УДК 539.3

АНАЛИЗ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

С.М. Верещака, *канд. техн. наук, доцент,*
И.Т. Караш, *аспирант,*
Сумский государственный университет, г. Сумы

Дан анализ методов определения упругих характеристик отдельных слоёв, армированных высокомодульными волокнами на макроуровне. В случае, когда композит представляет собой набор слоёв с различными направлениями армирования, предложена методика определения приведенных упругих характеристик всего пакета слоёв в целом. Определено напряжённо-деформированное состояние многослойного полого цилиндра с различными вариантами армирования его отдельных слоёв под действием внутреннего давления.

Ключевые слова: *композиционный материал, упругие характеристики, напряжённое состояние, многослойный цилиндр.*

Наданий аналіз методів визначення пружних характеристик окремих шарів, армованих високомодульними волокнами на макрорівні. У випадку, коли композит являє собою набір шарів з різними напрямами армування, запропонована методика визначення зведених пружних характеристик всього пакета шарів у цілому. Визначено напружений стан багатошарового порожнистого циліндра з різними варіантами армування його окремих шарів від дії внутрішнього тиску.

Ключові слова: *композиційний матеріал, пружні характеристики, напружений стан, багатошаровий циліндр.*

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании конструкций из композиционных материалов имеет место большое количество возможных вариантов и схем армирования. Поэтому теоретическая задача определения оптимальных деформационных и прочностных свойств таких материалов при минимальных затратах на эксперимент представляется актуальной.

В композиционном материале с регулярной структурой, как правило, присутствуют повторяющиеся элементы в виде однонаправленных слоев. Пренебрегая неоднородностью структуры на микроуровне каждого слоя, можно найти эффективные характеристики отдельных слоев на макроуровне. При этом деформационная модель материала имеет квазиоднородную структуру, составленную из однонаправленных слоев с различными углами укладки.

Анализ различных подходов [1-6] к расчету упругих характеристик композиционного материала показывает, что корректную оценку влияния схем укладки арматуры на физико-механические характеристики материала можно получить, решая граничные задачи теории упругости для многосвязной области. Однако такой расчет не исключает погрешностей, обусловленных отклонением реальной структуры материала от ее идеализированной модели, и связан с трудоемким численным анализом.

В основу приближенного расчета упругих характеристик композиционных материалов положен принцип суммирования повторяющихся элементарных слоев. Упругие характеристики элементарного слоя, как правило, определяются в два этапа. Вначале находятся характеристики приведенной матрицы за счет усреднения упругих свойств волокон ортогонально-армированного материала слоя. Считается, что компоненты материала (волокно и матрица) изотропны, линейно упруги и работают совместно на всех этапах деформирования. Кроме того, приняты допущения, согласно которым не учитываются напряжения, перпендикулярные к волокнам при действии нормальной нагрузки вдоль волокон; поперечные деформации при растяжении – сжатии каждой компоненты пропорциональны ее объемному содержанию в материале; на границе волокно–матрица исключается рассмотрение концентрации напряжения. На втором этапе осуществляется расчет характеристик слоя, исходя из упругих свойств волокон и модифицированной матрицы.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Для ортотропного материала расчетные зависимости упругих характеристик армированного высокомодульными волокнами слоя имеют вид [7]:

$$
\begin{aligned}
&E_1^{(k)} = \psi_1^{(k)} E_B + \frac{(1+\psi_1^{(k)})(1+\psi_3^{(k)})}{1-\psi_1^{(k)}} E_M;\\
&E_2^{(K)} = \frac{(1+\psi_1^{(k)})(1+\psi_3^{(k)})}{(1-\psi_1^{(k)})(1-\psi_3^{(k)})(1-\upsilon_B^2)} E_M;\\
&E_3^{(k)} = \psi_3^{(k)} E_B + \frac{(1+\psi_1^{(k)})(1+\psi_3^{(k)})}{(1-\psi_1^{(k)})(1-\upsilon_B^2)} E_M;\\
&\upsilon_{12}^{(k)} = \frac{\upsilon_B(1+\psi_3^{(K)})(1+\psi_1^{(k)})}{\psi_1^{(k)}(1-\psi_3^{(k)})(1-\psi_3^{(k)})(1-\upsilon_B^2)} \cdot \frac{E_M}{E_B};\\
&\upsilon_{13}^{(k)} = \upsilon_B\psi_3^{(k)} + (1-\psi_3^{(k)})\upsilon_B; \qquad \upsilon_{23}^{(k)} = \upsilon_B\psi_3^{(k)} + (1-\psi_3^{(k)})\upsilon_M;\\
&G_{12}^{(k)} = \frac{(1+\psi_1^{(k)})}{(1-\psi_1^{(k)})(1+\psi_3^{(k)})} G_M; \qquad G_{23}^{(k)} = \frac{(1+\psi_3^{(k)})}{(1-\psi_3^{(k)})(1-\psi_1^{(k)})} G_M;\\
&G_{13}^{(k)} = \frac{(1+\psi_1^{(k)})(1+\psi_1^{(k)})}{(1-\psi_1^{(k)})(1-\psi_3^{(k)})} G_M,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где индекс "В" относится к арматуре (волокно); "M" относится к связующему (матрица); $\psi_1^{(k)}, \psi_3^{(k)}$ – относительное объемное содержание арматуры слоя в направлении осей 1 и 3 (рис.1). Модуль сдвига волокна и матрицы определяется зависимостями

$$G_B = \frac{E_B}{2(1+V_B)}; \quad G_M = \frac{E_M}{2(1+V_M)}. \tag{2}$$

Здесь $v_в$, $v_м$ – коэффициенты Пуассона. Коэффициент армирования $\psi_1^{(k)}$, характеризующий относительное объемное содержание волокон, можно определить по формуле

$$\psi_1^{(k)} = \frac{\pi (d_B^{(k)})^2}{4h^{(k)}} i_B^{(k)}, \tag{3}$$

где $h^{(k)}$ – толщина армированного слоя; $d_B^{(k)}$ - диаметр волокон; $i_B^{(\kappa)}$ – частота армирования. Величина $\psi_3^{(\kappa)}$ определяется при помощи эмпирических зависимостей и, как правило, изменяется в интервале $\psi_3^{(\kappa)} = (0,05-0,15)\psi_1^{(\kappa)}$.

Геометрия однонаправленного армированного слоя показана на рис. 1а. Все величины с индексом k относим к k-му слою оболочки.

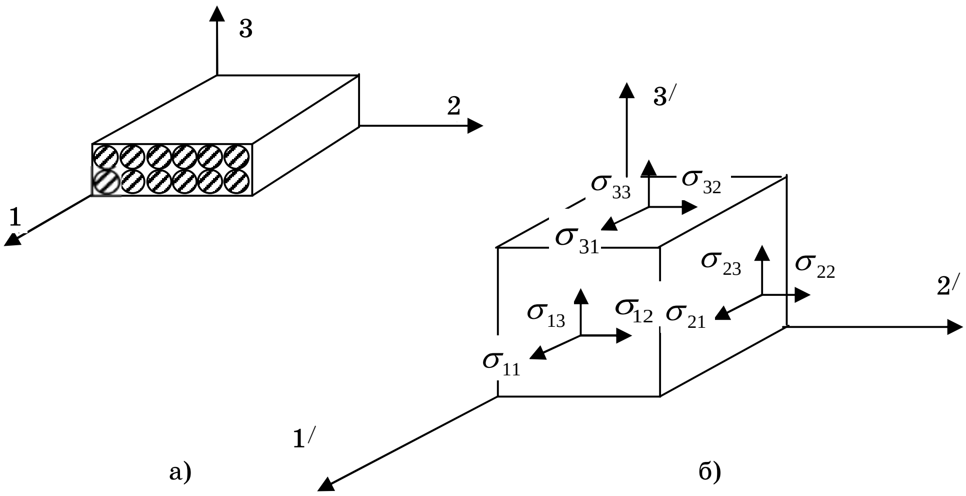

Рисунок 1 - Схема армирования однонаправленного слоя

Соотношения упругости для ортотропного однонаправленно армированного слоя в его осях симметрии $1'$, $2'$ с учетом физико-технических постоянных (1) – (3) в матричной форме имеют вид

$$\sigma_{(k)}' = a_{(k)}' \varepsilon_{(k)}', \qquad \varepsilon_{(k)}' = b_{(k)}' \sigma_{(k)}', \tag{4}$$

$$\sigma_{(k)}' = [\sigma_{1'1'}^{(k)}, \sigma_{2'2'}^{(k)}, \sigma_{3'3'}^{(k)}, \sigma_{2'3'}^{(k)}, \sigma_{1'3'}^{(k)}, \sigma_{1'2''}^{(k)}]^T,$$

– матрицы-столбцы

$$\varepsilon_{(k)}' = [\varepsilon_{1'1'}^{(k)z}, \varepsilon_{2'2'}^{(k)z}, \varepsilon_{3'3'}^{(k)z}, \varepsilon_{2'3'}^{(k)z}, \varepsilon_{1'3'}^{(k)z}, \varepsilon_{1'2''}^{(k)z}]^T$$

напряжений и деформаций слоя в направлении осей симметрии $1'$, $2'$ рис. 1 б;

$$a'_{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}^{(k)} & a_{32}^{(k)} & a_{33}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad b'_{(k)} = \begin{bmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & b_{13}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & b_{23}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31}^{(k)} & b_{32}^{(k)} & b_{33}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66}^{(k)} \end{bmatrix} -$$

матрицы жесткости и податливости k – го ортотропного слоя в направлении осей симметрии $1'$, $2'$ соответственно.

Решая совместно две системы уравнений (4) относительно коэффициентов жесткости $a_{ij}^{(k)}$, можно найти следующие соотношения:

$$a_{11}^{(k)} = \left[b_{22}^{(k)} b_{33}^{(k)} - \left(b_{23}^{(k)} \right)^2 \right] \Delta_{(k)}^{-1}, \quad a_{22}^{(k)} = \left[b_{11}^{(k)} b_{33}^{(k)} - \left(b_{13}^{(k)} \right)^2 \right] \Delta_{(k)}^{-1},$$

$$a_{33}^{(k)} = \left[b_{11}^{(k)} b_{22}^{(k)} - \left(b_{12}^{(k)} \right)^2 \right] \Delta_{(k)}^{-1}, \quad a_{12}^{(k)} = \left[b_{13}^{(k)} b_{23}^{(k)} - b_{12}^{(k)} b_{33}^{(k)} \right] \Delta_{(k)}^{-1}, \qquad (5)$$

$$a_{13}^{(k)} = \left[b_{12}^{(k)} b_{23}^{(k)} - b_{22}^{(k)} b_{13}^{(k)} \right] \Delta_{(k)}^{-1}, \quad a_{23}^{(k)} = \left[b_{12}^{(k)} b_{13}^{(k)} - b_{11}^{(k)} b_{23}^{(k)} \right] \Delta_{(k)}^{-1},$$

$$\Delta_{(k)} = b_{11}^{(k)} b_{22}^{(k)} b_{33}^{(k)} + b_{12}^{(k)} b_{23}^{(k)} b_{31}^{(k)} + b_{21}^{(k)} b_{32}^{(k)} b_{13}^{(k)} - b_{13}^{(k)} b_{22}^{(k)} b_{31}^{(k)} - b_{21}^{(k)} b_{12}^{(k)} b_{33}^{(k)} - b_{11}^{(k)} b_{32}^{(k)} b_{23}^{(k)},$$

$$a_{44}^{(k)} = \frac{1}{b_{44}^{(k)}}, \quad a_{55}^{(k)} = \frac{1}{b_{55}^{(k)}}, \quad a_{66}^{(k)} = \frac{1}{в_{66}^{(k)}}.$$

Коэффициенты податливости $b_{ij}^{(k)}$ можно записать при помощи технических постоянных (1):

$$b_{11}^{(k)} = \frac{1}{E_1^{(k)}}, \quad b_{12} = -\frac{\nu_{21}^{(k)}}{E_2^{(k)}}, \quad b_{13}^{(k)} = -\frac{\nu_{31}^{(k)}}{E_3^{(k)}}, \quad b_{21} = -\frac{\nu_{12}^{(k)}}{E_1^{(k)}},$$

$$b_{22}^{(k)} = \frac{1}{E_2^{(k)}}, \quad b_{23} = -\frac{\nu_{32}^{(k)}}{E_3^{(k)}}, \quad b_{31}^{(k)} = -\frac{\nu_{13}^{(k)}}{E_1^{(k)}}, \quad b_{32} = -\frac{\nu_{23}^{(k)}}{E_2^{(k)}},$$

$$b_{33}^{(k)} = \frac{1}{E_3^{(k)}}, \quad b_{44} = \frac{1}{G_{23}^{(k)}}, \quad b_{55}^{(k)} = \frac{1}{G_{13}^{(k)}}, \quad b_{66} = \frac{1}{G_{12}^{(k)}}.$$

Если тонкостенный элемент состоит из однонаправленно армированных слоев, оси локальных систем координат которых не совпадают с осями глобальной системы координат, что имеет место, например, в перекрестно армированных оболочках, появляется возможность варьировать свойствами материала за счет угла армирования.

Пусть β – угол между осями симметрии k – го слоя оболочки $\alpha_1^{(k)\beta}$, $\alpha_2^{(k)\beta}$ и направлениями координатных линий $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$, т.е. угол армирования. Известно, что в повернутых осях ($\alpha_1^{(k)\beta}, \alpha_2^{(k)\beta}$, z) армированный слой обладает анизотропными свойствами и имеет одну плоскость упругой симметрии. Тогда становятся справедливыми соотношения упругости

$$\sigma_{(k)} = a_{(k)}^{\beta} \varepsilon_{(k)}, \tag{6}$$

где
$$a_{(k)}{}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)\beta} & a_{12}^{(k)\beta} & a_{13}^{(k)\beta} & 0 & 0 & a_{16}^{(k)\beta} \\ a_{21}^{(k)\beta} & a_{22}^{(k)\beta} & a_{23}^{(k)\beta} & 0 & 0 & a_{26}^{(k)\beta} \\ a_{31}^{(k)\beta} & a_{32}^{(k)\beta} & a_{33}^{(k)\beta} & 0 & 0 & a_{36}^{(k)\beta} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(k)\beta} & a_{45}^{(k)\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54}^{(k)\beta} & a_{55}^{(k)\beta} & 0 \\ a_{61}^{(k)\beta} & a_{62}^{(k)\beta} & a_{63}^{(k)\beta} & 0 & 0 & a_{66}^{(k)\beta} \end{bmatrix} \tag{7}$$

- матрица коэффициентов жесткости k – го анизотропного слоя в направлении главных координатных линий α_1, α_2;

$\sigma_{(k)} = [\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}]^T$,
$\varepsilon_{(k)} = [\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, \varepsilon_{23}^{(k)}, \varepsilon_{13}^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)}]^T$ – матрицы-столбцы напряжений и деформаций слоя в направлении главных координатных линий α_1, α_2. Коэффициенты матрицы $a_{(k)}{}^{\beta}$ выражаются через коэффициенты матрицы $a_{(k)}$ при помощи зависимостей

$$a_{11}^{(k)\beta} = a_{11}^{(k)} \cos^4 \beta_{(k)} + 2\left(a_{12}^{(k)} + 2a_{66}^{(k)}\right) \sin^2 \beta_{(k)} \cos^2 \beta_{(k)} + a_{22}^{(k)} \sin^4 \beta_{(k)},$$

$$a_{22}^{(k)\beta} = a_{11}^{(k)} \sin^4 \beta_{(k)} + 2\left(a_{12}^{(k)} + 2a_{66}^{(k)}\right) \sin^2 \beta_{(k)} \cos^2 \beta_{(k)} + a_{22}^{(k)} \cos^4 \beta_{(k)},$$

$$a_{12}^{(k)\beta} = \left[a_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)} - 2\left(a_{12}^{(k)} + 2a_{66}^{(k)}\right)\right] \sin^2 \beta_{(k)} \cos^2 \beta_{(k)} + a_{12}^{(k)},$$

$$a_{33}^{(k)\beta} = a_{33}^{(k)}, \quad a_{13}^{(k)\beta} = a_{13}^{(k)} \cos^2 \beta_{(k)} + a_{23}^{(k)} \sin^2 \beta_{(k)}, \quad a_{23}^{(k)} = a_{13}^{(k)} \sin^2 \beta_{(k)} + a_{23}^{(k)} \cos^2 \beta_{(k)},$$

$$a_{44}^{(k)\beta} = a_{44}^{(k)} \cos^2 \beta_{(k)} + a_{55}^{(k)} \sin^2 \beta_{(k)}, \quad a_{45}^{(k)\beta} = \left(a_{44}^{(k)} - a_{55}^{(k)}\right) \sin \beta_{(k)} \cos \beta_{(k)},$$

$$a_{55}^{(k)\beta} = a_{44}^{(k)} \sin^2 \beta_{(k)} + a_{55}^{(k)} \cos^2 \beta_{(k)}, \quad a_{36}^{(k)\beta} = \left(a_{23}^{(k)} - a_{13}^{(k)}\right) \sin \beta_{(k)} \cos \beta_{(k)},$$

$$a_{66}^{(k)\beta} = \left[a_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)} - 2\left(a_{12}^{(k)} + 2a_{66}^{(k)}\right)\right] \sin^2 \beta_{(k)} \cos^2 \beta_{(k)} + a_{66}^{(k)},$$

$$a_{16}^{(k)\beta} = \left[a_{22}^{(k)} \sin^2 \beta_{(k)} - a_{11}^{(k)} \cos^2 \beta_{(k)} + \left(a_{12}^{(k)} + 2a_{66}^{(k)}\right)\left(\cos^2 \beta_{(k)} - \sin^2 \beta_{(k)}\right)\right] \sin\beta_{(k)} \cos\beta_{(k)},$$

$$a_{(k)\beta}^{26} = \left[a_{(k)}^{22} \cos^2 \beta_{(k)} - a_{(k)}^{11} \sin^2 \beta_{(k)} - \left(a_{(k)}^{12} + 2a_{(k)}^{66}\right)\left(\cos^2 \beta_{(k)} - \sin^2 \beta_{(k)}\right)\right] \sin\beta_{(k)} \cos\beta_{(k)},$$

Для дальнейшего изложения материала систему уравнений (6)-(7) удобно представить в виде

$$\sigma_{(k)}{}^{\alpha} = a_{(k)\alpha}{}^{\beta} \varepsilon_{(k)}{}^{\alpha} \quad , \quad \sigma_{(k)}{}^{\alpha 3} = a_{(k)\alpha 3}{}^{\beta} \varepsilon_{(k)}{}^{\alpha 3} \quad , \tag{8}$$

где в (8) введены обозначения

$$\sigma_{(k)}{}^{\alpha} = [\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}]^T, \quad \sigma_{(k)}^{\alpha 3} = [\sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}]^T,$$

$$\varepsilon_{(k)}{}^{\alpha} = [\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)}]^T, \quad \varepsilon_{(k)}^{\alpha 3} = [\varepsilon_{23}^{(k)}, \varepsilon_{13}^{(k)}]^T,$$

$$a_{(k)\alpha}{}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)\beta} & a_{12}^{(k)\beta} & a_{13}^{(k)\beta} & a_{16}^{(k)\beta} \\ a_{21}^{(k)\beta} & a_{22}^{(k)\beta} & a_{23}^{(k)\beta} & a_{26}^{(k)\beta} \\ a_{31}^{(k)\beta} & a_{32}^{(k)\beta} & a_{33}^{(k)\beta} & a_{36}^{(k)\beta} \\ a_{61}^{(k)\beta} & a_{62}^{(k)\beta} & a_{63}^{(k)\beta} & a_{66}^{(k)\beta} \end{bmatrix}, \quad a_{(k)\alpha 3}{}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{44}^{(k)\beta} & a_{45}^{(k)\beta} \\ a_{54}^{(k)\beta} & a_{55}^{(k)\beta} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

В случае, когда композит представляет собой набор n разно ориентированных слоев однонаправленного материала, приведенные упругие характеристики рассматриваемого пакета слоев находят из очевидных соотношений

$$\sigma^{\alpha} = a_{\alpha}^{\beta}\varepsilon^{\alpha}, \quad \sigma^{\alpha 3} = a_{\alpha 3}^{\beta}\varepsilon^{\alpha 3}, \quad (10)$$

где $a_{ij}^{\beta} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{(k)\beta} h_{(k)}{}'$, $h_{(k)}{}' = h_{(k)} / h$ – относительная толщина k -го слоя.

Упругие постоянные многослойного пакета при растяжении можно получить, преобразовав систему уравнений (10) к виду

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= a_{11}^{\beta}\varepsilon_{11} + a_{12}^{\beta}\varepsilon_{22} + a_{13}^{\beta}\varepsilon_{33} + a_{16}^{\beta}\varepsilon_{12}, \\ 0 &= a_{21}^{\beta}\varepsilon_{11} + a_{22}^{\beta}\varepsilon_{22} + a_{23}^{\beta}\varepsilon_{33} + a_{26}^{\beta}\varepsilon_{12}, \\ 0 &= a_{31}^{\beta}\varepsilon_{11} + a_{32}^{\beta}\varepsilon_{22} + a_{33}^{\beta}\varepsilon_{33} + a_{36}^{\beta}\varepsilon_{12}, \\ 0 &= a_{61}^{\beta}\varepsilon_{11} + a_{62}^{\beta}\varepsilon_{22} + a_{63}^{\beta}\varepsilon_{33} + a_{66}^{\beta}\varepsilon_{12}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив выражение $E_1 = \dfrac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}$ в первое уравнение системы уравнений (11) и предварительно выразив деформации ε_{22}, ε_{33}, ε_{12} при помощи ε_{11}, из оставшихся 3 уравнений (11) несложно найти значение E_1:

$$E_1 = \frac{\det a_{\alpha}^{\beta}}{\mathrm{M}_{11}}. \quad (12)$$

В формуле (12) M_{11} – минор элемента a_{11}^{β} матрицы a_{α}^{β}. Аналогично находятся остальные значения постоянных

$$E_2 = \frac{\det a_{\alpha}^{\beta}}{\mathrm{M}_{22}}, \quad E_3 = \frac{\det a_{\alpha}^{\beta}}{\mathrm{M}_{33}} \ - \quad (13)$$

модули упругости первого рода;

$$G_{12} = \frac{\det a_{\alpha}^{\beta}}{\mathrm{M}_{44}}, \quad G_{13} = a_{55}^{\beta} - \frac{(a_{45}^{\beta})^2}{a_{44}^{\beta}}, \quad G_{23} = a_{44}^{\beta} - \frac{(a_{45}^{\beta})^2}{a_{55}^{\beta}} \ - \quad (14)$$

модули сдвига;

$$\nu_{12} = \frac{M_{12}}{M_{11}}, \quad \nu_{13} = \frac{M_{13}}{M_{11}}, \quad \nu_{23} = \frac{M_{23}}{M_{22}} \text{ -} \tag{15}$$

коэффициенты Пуассона. Остальные три значения коэффициентов Пуассона ν_{21}, ν_{31}, ν_{32} находятся при помощи известных соотношений

$$\nu_{ij} E_j = \nu_{ji} E_i \quad (i, j = 1{,}2{,}3)\,. \tag{16}$$

Здесь первый индекс коэффициента Пуассона указывает на направление приложения нагрузки, а второй − направление поперечной деформации, вызванной этой силой.

На основе предложенного алгоритма при помощи прикладного пакета программ PC MATHCAD 14 получено численные значения упругих характеристик армированного материала.

В качестве примера расчета упругих характеристик перекрестно армированного материала рассматривается углепластик [8, 9], который состоит из 31 слоя с кодом $[0^\circ_2 / 90^\circ / 0^\circ_2 / \pm 45^\circ / (0^\circ_2 / 90)_2 / \pm 45^\circ / \overline{0}^\circ]_S$, и стеклопластик с продольно − поперечной схемой укладки 19 монослоев $[(0^\circ / 90^\circ)_S / \overline{0}^\circ]_S$.

Свойства составляющих композиций:

Углепластик. Согласно паспортным данным модули упругости $E_в$, сдвига $G_в$ и коэффициент Пуассона $\nu_в$ углеродного волокна ЛУ-03 соответственно равны 235000МПа, 90400МПа и 0,3. Механические характеристики связующего углепластика (сополимер эпокситрифенольной и анилиноформальдегидной смол) − $E_м = 3500$ $G_м = 1320$ $\nu_м = 0{,}32$. В каждом монослое толщиной 0,171 мм объем, занимаемый волокнами, составляет 55% общего объема.

Стеклопластик. В качестве матрицы стеклопластика использовался эпоксидный полимер 5-211Б со следующими параметрами упругости: $E_м = 4200$ $G_м =$ $\nu_м =$. Армирующим элементом композиции является ткань сатиновой структуры Т-10-80. Толщина ткани равна 0,25 мм. Плотность ткани по основе составляет 36 ниток/см, по утку − 20 ниток/см. Ткань получена путем переплетения алюмоборосиликатных ниток БС6-26×1×1(Е-стекло). Диаметр волокна составляет $6 \cdot 10^{-3}$мм. Механические характеристики волокна: $E_в = 74800$ $G_в =$ $\nu_в = 0{,}2$. Количество волокон в одной нитке достигает 800 шт. В результате проведенных авторами работ [8, 9] вычислений было показано, что модуль упругости нити равен 74506 МПа, модуль сдвига и коэффициент Пуассона нити могут быть приняты такими же, как и для волокна.

Технические постоянные упругости рассматриваемых многослойных композитов, полученные на основе представленных зависимостей (1) − (16), сведены в таблице 1.

При этом считалось, что стеклопластик представляет собой трасверсально изотропный материал и состоит из 19 однонаправленно армированных 30 нитями/см слоев толщиной 0,25 мм. Количество нитей в слое определялось в результате расчетов и соответствовало экспериментальному значению модуля упругости $E^э_{11}$. Относительное объемное содержание арматуры слоя в направлении оси 3 принималось равным $\psi_3^{(k)} = 0{,}05\psi_1^{(k)}$.

Таблица 1 - Упругие характеристики угле- и стеклопластиков

Материал	$E_{ii}, МПа$	$G_{ij}, МПа$	ν_{ij}	ν_{ji}
Углепластик	$E_{11} = 84457$ $E_{22} = 42026$ $E_{33} = 14703$	$G_{12} = 12410$ $G_{13} = 4287$ $G_{23} = 3677$	$\nu_{12} = 0{,}21$ $\nu_{13} = 0{,}28$ $\nu_{23} = 0{,}3$	$\nu_{21} = 0{,}11$ $\nu_{31} = 0{,}049$ $\nu_{32} = 0{,}1$
Стеклопластик	$E_{11} = 24260$ $E_{22} = 24260$ $E_{33} = 9989$	$G_{12} = 4254$ $G_{13} = 2947$ $G_{23} = 2947$	$\nu_{12} = 0{,}15$ $\nu_{13} = 0{,}42$ $\nu_{23} = 0{,}42$	$\nu_{21} = 0{,}15$ $\nu_{31} = 0{,}17$ $\nu_{32} = 0{,}17$

Сравнение результатов, представленных в таблице 1 и полученных авторами работ [8, 9], подтверждает корректность предлагаемой методики определения усредненных технических параметров многослойного композита. Исключение составили физико-механические характеристики трансверсального сдвига и обжатия $-G_{13},\ G_{23},\ E_{33},\ \nu_{13},\ \nu_{23}$.

Напряженное состояние многослойных цилиндров при действии внутреннего давления

Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии анизотропной цилиндрической оболочки конечной длины под действием внутреннего и наружного гидростатического давления для случая безмоментного состояния предложено в [10] аналогично решению задачи Ламе для толстостенного изотропного цилиндра. При действии только внутреннего давления **p** выражения для нормальных напряжений и касательные напряжения в цилиндрической системе координат (рис.2) запишутся так:

$$\sigma_r = -pr_1^{k+1}\left[1-(\frac{\rho}{r_2})^{2k}\right]\left\{\left[1-(\frac{r_1}{r_2})^{2k}\right]\rho^{k+1}\right\}^{-1}, \tag{17}$$

$$\sigma_\theta = p\mathrm{k}r_1^{k+1}\left[1+(\frac{\rho}{r_2})^{2k}\right]\left\{\left[1-(\frac{r_1}{r_2})^{2k}\right]\rho^{k+1}\right\}^{-1}, \tag{18}$$

$$\sigma_z = -pr_1^{k+1}\left[(\mathrm{b}_{13}+kb_{23}-gkb_{45}).(\frac{\rho}{r_2})^{2k}-(b_{13}-kb_{23}-g_{-k}b_{45})\right]\times$$
$$\times\left\{b_{33}\left[1-(\frac{r_1}{r_2})^{2k}\right]\rho^{k+1}\right\}^{-1}, \tag{19}$$

$$\sigma_{\theta z} = -pr_1^{k+1}\left[g_k(\frac{\rho}{r_2})^{2k}+g_{-k}\right]\left\{\left[1-(\frac{r_1}{r_2})^{2k}\right]\rho^{k+1}\right\}^{-1}, \quad \sigma_{rz} = 0, \tag{20}$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ – нормальные напряжения соответственно в радиальном, окружном и продольном направлениях; $\sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}$ – касательные напряжения в окружном и радиальном направлениях; r_1, r_2 – внутренний и внешний радиусы цилиндра; $r_1 \le \rho \le r_2$ – координата точки цилиндра; b_{ij} $(i,j=1,2,...,6)$ – коэффициенты матриц податливости армированного материала b_{α}^{β} и $b_{\alpha 3}^{\beta}$, которые связаны с коэффициентами матриц жесткости (10) соотношениями

$$b_{\alpha}^{\beta} = (a_{\alpha}^{\beta})^{-1}, \; b_{\alpha 3}^{\beta} = (a_{\alpha 3}^{\beta})^{-1}.$$

Кроме того, в (17) – (20) введены дополнительные обозначения:

$$k = \sqrt{\frac{\beta_{33}}{\beta_{22}}}; \qquad g_k = \frac{\beta_{16} + k\beta_{26}}{\beta_{66}}; \qquad g_{-k} = \frac{\beta_{16} - k\beta_{26}}{\beta_{66}};$$

$$\beta_{\mathrm{ij}} = b_{ij} - \frac{b_{i3}b_{j3}}{b_{33}} \qquad (i,j = 1,2,\ldots,6). \tag{21}$$

Напряжения σ_z на концах цилиндра приводятся к осевой силе P, а $\sigma_{\theta z}$ – к скручивающему моменту $\mathrm{M_z}$.

Зависимости (17)-(21) составлены с учетом допущения о наличии в каждой точке цилиндра плоскости упругой симметрии, перпендикулярной нормали к срединной поверхности цилиндра. В этом случае анизотропии толстостенный цилиндр под действием нормального давления будет не только изменять радиусы кривизны поперечных сечений, но и изменять первоначальную длину и закручиваться.

При помощи формул (17) – (21) несложно найти значения максимальных и минимальных напряжений, которые имеют место в точках внутренней и внешней поверхности рассматриваемого цилиндра ($\rho = r_1$, $\rho = r_2$).

Следует отметить, что при расчете напряженного состояния анизотропных цилиндрических оболочек по формулам (17) – (21) с допустимой для практики точностью могут быть получены теоретические результаты и для тонкостенных цилиндров ($r_1/r_2 \ge 0{,}8$). При этом указанные зависимости не позволяют определять изменения напряженного состояния цилиндра, вызванные наличием межфазных дефектов структуры материала и влиянием условий закрепления торцов.

На основе представленных расчетных моделей, а также разработанных методик расчета такого класса задач изучено напряженное состояние цилиндра из углепластика с радиусом внутренней поверхности $r_1 = 0{,}1\,м$. Оболочка изготавливается методом намотки однонаправленной стеклоленты. В целом такая цилиндрическая оболочка состоит из 31 однонаправленного слоя. Угол намотки каждого слоя определяется кодом структуры материала. Всего рассмотрено 10 вариантов армирования оболочки (табл. 2).

Толщина слоя составляет $\delta = 0{,}171\,мм$. Остальные характеристики компонент монослоя углепластика приведены ранее.

Для каждой заданной структуры углепластика были найдены физико-механические характеристики как композиционного материала с одной плоскостью упругой симметрии (табл.3). При этом декартовая система координат (рис.1) заменена цилиндрической (рис.2).

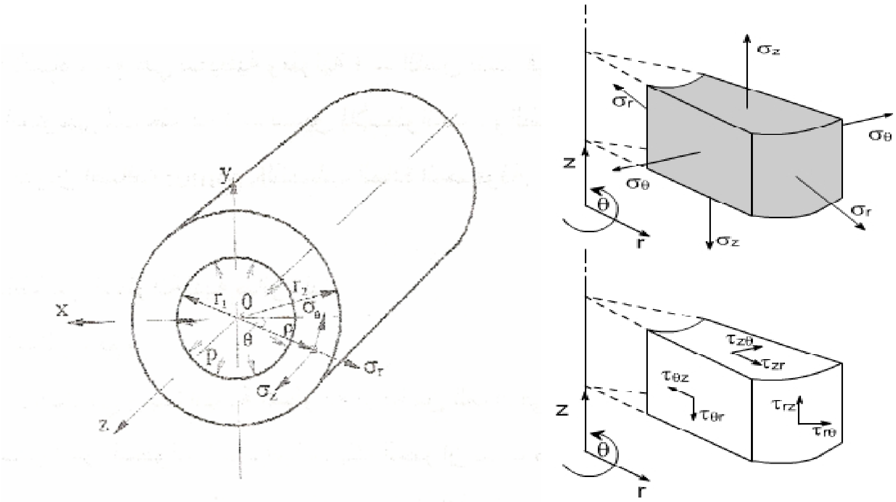

Рисунок 2 - Расчетная схема оболочки в цилиндрической системе координат

Таблица 2 -- Структура многослойного материала цилиндра

	Код
1	$[0^\circ_2/45^\circ/0^\circ_2/\pm 45^\circ/0^\circ_2/90^\circ/0^\circ_2/90^\circ_2/-90^\circ/\overline{0}^\circ]_S$
2	$[0^\circ_2/45^\circ/0^\circ_2/\pm 45^\circ/0^\circ_2/60^\circ/0^\circ_2/60^\circ_2/-90^\circ/3\overline{0}^\circ]_S$
3	$[0^\circ_2/30^\circ/0^\circ_2/\pm 30^\circ/0^\circ_2/60^\circ/0^\circ_2/60^\circ_2/-60^\circ/\overline{0}^\circ]_S$
4	$[0^\circ_2/45^\circ/0^\circ_2/\pm 45^\circ/0^\circ_2/30^\circ/0^\circ_2/30^\circ_2/-30^\circ/9\overline{0}^\circ]_S$
5	$[0^\circ_2/30^\circ_2/45^\circ/0^\circ_5/60^\circ/0_2/\pm 30^\circ/\overline{0}^\circ]_S$
6	$[0^\circ_2/30^\circ/0^\circ_2/\pm 45^\circ/0^\circ_2/30^\circ/0^\circ_2/30^\circ_2/0^\circ/\overline{0}^\circ]_S$
7	$[0^\circ_2/45^\circ/0^\circ_2/45^\circ/0^\circ_3/90^\circ/0_2/90^\circ/0^\circ_2/\overline{0}^\circ]_S$
8	$[0^\circ_2/90^\circ/0^\circ_2/\pm 30^\circ/0^\circ_2/45^\circ/30^\circ_2/0^\circ_2/-30^\circ/\overline{0}^\circ]_S$
9	$[0^\circ_2/30^\circ/0^\circ_2/\pm 45^\circ/0^\circ_2/90^\circ/0^\circ_2/60^\circ/\pm 90^\circ/\overline{0}^\circ]_S$
10	$[0^\circ/\pm 30^\circ/\pm 45^\circ/\pm 60^\circ/\pm 75^\circ/\pm 90^\circ/0^\circ/30^\circ/45^\circ/75^\circ/\overline{0}^\circ]_S$

Таблица 3 - Упругие постоянные углепластика

Ном. кода	E_z, MPa	E_θ, MPa	E_r, MPa	$G_{\theta z}$, MPa	G_{zr}, MPa	$G_{\theta r}$, MPa	$\nu_{z\theta}$	ν_{zr}	$\nu_{\theta r}$	$\nu_{\theta z}$	ν_{rz}	$\nu_{r\theta}$
1	88230	51450	17190	10970	4054	3576	0,128	0,285	0,300	0,074	0,056	0,056
2	84420	33680	16970	14010	4112	3508	0,260	0,243	0,289	0,104	0,049	0,146
3	98510	28110	16860	14360	4279	3358	0,338	0,219	0,291	0,097	0,037	0,175
4	94370	22880	16720	16800	4316	3317	0,494	0,169	0,283	0,120	0,030	0,207
5	102900	24300	16740	14480	4346	3293	0,393	0,201	0,292	0,093	0,033	0,201
6	105000	18370	16360	12750	4390	3235	0,383	0,205	0,300	0,067	0,032	0,267
7	110100	31890	16870	8277	4319	3319	0,091	0,299	0,314	0,026	0,046	0,166
8	102900	24300	16740	14480	4346	3293	0,393	0,201	0,292	0,093	0,033	0,201
9	90360	45510	17140	11820	4109	3530	0,153	0,277	0,298	0,077	0,053	0,112
10	49550	61820	17220	20350	3734	3902	0,237	0,248	0,230	0,296	0,086	0,064

Значения нормальных и касательных напряжений в точках внутренней и наружной поверхности цилиндра при интенсивности внутреннего давления $q = 20МПа$ приведены в табл. 4. Анализ результатов показывает, что изменение кода практически не влияет на значения нормальных напряжений в окружном направлении σ_θ. При этом имеет место существенное изменение величин напряжений $\sigma_{\theta z}$ поперечного сдвига $\sigma_{\theta z}$ и нормальных осевых напряжений σ_z.

Представляют интерес проведенные исследования напряженного состояния многослойной оболочки с кодом $[0^\circ_2 / 45^\circ / 0^\circ_2 / \pm 45^\circ / 0^\circ_2 / 90^\circ / 0^\circ_2 / 90^\circ_2 / -90^\circ / \overline{0}^\circ]_S$, когда толщина слоя последовательно увеличивается на заданную величину (рис. 3 – 5). В целом толщина оболочки определяется выражением $h = r_2 - r_1$, где значение r_2 показано на рис.3 – 5, а величина радиуса внутренней поверхности оболочки не изменяется и равна $r_1 = 0{,}1\,м$. Упругие постоянные заданного набора слоев не зависят от толщины оболочки.

Таблица 4 - Напряженное состояние цилиндра толщиной $h = 5{,}4\,мм$

№ кода	$\rho = r_1$				$\rho = r_2$			
	σ_r, MPa	σ_θ, MPa	σ_z, MPa	$\sigma_{\theta z}$, MPa	σ_r, MPa	σ_θ, MPa	σ_z, MPa	$\sigma_{\theta z}$, MPa
1	-20	388,3	38,6	-3,0	0	367,2	37,6	-4,0
2	-20	388,7	36,8	-2,4	0	367,0	35,6	-3,4
3	-20	388,8	21,5	-1,9	0	366,9	21,0	-2,9
4	-20	389,0	17,7	-1,6	0	366,9	17,4	-2,6
5	-20	389,3	15,4	-1,3	0	366,7	15,2	-2,3
6	-20	389,5	14,3	-1,1	0	366,6	14,1	-2,1
7	-20	389,5	14,3	-0,9	0	366,6	14,1	-1,9
8	-20	389,7	12,8	-0,8	0	366,5	12,7	-1,7
9	-20	390,0	12,2	-0,6	0	366,4	12,1	-1,6
10	-20	390,1	12,3	-0,5	0	366,3	12,2	-1,5

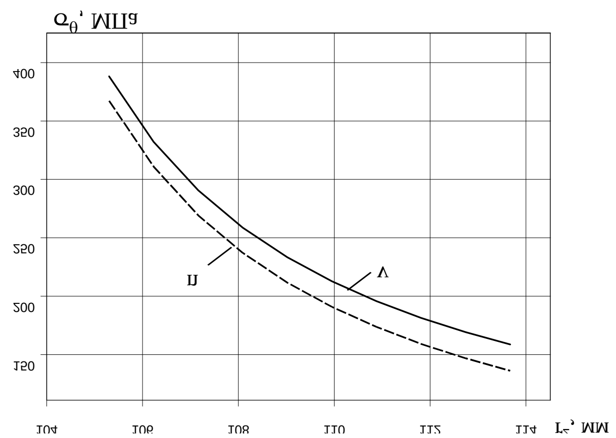

Рисунок 3 - Зависимость напряжения σ_θ от толщины оболочки
(v – внутренняя поверхность; n – наружная поверхность)

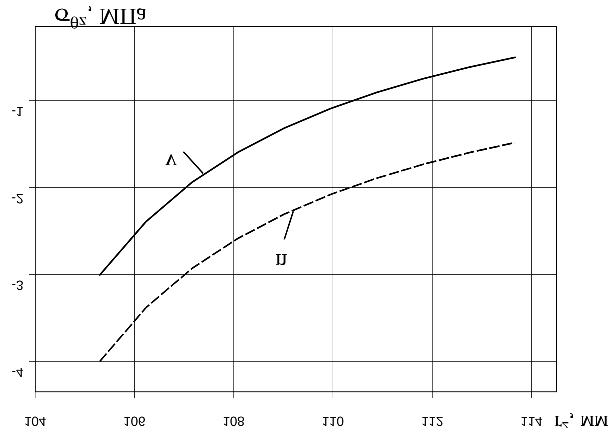

Рисунок 4 - Зависимость напряжения $\sigma_{\theta z}$ от толщины оболочки (v – внутренняя поверхность; n – наружная поверхность)

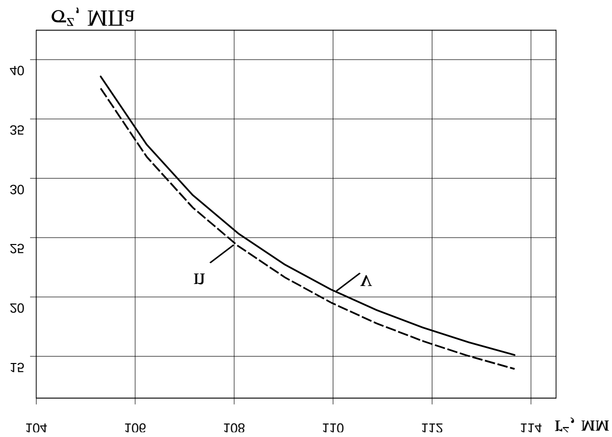

Рисунок 5 - Зависимость напряжения σ_z от толщины оболочки (v – внутренняя поверхность; n – наружная поверхность)

Следует отметить, что с увеличением толщины оболочки разность нормальных напряжений σ_θ в окружном направлении в точках внутренней и наружной поверхностей практически не меняется. Так, например, если при толщине оболочки $r_2 - r_1 = h = \mathbf{5,4}\,мм$ эта разность составляла 21,1 МПа, то при толщине $h = \mathbf{13,7}\,мм$ она равняется 22,5 МПа. Анализируя зависимости напряжений $\sigma_{\theta z}$ и σ_z от толщины оболочки, можно заметить, что в анизотропных оболочках, когда $r/h > 20$, при действии внутреннего давления возникают достаточно большие по величине напряжения $\sigma_{\theta z}$ и σ_z. Такие напряжения могут стать причиной разрушения связующего рассматриваемого армированного материала. Условия идеального контакта между слоями, которые применяются в непрерывно-структурной теории анизотропных пластин и оболочек, в этом случае оказываются существенно нарушенными.

ВЫВОД

В работе предложена методика определения упругих постоянных анизотропного материала, который состоит из набора армированных слоев. Рассмотрены десять вариантов многослойных анизотропных полых цилиндров с различной структурой армирования. Для каждого варианта армирования определено напряженное состояние цилиндра при действии внутреннего давления. Показано, что с увеличением толщины оболочки напряжения поперечного сдвига и нормальные напряжения в продольном направлении уменьшаются.

SUMMARY

STRESS STATE ANALYSIS OF MULTI-LAYERED HOLLOW CYLINDER UNDER INTERNAL PRESSURE

S.M. Vereschaka, I.T. Karash,
Sumy State University, Sumy

The analysis of separate layers reinforced by high-module fibers on the macro level elastic properties definition methods is offered. In the case when a composite is a set of layers with different re-enforcement directions, methodology of determination the reduced elastic properties over all layers in package in tote is offered. The deflected mode of multi-layered hollow cylinder with the different variants of re-enforcement of its separate layers under internal pressure is analyzed.

Key words: *composite material, elastic coefficients, stress state, multi-layered cylinder.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Алфутов Н.А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н.А. Алфутов, П.А. Зиновьев, Б.Г. Попов. – М: Машиностроение, 1984. - 264 с.
2. Болотин В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. - М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
3. Ванин. Г.А. Микромеханика композиционных материалов/ Г.А. Ванин. – К.: Наук. думка, 1971. – 304 с.
4. Малмейстер А.К. Сопротивление полимерных и композитных материалов / А.К. Малмейстер, В.П. Тамуж, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
5. Скудра А.М. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков / А.М. Скудра, Ф.Я. Булавс, К.А. Роценс. – Рига: Зинатне, 1971. – 239 с.
6. Тарнопольский Ю.М. Особенности расчета деталей из армированных пластиков/ Ю.М. Тарнопольский, А.В. Розе. – Рига: Зинатне, 1969. – 274с.
7. Верещака С.М. К дискретно-структурной теории многослойных оболочек с дефектами структуры / С.М. Верещака // Вестник НТУ "ХПИ". Сборник научных трудов. Тематический выпуск: Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2004. – № 31. – С. 39 – 46.
8. Кучер Н.К. Деформирование слоистых эпоксидных композитов, армированных однонаправленными волокнами и тканью сатинового переплетения/ Н.К. Кучер, М.П. Немцов, М.Н. Заразовский // Пробл. прочности. – 2006. – № 1. – С. 41 – 58.
9. Кучер Н.К. Оценка прочности слоистых эпоксикарбоволокнитов, армированных однонаправленными волокнами / Н.К. Кучер, М.Н. Заразовский //Пробл. прочности. – 2006. – № 6. – С. 95 – 112.
10. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977.– 416 с.

Надійшла до редакції 29 вересня 2010 р.