної реалізації побудованих аналітичних алгоритмів, створити відповідне прикладне програмне забезпечення;
провести чисельні дослідження з метою встановлення нових електромеханічних закономірностей.

Об'єктом дослідження в роботі є проблема вивчення спряжених електропружних полів у кусково-однорідних п'єзокерамічних тілах в околі різного типу неоднорідностей, а також поблизу кутових точок контурів.

Предметом дослідження є аналіз розподілу електропружних полів у кусково-однорідних тілах в околі неоднорідностей і оцінка впливу різних електромеханічних та геометричних факторів на міцність п'єзокерамічних тіл з концентраторами напружень.

Методи дослідження. Загальна методика досліджень в роботі базується на зведенні відповідних задач електропружності до задач теорії функцій комплексної змінної. При розв'язуванні граничних задач для складеного п'єзокерамічного простору, послабленого дефектами (типу тріщин, отворів), застосовується метод сингулярних інтегральних рівнянь з подальшим використанням одного з методів механічних квадратур для чисельних досліджень. При побудові фундаментального розв'язку динамічних рівнянь електропружності для складеного середовища і функції Гріна для п'єзокерамічного клина в роботі використовується техніка інтегральних перетворень Фур'є і Мелліна відповідно.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в такому:

розвинено метод сингулярних інтегральних рівнянь на статичні та стаціонарні динамічні задачі електропружності для складених п'єзокерамічних середовищ, послаблених концентраторами напружень досить довільної конфігурації;
вперше розглянуто сингулярні задачі електропружності про особливості фізичних полів у вершині п'єзокерамічного клина (однорідного, складеного), встановлено нові ефекти;
вперше побудовано функції Гріна, що характеризують спряжені електропружні поля в складеному п'єзокерамічному клині при дії зосереджених зсувних зусиль або електричних зарядів;
побудовано фундаментальний розв'язок динамічних рівнянь електропружності, що відповідають антиплоскій деформації складеного п'єзокерамічного простору при дії зосереджених гармонійних зсувних зусиль або електричних зарядів;
встановлено нові електромеханічні закономірності впливу характеристик п'єзокерамічних матеріалів, геометричних параметрів концентраторів напружень, їх кількості, взаємного розміщення та інших факторів на спряжені електропружні поля та деформівний стан тіл.

Вірогідність отриманих результатів забезпечується строгістю постановок задач і використанням математичних методів, узгодженням отриманих результатів з відомими в літературі.

Практичне значення отриманих результатів полягає в можливості врахувати вплив різних фізико-механічних і геометричних факторів на електромеханічні властивості п'єзокерамічних середовищ з концентраторами напружень; застосувати розроблені аналітичні алгоритми і програмні засоби для їх чисельної реалізації до розрахунків, пов'язаних із проектуванням та оцінкою терміну служби конструкцій, що містять п'єзокерамічні елементи. Побудовані в роботі фундаментальні розв'язки динамічних рівнянь електропружності для складених п'єзокерамічних тіл і функції Гріна для клиноподібних областей можуть бути використані при дослідженні спряжених фізичних полів у кусково-однорідних тілах з дефектами.

Особистий внесок здобувача. Основні результати були отримані автором самостійно. Співавтор робіт [1-9] Л.А.Фильштинський є науковим керівником дисертанта, тому з ним обговорювалися постановки розглянутих задач, здійснювався вибір методів дослідження та аналізувалися отримані результати. У роботі [3] співавтори В.А.Хворост і Л.І.Фоменко брали участь в обговоренні отриманих результатів. У доповіді [10] автору належать результати, що стосуються дослідження особливостей фізичних полів у вершині складеного п'єзокерамічного клина при однорідних граничних умовах на його зовнішніх гранях.

Особисто Т.С. Сушко належать такі розглянуті в дисертаційній роботі і публікаціях наукові результати:

методом сингулярних інтегральних рівнянь побудовані розв'язки статичних і стаціонарних динамічних задач електропружності для випадку антиплоскої деформації складених п'єзокерамічних середовищ, послаблених тунельними дефектами [6, 7, 9];
визначені порядки степеневих особливостей спряжених електропружних полів в околі вершини клина для двох типів однорідних умов на зовнішніх гранях; розглядалися такі області: однорідний п'єзокерамічний клин (плоска деформація) [1], складений п'єзокерамічний клин (плоска й антиплоска деформації) [2, 4, 5, 10];
побудовані функції Гріна, що характеризують спряжені електропружні поля у складеному п'єзокерамічному клині [4, 5];

побудовано фундаментальний розв'язок динамічних рівнянь електропружності, що відповідають антиплоскій деформації складеного п'єзокерамічного простору при дії зосереджених гармонійних джерел [3, 8];

створено комплекси програм для чисельної реалізації, побудованих аналітичних алгоритмів; проведено дослідження з виявленням залежності характеристик статичних і динамічних електропружних полів поблизу концентраторів напружень від зв'язаності полів, типу граничних умов, конфігурації дефектів та ін.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися на VII та VIII Міжнародних симпозиумах "Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики" (м. Феодосія, 1997, 1999 рр.), на Міжнародній конференції з математичного моделювання (м. Херсон, 1998 р.), на Міжнародній науково-практичній конференції "Актуальні проблеми механіки деформівного твердого тіла" (м. Донецьк, 2001 р.), на щорічних науково-технічних конференціях викладачів, співробітників і студентів механіко-математичного факультету Сумського державного університету (м. Суми, 1997-2004 рр.)

Дисертаційна робота в цілому обговорювалася на науковому семінарі "Сучасні проблеми механіки" в Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка (м. Київ, 2003, 2005 рр.), на науковому семінарі кафедри прикладної математики і механіки СумДУ (м. Суми, 2003-2005 рр.).

Публікації. Основні наукові результати дисертації опубліковані у 10 наукових працях [1-10], серед яких 4 статті у наукових журналах, затверджених ВАК України фаховими виданнями в галузі фізико-математичних наук [1-4], стаття у науковому журналі "Механіка композитних матеріалів" (м. Рига) [5], 2 статті в журналі "Вісник СумДУ" [7, 8], та 3 публікації, що містять доповіді на наукових конференціях, симпозиумах [6, 9, 10]. З опублікованих праць 2 статті перекладені англійською мовою та видані у закордонних наукових виданнях [1, 5].

Структура і зміст роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, п'яти розділів, загальних висновків і списку використаної літератури. Загальний обсяг дисертації 180 сторінок, з них 150 сторінок складає основна частина з висновками, 56 рисунків і 9 таблиць, розміщених на 30 сторінках, 224 бібліографічних посилань, розміщених на 20 сторінках.

основний зміст роботи

У **вступі** розкрито сутність і стан наукової проблеми та надано загальну характеристику дисертації.

У **першому розділі** викладено короткий огляд праць, в яких досліджуються проблеми теорії електропружності. Він складається з трьох підрозділів.

У **першому підрозділі** наведені приклади технічних приладів, у яких з успіхом використовується явище п'єзоефекту. Окреслено основні етапи розвитку фундаментальної теорії електропружності. Вагомий внесок у розвиток цього напрямку фізики твердого тіла зробили Д. Берлінкур, В.Т. Грінченко, Г.Жаффе, І.С. Желудев, В.Г. Карнаухов, Д. Керран, І.Ф. Киричок, Б.О. Кудрявцев, Ж. Можен, У.П. Мезон, Дж. Най, В. Новацький, В.З. Партон, А.Ф. Улітко, М.О. Шульга та інші.

У **другому підрозділі** висвітлені роботи попередників у галузі статичних задач електропружності для кусково-однорідних середовищ з дефектами, а також проблем, пов'язаних з дослідженням полів напружень в однорідних і складених клиноподібних тілах. Тут відображені роботи таких авторів, як А.Г. Аветисяна, І.А. Вековищевої, І.І. Воровича, Е.І. Григолюка, М.Г. Грінгауза, А.І.Каландія, С.О. Калоєрова, О.С. Космодам'янського, А.Ф. Кривого, Б.О. Кудрявцева, В.М. Ложкіна, В.В. Панасюка, В.З. Партона, Н.В. Радіолло, М.П. Саврука, А.Ф. Улітка, Л.А. Фильштинського, М.Л. Фильштинського, Г.П. Черепанова, К.С. Чобоняна та ін.

У **третьому підрозділі** розглянуто науковий досвід щодо динамічних проблем електропружності. Дослідження таких задач найбільш важливе з точки зору практичного застосування. Конструктивні процедури для розв'язування цих питань запропонували О.В. Боровков, М.М. Бородачов, І.А. Вікторов, І.А. Гилянський, В.Т. Грінченко, Б.О. Кудрявцев, І.Я. Кучеров, В.З. Партон, В.В. Попов, В.Г. Попов, А.А. Талашов, А.Ф. Улітко, Л.А. Фильштинський, М.Л. Фильштинський, М.О. Шульга та ін.

На підставі наведеного огляду зроблено висновок про доцільність подальшого дослідження зв'язаних електропружних полів у складених п'єзокерамічних тілах.

Другий розділ містить співвідношення, які використовуються надалі у дисертаційній роботі. Тут наведені відомі гіпотези лінійної теорії електропружності, виписані основні рівняння, введені комплексні представлення розв'язків двовимірних задач для двох станів: плоскої та антиплоскої деформацій.

У наступних розділах викладаються результати власних досліджень автора.

У **третьому розділі** розглядається складений п'єзокерамічний простір (біморф), що являє собою два різнорідні півпростори, неперервно скріплені вздовж площини поділу матеріалів $x_2=0$. Вважається, що напрямок попередньої поляризації п'єзокерамічних матеріалів, що складають біморф, паралельний осі Ox_3 , а на площині розділу матеріалів мають місце умови ідеального механічного та електричного контактів. Методом сингулярних інтегральних рівнянь побудовані розв'язки задач про антиплоску деформацію таких тіл за наявності в них тунельних вздовж осі Ox_3 неоднорідностей, розміщених в одному або двох півпросторах одночасно. Визначені розподіли зв'язаних фізичних полів поблизу дефектів залежно від фізичних та геометричних параметрів композиції. При постановці задач вважалось, що на нескінченності задані однорідні поля вектора електричної напруженості $\langle E_1 \rangle$, $\langle E_2^{(1)} \rangle$, $\langle E_2^{(2)} \rangle$ і зусиль зсуву $\langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle$, $\langle \sigma_{13}^{(2)} \rangle$, $\langle \sigma_{23} \rangle$, а поверхні дефектів вільні від сил. Слід зазначити, що задані однорідні фізичні поля не зовсім довільні, між ними існують зв'язки, що випливають з умов спряження фізичних полів на межі поділу матеріалів у нескінченно віддаленій точці.

Усі дослідження, проведені в даному розділі, базуються на комплексних представленнях розв'язків двовимірних граничних задач електропружності, техніці теорії функцій та інтегральних рівнянь.

У **підрозділі 3.1** наведені фундаментальні розв'язки для антиплоскої деформації складеного п'єзокерамічного простору, які визначаються через дві аналітичні функції:

$$F_v^{(1)}(z) = \frac{A_v^{(1)}}{z - z_0} + \sum_{m=1}^2 \frac{\alpha_{v,m}^{(1)} A_m^{(1)}}{z - \bar{z}_0}, \quad F_v^{(2)}(z) = \sum_{m=1}^2 \frac{\alpha_{v+2,m}^{(1)} A_m^{(1)}}{z - z_0}, \quad (1)$$

$$F_v^{(r)}(z) = \frac{A_v^{(r)}}{z - z_r} + \sum_{m=1}^2 \left\{ \frac{\alpha_{v,m}^{(r)} A_m^{(r)}}{z - \bar{z}_r} + \frac{\alpha_{v+2,m}^{(r^*)} A_m^{(r^*)}}{z - z_{r^*}} \right\}, \quad r + r^* = 3 \quad (v, r = 1, 2), \quad (2)$$

де $F_v^{(1)}(z)$ і $F_v^{(2)}(z)$ - функції, що описують спряжені поля у верхній і нижній півплощинах; $A_v^{(r)}$ - силові функціонали, що містять інформацію про прикладені електромеханічні зусилля; безрозмірні величини $\alpha_{v,m}^{(r)}$ знайдені з урахуванням умов на межі поділу матеріалів і цілком визначаються фізичними параметрами компонентів композиції; верхні індекси 1 і 2 свідчать про належність величин відповідним півплощинам.

Функції (1) відповідають випадку дії зсувних зусиль і електричних зарядів інтенсивностей $-p_1$ й p_2 у верхній півплощині в точці $z_0 = x_{10} + ix_{20}$, а (2) дають розв'язок для випадку, коли зосереджені зусилля прикладені одночасно в точці $z_1 = x_1^{(1)} + ix_2^{(1)}$ верхньої півплощини й у $z_2 = x_1^{(2)} + ix_2^{(2)}$ нижньої півплощини.

У **підрозділах 3.2, 3.3** розглянуті граничні задачі про антиплоску деформацію складеного п'єзокерамічного простору, послабленого дефектами типу тунельних порожнин або тріщин в одній із фаз композиції. При розв'язуванні поставлених задач інтегральні представлення шуканих функцій будувалися на основі співвідношень (1). Невідомі щільності визначаються з використанням граничних умов на дефектах:

$$\frac{\partial u_3}{\partial n} = \operatorname{Re}\{e^{i\nu} F_1^{(1)}(\zeta)\} = 0, \quad E_n = -\operatorname{Re}\{e^{i\nu} F_2^{(1)}(\zeta)\} = 0, \quad \zeta \in L, \quad (3)$$

$$\sigma_{3n} = 0, \quad [D_n] = 0, \quad [E_S] = 0, \quad (4)$$

де σ_{n3} , D_n - нормальні компоненти зсувних напружень і вектора електричної індукції; E_S - тангенціальна складова вектора електричної напруженості; u_3 - пружні переміщення точок середовища в напрямку осі Ox_3 ; символ $[\cdot]$ позначає стрибок відповідної величини при переході через контур дефекту L .

Умови (3) ставляться на контурі порожнини, а (4) – на тріщині. З використанням відповідних комплексних представлень польових величин, граничних значень інтеграла типу Коші вихідні граничні задачі зводяться до інтегральних рівнянь, що розв'язуються чисельно з використанням одного з методів механічних квадратур.

На рис. 1, 2 подано розподіли величини $K = \sigma_{33} / \sigma$ (σ - параметр навантаження) вздовж контура кругового у поперечному перерізі отвору ($x_1 = \cos\varphi$, $x_2 = 1, 1 + \sin\varphi$) для композицій PZT-4/ПП-2 та ПП-2/PZT-4 відповідно. Криві 1, 2, 3, 4 належать до варіантів: 1(суцільна лінія) - $\langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle \neq 0$, 2 (суцільна лінія) - $\langle \sigma_{23} \rangle \neq 0$, 3 (пунктир) - $\langle E_1 \rangle \neq 0$, 4 (пунктир) - $\langle E_2^{(1)} \rangle \neq 0$; точками позначені відомі дані для випадку антиплоскої деформації однорідного п'єзокерамічного простору з круговим отвором (криві 1', 2').

Як відомо, у однорідному п'єзокерамічному середовищі при такому типі навантаження п'єзоэффект відсутній і розподіл електропружних полів не залежить від фізичних властивостей матеріалів. З наведених результатів можна зробити висновок про те, що у складеному п'єзокерамічному середовищі в умовах антиплоскої деформації за наявності неоднорідностей поблизу межі поділу матеріалів механічні й електричні поля зв'язані та їх розподіл поблизу концентраторів напружень залежить від електромеханічних властивостей матеріалів, що складають біморф. У роботі наводяться також дослідження розподілу електричних полів. Розглянуто залежність фізичних полів для контурів, поперечні перерізи яких відмінні від кругових (еліпс, "квадрат" із заокругленими кутами).

Рис. 1 Рис. 2

У підрозділі 3.3 отримано вираз для коефіцієнта інтенсивності напружень поздовжнього зсуву K_{III} (5) у вершинах тріщини, досліджується залежність його від різних факторів. Відмічається, що вираз для K_{III} , отриманий в роботі, має той самий вигляд, що і в класичній теорії пружності, відмінність полягає у функціоналах $\Omega(\pm 1)$, що утримують інформацію про фізичні параметри матеріалів складеного простору.

(5)

У **підрозділах 3.4-3.6** розглянуті аналогічні до попередніх задачі про взаємодію дефектів, розміщених у різних півплощинах складеного середовища. При побудові інтегральних представлень тут використовуються фундаментальні розв'язки (2).

Нарешті, у **підрозділі 3.7** розглянута ситуація, коли тунельна порожнина перетинає границю поділу матеріалів. Розв'язки отриманих рівнянь показали задовільні для багатьох практичних цілей результати на контурі отвору, за винятком малих околів точок перетину границі. Ця обставина пов'язана з тим, що при виході дефекту на межу поділу матеріалів або перетинанні її можуть виникнути нерухомі особливості у польових величинах. Це явище необхідно враховувати при аналізі локальних властивостей електропружних полів, а також при оцінці умов руйнування елемента в цілому.

У **четвертому розділі** проводиться дослідження спряжених полів у п'єзокерамічних клинах для різних однорідних граничних умов на зовнішніх гранях. Визначені локальні властивості електропружних полів в околі вершин однорідних чи складених п'єзокерамічних клинів, що перебувають в умовах плоскої або антиплоскої деформації. Для двох типів однорідних граничних умов на зовнішніх гранях складеного п'єзокерамічного клина при антиплоскій деформації такої композиції побудовані функції Гріна.

У **підрозділах 4.1, 4.2** розглянуті питання про порядок степеневих особливостей поблизу вершини складеного п'єзокерамічного клина, що перебуває в умовах антиплоскої деформації. Вивчено такі граничні умови на зовнішніх гранях клина:

грані вільні від зусиль і граничать з вакуумом:

; (6)

грані закріплені і вкриті заземленими електродами:

$$, \quad (7)$$

де верхні індекси 1 і 2 належать до величин, визначених у сполучених уздовж променя $\theta=0$ областях B_1 ($0 \leq \theta \leq \alpha_1$) і B_2 ($-\alpha_2 \leq \theta \leq 0$) відповідно.

За допомогою відповідних комплексних представлень, наведених у розділі 2, вихідні проблеми зводяться до задачі теорії функцій. Шукані функції, аналітичні в областях B_r , можна подати у вигляді

$$, \quad (8)$$

де $A_v^{(r)}$, $B_v^{(r)}$ - відмінні від нуля комплексні сталі величини.

Для їх визначення використовуються умови спряження фізичних полів на межі поділу матеріалів та граничні співвідношення (5) або (6). Умови існування нетривіального розв'язку отриманих однорідних задач дають трансцендентні рівняння щодо параметра γ . Для клина, грані якого вільні (6), маємо

$$, \quad (9)$$

де a , b - безрозмірні сталі, залежні від характеристик матеріалів композиції.

Для граничних умов (7) у рівнянні (9) необхідно величини β_1 і β_2 поміняти місцями.

Характеристичне рівняння (9) допускає аналітичні розв'язки при деяких співвідношеннях кутів α_1 і α_2 . Зокрема, при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ порядок ступеневі особливості $\gamma = 1 - \pi/2\alpha$ ($\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$). У цьому випадку γ не залежить від фізичних констант матеріалів і збігається з відомим результатом для ізотропного клина, причому електропружні поля у вершині клина обмежені при $2\alpha < \pi$. При $\alpha_2 = 2\alpha_1$ корені рівняння (9) залежать від величин $2\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 4b}$. Для деяких композицій матеріалів

виникають ситуації, коли λ_1 і λ_2 комплексні, що призводить до появи ступеневої особливості, посиленої осциляцією. Це явище не має місця для складеного ізотропного клина в умовах антиплоскої деформації. У дисертаційній роботі наведені таблиці з параметрами, що дають повну систему коренів рівняння (9), якими однорідні розв'язки визначаються повністю.

Аналіз даних для граничних умов (6) показує, що ступенева особливість в електропружних полях може виникати і за умови $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha^* < \pi$ в тому випадку, коли менший сектор складеної призми займає матеріал з більшим модулем зсуву, причому максимальний порядок особливості в цьому випадку перевищує $1/2$. У протилежній ситуації спостерігається зворотний ефект. Аналогічний ефект має місце і для умов (7). У таблиці 1 для деяких композицій наведені значення параметра α^* та відповідного йому кута α_1 , які визначають граничні параметри композиції (за умови $\alpha_1 + \alpha_2 > \alpha^*$ електромеханічні польові величини необмежено зростають), а також наведені максимальні порядки особливостей, що виникають при $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$.

Таблиця 1

Значення параметрів α^* , $\text{Re } \gamma_{\max}$ для деяких композицій при $\alpha_2=2\alpha_1$ (грані клина вільні та спрягаються з вакуумом)

Тип композиції	$\frac{\text{ЦТС-19}}{\text{PZT-4}}$	$\frac{\text{PZT-4}}{\text{ЦТС-19}}$	$\frac{\text{PXE-5}}{\text{PP-1}}$	$\frac{\text{PZT-4}}{\text{PP-1}}$	$\frac{\text{PZT-4}}{\text{PP-2}}$	$\frac{\text{PP-1}}{\text{PZT-4}}$
Граничне значення α_1/π	0,336002	0,330648	0,330339	0,333834	0,340375	0,328598
α^*/π	1,008005	0,991943	0,991016	1,001502	1,021125	0,985793
$\text{Re } \gamma_{\max}$	0,495998	0,504029	0,504492	0,499249	0,489437	0,507104

Для довільних співвідношень кутів перші корені рівняння (9) визначені чисельно.

У **підрозділі 4.3** проведено дослідження особливостей фізичних полів у вершині однорідного п'єзокерамічного клина для випадку плоскої деформації. При розв'язанні поставленої задачі, як і у попередніх підрозділах, виходили з комплексних представлень розв'язків для такого стану.

Розглянуто два варіанти однорідних граничних умов:

Грані вільні від зусиль, і зовнішнє середовище асоціюється з вакуумом.

Грані клина закріплені і покриті заземленими електродами.

Отримані характеристичні рівняння для визначення порядку степеневі особливості у вершині клина γ . Графіки зміни величини γ (найближчого до одиниці кореня) залежно від кута розхилу клина $\alpha=2\alpha_1$ наведені на рис. 3. Крива 1 відповідає першому типу граничних умов, крива 2-другому. З цих результатів бачимо, що в розглянутих випадках степенева особливість електропружних полів у вершині п'єзокерамічного клина має місце при куті розхилу $\alpha > \pi$. Це погоджується з теоретичними даними для ізотропного клина, відомими у літературі.

Рис. 3 Рис. 4

Підрозділ 4.4 містить аналогічні результати досліджень для плоскої деформації складеного п'єзокерамічного клина для названих вище двох типів граничних умов на зовнішніх гранях клина. З умови існування нетривіальних розв'язків відповідних однорідних задач отримані трансцендентні рівняння для визначення порядків степеневих особливостей. Найближчі до одиниці корені γ ($\text{Re } \gamma < 1$) знайдені чисельно. Графіки зміни величини $\text{Re } \gamma$ (для першого типу граничних умов) залежно від кута розхилу α_2 при різних значеннях кута α_1 для композиції ЦТС-19/PZT-4 наведені на рис. 4. Криві 1, 2, ..., 10 побудовані для значень $\alpha_1 = \pi/10, 2\pi/10, \dots, \pi$ відповідно.

У **підрозділі 4.5** знову розглянуто складений п'єзокерамічний клин, що перебуває в умовах антиплоскої деформації. Вивчено два основних типи граничних умов на зовнішніх гранях клина (6), (7). Для випадку дії зосереджених зсувних зусиль чи електричних зарядів в одному з компонентів призми будуються розв'язки граничних задач електропружності, що характеризують спряжені електропружні поля у складеному клині. Розв'язування поставлених задач проводиться із застосуванням одновимірного інтегрального перетворення Мелліна. Знайдено вирази для зображень шуканих функцій у загальному вигляді. Для деяких співвідношень кутів розхилу клинів, що складають композицію, зокрема $\alpha_1 = \alpha_2$ і $\alpha_2 = 2\alpha_1$, відповідні функції Гріна записані в явному вигляді. При зворотному перетворенні Мелліна використані результати, отримані раніше.

Наприклад, для граничних умов (7) при $\alpha_1 = \alpha_2$ отримано такі розв'язки:

(10)

У **п'ятому розділі** дисертації проводиться дослідження стаціонарного хвильового процесу у складеному п'єзокерамічному просторі в умовах антиплоскої деформації. В одному з півпросторів (для визначеності у верхньому) уздовж шнура $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, -\infty < x_3 < \infty$ рівномірно розподілені гармонійні за часом зсувні зусилля або електричні заряди інтенсивностей $-p_1$ і p_2 ($p_k = \text{const}$) відповідно. У зазначеній постановці в складеному середовищі виникають зв'язані хвильові

електропружні поля, що відповідають стану антиплоскої деформації в площині x_1Ox_2 . Оскільки хвильовий процес гармонійний (ω - частота коливань), то

$$(11)$$

З урахуванням (11) вихідна проблема зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь у частинних похідних відносно функцій $U^{(r)}(x_1, x_2)$ і $\Phi^{(r)}(x_1, x_2)$. Єдиність розв'язку забезпечується умовами спряження фізичних полів на межі поділу матеріалів. Далі, з використанням одновимірного перетворення Фур'є за координатою x_1 , побудовано фундаментальний розв'язок динамічних рівнянь електропружності. Отримані розв'язки можуть бути застосовані при дослідженні зв'язаних хвильових полів у складених тілах, послаблених тунельними концентраторами напружень.

Рис. 5 Рис. 6

У **підрозділі 5.4** розглянута антиплоска стаціонарна динамічна задача про гармонійні коливання складеного п'єзокерамічного простору, послабленого тунельною порожниною. Гранична задача зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь другого роду. Результати чисельних досліджень наведені на рис. 5, 6 для складеного простору (PZT-4/PP-2), послабленого круговим тунельним отвором ($\zeta(\varphi) = \cos\varphi + i(\sin\varphi + 1.2)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), для випадку, коли на лінії $x_1=0$, $x_2=3$, $-\infty < x_3 < \infty$ рівномірно розподілені гармонійні зсувні зусилля інтенсивності $p_1=1$. На рис. 5 наведено розподіл амплітуди тангенціальної складової механічних напружень $|T|$ вздовж контура отвору для різних значень відносного хвильового числа γR . Криві 1, 2, 3 відповідають значенням $\gamma R=0,01$; $1,0$; $2,0$. Як бачимо з графіків, максимуми напружень відповідають точкам контура отвору $\varphi \approx \pi/3$ та $\varphi \approx 2\pi/3$. На рис. 6 показано поведінку величини $|T|$ залежно від відносного хвильового числа γR в точках $\varphi=0$ (крива 1) та $\varphi=\pi/3$ (крива 2) контура порожнини.

основні результати і Висновки

У дисертаційній роботі розроблені й узагальнені методи розв'язування статичних та стаціонарних динамічних граничних задач електропружності для нескінченних складових п'єзокерамічних тіл (випадок антиплоскої деформації), а також розвинені методи дослідження локальних властивостей електропружних полів в околі вершини складеної й однорідної клиноподібних областей для різних типів механічних і електричних граничних умов на зовнішніх гранях клина.

Основні наукові результати, отримані в роботі, такі:

Методом інтегральних рівнянь побудовані розв'язки двовимірних граничних задач електропружності про антиплоску деформацію складених п'єзокерамічних тіл, що містять концентратори напружень різних типів. З використанням розроблених алгоритмів досліджено вплив зв'язаності електропружних полів на електропружний стан тіл. Отримані результати порівняно з даними для більш простих конфігурацій.

Вперше розглянуто двовимірні сингулярні задачі електропружності про визначення порядків степеневих особливостей у вершинах складених і однорідних п'єзокерамічних клинів, що перебувають в умовах плоскої або антиплоскої деформації. Отримані відповідні характеристичні рівняння. Досліджено їх розв'язки.

Побудовано функції Гріна для антиплоскої деформації складених п'єзокерамічних клинів при двох основних типах однорідних граничних умов на його зовнішніх гранях, що дає можливість розглядати граничні задачі для таких тіл з тунельними концентраторами напружень.

Уперше побудовано фундаментальний розв'язок динамічних рівнянь електропружності, що відповідають гармонійним коливанням складеного п'єзокерамічного простору, який перебуває в умовах антиплоскої деформації. Останній являє собою суму відомого у літературі фундаментального розв'язку для п'єзокерамічного півпростору і доданків, що враховують взаємний вплив різних півпросторів на розподіл спряжених хвильових полів. Отримані результати

дозволяють побудувати інтегральні представлення розв'язків задач про гармонійні коливання кусково-однорідних тіл, що містять концентратори напружень.

Стационарна антиплоска динамічна задача електропружності про гармонійні коливання складеного п'єзокерамічного простору, послабленого тунельною порожниною, зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Проведено чисельні дослідження побудованого аналітичного алгоритму.

Аналіз результатів досліджень дає змогу виявити нові ефекти і закономірності, які можуть бути використані при розрахунках і проектуванні конструкцій з п'єзоелектриків, а також при розробленні нових п'єзокерамічних матеріалів, зокрема, композиційних. Основні висновки полягають у такому: Встановлено, що у складеному п'єзокерамічному середовищі в умовах антиплоскої деформації при наявності неоднорідностей поблизу межі поділу матеріалів механічні й електричні поля зв'язані. Таким чином, у розглянутих конфігураціях має місце прями́й і зворотний п'єзоefекти, які в однорідному середовищі при такому навантаженні не спостерігаються. Як доводять дослідження, на відстані приблизно 3-4 характерних розмірів дефекту від межі поділу матеріалів п'єзоefект стає незначним і його можна не враховувати.

Як відомо, в однорідному середовищі електропружний стан п'єзокерамічного простору з тунельними концентраторами напружень не залежить від фізичних властивостей матеріалів.

Наведені у дисертації дані розрахунків доводять, що на розподіл фізичних полів поблизу неоднорідностей у складеному середовищі істотно впливають властивості матеріалів, а також геометричні параметри композиції.

Доведено, що степенева особливість електропружних полів у вершині однорідного або складеного (при $\alpha_1 = \alpha_2$) п'єзокерамічного клина має місце при куті розхилу клина $\alpha > \pi$. Це погоджується з теоретичними даними для ізотропного клина.

Виявлено новий ефект, який виражається в тому, що для деяких комбінацій матеріалів, що складають клини, виникають ситуації, коли спряжені електропружні поля у вершині клина мають степеневу особливість, посилену осциляцією. Це явище не спостерігається для п'єзопасивного клина в умовах антиплоскої деформації.

Встановлено, що у випадку $\alpha_1 \neq \alpha_2$ для складеного п'єзокерамічного клина степенева особливість у компонентах електропружного поля може виникати при повному куті розхилу клина $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha^* < \pi$, причому максимальний порядок сингулярності у цьому випадку перевищує 1/2. Цей ефект суттєво залежний від фізичних параметрів матеріалів, що складають клин.

Дослідження показали, що наявність двох різнорідних середовищ приводить до перерозподілу хвильових полів поблизу концентратора напружень у порівнянні з однорідним п'єзокерамічним простором, що зумовлено виникненням на межі поділу середовищ додаткових поверхневих хвиль.

список опублікованих праць за темою дисертації

Фильштинский Л.А., Матвиенко Т.С. Об особенностях физических полей в вершине пьезокерамического клина (плоская деформация) //Прикладная механика. – 1999. - Т. 35, №3. - С. 89-92 /Перев. на англ. - Fil'shtinskii L.A., Matvienko T.S. Singularities of physical fields at the apex of a piezoceramic wedge (plane strain) //Int. Appl. Mech. – 1999. – Vol. 35, № 3. – P.301-304.

Фильштинский Л.А., Матвиенко Т.С. О сопряженных электроупругих полях в окрестности вершины составного пьезокерамического клина //Прикладная механика. – 2001. - Т. 37, №1.- С. 100 - 105.

Фильштинский Л.А., Сушко Т.С., Хворост В.А., Фоменко Л.И. Возбуждение составного пьезокерамического пространства сосредоточенными гармоническими источниками //Теоретическая и прикладная механика. – 2001. – Вып. 34. – С. 121-125.

Сушко Т.С., Фильштинский Л.А. Об особенностях физических полей в составном пьезокерамическом клине (антиплоская деформация) //Проблемы машиностроения. – 2000. – Т.3, №3-4. – С. 112-117.

Фильштинский Л.А., Матвиенко Т.С. Исследование сопряженных физических полей в составном пьезокерамическом клине. //Механика композитных материалов. – 1999. –Т. 35, №6. – С. 777-784 /Перев. на англ.- Fil'shtinskii L.A., Matvienko T.S. Investigation of coupled physical fields in a compaund piezoceramic wedge //Mechanics of Composite Materials. – 1999. – Vol. 35, № 6. – P. 507-512.

Фильштинский Л.А., Матвиенко Т.С. Антиплоская деформация составного пьезокерамического пространства с туннельной полостью, пересекающей границу раздела материалов //Сб. трудов Института математики НАН Украины "Нелинейные краевые задачи мат. физики и их приложения". – Киев. - 1998.- С.220-221.

Фильштинский Л.А., Матвиенко Т.С. Антиплоская деформация составного пьезокерамического пространства, ослабленного туннельными полостями //Вісник СумДУ. – 1997. - №1(7). - С. 151-157.

Фильштинский Л.А., Сушко Т.С. Стационарный волновой процесс в составном пьезокерамическом пространстве при действии сосредоточенных источников //Вісник СумДУ. - 2001. - №3(24)-4(25). - С. 181-184.

Фильштинский Л.А., Матвиенко Т.С. Решение основных задач электроупругости для составной пьезокерамической среды с концентраторами напряжений // Труды VII Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" (МДОЗМФ-97). Прикладная математика и математическое моделирование. – Феодосия. - 1997. – С. 195-198.

Гришко Л.П., Матвиенко Т.С., Пташенчук Р.В., Шрамко Ю.В. Некоторые граничные задачи электроупругости для кусочно-однородных пьезокерамических тел //Вестник Херсонского государственного технического университета. - 1999. - Спец. выпуск. Прикладные проблемы математического моделирования. – С. 56-58.

Анотація

Сушко Т.С. Двовимірні статичні та стаціонарні хвильові поля у кусково-однорідних п'єзокерамічних тілах. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, 2005.

Дисертаційну роботу присвячено розв'язанню нових статичних та стаціонарних динамічних граничних задач електропружності для складених п'єзокерамічних тіл.

Методом сингулярних інтегральних рівнянь побудовано розв'язки нових граничних задач електропружності про антиплоску деформацію складених п'єзокерамічних тіл з тунельними дефектами. Встановлено, що у складеному просторі в умовах антиплоскої деформації має місце прямий і зворотний п'єзоефекти.

Розглянуті двовимірні сингулярні задачі електропружності для складених й однорідних клиноподібних областей в умовах плоскої й антиплоскої деформації. Досліджені порядки степеневих особливостей спряжених електропружних полів в околі вершини п'єзокерамічних клинів. Відзначаються випадки комплексного показника сингулярності. Із залученням інтегрального перетворення Мелліна побудовано функції Гріна, що характеризують спряжені електропружні поля у складеному клині під час дії зосереджених зсувних зусиль чи електричних зарядів.

Побудовано фундаментальний розв'язок стаціонарних динамічних рівнянь електропружності для антиплоскої деформації складеного простору. Розглянута гранична задача.

Ключові слова: електропружність, антиплоска деформація, складений п'єзокерамічний простір, фундаментальний розв'язок, сингулярні інтегральні рівняння, клин, сингулярність фізичних полів, функція Гріна, гармонійні коливання.

Аннотация

Сушко Т.С. Двумерные статические и стационарные волновые поля в кусочно-однородных пьезокерамических телах. – Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. - Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев, 2005.

Диссертационная работа посвящена решению новых статических и стационарных динамических граничных задач электроупругости для бесконечных составных пьезокерамических тел (случай антиплоской деформации). Развита методы исследования локальных свойств электроупругих полей в окрестности вершины составной и однородной клиновидной области для различных типов механических и электрических граничных условий на внешних гранях клина.

Метод сингулярных интегральных уравнений развит на задачи электроупругости для составных пьезокерамических тел, ослабленных концентраторами напряжений. Предполагается, что в плоскости раздела материалов имеют место условия идеального механического и электрического контактов, а поверхности дефектов свободны от усилий и граничат с вакуумом. Получены решения новых граничных задач и установлены закономерности распределения сопряженных электроупругих полей в окрестности неоднородностей в зависимости от геометрических параметров, свойств материалов, составляющих композицию, типов механического и электрического нагружения. Рассмотрены различные конфигурации: туннельная полость (трещина) в одном компоненте составной среды, взаимодействие дефектов типа трещин (полостей) в разных фазах, полость, пересекающая границу раздела материалов.

Рассмотрены двумерные сингулярные задачи электроупругости для составных и однородных пьезокерамических клиньев, находящихся в условиях плоской и антиплоской деформации. Получены характеристические уравнения для определения порядков степенных особенностей. Приводятся результаты аналитических и численных исследований.

Построены функции Грина, характеризующие сопряженные электроупругие поля в составном пьезокерамическом клине при действии сосредоточенных сдвигающих усилий или электрических зарядов. Рассмотрены два основных типа однородных граничных условий на внешних гранях клина: грани свободны и сопрягаются с воздухом или грани закреплены и покрыты заземленными электродами. Решение построено с привлечением одномерного интегрального преобразования Меллина. Найдены выражения для изображений по Меллину искомым функций в общем виде. Для некоторых сочетаний углов раствора компонентов составного клина ($\alpha_1 = \alpha_2$ и $\alpha_2 = 2\alpha_1$) выполнено обратное преобразование Меллина и функции Грина записаны в явном виде.

Построено фундаментальное решение динамических уравнений электроупругости, соответствующих гармоническим колебаниям составного пьезокерамического пространства, находящегося в условиях антиплоской деформации. Полученные результаты позволяют построить интегральные представления решений задачи о гармонических колебаниях кусочно-однородного тела, содержащего концентраторы напряжений. Рассмотрена антиплоская стационарная задача электроупругости о взаимодействии цилиндрических волн сдвига с дефектом (туннельная полость) в составной пьезокерамической среде.

При анализе полученных результатов выявлены следующие эффекты:

в составной пьезокерамической среде в условиях антиплоской деформации вблизи границы раздела материалов имеют место прямой и обратный пьезоэффекты, а также напряженно-деформированное состояние в окрестности дефектов зависит от физических свойств компонентов составной среды в отличие от однородной среды, где при таком нагружении указанные эффекты не наблюдаются; степенная особенность электроупругих полей в вершине однородного или составного (при $\alpha_1 = \alpha_2$) пьезокерамического клина имеет место при полном угле раствора клина $\alpha > \pi$;

для некоторых композиций материалов в составном пьезокерамическом клине ($\alpha_1 \neq \alpha_2$) степенная особенность может возникать при полном угле раствора клина $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$ и максимальный порядок особенности в этом случае превышает 1/2;

для некоторых композиций возникают ситуации, когда сопряженные электроупругие поля в вершине клина имеют степенную особенность, усиленную осцилляцией, это явление не имеет места для изотропных материалов в условиях антиплоской деформации.

Ключевые слова: электроупругость, антиплоская деформация, составное пьезокерамическое пространство, фундаментальное решение, сингулярные интегральные уравнения, клин, сингулярность физических полей, функция Грина, гармонические колебания.

Summary

Sushko T.S. Two-dimensional static and stationary wave fields in piecewise homogeneous piezoceramic solids. – Manuscript.

The thesis presented for a Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences by speciality 01.02.04 - mechanics of deformable solids, National Taras Shevchenko University of Kyiv, 2005.

The new antiplane boundary problems of electroelasticity for composite piezoceramic solids with the tunnel defects are solved by the singular integral equations method. The direct and inverse piezoeffect has been observed in composite piezoceramic medium under antiplane strain conditions.

The 2D singular electroelastic problems for compound or uniform piezoceramic wedge under antiplane or plane strain conditions are considered. Singularities of coupled physical fields at the apex of the wedge are investigated for two basic types boundary conditions on its faces. At some relations of the geometric and stiffness parameters of the wedge components, the coupled electroelastic fields have a power-type singularity intensified by oscillations at the wedge top. Such an effect is not observed in the case of piezopassive composite wedges under antiplane strain conditions. The Green's function is constructed for the case of point shearing action of strains or electrical charges in a composite wedge. The appropriate boundary problems with engaging of Mellin's integral transformation are considered.

The fundamental solution of stationary wave problems electroelasticity for compound piezoceramic solids are constructed under antiplane strain conditions. The boundary problem is solved.

Key words: electroelasticity, antiplane strain, compound piezoceramic medium, fundamental solution, singular integral equations, wedge, singularities of physical fields, Green's function, harmonic waves.