ЖУРНАЛ НАНО- ТА ЕЛЕКТРОННОЇ ФІЗИКИ *JOURNAL OF NANO- AND ELECTRONIC PHYSICS*
Том **6** № 1, 01025(7сс) (2014) Vol. **6** No 1, 01025(7pp) (2014)

Контрольоване поверхневою кінетикою визрівання Оствальда пласких включень на межі зерен

О.В. Коропов*

Інститут прикладної фізики НАН України, вул. Петропавлівська, 58, 40000 Суми, Україна

(Одержано 09.04.2013; у відредагованій формі – 22.11.2013; опубліковано online 06.04.2014)

Здійснено аналітичний аналіз визрівання Оствальда (коалесценції) пласких включень другої фази на межі зерен для випадку, коли ріст включень контролюється поверхневою кінетикою. Знайдені асимптотичні характеристики процесу визрівання Оствальда.

Ключові слова: Визрівання Оствальда, Коалесценція, Зародки, Включення другої фази, Атоми домішки, Дифузія, Поверхнева кінетика, Критичний радіус, Пересичення, Функція розподілу включень за розмірами, Густина включень, Коефіцієнт заповнення.

PACS numbers: 61.72. Mm, 61.72.Qq, 64.60.Qb, 66.30. – h, 68.35.Rh, 81.30. – t

1. ВСТУП І ВИХІДНІ РІВНЯННЯ

Визрівання Оствальда (ВО) або коалесценція Оствальда - це останній етап еволюції ансамблю зародків (включень) другої фази в маточному середовищі [1-5]. В основоположних працях з теорії ВО [6, 7] розглядались сферичні включення другої фази в тривимірній бездефектній основі (матриці) і було, зокрема, показано, що урахування закону збереження речовини включень визначає трансформацію довільної початкової функції розподілу за розмірами (ФРР) включень в універсальну ФРР, не залежну від вигляду початкової. Але ця універсальна ФРР відмінна для різних конкретних задач теорії ВО і залежить від діючого механізму масоперенесення і вимірності простору, в якому відбувається процес ВО [2-4, 6, 7]. На цьому етапі монотонно спадає густина включень, а їх об’ємна частка (у випадку тривимірного простору) наближається до сталої величини, оскільки пересичення в системі прямує до нуля.

В подальшому розглядались багато які інші питання теорії ВО: ВО в іонних кристалах і стеклах [8], ВО в колоїдних системах з конвекцією і без неї [9], ВО на поверхні кристала [10-16], ВО в розтопах [17, 18], ВО на дислокаціях [2, 19-22], ВО за умов дислокаційно-матричної дифузії [23-25], ВО частинок окиснів в дисперснозміцнених внутрішньоокиснених металевих стопах [26], ВО в гетероструктурах з квантовими точками при одночасній дії двох різних механізмів росту [16] і інш. [3, 5, 27-37]. Наприклад, в праці [5] розглянуто лімітоване дифузією ВО в бінарному стопі для випадку достатньо великих об’ємних часток другої фази і запропонована модель «близького порядку» ВО з урахуванням кореляції між найближчими частинками, в рамках якої одержані і досліджені розподіли частинок за розмірами.

В цій статті аналізується ВО пласких включень на межі зерен у випадку, коли ріст включень контролюється швидкістю приєднання атомів на боковій поверхні включення і на відміну від праць [38-41], взагалі кажучи, не передбачається, що розмір включень достатньо малий. Представлена робота природно продовжує роботи [42-45].

Загальний вираз для швидкості росту dR/dt плаского включення другої фази, розташованого на межі зерен, одержано в працях [42,43] (див. формулу (20) праці [42]). Якщо ріст включення контролюється поверхневою кінетикою приєднання атомів домішки до включення, а пересичення малі ($\Delta_B << 1$), то

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\beta_B \Gamma_B n_{B\infty} \omega \delta}{h} \left(\frac{1}{R^*} - \frac{1}{R} \right), \tag{1}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\beta_B n_{B\infty} \omega \delta}{h} \left(\Delta_B - \frac{\Gamma_B}{R} \right) \tag{2}$$

або

$$\frac{dR}{dt} = \beta \left(\Delta_B - \frac{\Gamma_B}{R} \right), \tag{3}$$

де

$$\beta \equiv \frac{\beta_B n_{B\infty} \omega \delta}{h}. \tag{4}$$

Тут і далі (якщо не зроблено застереження) всі позначення збігаються з позначеннями робіт [42-45].

Як випливає з формул (16) і (20) роботи [42], ріст, контрольований поверхневою кінетикою, має місце при виконанні нерівності

$$\frac{D_B}{\beta_B L_B} K_1\left(\frac{R}{L_B}\right) >> K_0\left(\frac{R}{L_B}\right). \tag{5}$$

Відзначимо, що нерівність (5) приймає більш простий вигляд у випадках включень малого ($R << L_B$) і великого ($R >> L_B$) розмірів. Саме ріст малого включення контролюється поверхневою кінетикою приєднання атомів домішки до включення при виконанні нерівності

$$D_B/\beta_B >> R \ln(L_B/R), \tag{6}$$

* ipfmail@ipfcentr.sumy.ua

а ріст великого включення при

$$D_B/\beta_B >> L_B \, . \tag{7}$$

В безрозмірних змінних $\rho \equiv R/R_0^* = R\Delta_{BO}/\Gamma_B$ і $t' \equiv t/t_0$, $t_0 \equiv R_0^{*2}/\beta\Gamma_B$ рівняння (3) приймає вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho^2}{2}\right) = \frac{\rho}{x(t)} - 1\, , \tag{8}$$

де штрих при t уже опущений, а $x(t) \equiv R^*(t)/R_0^*$.

ВО включень у розглядуваному випадку описується рівнянням (8) і рівняннями (13), (14), (21) роботи [45].

2. АСИМПТОТИКА КРИТИЧНОГО РАДІУСА ПРИ ВО

Як і в працях [3,6,45], будемо досліджувати асимптотичні (при $t \to \infty$) характеристики ВО. Для цього перейдемо до безрозмірних змінних u, τ:

$$u \equiv \frac{R}{R^*(t)} = \frac{\rho}{\Delta_{B0}}\Delta_B(t)\, , \tag{9}$$

$$\tau \equiv \ln x = \ln\left(\frac{R^*(t)}{R_0^*}\right) = \ln\left(\frac{\Delta_{B0}}{\Delta_B(t)}\right), \tag{10}$$

$$x(\tau) = \exp\tau\, . \tag{11}$$

В цих змінних рівняння (8) зводиться до такого

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{u^2}{2}\right) = \zeta(u-1) - u^2\, , \tag{12}$$

$$\zeta = \zeta(\tau) \equiv \frac{dt}{xdx} = \frac{2dt}{dx^2} > 0\, . \tag{13}$$

Закон збереження речовини (рівняння (21) роботи [45]) запишемо у вигляді

$$\frac{\Delta_{B0}}{Qx(\tau)} + \kappa x^2(\tau)\int\limits_{w_0(\tau)}^{\infty} u^2(w,\tau) f_0(w)\, dw = 1 \tag{14}$$

або

$$1 - \frac{\Delta_{B0}}{Q}\exp(-\tau) = \kappa(\exp 2\tau)\int\limits_{w_0(\tau)}^{\infty} u^2(w,\tau) f_0(w)\, dw\, . \tag{15}$$

Тут $u(w, \tau)$ і $w_0(\tau)$ уводяться саме так, як і в роботі [45].

Існують три варіанти асимптотичної поведінки $\zeta(\tau)$ при $\tau \to \infty$: 1. $\zeta(\tau) \to \infty$,2. $\zeta(\tau) \to \mathrm{const} > 0$, 3. $\zeta(\tau) \to +0$. Зручно розглянути спочатку другу можливість $\zeta(\tau) \to \mathrm{const}$. Нескладний аналіз показує, що в залежності від значення ζ графік швидкості $d(u^2/2)/d\tau$, як функції u, може дотикатися осі абсцис (при $\zeta = \zeta_0 = 4$, абсциса точки дотику $u_0 = 2$), проходити нижче цієї осі (при $\zeta < \zeta_0$), або перетинати вісь абсцис в двох точках u_1 і u_2 (див. рис. 1).

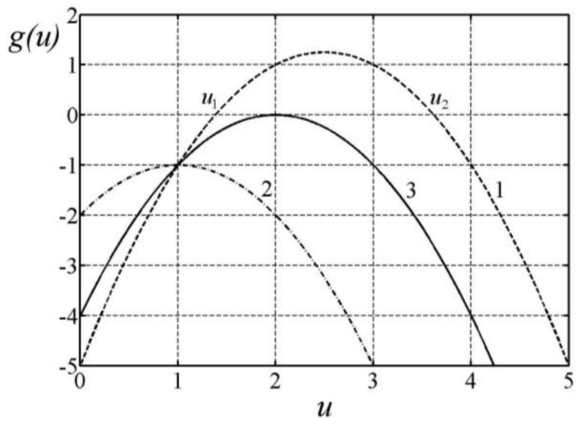

Рис. 1 – Графіки функції $d(u^2/2)/d\tau = g(u)$ для різних значень ζ: 1 – $\zeta > \zeta_0$ ($\zeta = 5$); 2 – $\zeta < \zeta_0$ ($\zeta = 2$); 3 – $\zeta = \zeta_0 = 4$

У випадку $\zeta > \zeta_0$ точки, що належать інтервалу $0 < u < u_1$, рухаються до точки 0 і зникають, досягнувши цієї точки. Інші точки ($u_1 < u < \infty$), асимптотично наближаються до u_2 з двох сторін. Тому інтеграл, що стоїть в правій частині рівняння (15), прямує при $\tau \to \infty$ до сталого значення

$$\int\limits_{w_0(\tau)}^{\infty} u^2(w,\tau) f_0(w)\, dw \xrightarrow[\tau\to\infty]{} I_1\, , \tag{16}$$

$$I_1 \equiv u_2^2 \int\limits_{u_1}^{\infty} f_0(w)\, dw\, , \tag{17}$$

а сама права частина рівняння (15) зростає як $\exp 2\tau$:

$$\kappa(\exp 2\tau)\int\limits_{w_0}^{\infty} u^2(w,\tau) f_0(w)\, dw \xrightarrow[\tau\to\infty]{} \infty\, . \tag{18}$$

Тоді рівняння (15), очевидно, не задовольняється, оскільки його ліва частина при $\tau \to \infty$ прямує до 1.

Якщо урахувати, що значення $\zeta > \zeta_0$ досягається лише асимптотично, то це не змінює зробленого висновку: потрібно тільки змістити початок відліку τ і вираз $f_0(w)$ віднести до того моменту, коли $\zeta(\tau)$ вже близьке до свого асимптотичного значення.

У випадку $\zeta < \zeta_0$ усі точки за скінченний час досягають точки 0 (якщо не ураховувати наявність включень нескінченно великого розміру в початковому розподілі $f_0(w)$). До моменту τ, як випливає з (12), розчиняються всі включення, первісний розмір яких менше $w_0(\tau)$, що визначається з рівняння

$$\int\limits_0^{w_0(\tau)} \frac{udu}{u^2 - \zeta(u-1)} = \tau\, . \tag{19}$$

У випадках $\zeta \to \infty$ і $\zeta \to +0$ при $\tau \to \infty$ аргументація, що викладена відповідно для $\zeta > \zeta_0$ і $\zeta < \zeta_0$, лише посилюється. Тому повинна бути дослідженою лише можливість $\zeta(\tau) \to \zeta_0 = 4$ при $\tau \to \infty$.

Зазначимо,що при точній рівності $\zeta = \zeta_0$ точки, розташовані праворуч від u_0 ($u_0 < u < \infty$), намагаються підійти до точки дотику $u_0 = 2$, але не можуть пройти цю точку (в точці u_0 має місце точна рівність $du/d\tau = 0$). Легко показати, що рівняння (15) не може виконуватись, як і при $\zeta > \zeta_0$.

Тоді функція $\zeta(\tau)$ повинна прямувати до ζ_0 знизу, тобто

$$\zeta(\tau)=\zeta_0\left[1-\varepsilon^2(\tau)\right], \tag{20}$$

$$\varepsilon(\tau)\xrightarrow[\tau\to\infty]{}0 \tag{21}$$

і для визначеності $\varepsilon(\tau)>0$.

З урахуванням (20) рівняння (12) зводиться до наступного

$$u\frac{du}{d\tau}=-(u-2)^2-4\varepsilon^2(\tau)(u-1), \tag{22}$$

а поблизу точки $u_0=2$ ($|u-2|\le\varepsilon(\tau)$), до такого:

$$\frac{du}{d\tau}=-\frac{1}{2}(u-2)^2-2\varepsilon^2(\tau) \tag{23}$$

або

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{dz}{d\tau}=-\frac{1}{2}z^2-2+\eta(\tau)z, \tag{24}$$

$$z\equiv(u-2)/\varepsilon, \qquad \eta(\tau)\equiv\frac{d(1/\varepsilon)}{d\tau}>0. \tag{25}$$

Як і в випадку функції $\zeta=\zeta(\tau)$, при $\tau\to\infty$ $\eta(\tau)\to\eta_0=\text{const}$. Значення $\eta_0=2$ знаходиться з системи рівнянь

$$-\frac{1}{2}z^2-2+\eta z=0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{2}z^2-2+\eta z\right)=0. \tag{27}$$

Тоді при $\tau\to\infty$

$$\frac{d(1/\varepsilon)}{d\tau}\to 2, \quad \varepsilon^2(\tau)\to\frac{1}{4\tau^2}, \tag{28}$$

$$\zeta(\tau)=\zeta_0\left(1-1/4\tau^2\right). \tag{29}$$

Підставляючи (29) в (13) і ураховуючи, що $\tau=\ln x$, одержимо

$$x^2(t)=\frac{t}{2}\left\{1+\frac{1}{\left[\ln(t/2)\right]^2}\right\}. \tag{30}$$

В розмірних змінних

$$R^{*2}=\frac{1}{2}\beta\Gamma_B t\left\{1+\frac{1}{\left[\ln\left(\beta\Gamma_B t/2R_0^{*2}\right)\right]^2}\right\}. \tag{31}$$

Головне наближення дає

$$R^{*2}=\frac{1}{2}\beta\Gamma_B t=\frac{\beta_B\Gamma_B n_{B\infty}\omega\delta}{2h}t, \tag{32}$$

$$\left[\ln\left(\beta\Gamma_B t/2R_0^{*2}\right)\right]^2>>1. \tag{33}$$

Тоді

$$\Delta_B(t)=\left(\frac{2\Gamma_B}{\beta}\right)^{1/2}t^{-1/2}=\left(\frac{2\Gamma_B h}{\beta_B n_{B\infty}\omega\delta}\right)^{1/2}t^{-1/2}. \tag{34}$$

Як випливає з формул (10) і (32),

$$\tau(t)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\beta_B\Gamma_B n_{B\infty}\omega\delta}{2hR_0^{*2}}t\right). \tag{35}$$

3. АСИМПТОТИКА ФРР ПРИ ВО

Для ФРР $\varphi(u,\tau)$ в змінних u, τ мають місце формули (54), (55) роботи[45] і рівняння

$$\frac{\partial\varphi(u,\tau)}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial u}\{v(u)\varphi(u,\tau)\}=0. \tag{36}$$

Поза околом точки $u_0=2$ ($|u-2|\ge\varepsilon(\tau)$):

$$v(u)=\frac{du}{d\tau}=-\frac{(u-2)^2}{u}. \tag{37}$$

ФРР $\varphi(u,\tau)$ при $\tau\to\infty$ наступна:

$$\varphi(u,\tau)=\frac{\phi(\tau-\tau(u))}{-v(u)}, \quad u<u_0, \tag{38}$$

$$\varphi(u,\tau)=0, \quad u\ge u_0. \tag{39}$$

В формулі (38)

$$\tau(u)\equiv\int_0^u\frac{du'}{v(u')}=-\ln(2-u)-\frac{2}{2-u}+\ln 2e, \tag{40}$$

а ϕ знаходиться далі.

Як і в роботах [6, 45] ФРР при $u>u_0$ (поза околом точки u_0) прямує при $\tau\to\infty$ до нуля. Як показано в Додатку, інтегральний внесок від околу точки u_0 також прямує до нуля при $\tau\to\infty$.

Для довільних значень «часу» τ закон збереження речовини (15) запишеться у вигляді

$$1-\frac{\Delta_{B0}}{Q}\exp(-\tau)=\kappa(\exp 2\tau)\int_0^\infty\varphi(u,\tau)u^2du, \tag{41}$$

при $\tau\to\infty$

$$1=\kappa(\exp 2\tau)\int_0^{u_0}\phi(\tau-\tau(u))\left(\frac{u^2}{-v(u)}\right)du. \tag{42}$$

Тоді

$$\phi(\tau-\tau(u))=A\exp(-2\tau+2\tau(u)), \tag{43}$$

а сама функція $\varphi(u,\tau)$ при $u<u_0$ така:

$$\varphi(u,\tau)=A\frac{\exp(-2\tau+2\tau(u))}{-v(u)}, \tag{44}$$

$$\varphi(u,\tau)=A\exp(-2\tau)\frac{4e^2u\exp\left[-4/(2-u)\right]}{(2-u)^4}. \tag{45}$$

Представимо $\varphi(u, \tau)$ у вигляді

$$\varphi(u,\tau)=\frac{A}{2}\exp(-2\tau)P(u). \qquad (46)$$

Тут $P(u) \equiv -2\exp[2\tau(u)]/v(u)$, $u < u_0$,

$$P(u)=\frac{8e^2u\exp\left[-4/(2-u)\right]}{(2-u)^4},\ 0\le u<2, \qquad (47)$$

$$P(u)=0, \quad 2\le u<\infty. \qquad (48)$$

Перевіряємо нормування функції $P(u)$:

$$\int_0^{u_0}P(u)du=-\int_{u=0}^{u=u_0-0}\frac{2du}{v(u)}\exp\left(\int_0^u\frac{2du'}{v(u')}\right), \qquad (49)$$

$$\int_0^{u_0}P(u)du=-\int_0^{-\infty}ds\exp s=1. \qquad (50)$$

Графік густини ймовірності $P(u)$ зображений на рис.2 (крива 4).

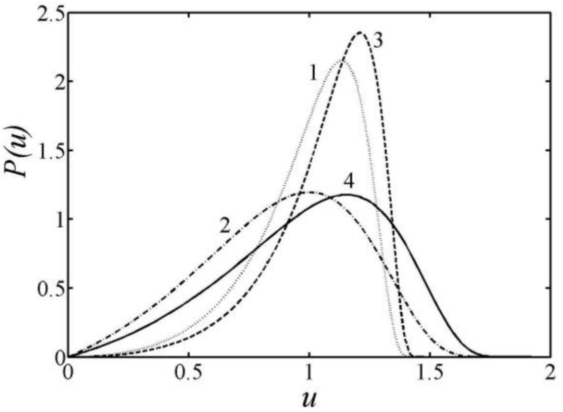

Рис. 2 – Деякі функції $P(u)$, одержані в теорії ВО: 1 – праця [6]; 2 – праця [7]; 3 – праця [45]; 4 – дана робота

З формули (47) видно, що при $u\to 0$ $P(u)\cong u/2\to 0$. Якщо ж $u\to 2-0$, то впроваджуючи позначення $y\equiv(2-u)^{-1}$, одержимо $P\cong 16\, e^2y^4\exp(-4\,y)\to 0$, оскільки $y\to+\infty$ при $u\to 2-0$.

Стала A в формулах (43)-(46) дорівнює

$$A=2\left(\kappa\overline{u^2}\right)^{-1}, \qquad (51)$$

$$\overline{u^2}=\int_0^{u_0}u^2P(u)du\approx 1.1094. \qquad (52)$$

Густина включень

$$N(\tau)=\int_0^{u_0}\varphi(u,\tau)du=\frac{A}{2}\exp(-2\tau), \qquad (53)$$

$$N(t)=\frac{A}{2}\left(\frac{R_0^*}{R^*(t)}\right)^2=\frac{AR_0^{*2}h}{\beta_B\Gamma_Bn_{B\infty}\omega\delta t}. \qquad (54)$$

Знайдемо далі середнє (за розподілом (47), (48)) значення $\bar{u}$. Для цього розглянемо інтеграл

$$I=\int_0^{u_0}P(u)(u-1)du, \qquad (55)$$

$$I=-\int_{u=0}^{u=u_0-0}\frac{2du}{v(u)}\left[\exp\left(\int_0^u\frac{2du'}{v(u')}\right)\right](u-1), \qquad (56)$$

який після відповідної заміни змінної інтегрування приймає вигляд

$$I=2\int_{-\infty}^0d\tau(\exp 2\tau)\left[u(\tau)-1\right]. \qquad (57)$$

Підстановка $(u(\tau)-1)$ з рівняння (12) в (57) дає

$$I=\frac{2}{\zeta_0}\int_{-\infty}^0d\tau(\exp 2\tau)\left(\frac{1}{2}\frac{du^2(\tau)}{d\tau}+u^2(\tau)\right), \qquad (58)$$

$$I=\frac{1}{\zeta_0}\int_{-\infty}^0d\tau\frac{d}{d\tau}\left[u^2(\tau)\exp 2\tau\right] \qquad (59)$$

і, остаточно,

$$I=\frac{1}{\zeta_0}u^2(\tau)\exp 2\tau\Big|_{-\infty}^0=0. \qquad (60)$$

Тут ми скористались тим, що (див. формули (37), (40))

$$\tau(u)\equiv\int_0^u\frac{du'}{v(u')}=-\int_0^u\frac{du'\cdot u'}{(u'-u_0)^2}, \qquad (61)$$

де $0\le u<u_0$. З формули (61) видно, що $\tau(u)=0$ тільки при $u=0$. Тоді $u(\tau)\big|_{\tau=0}=0$.

Таким чином,

$$\bar{u}=\int_0^{u_0}uP(u)du=\int_0^{u_0}P(u)du=1. \qquad (62)$$

Зазначимо, що чисельне знаходження величини $\bar{u}$ дає: $\bar{u}\approx 1.0000$.

Оскільки $\bar{u}=\bar{R}/R^*$ ($\bar{R}=\bar{R}(t)$ – середній радіус включення), то при $t\to\infty$

$$\bar{R}(t)=R^*(t). \qquad (63)$$

ФРР в змінних R, t при $t\to\infty$ така:

$$f(R,t)=\frac{N(t)}{\bar{R}(t)}P\left(\frac{R}{\bar{R}(t)}\right). \qquad (64)$$

Коефіцієнт заповнення межі зерен включеннями такий:

$$Z(t)=\pi\left[R^*(t)\right]^2\int_0^\infty u^2\varphi du=\pi\left[R^*(t)\right]^2N(t)\overline{u^2}. \qquad (65)$$

З урахуванням формул (51) і (54) одержимо

$$Z=\left(\frac{\pi}{2}\right)AR_0^{*2}\overline{u^2}=\frac{\pi R_0^{*2}}{\kappa}. \qquad (66)$$

Остаточно для Z нескладно дістати формулу (83) роботи [45]. Цей збіг не випадковий. По суті, асимптотичне значення Z визначається законом збереження речовини в системі і не залежить від діючого механізму масоперенесення (див. роботу [45]).

Як видно з формул (10), (29), у цьому розгляді припускається виконання нерівності $1/4\tau^2 << 1$, тобто

$$4\tau^2 = 4\left(\ln x\right)^2 = 4\left(\ln\frac{R^*(t)}{R_0^*}\right)^2 >> 1 . \qquad (67)$$

Чисельне оцінювання дає:

$$4\left(\ln\frac{R^*(t)}{R_0^*}\right)^2 \geq 10 , \quad \ln\frac{R^*(t)}{R_0^*} \geq \left(\frac{5}{2}\right)^{1/2} , \qquad (68)$$

$R^*(t)/R_0^* \geq 4.8605$. Зазначимо також, що після деякого початкового етапу еволюції системи середній розмір включення стає порядку критичного. Саме цей момент часу і обирається в якості початкового $t = 0$ в наведених вище оцінках.

Зазначимо, нарешті, що одержані в роботі формули з невеликими змінами придатні і для опису кінетики ВО пласких включень достатньо великого радіуса ($R >> L_B$) при довільному значенні D_B/β_B. В останньому випадку

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\bar{D}_B\omega\delta}{hL_B}\Delta n_{BR} , \qquad (69)$$

де

$$\bar{D}_B \equiv \frac{D_B\beta_B L_B}{D_B + \beta_B L_B} \qquad (70)$$

– ефективний коефіцієнт дифузії (формули (23), (24) роботи [42]). За малих пересичень

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\bar{D}_B n_{B\infty}\omega\delta}{hL_B}\left(\Delta_B - \frac{\Gamma_B}{R}\right) . \qquad (71)$$

Формула (71) формально випливає з (2) заміною β_B на $\bar{D}_B/L_B$, а двоє інших рівнянь кінетики ВО, а саме рівняння (14) і (21) роботи [45], залишаються в силі. Тоді і всі одержані асимптотичні розв'язки залишаються в силі після заміни β_B на $\bar{D}_B/L_B$ в формулах (31)-(35), (54).

4. ВИСНОВОК

Підведемо підсумок. В даній роботі аналітично проаналізовано ВО пласких включень чужорідної фази на межі зерен із скінченною шириною δ. Розглянуто випадок, коли швидкість росту включень визначається кінетикою приєднання чужорідних атомів, яка описується феноменологічним поверхневим кінетичним коефіцієнтом β_B або ж коефіцієнтом β (формула(4)). З'ясовано, що такий ріст реалізується при виконанні нерівності $(D_B/\beta_B L_B)K_1(R/L_B) >> K_0(R/L_B)$.

Одержані асимптотичні характеристики процесу ВО, такі як ФРР включень, густина включень і інш.

Показано, що одержані в роботі формули з невеликими змінами придатні для опису ВО пласких включень достатньо великого радіуса ($R >> L_B$) для довільного відношення D_B/β_B. Власне всі одержані асимптотичні розв'язки залишаються в силі після заміни β_B на $\bar{D}_B/L_B$ у виразах (31)-(35), (54).

ДОДАТОК

Покажемо, що інтегральний внесок від околу точки u_0 нехтовно малий при $\tau \to \infty$. Нехай q – об'єм речовини в включеннях на одиниці площі межі зерен,

$$q = \pi h R_0^{*2}\int_0^\infty \rho^2 f(\rho,t)d\rho = \pi h R_0^{*2}x^2(\tau)\int_0^\infty u^2\varphi(u,\tau)du . \qquad (72)$$

Будемо розглядати ξ-окіл точки u_0:

$$u_0 - \xi < u < u_0 + \xi , \qquad (73)$$

де величина ξ задовольняє нерівностям

$$\varepsilon(\tau) << \xi << 1 . \qquad (74)$$

Об'єм речовини q, який приходиться на ξ-окіл точки u_0 (73), дорівнює

$$q_\xi(\tau) = \pi h R_0^{*2}x^2(\tau)\int_{u_0-\xi}^{u_0+\xi} u^2\varphi(u,\tau)du , \qquad (75)$$

$$q_\xi(\tau) \cong \pi h R_0^{*2}u_0^2(\exp 2\tau)\int_{u_0-\xi}^{u_0+\xi}\varphi(u,\tau)du . \qquad (76)$$

Величину $q_\xi(\tau)$ можна представити у вигляді

$$q_\xi(\tau) = \pi h R_0^{*2}u_0^2(\exp 2\tau)N_\xi(\tau) , \qquad (77)$$

де

$$N_\xi(\tau) = \int_{u_0-\xi}^{u_0+\xi}\varphi(u,\tau)du . \qquad (78)$$

Інтегруючи кінетичне рівняння (36) по u в границях від $u_0 - \xi$ до $u_0 + \xi$,одержимо

$$\frac{dN_\xi(\tau)}{d\tau} = -\varphi(u,\tau)\upsilon(u)\Big|_{u_0-\xi}^{u_0+\xi} . \qquad (79)$$

В формулі (79) потік праворуч від точки u_0 ($u = u_0 + \xi$) визначається при $\tau \to \infty$ нескінченно віддаленим «хвостом» початкового (при $\tau = 0$) розподілу і тому ним можна нехтувати. Тоді з урахуванням формул (38), (43) маємо

$$\frac{dN_\xi(\tau)}{d\tau} = -\phi\left(\tau - \tau(u_0 - \xi)\right) , \qquad (80)$$

$$\frac{dN_\xi(\tau)}{d\tau} = -A\left[\exp(-2\tau)\right]\exp\left[2\tau(u_0 - \xi)\right] . \qquad (81)$$

Урахування явного вигляду функції $\tau(u)$ (формула (40)) дає

$$\frac{dN_\xi(\tau)}{d\tau} = -A\left[\exp(-2\tau)\right]\exp\left(-\frac{4}{\xi}\right) , \qquad (82)$$

$$N_{\xi}(\tau)=\frac{A}{2}\left[\exp(-2\tau)\right]\exp\left(-\frac{4}{\xi}\right)+B. \qquad (83)$$

Значення $q_{\xi}(\tau)$ згідно із формулами (77), (83) дорівнює

$$q_{\xi}(\tau)=\pi h R_0^{*2}u_0^2\left[\frac{A}{2}\exp\left(-\frac{4}{\xi}\right)+B\exp(2\tau)\right]. \qquad (84)$$

Очевидно, що $B=0$, тому що величина $q_{\xi}(\tau)$ явно обмежена при $\tau\to\infty$.

В остаточному підсумку

$$q_{\xi}=\frac{\pi}{2}AhR_0^{*2}u_0^2\exp\left(-\frac{4}{\xi}\right)\xrightarrow[\xi\to 0]{}0. \qquad (85)$$

Контролируемое поверхностной кинетикой созревание Оствальда плоских включений на границе зерен

А.В. Коропов

Институт прикладной физики НАН Украины, ул. Петропавловская, 58, 40000 Сумы, Украина

Проведен аналитический анализ созревания Оствальда (коалесценции) плоских включений второй фазы на границе зерен в случае, когда рост включений контролируется поверхностной кинетикой. Найдены асимптотические характеристики процесса созревания Оствальда.

Ключевые слова: Созревание Оствальда, Коалесценция, Зародыши, Включения второй фазы, Атомы примеси, Диффузия, Поверхностная кинетика, Критический радиус, Пересыщение, Функция распределения включений по размерам, Плотность включений, Коэффициент заполнения.

Surface-Kinetics-Controlled Ostwald Ripening of Plane Precipitates at Grain Boundaries

A.V. Koropov

Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 58, Petropavlivska Str., 40000 Sumy, Ukraine

Ostwald ripening (coarsening) of plane precipitates was analytically analyzed at a grain boundary for the case when the precipitates growth is controlled by surface kinetics. Asymptotic characteristics of Ostwald ripening are found.

Keywords: Ostwald Ripening, Coarsening, Nuclei, Precipitates, Impurity Atoms, Diffusion, Surface Kinetics, Critical Radius, Supersaturation, Precipitate Size Distribution Function, Precipitate Density, Factor of Filling.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. W. Ostwald, *Zs. Phys. Chem.* **34**, 495 (1900).
2. R.D. Vengrenovitch, *Acta Metall.* **30**, 1079 (1982).
3. В.В. Слезов, В.В. Сагалович, *УФН* **151** No1, 67 (1987) (V.V. Slezov, V.V. Sagalovich, *Sov. Phys. Usp.* **30**, 23 (1987)).
4. К.В. Чуистов, *Упорядочение и распад в пересыщенных твердых растворах* (Киев: РИО ИМФ: 1999).
5. A.M. Gusak, G.V. Lutsenko, *Ukr. J. Phys.* **50** No 5, 512 (2005).
6. I.M. Lifshitz, V.V. Slyozov, *J. Phys. Chem. Solids* **19**, 35 (1961).
7. C. Wagner, *Zs. Elektrochem.* **65**, 581 (1961).
8. S.C. Jain, A.E. Hughes, *J. Mater. Sci.* **13**, 1611 (1978).
9. M. Kahlweit, *Adv. Colloid Interface Sci.* **5**, 1 (1975).
10. С.А. Кукушкин, А.В. Осипов, *УФН* **168**, 1083 (1998) (S.A. Kukushkin, A.V. Osipov, *Phys. Usp.* **41**, 983 (1998)).
11. А.В. Коропов, В.В. Сагалович, *Поверхность. Физика, химия, механика* No**6**, 50 (1987).
12. А.В. Коропов, В.В. Сагалович, *Поверхность. Физика, химия, механика* No**5**, 55 (1989).
13. А.В. Коропов, В.В. Сагалович, *Поверхность. Физика, химия, механика* No**2**, 17 (1990).
14. А.В. Коропов, П.Н. Остапчук, В.В. Слезов, *ФТТ* **33**, 2835 (1991) (A.V. Koropov, P.N. Ostapchuk, V.V. Slezov, *Sov. Phys. Solid State* **33**, 1602 (1991)).
15. Р.Д. Венгренович, Б.В. Іванський, А.В. Москалюк, *УФЖ* **53** No11, 1101 (2008). (R.D. Vengrenovich, B.V. Ivanskyi, A.V. Moskalyuk, *Ukr. J. Phys.* **53** No11, 1101 (2008)).
16. Р.Д. Венгренович, Б.В. Іванський, А.В. Москалюк, *ФХТТ* **10** No1, 19 (2009).
17. A.V. Koropov, S.A. Kukushkin, D.A. Grigoriev, *First International Workshop "Nucleation and Non-Linear Problems in the First-Order Phase Transitions (NPT'98). Final Programme & Book of Abstracts,* 26 (St.Petersburg: IPME RAS: 1998).
18. А.В. Коропов, С.А. Кукушкин, Д.А. Григорьев, *ЖТФ* **69** No7, 53 (1999) (A.V. Koropov, S.A. Kukushkin, D.A. Grigor'ev, *Tech. Phys.* **44**, 786 (1999)).
19. H. Kreye, *Zs. Metallkunde* **61**, 108 (1970).
20. A.J. Ardell, *Acta Metall.* **20**, 601 (1972).
21. Р.Д. Венгренович, *ФММ* **39**, 436 (1975).
22. Р.Д. Венгренович, Ю.В. Гудыма, С.В. Ярема, *ФММ* **91** № 3, 16 (2001) (R.D. Vengrenovich, Yu.V. Gudyma, S.V.Yarema, *Phys. Met. Metallogr.* **91**, 228 (2001)).
23. Р.Д. Венгренович, *Доповіді Національної академії наук України* No**1**, 112 (1998).
24. Р.Д. Венгренович, А.Л. Ковалик, С.В. Фоглинский, *Известия высших учебных заведений. Физика* No**10**, 25 (1998).
25. Р.Д. Венгренович, А.В. Москалюк,С.В. Ярема, *ФТТ* **49**, 13 (2007) (R.D. Vengrenovich, A.V. Moskalyuk, S.V. Yarema, *Phys. Solid State* **49**, 11 (2007)).

26. Е.П. Данелия, В.М. Розенберг, *Внутреннеокисленные сплавы* (Москва: Металлургия: 1978).
27. H.O.K. Kirchner, *Metall. Trans.* **2**, 2861 (1971).
28. Дж. Мартин, Р. Доэрти, *Стабильность микроструктуры металлических систем* (Москва: Атомиздат: 1978) (J.W. Martin, R.D. Doherty, *Stability of Microstructure in Metallic Systems* (Cambridge: Cambridge University Press: 1976)).
29. S.K. Bhattacharyya, K.C. Russell, *Metall. Trans.* **3**, 2195 (1972).
30. A.J. Markworth, *Metall. Trans.* **4**, 2651 (1973).
31. P. Guyot, L. Lae, C. Sigli, *Thermodynamics, Microstructures and Plasticity,* 107 (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers: 2003).
32. A. Onuki, *Phase Transition Dynamics* (Cambridge: Cambridge University Press: 2004).
33. А.М. Гусак, Г.В. Луценко, *Металлофиз. новейшие технол.* **25**, 381 (2003). (A.M. Gusak, G.V. Lutsenko, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.* **25**, 381 (2003)).
34. А.М. Гусак, К.Н. Ту, *Вісник Черкаського університету. Серія "Фізико-математичні науки»* Вип.**62**, 131 (2004).
35. A.M. Gusak, G.V. Lutsenko, *Phil. Mag.* **85** No12, 1323 (2005).
36. A.M. Gusak, G.V. Lutsenko, K.N. Tu, *Acta Mater.* **54** No3, 785 (2006).
37. А.М. Гусак, К.Н. Ту, Т.В. Запорожець, *Металлофиз. новейшие технол.* **31**, 1 (2009) (A.M. Gusak, K.N. Tu, T.V. Zaporozhets, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.* **31**, 1 (2009)).
38. А.В. Коропов, В.Г. Шаповал, *Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка* № 10 (56), 5 (2003).
39. А.В. Коропов, *Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка* № 9(93), 49 (2006).
40. А.В. Коропов, *ФТТ* **50**, 2093 (2008) (A.V. Koropov, *Phys. Solid State* **50**, 2184 (2008)).
41. А.В. Коропов, *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования* No**8**, 79 (2011) (A.V. Koropov, *J. Surf. Investigation, X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, **5** No4, 780 (2011)).
42. А.В. Коропов, *Ж. нано- електрон.фіз.* **2** No4, 31 (2010) (A.V. Koropov, *J. Nano- Electron. Phys.* **2** No4, 117 (2010)).
43. А.В. Коропов, *ЖТФ* **81** No12, 83 (2011) (A.V. Koropov, *Tech. Phys.* **56**, 1781 (2011)).
44. А.В. Коропов, *Чотирнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. Матеріали конф. Т.1,* 245 (Київ: НТУУ «КПІ»: 2012).
45. О.В. Коропов, *Ж. нано- електрон. фіз.* **4** No3, 03013 (2012).