

PACS numbers: 05.70.Fh, 05.40. – а, 05.10.Gg

ДИНАМИКА НЕРАВНОВЕСНЫХ ПЕРЕХОДОВ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ВЗАИМНО КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ШУМАМИ: ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

А.Н. Витренко, И.А. Князь, В.С. Будённый, Д.О. Литвиненко

Сумский государственный университет,
ул. Римского-Корсакова, 2, 40007, Сумы, Украина
E-mail: vitrenko_andrei@mail.ru

Рассматривается динамическая система, описываемая уравнением Ланжевена с двумя взаимно коррелированными гауссовскими белыми шумами. Численными методами вычисляется неравновесная плотность вероятности системы. Определяется время при различных значениях управляющего параметра, за которое первоначально унимодальное распределение изменяется в бимодальное. Демонстрируется критическое замедление в динамике перехода.

Ключевые слова: УРАВНЕНИЕ ЛАНЖЕВЕНА, ВЗАИМНО КОРРЕЛИРОВАННЫЕ БЕЛЫЕ ШУМЫ, МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО, ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ ПЕРЕХОДЫ.

(Получено 02.09.2010, в отредактированной форме – 30.09.2010)

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейность и шум могут приводить физические и другой природы системы к упорядочению. Примерами явлений служат: стохастический резонанс [1], направленный транспорт [2], индуцированные шумом неравновесные переходы [3], и др. Последние могут наблюдаться в сильно неравновесных открытых системах, взаимодействующих с флуктуирующей окружающей средой. Сильная неравновесность приводит к нелинейности соответствующих динамических уравнений системы, эффект флуктуирующей среды в которых учитывается посредством шума с заданными статистическими характеристиками.

К неравновесным переходам, индуцированным шумом, относится так называемый унимодальный-бимодальный переход. Он имеет место, если стационарная плотность вероятности системы из функции с одним максимумом плавно видоизменяется в функцию с двумя максимумами при плавном увеличении интенсивности шума выше критического значения. При этом максимумы плотности вероятности соответствуют фазам системы, точки максимума – параметру порядка, а интенсивность шума – управляющему параметру. Т.е. указанный переход напоминает классические фазовые переходы и имеет некоторые их особенности, а именно: критические показатели, критическое замедление [3].

Для систем микро- и наномасштаба значительными являются не только внешние флуктуации, но и внутренние, вызванные тепловым движением структурных элементов системы. Их совместное влияние на систему может быть учтено посредством двух взаимно коррелированных шумов с известными статистическими характеристиками. В работе [4] в прибли-

жении двух гауссовских белых шумов исследуется сравнительно простая динамическая система. Находится точное выражение для равновесной плотности вероятности системы; показывается, что благодаря взаимной корреляции шумы могут индуцировать унимодальный-бимодальный переход, причем каждый шум в отдельности или же некоррелированные шумы такой переход вызывать не могут. Также вычисляется критический показатель для зависимости параметров порядка от управляющих параметров, который равен своему классическому значению. В данной работе для указанной динамической системы численными методами найдена неравновесная плотность вероятности, с помощью которой исследуется динамика неравновесного перехода, индуцированного взаимно коррелированными шумами, вблизи критической точки.

2. МОДЕЛЬ

Рассматривается динамическая система, описываемая одним параметром состояния, который зависит только от времени. Обезразмеренное уравнение Ланжевена в исчислении Стратоновича имеет вид [4]

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sigma_1 g(x(t)) \xi_1(t) + \sigma_2 \xi_2(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ – параметр состояния системы, $x(0) = 0$; точка – производная по времени; $f(x)$ – детерминированная сила; $g(x)$ – амплитуда флуктуаций мультипликативного шума; $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – гауссовские белые шумы с нулевыми средними значениями, интенсивностями σ_1^2 и σ_2^2 , и корреляционными функциями:

$$\langle \xi_i(t) \xi_i(t') \rangle = \delta(t - t') \quad (i = 1, 2), \quad \langle \xi_1(t) \xi_2(t') \rangle = r \delta(t - t');$$

угловые скобки – усреднение по ансамблю реализаций шумов; r – коэффициент взаимной корреляции шумов, $|r| \leq 1$; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

Уравнение (1) может описывать, например, неравновесные процессы в балластном резисторе [5], направленный транспорт броуновских частиц [6], стохастический резонанс в нелинейном ротаторе (при условии, что функция f также явно зависит от времени) [7], и другие физические процессы, в которых взаимная корреляция шумов играет важную роль [4] (и ссылки в этой статье). В дальнейшем примем, что $f(x) = -ax$, т.е. детерминированная сила является линейной восстанавливающей с параметром a ($a > 0$); $g(x) = -x^2/(1+x^2)$, амплитуда флуктуаций в окрестности нуля (точки устойчивого равновесия в детерминированной динамике) является квадратичной, а для больших x – постоянной. Именно в этом случае система, описываемая уравнением (1), демонстрирует неравновесный переход, индуцированный взаимно коррелированными шумами, как и было показано в [4]. Выражение равновесной плотности вероятности имеет вид

$$p(x) = C \left[\left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^2 + 2rv \frac{x^2}{1+x^2} + v^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{a}{\sigma_1^2} \int_0^x \frac{dz}{\left(\frac{z}{1+z} \right)^2 + 2rv \frac{z}{1+z} + v^2} \right], \quad (2)$$

где C – константа нормировки, $\nu = -\sigma_2/\sigma_1$. Критические параметры, определяющие условие неравновесных переходов, определяются из уравнения: $r\sigma_1\sigma_2 = a$.

3. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

В основе алгоритма численного эксперимента лежит метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) [8].

Используем уравнение Фоккера-Планка [4] и запишем уравнение Ланжевена в исчислении Ито, статистически эквивалентное уравнению Ланжевена (1) в исчислении Стратоновича:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \frac{\sigma_1^2}{2} g(x(t))g'(x(t)) + \frac{r}{2} \sigma_1\sigma_2 g'(x(t)) + \sigma_1 g(x(t))\xi_1(t) + \sigma_2 \xi_2(t),$$

где штрих – производная по координате. Применим к нему метод Эйлера [9], разностная схема для уравнения (1) примет вид

$$x_{i+1} = x_i + \left[f(x_i) + \frac{\sigma_1^2}{2} g(x_i)g'(x_i) + \frac{r}{2} \sigma_1\sigma_2 g'(x_i) \right] \Delta t + \sigma_1 g(x_i) \Delta W_{1i} + \sigma_2 \Delta W_{2i}, \quad (3)$$

где Δt – шаг дискретизации по времени, $t_{i+1} = t_i + \Delta t$; ΔW_{1i} и ΔW_{2i} – приращения винеровских процессов, значения которых получаются по формулам: $\Delta W_{1i} = \xi_{1i} \sqrt{\Delta t}$ и $\Delta W_{2i} = \xi_{2i} \sqrt{\Delta t}$. Здесь ξ_{1i} и ξ_{2i} – взаимно коррелированные случайные величины с коэффициентом корреляции r , распределенные по нормальному закону с нулевым средним значением и единичной дисперсией. Для генерирования коррелированных значений этой пары величин используем формулу [10]:

$$\xi_{2i} = r\xi_{1i} + \sqrt{1-r^2}\xi_i,$$

где ξ_{1i} и ξ_i – уже независимые гауссовские величины, вырабатываемые библиотечными функциями программного обеспечения.

Разностная схема (3) применяется для нахождения N выборочных реализаций параметра состояния системы $x(t)$ на временном интервале $[0, t_m]$. Они используются для вычисления неравновесной плотности вероятности системы $p(x, t)$ по формуле:

$$p(x_j, t_i) = \frac{N_j}{N\Delta x}, \quad (4)$$

где N_j – число реализаций, которые в момент времени t_i попадают в интервал $[x_j, x_j + \Delta x)$; Δx – шаг дискретизации по координате. Эту формулу также можно использовать для нахождения равновесной плотности вероятности $p(x)$, которая определяется для момента времени t_m . Причем должно выполняться условие: $t_m \gg a^{-1}$, где a^{-1} – время релаксации системы.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Численный эксперимент проводится при следующих фиксированных значениях параметров системы: коэффициент линейной восстанавливающей силы, $a = 1$; интенсивность аддитивного шума, $\sigma_2^2 = 4$; коэффициент взаимной корреляции, $r = 0,9$. Варьируется интенсивность σ_1^2 мультипликативного шума, т.е. этот параметр принимается управляющим. Его соответствующее критическое значение $\sigma_{1cr} = a/(r\sigma_2) \approx 0,56$. Параметры алгоритма численного эксперимента: $\Delta t = 0,01$; $\Delta x = 0,02$; $t_m = 5$; $N = 10^8$ (если в подписи к рисунку не указано иначе).

На рис. 1 приведены графики равновесной плотности вероятности $p(x)$, полученные в соответствии с точным выражением (2) и алгоритмом численного эксперимента. При $\sigma_1 < \sigma_{1cr}$ функция $p(x)$ является унимодальной с глобальным максимумом в точке $x = 0$ (рис. 1а), наиболее вероятное состояние системы в стохастической динамике соответствует точке устойчивого равновесия в детерминированной динамике. При $\sigma_1 > \sigma_{1cr}$ равновесная плотность вероятности является бимодальной с двумя локальными максимумами одинаковой высоты и одним локальным минимумом в нуле (рис. 1 б), наиболее вероятные состояния системы уже не соответствуют точке устойчивого равновесия в детерминированной динамике. Следовательно, при $\sigma_1 = \sigma_{1cr}$ происходит унимодальный-бимодальный переход, индуцированный взаимно-коррелированными шумами.

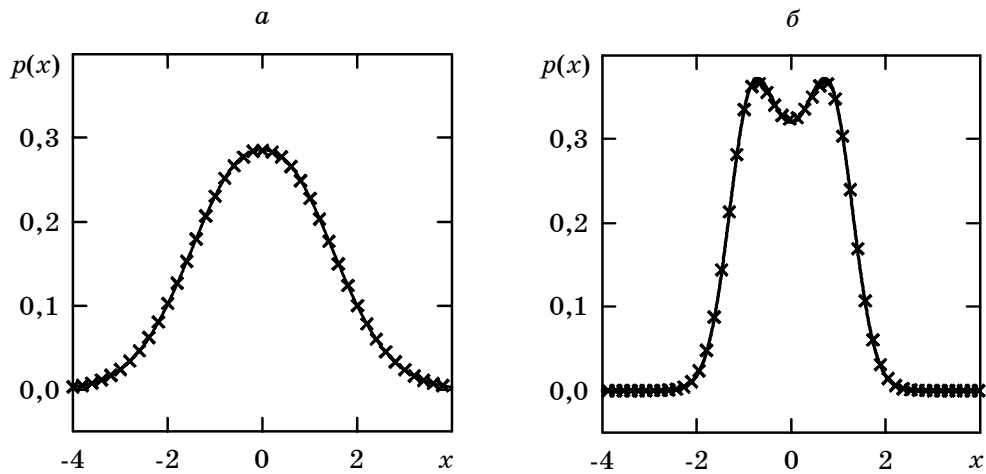


Рис. 1 – Равновесная плотность вероятности. Аналитические результаты представлены сплошной линией, численные – перекрестьями. $\sigma_1 = 0,2$ (а); $\sigma_1 = 2$ (б)

Из рис. 1 видно, что численные результаты согласуются с аналитическими и качественно, и достаточно хорошо количественно. Это свидетельствует о корректности предложенного алгоритма численного

эксперимента, и о возможности его дальнейшего применения для вычисления неравновесной плотности вероятности системы, точное выражение которой аналитическими методами получить не представляется возможным.

На рис. 2 представлена временная эволюция неравновесной плотности вероятности системы к равновесной для случая $\sigma_1 = 2$ ($\sigma_1 > \sigma_{1cr}$). В начальный момент времени плотность вероятности представляет дельта-пик в нуле, $p(x) = \delta(x)$, т.е. является унимодальной. По истечении некоторого критического времени t_{cr} она становится плоской, т.е. двойным максимумом (кривая 2, рис. 2), а затем видоизменяется в бимодальную функцию с двумя максимумами, которые становятся наиболее выраженными для равновесной плотности вероятности (кривая 4, рис. 2).

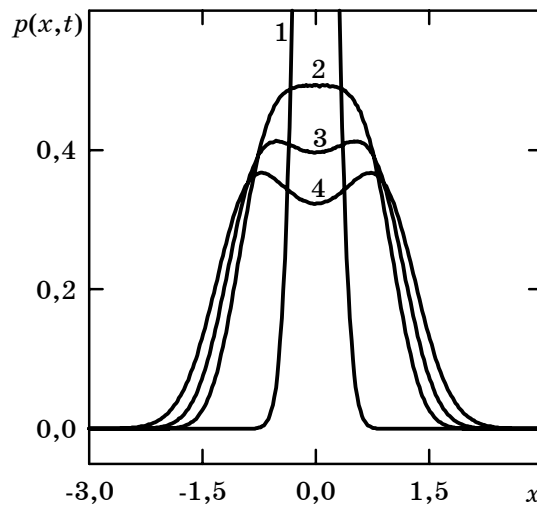


Рис. 2 – Эволюция неравновесной плотности вероятности.
 1 – $t = 0,01$; 2 – $t = 0,21$; 3 – $t = 0,4$; 4 – $t = 5$

Используя значения неравновесной плотности вероятности при различных значениях управляющего параметра σ_1 , больших σ_{1cr} , найдем критическое время. Для этого построим графики временной эволюции точек максимума плотности вероятности, которые определяют параметр порядка перехода (рис. 3). Из рисунка видно, что при стремлении сверху управляющего параметра к критическому, время, за которое первоначально унимодальная плотность вероятности изменяется в бимодальную, возрастает, т.е. система все дольше и дольше остается в промежуточном состоянии $x_m = 0$. Это свидетельствует о критическом замедлении динамики неравновесного перехода.

5. ВЫВОДЫ

Проведен численный эксперимент для динамической системы, возбуждаемой двумя гауссовскими белыми шумами. Получены значения равновесной плотности вероятности. Установлено, что система демонстрирует унимодальный-бимодальный переход, индуцированный

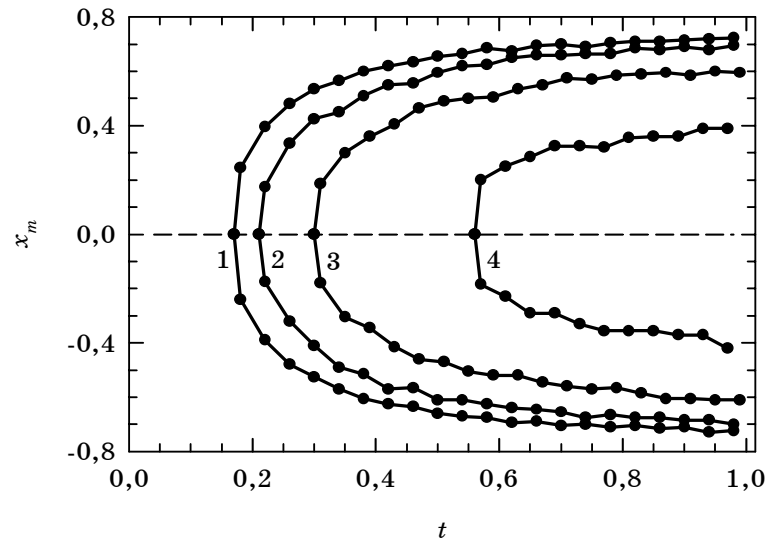


Рис. 3 – Эволюция точек максимума. 1 – $\sigma_1 = 2,5$; 2 – $\sigma_1 = 2$; 3 – $\sigma_1 = 1,5$; 4 – $\sigma_1 = 1$. Число выборочных траекторий $N = 10^9$

шумами при наличии взаимной корреляции, причем в полном соответствии с результатами, полученными точными аналитическими методами в [4]. Найдена неравновесная плотность вероятности, которую точными методами получить не представляется возможным. Исследована временная эволюция ее точек максимума, определяющих параметр порядка перехода. Установлено, с уменьшением управляющего параметра до критического, время, за которое изначально унимодальная плотность вероятности видоизменяется в бимодальную, увеличивается. Это свидетельствует о критическом замедлении в динамике неравновесного перехода. Данное свойство дополняет аналогию унимодального-бимодального перехода в рассмотренной системе с классическими фазовыми переходами. Предложенный алгоритм численного эксперимента может быть использован в дальнейшем при исследовании схожих систем.

THE DYNAMICS OF NONEQUILIBRIUM TRANSITIONS INDUCED BY THE CROSS-CORRELATED NOISES: NUMERICAL RESULTS

A.N. Vitrenko, I.A. Knyaz', V.S. Budeniy, D.O. Lytvynenko

Sumy State University,
2, Rimsky-Korsakov Str., 40007, Sumy, Ukraine
E-mail: vitrenko_andrei@mail.ru

The dynamic system described by the Langevin equation with two cross-correlated Gaussian white noises is considered. The non-equilibrium probability distribution function of the system is calculated by the numerical methods. The time of change of the initially unimodal distribution to the bimodal one is determined for different values of the control parameter. A critical slowing down in the transition dynamics is demonstrated.

Keywords: LANGEVIN EQUATION, CROSS-CORRELATED WHITE NOISES, MONTE CARLO METHOD, PROBABILITY DISTRIBUTION FUNCTION, NOISE-INDUCED TRANSITIONS.

**ДИНАМІКА НЕРІВНОВАЖНИХ ПЕРЕХОДІВ, ІНДУКОВАНИХ ВЗАЄМНО
КОРЕЛЬОВАНИМИ ШУМАМИ: ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ**

А.М. Вітренко, І.О. Князь, В.С. Будьоний, Д.О. Литвиненко

Сумський державний університет,
Вул. Римського-Корсакова, 2, 40007, Суми, Україна
E-mail: vitrenko_andrei@mail.ru

Розглядається динамічна система, що описується рівнянням Ланжевена з двома взаємно корельованими гаусівськими білими шумами. Чисельними методами обчислюється нерівноважна щільність ймовірності системи. Визначається час при різних значеннях керуючого параметра, за який початково унімодальний розподіл змінюється у бімодальний. Демонструється критичне уповільнення в динаміці переходу.

Ключові слова: РІВНЯННЯ ЛАНЖЕВЕНА, ВЗАЄМНО КОРЕЛЬОВАНІ БІЛІ ШУМИ, МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО, ЩІЛЬНІСТЬ ЙМОВІРНОСТІ, ІНДУКОВАНІ ШУМОМ ПЕРЕХОДИ.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер, *УФН* **169**, 7 (1999) (V.S. Anishchenko, A.B. Neiman, F. Moss, L. Shimansky-Geier, *Phys. Usp.* **42**, 7 (1999)).
2. P. Reimann, *Phys. Rep.* **361**, 57 (2002).
3. В. Хорстхемке, Р. Лефевр, *Индукцированные шумом переходы* (М: Мир: 1987).
4. S.I. Denisov, A.N. Vitrenko, W. Horsthemke, *Phys. Rev. E* **68**, 046132 (2003).
5. A.J.R. Madureira, P. Hänggi, H.S. Wio, *Phys. Lett. A* **217**, 248 (1996).
6. L. Cao, D.J. Wu, *Phys. Lett. A* **291**, 371 (2001).
7. K.P. Singh, G. Ropars, M. Brunel, A. Le Floch, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 073901 (2003).
8. И.М. Соболев, *Численные методы Монте-Карло* (М: Наука: 1973).
9. В.И. Тихонов, М.А. Миронов, *Марковские процессы* (М.: Сов. Радио; 1977).
10. Д.В. Кирьянов, Е.Н. Кирьянова, *Вычислительная физика* (М.: Полибук Мультимедиа: 2006).