

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ  
СУМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

На правах рукописи

Витренко Андрей Николаевич

УДК 531.19

**ВЛИЯНИЕ ДВУХ ВНЕШНИХ ШУМОВ НА  
СТАТИСТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СИЛЬНО  
ЗАТУХАЮЩИХ СИСТЕМ**

01.04.02 – Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., профессор  
Денисов Станислав Иванович

**СУМЫ – 2006**

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
РАЗДЕЛ 1 ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ ЯВЛЕНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И МЕТОДЫ ИХ ОПИСАНИЯ .....	11
1.1. Метод уравнения Ланжевена .....	13
1.2. Типы шумов .....	16
1.3. Метод уравнения Фоккера-Планка.....	20
1.4. Индуцированные шумом неравновесные переходы.....	22
1.5. Аномальная диффузия .....	25
1.6. Стохастические системы с двумя источниками шума .....	28
РАЗДЕЛ 2 НЕРАВНОВЕСНЫЕ ПЕРЕХОДЫ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИЕЙ БЕЛЫХ ШУМОВ.....	31
2.1. Обоснование модели .....	31
2.2. Уравнение Фоккера-Планка и его стационарное решение .....	36
2.3. Нелинейные стохастические системы .....	40
2.3.1. Стохастическая система с линейной восстанавливающей силой и квадратичной мультипликативной функцией в окрестности нуля.....	40
2.3.2. Стохастическая система с кубической восстанавливающей силой и мультипликативной функцией четвертой степени в окрестности нуля.....	49

2.3.3. Стохастическая система с линейной восстанавливающей силой и мультипликативной функцией четвертой степени в окрестности нуля.....	50
2.4. Стохастический нелинейный осциллятор.....	52
2.5. Выводы к разделу 2.....	56
<b>РАЗДЕЛ 3 ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ.....</b>	<b>57</b>
3.1. Обоснование модели.....	57
3.2. Релаксация стохастической системы: приближенные результаты.....	61
3.2.1. Вклад аддитивного шума пренебрежимо мал.....	62
3.2.2. Вклад мультипликативного шума пренебрежимо мал.....	67
3.3. Модель аномальной диффузии частиц в случайном поле скоростей.....	69
3.3.1. Плотность вероятности и ее моменты.....	70
3.3.2. Асимптотическое поведение моментов для больших времен.....	73
3.3.2.1. Случай линейного мультипликативного шума.....	75
3.3.2.2. Случай нелинейного мультипликативного шума.....	79
3.3.3. Подтверждение асимптотического поведения точными результатами.....	82
3.3.3.1. Два аддитивных шума.....	82
3.3.3.2. Аддитивный и линейный мультипликативный шумы.....	83
3.4. Выводы к разделу 3.....	88
<b>РАЗДЕЛ 4 ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ИСТОЧНИКАМИ ЦВЕТНОГО ШУМА.....</b>	<b>90</b>
4.1. Обоснование модели.....	90
4.2. Статистические характеристики системы.....	93

4.2.1. Решение уравнения Ланжевена .....	93
4.2.2. Статистические характеристики шумов .....	95
4.2.3. Плотность вероятности параметра состояния .....	100
4.2.4. Дробные моменты плотности вероятности .....	105
4.3. Асимптотическое поведение для больших времен .....	109
4.4. Гармонический осциллятор с флуктуирующими параметрами .....	115
4.5. Выводы к разделу 4 .....	118
ВЫВОДЫ .....	119
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	121
ПРИЛОЖЕНИЕ А Соответствие между уравнением Ланжевена и уравнением Фоккера-Планка .....	133
ПРИЛОЖЕНИЕ Б Решение нестационарного уравнения Фоккера-Планка .....	139

## ВВЕДЕНИЕ

В последние годы интенсивно исследуются сильно неравновесные открытые системы различной физической природы. Интерес к данному направлению объясняется тем, что при определенных условиях флуктуации окружающей среды, т.е. внешний шум, могут создавать структуры, появление которых невозможно при детерминированном внешнем воздействии. Тем самым проблема *конструктивной роли шума* занимает одно из центральных мест в современной физике.

Первыми указали на данную область исследования В. Хорстхемке (W. Horsthemke) и Р. Лефевр (R. Lefever) [1]. Используя точные результаты, они развеяли основанный на интуиции миф о том, что флуктуации внешней среды могут оказывать лишь дезорганизующее воздействие. Открытые ими индуцированные шумом неравновесные переходы – первый пример явления конструктивной роли шума в нелинейных системах. Более того, эти переходы по некоторым свойствам аналогичны равновесным фазовым переходам и фазовым переходам в неравновесных системах при детерминированных внешних условиях, что позволило авторам говорить о новом классе *фазовых* переходов.

Возможность существования явлений, противоречащих интуиции, вызвала всплеск интереса к изучению сравнительно простых систем, для которых могут быть получены точные результаты. Да и сама теория индуцированных шумом неравновесных переходов сформулирована в рамках некоторых допущений и приближений, а именно: 1) рассматривается пространственно-однородная (нульмерная) система, т.е. ее состояние зависит только от времени; 2) состояние системы достаточно хорошо описывается одной динамической переменной; 3) время корреляции внешних флуктуаций пренебрежимо мало, что позволяет использовать приближение *белого* шума. Физическими системами, идеально удовлетворяющими этим требованиям, являются электрические кон-

туры. Неудивительно, что именно с их помощью были получены первые экспериментальные подтверждения этой теории. Электрические контуры и в настоящее время не утратили свою актуальность при проверке существования новых теоретически предсказанных стохастических явлений.

**Актуальность темы.** Интерес к изучению нульмерных систем в последние годы также стимулируется бурным развитием нанотехнологий, позволяющих конструировать и наблюдать системы в наномасштабе. Среди этой обширной области исследований можно выделить *наномеханические* системы, состояние которых описывается одной динамической переменной. Это, например, зажатая с двух сторон нанобалка, служащая детектором малых сил и масс. Поперечные смещения ее центра масс являются физической реализацией классического затухающего осциллятора Дуффинга [2]. При таких размерах значительны не только внешние флуктуации, но и внутренние, их совместное влияние на движение центра масс учтем посредством двух внешних, в общем случае взаимно коррелированных, шумов с известными статистическими характеристиками.

Известно, что *взаимная корреляция* шумовых источников может качественно изменять статистические свойства различных систем. Особенности ее влияния на индуцированные шумом неравновесные переходы в нелинейных сильно затухающих (передемпфированных, т.е. в пренебрежении инерционными свойствами) системах изучены не до конца.

При изучении эффектов, индуцированных шумом, предполагается, что случайная среда не претерпевает систематической эволюции во времени. Это допущение обычно применимо на протяжении времени наблюдения за системой. Однако возможны отклонения, соответственно возникает интерес исследовать эффекты, обусловленные как флуктуациями среды, так и ее систематическими изменениями. Временная эволюция системы в случайной среде, релаксирующей во времени по степенному закону, ранее не исследовалась.

Приближение белого шума применимо, если время корреляции источника реального шума намного меньше времени релаксации системы. В противном случае флуктуации необходимо учитывать посредством *цветного* шума с ненулевым временем корреляции. Для изучения временной эволюции систем с двумя источниками цветного шума широкое применение получили приближенные методы. Возникает интерес выполнить это исследование в рамках точных результатов.

**Связь работы с научными программами, планами, темами.** Диссертационная работа выполнена на кафедре общей и экспериментальной физике Сумского государственного университета в рамках тематического плана научно-исследовательских работ Министерства образования и науки Украины: тема № 71.01.04.03-05 г/б “Статистические характеристики динамических систем с флуктуирующими параметрами”, № гос. регистрации 0103U000766.

**Цель и задачи исследования.** Цель диссертационной работы состоит в выявлении конструктивного влияния двух шумовых источников шума на статистическое поведение нульмерных систем, описываемых одной динамической переменной. Для достижения поставленной цели в диссертационной работе решаются следующие задачи:

- изучается роль взаимной корреляции белых шумов в явлении неравновесных переходов, индуцированных шумом;
- описывается временная эволюция системы в нестационарной среде, для которой эффективный коэффициент затухания зависит от времени по степенному закону;
- разрабатывается метод, позволяющий получить плотность вероятности для системы с двумя источниками гауссовского цветного шума, которые характеризуются произвольными корреляционными функциями.

*Объектом исследования* является процесс эволюции систем к равновесному состоянию под воздействием двух внешних шумов.

*Предметом исследования* являются нульмерные системы с двумя источниками шума, описываемые одной динамической переменной.

**Методы исследования.** Для упрощения получения точных результатов в диссертационной работе рассматривается случай сильного затухания, соответствующий движению физической системы в достаточно вязкой среде, что позволяет пренебречь массой. Для описания процесса временной эволюции систем с флуктуирующими параметрами используются методы неравновесной статистической физики, а именно: уравнения Ланжевена и Фоккера-Планка. Для выявления неравновесных переходов, обусловленных взаимной корреляцией шумов, применяются методы теории индуцированных шумом неравновесных переходов. Для определения диффузионных режимов находятся статистические моменты плотности вероятности динамической переменной.

**Научная новизна полученных результатов.** Для класса нелинейных систем в приближении взаимно-коррелированных гауссовских белых шумов впервые установлено, что взаимная корреляция может индуцировать неравновесные переходы, а именно одномодальный-бимодальный переход. Причем в ее отсутствии ни один из шумов не вызывает такие качественные изменения в поведении систем. При изучении эволюции линейных систем со степенным во времени коэффициентом затухания рассмотрен процесс, вызванный флуктуациями жесткости, который характеризуется бесконечными статистическими моментами. В зависимости от параметров коэффициента затухания и эффективной интенсивности гауссовского белого шума классифицированы диффузионные режимы. В специальном классе систем впервые обнаружено нетипичное для обычных диффузионных процессов изменение характера диффузии при изменении интенсивности этого шума. Исследована временная эволюция систем с двумя источниками гауссовского цветного шума, которые характеризуются произвольными корреляционными функциями. Для этой цели разработан метод определения интерполяционной формулы для нестационарной плотности веро-



ятности динамической переменной, которая дает точные результаты в случае пренебрежимо малого одного из шумов.

**Практическое значение полученных результатов.** Результаты, полученные в диссертационной работе, расширяют знания о статистических свойствах систем с флуктуирующими параметрами. Совместное влияние внешних и внутренних флуктуаций существенно сказывается на поведении микро- и наносистем, которые могут не только наблюдаться в природе (полимеры, биополимеры, др.), но и конструироваться благодаря прогрессу в развитии технических средств (нанобалки, др.). Точные результаты могут быть использованы для разработки приближенных методов анализа таких систем.

**Личный вклад соискателя.** Работы [5,6] подготовлены диссертантом в соавторстве, а работы [7-11] – самостоятельно при поддержке научного руководителя. В работах [5,6] автор диссертации принял участие в изучении литературных источников, в обсуждении полученных результатов и работе над публикациями. В работе [5] соискатель также принял участие в разработке нового метода вывода уравнения Фоккера-Планка, предложил пример системы, в которой взаимная корреляция шумов может индуцировать неравновесные переходы. В работе [6] в рамках темы диссертации сформулировал задачу о частице в нестационарной среде, получил для общего случая точные выражения плотности вероятности и ее моментов. Также предложил примеры систем, для которых были найдены их явные выражения, обнаружил нетипичное для обычных диффузионных процессов изменение характера диффузии при изменении интенсивности мультипликативного белого шума.

**Апробация результатов диссертации.** Основные результаты диссертационной работы представлялись и докладывались на следующих конференциях:

- Научно-техническая конференция преподавателей, сотрудников и студентов механико-математического факультета СумГУ (Сумы, 2001, 2002, 2004 гг.);

- VII Международная научная конференция “Физические явления в твердых телах” (Харьков, 2005 г.);
- I Международная научно-практическая конференция “Наука и технологии: шаг в будущее – 2006” (Белгород, 2006 г.);
- Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики “Еврика – 2006” (Львів, 2006 р.).

**Публикации.** Основные результаты диссертационной работы изложены в 4 статьях в научных журналах, которые входят в перечень ВАК Украины, и 6 сборниках тезисов конференций.

**Структура диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов, выводов, списка использованных источников из 147 наименований, двух приложений. Полный объем диссертации составляет 142 страницы, содержит 13 рисунков.

## РАЗДЕЛ 1

### ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ ЯВЛЕНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И МЕТОДЫ ИХ ОПИСАНИЯ

Все реальные системы содержат источник шума, фундаментальная причина этого – дискретность строения материи. Поэтому стохастические системы широко встречается в различных науках, таких как физика, химия, биология, экономика, социология и другие [1,3,4]. В классических макроскопических системах, состоящих из великого множества частиц, шум возникает вследствие недостаточных знаний о точных состояниях всех частиц. При исследовании таких систем часто рассматриваются несколько степеней свободы, макроскопические термодинамические параметры, а остальные степени свободы не учитываются. Это приводит к флуктуациям макроскопических параметров, к появлению в системах внутреннего теплового шума, интенсивность которого пропорциональна температуре. Данный подход лежит в основе статистической физики макроскопических равновесных систем [12]. С другой стороны, многие системы не изолированы от окружающих их макроскопических систем, и подвержены их влиянию, которое выражается во флуктуациях параметров систем, в появлении внешнего параметрического шума. Такой подход используется в неравновесной статистической физике открытых систем [13]. Разграничение внутреннего и внешнего шума до некоторой степени условно, и зависит от того, где проводится граница между системой и ее окружением. В квантовых системах шум существует, даже если их состояния точно известны, т.е. когда системы находятся в чистых состояниях [14].

В макроскопических равновесных системах внутренний шум играет важную роль на микроскопическом уровне. Однако флуктуации макроскопических параметров относительно их средних значений очень малы и не влияют на качественные изменения поведения систем. Действительно, относительная флук-

туация этих параметров обратно пропорциональна  $\sqrt{N}$ , где  $N$  – число частиц макроскопической системы. Поэтому при  $N \rightarrow \infty$  макроскопические параметры можно считать практически постоянными во времени и равными своим средним значениям. В противоположность этому, флуктуации внешней среды не зависят от числа частиц  $N$  системы, следовательно, интенсивность внешнего шума может быть значительной в сравнении с интенсивностью внутреннего шума.

Обычно, воздействие шума, внутреннего или внешнего, приводит к нарушению порядка в системах, к ухудшению их функционирования. В качестве примеров можно привести проблемы радиофизики: ограниченность чувствительности усилителей и конечность ширины спектральной линии генераторов [15,16]. Однако интенсивные исследования последних тридцати лет показывают, что шум при некоторых условиях может играть конструктивную роль в поведении нелинейных неравновесных систем, индуцировать новые явления, невозможные в детерминированных системах [17]. Это, например, стохастический резонанс [18-20], при котором происходит усиление слабого периодического сигнала и улучшение отношения сигнал – шум при оптимальной интенсивности шума, и его модификация – резонансная активация [21]. Это уже упомянутые во введении индуцированные шумом переходы [1], при которых плотность вероятности динамической переменной изменяет количество своих экстремумов. Другие примеры: направленный транспорт в пространственно-периодических системах, в так называемых броуновских моторах [22,23], и когерентный резонанс, при котором шум индуцирует осцилляции, когерентные к определенной его интенсивности, в системе без периодической силы [24,25]. Названные явления имеют место в пространственно-однородных (нульмерных) системах, для которых параметр состояния не зависит от пространственных координат, и индуцируются временными флуктуациями. Примеры конструктивной роли шума в пространственно-распределенных системах [26], состоящих из связанных нульмерных систем (осцилляторов), – фазовые переходы [27,28], при которых происходит нарушение симметрии и эргодично-

сти, усиленное шумом распространение гармонического сигнала [29,30] и индуцированное шумом формирование структур [31].

Приведенные примеры демонстрируют, что шум может вызывать множество явлений в стохастических системах. Как правило, в качестве методов их описания используются уравнения Ланжевена и Фоккера-Планка.

### **1.1. Метод уравнения Ланжевена**

Один из методов описания стохастических систем основывается на уравнениях Ланжевена [1-4], т.е. стохастических дифференциальных уравнениях, в которые шум входит в виде случайной силы. Динамическая переменная, характеризующая состояние системы, удовлетворяет этому уравнению и является случайным процессом, который представляет случайные величины для фиксированных моментов времени и детерминированные функции при фиксированных значениях случайных величин. Эти функции называются реализациями, и на физическом языке случайный процесс можно представить как ансамбль таких реализаций. По состоянию системы в начальный момент времени нельзя однозначно определить ее состояние в произвольный момент. Можно говорить о статистических характеристиках параметра состояния: плотности вероятности и ее моментах. Их нахождение при известных начальных условиях и заданных статистических характеристиках шума представляет первоочередную задачу при исследовании статистического поведения систем.

Первым явлением, для описания которого использовалось стохастическое дифференциальное уравнение (Ланжевен), было броуновское движение – быстрое, непрекращающееся, нерегулярное движение небольшой частицы, взвешенной в жидкости [3,4]. Броуновские частицы во внешнем потенциале с одним или несколькими минимумами и заданными барьерами – простейшая модель пространственно однородной стохастической системы. Она находит

широкое применение для описания процессов релаксации во многих физических системах.

Рассмотрим броуновскую частицу для простоты в одном измерении с координатой  $x(t)$  и массой  $m$ . В тоже время при таком подходе все качественные особенности, характерные для двух и трех измерений, сохраняются. На частицу со стороны окружающей среды действует сила вязкого трения  $f_m(t)$  и случайная сила (шум)  $\zeta(t)$ , обусловленная постоянными толчками со стороны молекул жидкости. Для небольших скоростей сила трения пропорциональна скорости  $\dot{x}(t)$  частицы (точка – производная по времени):  $f_m = -\lambda \dot{x}(t)$ , где  $\lambda$  – коэффициент затухания (знак “минус” означает, что сила направлена против движения). Таким образом, обычное уравнение динамики Ньютона для броуновской частицы во внешнем потенциале  $U(x)$  имеет вид

$$m\ddot{x}(t) + \lambda\dot{x}(t) = f(x(t)) + \zeta(t), \quad (1.1)$$

где  $f(x) = -dU(x)/dx$  – внешняя детерминированная сила.

Если рассматривается сферическая броуновская частица с радиусом  $R$ , тогда коэффициент затухания по формуле Стокса равен:  $\lambda = 6\pi\eta R$ , где  $\eta$  – коэффициент вязкости жидкости.

Рассмотрим уравнение Ланжевена (1.1) в линейном приближении,  $f(x) = -kx$ . При условии  $\omega\tau \ll 1$  ( $\omega = \sqrt{k/m}$  – циклическая частота собственных колебаний,  $\tau = 2m/\lambda$  – время релаксации), которое выполняется для многих систем, инерционным слагаемым  $m\ddot{x}(t)$  можно пренебречь, и от уравнения (1.1) перейти к уравнению в приближении сильного затухания:

$$\lambda\dot{x}(t) = f(x(t)) + \zeta(t). \quad (1.2)$$

Внутренний шум  $\zeta(t)$  входит аддитивно в соответствующее стохастическое уравнение движение. С другой стороны, (1.2) без источника шума представляет

собой детерминированное уравнение Ландау-Халатникова [32], впервые предложенное для описания релаксации неравновесных термодинамических систем в стационарное состояние [33]. При этом  $x(t)$  является параметром порядка, а потенциал  $U(x)$  – свободной энергией Ландау. Таким образом, уравнение (1.2) с шумом учитывает флуктуации системы вблизи стационарного состояния.

Внешний шум следует из стохастической природы внешнего поля. Например, для случая случайного во времени квадратичного потенциала можно записать:  $U = (k - \zeta(t))x^2/2$ . Таким образом, в этом примере внешнюю силу можно представить в виде линейного детерминированного слагаемого  $-kx$  и случайного  $x\zeta(t)$ . В общем случае внешняя среда действует на систему посредством управляющего параметра  $\zeta$ , который входит в функцию внешней силы  $f_\zeta(x)$  [1,33]. Раскладывая ее в ряд, в линейном приближении можно записать  $f_\zeta(x) = f(x) + \zeta g(x)$ . Для учета флуктуаций внешней среды, управляющему параметру нужно придать свойства случайности. С учетом этого в приближении сильного затухания уравнение Ланжевена с внешним шумом  $\zeta(t)$  примет вид

$$\lambda \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))\zeta(t). \quad (1.3)$$

Таким образом, внешний шум мультипликативный: он входит в уравнение Ланжевена в виде слагаемого, умноженного на некоторую произвольную амплитуду флуктуаций  $g(x)$ , зависящую от параметра состояния системы (координаты частицы). Если  $g(x) \equiv 1$  при всех значениях  $x$ , тогда уравнение (1.3) с мультипликативным шумом переходит в уравнение (1.2) с аддитивным шумом.

Для исследования поведения систем различной физической природы придадим уравнению (1.3) универсальный характер, обезразмерив его [1,3,4,34]:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) + G(x(t))\check{\zeta}(t), \quad (1.4)$$

где  $F(x)$  и  $G(x)$  – детерминированная сила и мультипликативная функция, которые могут явно зависеть от времени  $t$ ;

$\zeta(t)$  – мультипликативный шум с известными статистическими характеристиками.

Уравнения Ланжевена первого порядка вида (1.4) значительно проще для аналитического исследования, чем полные уравнения второго порядка. Чтобы определить статистические характеристики неизвестного случайного процесса  $x(t)$ , необходимо предварительно из физических предпосылок определить свойства шума  $\zeta(t)$ .

## 1.2. Типы шумов

При рассмотрении движения броуновской частицы в жидкости, масса молекулы которой много меньше массы частицы, можно считать, что столкновения молекул с частицей равновероятны для всех окружающих ее молекул и практически мгновенны. Следовательно, среднее значение случайной силы  $\zeta(t)$  в уравнении движения броуновской частицы (1.1) равняется нулю,  $\langle \zeta(t) \rangle = 0$ , а мгновенные значения не коррелируют друг с другом, т.е. корреляционная функция имеет вид

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\Delta\delta(t-t'), \quad (1.5)$$

где угловые скобки  $\langle \cdot \rangle$  означают усреднение по ансамблю реализаций шума  $\zeta(t)$ ;

$\Delta$  – интенсивность шума;

$\delta(t)$  – дельта-функция Дирака.



Случайная сила с указанными свойствами называется белым шумом, так как в спектре ее колебаний интенсивности всех частот представлены в равной степени, как и в оптическом спектре белого света.

Так как сила трения и случайная сила в уравнении (1.1) порождаются одной и той же средой, то они зависят друг от друга. Согласно статистическому закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы можно утверждать, что среднее значение кинетической энергии броуновской частицы, совершающей одномерное движение, в состоянии равновесия составляет величину:  $\langle m\dot{x}^2(t)/2 \rangle = k_B T / 2$ , где  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура. Используя формальное решение уравнения (1.1) при  $f(x)=0$ , можно получить:  $\langle \dot{x}^2(t) \rangle = \Delta / (m\lambda)$ . Таким образом, приходим к флуктуационно-диссипативной теореме, связывающей интенсивность аддитивного белого шума и параметр затухания:  $\Delta = \lambda k_B T$ . Нужно отметить, что это соотношение не зависит от массы броуновской частицы, и для системы, описываемой уравнением Ланжевена (1.2) в пределе сильного затухания, флуктуационно-диссипативная теорема имеет такой же вид.

Существует несколько типов белых шумов, одни из которых дробовой шум [3]. Его можно представить в виде суммы дельта-функций, «срабатывающих» в случайные моменты времени. Он был впервые использован для объяснения нестационарности электрического тока в радиолампах. Другой тип белого шума – гауссовский. Действительно, согласно центральной предельной теореме [35], можно утверждать, что шум будет обладать гауссовскими свойствами. Он играет важную роль и имеет отличительную особенность. Эволюция системы, описываемая уравнением Ланжевена (1.4) с гауссовским белым шумом, является марковским процессом [34,36], а это значительно упрощает аналитическое изучение статистического поведения системы. Этому уравнению можно поставить в соответствие статистически эквивалентное уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности, тем самым перейти от рассмотрения

вероятностного уравнения к детерминированному, общее стационарное решение которого можно получить лишь для пространственно-однородного случая. Эти два уравнения, дополняя друг друга, находят широкое применение для описания многих явлений в системах, подверженных воздействию реального шума со временем корреляции, значительно меньшим времени релаксации системы.

Однако белый шум имеет некоторые нефизические свойства. Например, из выражения (1.5) следует, что его время корреляции равняется нулю, т.е. каждое последующее значение шума не зависит от предыдущего. С другой стороны дисперсия, характеризующая разброс значений шума, равняется бесконечности. В дополнение к этому, так как интенсивность белого шума постоянна для всех значений частот, в том числе и бесконечно больших, то полная мощность шума равняется бесконечности. Все это приводит к тому, что в некоторых случаях применение гауссовского белого шума не оправдывается. Возникает необходимость в рассмотрении так называемого цветного шума с конечным ненулевым временем корреляции [37]. Гауссовский процесс Орнштейна-Уленбека наиболее широко используется в исследованиях. Он имеет экспоненциальную корреляционную функцию:

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{2\Delta}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \quad (1.6)$$

где  $\tau$  – время корреляции.

В пределе  $\tau \rightarrow 0$  процесс Орнштейна-Уленбека переходит в гауссовский белый шум, т.е. корреляционная функция (1.6) сводится к дельта-функции (1.5). Также нужно отметить, что согласно теореме Дуба [36], процесс Орнштейна-Уленбека обладает свойством марковости. Это позволяет для уравнения Ланжевена с экспоненциально коррелированным гауссовским шумом предложить приближенные методы, с помощью которых можно записать соответствующее уравне-

ние Фоккера-Планка [38-40]. Еще один пример цветного шума – дихотомический шум или телеграфный процесс. Это дискретный марковский процесс с экспоненциальной корреляционной функцией. Другой пример гауссовского цветного шума характеризуется алгебраической (степенной) корреляционной функцией, пропорциональной  $t^{-\beta}$  ( $\beta$  – некоторый положительный параметр). Он имеет место, например, в случае броуновского движения частицы в плотной жидкости или жидкости, для которой масса ее молекулы сравнима с массой частицы [41]. Также степенная корреляционная функция встречается при рассмотрении радиальных столкновениях атомных ядер [42], в молекулярной динамике – в проблеме рассеивания внутри периодической кристаллической решетки [43]. В общем случае стационарный гауссовский цветной шум с нулевым средним значением и произвольной корреляционной функцией

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = K(t-t') \quad (1.7)$$

является универсальной моделью флуктуирующей среды.

Если гауссовский цветной шум с произвольной корреляционной функцией вида (1.7) является внутренним, как в случае броуновской частицы, тогда обыкновенное уравнение Ланжевена (1.1) трансформируется в обобщенное уравнение Ланжевена [44-47]:

$$m\ddot{x}(t) + \int_0^t \lambda(t-t')\dot{x}(t')dt' = f(x(t)) + \zeta(t), \quad (1.8)$$

где  $\lambda(t)$  – ядро памяти силы трения.

Обобщенная флуктуационно-диссипативная теорема в этом случае имеет вид [48]

$$K(t-t') = 2k_B T \lambda(t-t').$$

Если эффект памяти отсутствует, тогда ядро памяти можно представить в виде  $\lambda(t-t') = \lambda\delta(t-t')$ , и уравнение (1.8) перейдет в уравнение (1.1). А случайная сила в этом случае будет характеризоваться корреляционной функцией в виде дельта-функции. Если же шум порождается внешней средой, т.е. сила трение и случайная сила имеют разные источники, тогда флуктуационно-диссипативная теорема не выполняется и переходить к обобщенному уравнению Ланжевена нет необходимости.

Стохастические системы с источником цветного шума часто демонстрируют поведение, которое не соответствует интуитивным представлениям, основанным на опыте изучения систем с источником белого шума, поэтому особенное значение приобретают точные результаты. Известны точные статистические характеристики для ряда простых систем: частиц, совершающих одномерное движение без трения [49] и с трением [50,51] под воздействием аддитивного гауссовского цветного шума; частиц, совершающих одномерное движение в условиях большого трения в квадратичном потенциале под воздействием мультипликативного гауссовского цветного шума [52]. Оказывается, что цветной шум может качественно изменять поведение системы: свободные частицы демонстрируют аномальную диффузию [49-54].

### 1.3. Метод уравнения Фоккера-Планка

Первое удовлетворительное объяснение природы броуновского движения было предложено Эйнштейном в рамках статистического подхода [3]. Хотя Больцман и Максвелл уже использовали статистику в своих работах, но не для временной эволюции системы. Эйнштейн записал дифференциальное уравнение диффузии для плотности вероятности координаты частицы и, выразив характеризующий флуктуации параметр (коэффициент диффузии) через диссипативную характеристику (коэффициент трения), доказал флуктуационно-

диссипативную теорему для равновесных систем. Впоследствии, многое из того, что было им использовано, получило развитие в сторону общности и строгости. Уравнение диффузии, выведенное Эйнштейном, было обобщено Фоккером, Смолуховским, Планком, и в дальнейшем математически строго обосновано Колмогоровым. Уравнение Фоккера-Планка в настоящее время занимает центральное место в теории марковских процессов [34,36], т.е. процессов, для которых значения в последующие моменты времени зависят от значения в настоящий момент времени, и никак не зависят от значений в предшествующие моменты времени.

В случае мультипликативного шума, т.е.,  $G(x)$  не является константой, эффект шума зависит от состояния системы. А для мультипликативного белого шума уравнение Ланжевена (1.4) не имеет смысла, пока не будет принято соответствующее исчисление этого уравнения. Для этого должен точно быть определен параметр  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ), определяющий моменты времени, в которых вычисляются значения функции  $G(x(t))$  в соответствующей интегральной сумме. Только в этом случае уравнение Ланжевена может быть однозначно проинтегрировано для получения выборочной реализации (траектории) параметра состояния системы. Это также позволит однозначно связать с уравнением (1.4) статистически эквивалентное уравнение Фоккера-Планка, которое имеет вид [1-4,34]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [F(x) + H(x)]P(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D(x)P(x, t), \quad (1.9)$$

где  $P(x, t)$  – одномерная плотность вероятности того, что  $x(t) = x$ ;

$H(x) = 2\gamma \Delta G'(x)G(x)$  – индуцированный шумом коэффициент сноса;

штрих означает производную по аргументу функции;

$2D(x) = 2\Delta G^2(x)$  – коэффициент диффузии.

В большинстве случаев для уравнения (1.4) выбираются значения  $\gamma = 0$  и  $\gamma = 1/2$ , соответствующие исчислению Ито [55] и Стратоновича [56]. Однако, выбор других значений возможен, и Климонтович [13], например, обсудил случай  $\gamma = 1$ , так называемую кинетическую форму уравнений Ланжевена и Фоккера-Планка. Исчисление Стратоновича имеет важную особенность, к ней можно прийти, устремив к нулю время корреляции реального шума, потому уравнения Ланжевена в исчислении Стратоновича находят широкое применение в физике. К тому же в рамках этого подхода к случайным процессам применимы обычные правила интегрирования и дифференцирования, как и в случае гладких детерминированных функций. Уравнение (1.4) с выбранным значением для параметра  $\gamma$  представляет полноценный инструмент для описания многих явлений, в которых временные флуктуации играют конструктивную роль.

Нужно отметить, если рассматривается гауссовский цветной шум, временная эволюция системы не является марковским процессом, но, тем не менее, в некоторых частных случаях ее одномерная плотность вероятности удовлетворяет обычному уравнению Фоккера-Планка с коэффициентом диффузии, зависящим от времени [52,57-59].

#### **1.4. Индуцированные шумом неравновесные переходы**

Как отмечалось ранее, неравновесные переходы, индуцированные шумом, – пример явления, не имеющего аналога в детерминированной динамике. Необходимыми условиями его существования являются нелинейность пространственно-однородной системы и мультипликативность шума.

Следуя уравнению Фоккера-Планка (1.9), равновесная плотность вероятности имеет вид

$$P_{st}(x) = \frac{1}{ND(x)} \exp \left[ \int_0^x dy \frac{F(y) + H(y)}{D(y)} \right], \quad (1.10)$$

где  $N$  – константа нормировки.

Запишем уравнение, определяющее точки экстремумов плотности вероятности (1.10):

$$F(x) - 2(1 - \gamma)\Delta G'(x)G(x) = 0. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) в случае аддитивного шума, т.е.  $G(x) = \text{const}$ , совпадает с уравнением  $F(x) = 0$ , определяющим точки равновесия детерминированной системы. Поэтому аддитивный шум не может изменить характер ее динамики: наиболее вероятные состояния системы будут соответствовать точкам устойчивого равновесия. Напротив, этого совпадения нет, если шум – мультипликативный, и выполняются дополнительные условия: соответствующее уравнение Ланжевена нелинейное и рассматривается в исчислении Ито ( $\gamma = 0$ ) либо Стратоновича ( $\gamma = 1/2$ ). Поэтому воздействие мультипликативного шума может привести к тому, что наиболее вероятные состояния нелинейной системы будут не совпадать с ее детерминированными равновесными состояниями. Более того, могут возникнуть новые или исчезнуть существующие состояния. Такие изменения в асимптотическом поведении системы называются индуцированными шумом неравновесными переходами [1,28]. Они происходят при  $\Delta = \Delta_{cr}$ , где  $\Delta_{cr}$  – критическое значение интенсивности мультипликативного шума, если число локальных максимумов равновесной плотности вероятности  $P_{st}(x)$  для  $x(t)$  является различным при  $\Delta = \Delta_{cr} - 0$  и при  $\Delta = \Delta_{cr} + 0$ .

Равновесную плотность вероятности (1.10) можно представить в экспоненциальной форме Больцмана:  $P_{st}(x) = 1/N \exp[-U_{ef}(x)/\Delta]$ , где роль температуры играет интенсивность шума  $\Delta$ ,  $U_{ef}(x)$  – эффективный потенциал, который имеет вид

$$U_{ef}(x) = -\Delta \int_0^x dy \frac{F(y)}{D(y)} + \Delta(1-\gamma) \ln D(x). \quad (1.12)$$

Если шум – аддитивный, тогда эффективный потенциал с точностью до константы совпадает с детерминированным,  $U(x) = -\int_0^x dy f(y)$ , и наиболее вероятные состояния системы соответствуют минимумам потенциальной энергии,  $U'(x) = 0$ . В свою очередь мультипликативный шум видоизменяет потенциал системы, и ее наиболее вероятные состояния, определяемые минимумами эффективного потенциала (1.12), будут соответствовать точкам устойчивого равновесия детерминированной системы, описываемой дифференциальным уравнением  $\dot{x} = -U'_{ef}(x)$ . Эти точки находятся из уравнения  $U'_{ef}(x) = 0$ , которое имеет вид (1.11), условие  $U''(x) > 0$  соответствует устойчивому состоянию, а условие  $U''(x) < 0$  – неустойчивому. Так как в этом уравнении появляется в виде параметра интенсивность шума, то ее изменение может приводить к бифуркациям в системе. Как правило, для случая с одной степенью свободы встречаются только четыре типа бифуркаций: тангенциальная, смена устойчивости, бифуркация удвоения и обратная бифуркация удвоения [60]. Соответственно к неравновесным переходам относятся индуцированный шумом сдвиг точки перехода и чисто индуцированный шумом одномодальный-бимодальный переход.

После того как в 1977 году В. Хорстхемке (W. Horsthemke) и Р. Лефевр (R. Lefever) теоретически предсказали существование явления индуцированных шумом неравновесных переходов [61], оно экспериментально обнаружено в аналоговых цепях [62], электрическом параметрическом осцилляторе [63,64]. Так же оно может иметь место в нелинейной оптике и гидродинамических системах [1]

Нужно отметить, что такие переходы по некоторым свойствам (критические точки, показатели) аналогичны фазовым переходам в равновесных системах (например, ферромагнитный переход) и неравновесных системах при де-



терминированных внешних условиях (например, неустойчивости Бенара, лазерный переход). С другой стороны они не являются фазовыми в термодинамическом смысле, так как не содержат разрыв эргодичности. В самом деле, в пространственно-однородных системах плавное изменение интенсивности шума приводит к непрерывному переходу от одного наиболее вероятного состояния к другому. Истинные фазовые переходы могут наблюдаться только в пространственно-распределенных системах [27,28].

### 1.5. Аномальная диффузия

Как известно, броуновское движение приводит к диффузии частиц, т.е. к выравниванию концентрации, роль которой играет вероятность нахождения частицы в том или ином элементе объема жидкости [65]. Причем средний квадрат смещения частиц описывается линейной зависимостью от времени:

$$\langle(\Delta\mathbf{r})^2\rangle=\langle(\mathbf{r}-\langle\mathbf{r}\rangle)^2\rangle=2dD_1t, \quad (1.13)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор частицы;

$d$  – пространственное измерение;

$D_1$  – коэффициент диффузии размерности  $\text{см}^2\text{с}^{-1}$ .

Такое диффузионное поведение присуще многим физическим, химическим, биологическим, экономическим и другим системам [1,3,4]. Главным инструментом его понимания является модель случайных блужданий, предложенная Пирсоном. Согласно этой модели частица совершает скачки одинаковой длины в любом направлении через одинаковые промежутки времени. Плотность вероятности ее положения в пределе непрерывного времени имеет гауссовскую форму и описывается уравнением диффузии. Соответствующее уравнение

Ланжевена имеет простейшую форму с постоянным коэффициентом затухания и аддитивным гауссовским белым шумом [66].

Однако с середины 70-х годов прошлого столетия начинают накапливаться примеры диффузионных систем, для которых закон (1.13) не выполняется. В настоящее время существует множество процессов, описываемых так называемой аномальной диффузией (для обзора, см., например, [67-69]), для которых

$$\langle(\Delta\mathbf{r})^2\rangle=\langle(\mathbf{r}-\langle\mathbf{r}\rangle)^2\rangle=2dD_\nu t^\nu,$$

где  $D_\nu$  – обобщенный коэффициент диффузии размерности  $\text{см}^2\text{с}^{-\nu}$ ;

$\nu$  – показатель аномальной диффузии,  $\nu \neq 1$ .

Согласно общепринятой терминологии, случай  $\nu > 1$  называется супердиффузией (диффузия более быстрая в сравнении с нормальной диффузией), а случай  $0 < \nu < 1$  – субдиффузией (диффузия более медленная в сравнении с нормальной диффузией).

Первым известным примером субдиффузии стал транспорт электронов и вакансий в аморфных полупроводниках под действием электрического поля [70,71]. Ученые Х. Шер (H. Scher) и Э. Монтролл (E. Montroll) обнаружили [70], что заряды при движении захватываются локальными неоднородностями, из которых освобождаются благодаря тепловым флуктуациям. Причем время пребывания в ловушках более длительное, чем это следует из классической картины диффузии. Для описания этого процесса они предложили модель непрерывных случайных блужданий со степенным распределением Паретто-Леви для времени ожидания между скачками. Другие примеры субдиффузионных процессов: транспорт на объектах с фрактальной геометрией [72,73], рассеивание примеси в пространственно периодическом потоке жидкости [74], динамика дробы в полимерах [75], и др.

Классический пример супердиффузионного процесса – парная диффузия Ричардсона [76,77]: две частицы, двигаясь в турбулентной жидкости, удаляют-

ся друг от друга за время  $t$  на расстояние  $l$  друг от друга, причем  $\langle l^2(t) \rangle \propto t^3$ . Это явление было впервые экспериментально обнаружено еще в 1926 году Ричардсоном [76], а теоретическое объяснение получило в 1987 году в концепции непрерывных случайных блужданий, при которых частица остается в движении с постоянной скоростью без изменения направления в течение случайного времени, распределенного по закону Паретто-Леви (блуждания Леви) [77]. К настоящему времени супердиффузия обнаружена в хаотичных системах [78,79], в случайных полях скорости [80], во вращающихся потоках жидкости [81,82], внутри живой клетки [83], на поверхности твердых тел [84], в квантовой оптике [85], и др.

Существует несколько общих методов для описания явления аномальной диффузии. Первый из них основывается на дробном исчислении и включает в себя дробные диффузионные уравнения [86,87], дробные уравнения Фоккера-Планка [88-91] или дробные уравнения Ланжевена [92-93]. Другой метод исходит из обобщенных обыкновенных уравнений Ланжевена. Он очень удобен для рассмотрения диффузионного поведения и особенно информативен, если могут быть получены точные решения этих уравнений [49,50,52,94]. Помимо указанных стохастических систем с источником цветного шума, этот метод применялся также для изучения аномальной диффузии в системах, описываемых обобщенным уравнением Ланжевена с ядром памяти силы трения [95-101]. Нужно также отметить сравнительно простые модели, описываемые обыкновенными уравнениями Ланжевена: 1) с аддитивным гауссовским белым шумом и изменяющимся во времени по степенному закону гармоническим потенциалом [102]; 2) с мультипликативным гауссовским белым шумом, амплитуда флуктуаций которого зависит от координаты и времени, в частности, по степенному закону [103]. Последний случай соответствует диффузии в комплексных системах, таких как турбулентная жидкость. В рамках данных моделей описывается широкий класс диффузионных процессов, в частности суб- и супердиффузионных, затянутых и сжатых экспоненциальных.

Если система эволюционирует во внешнем детерминированном потенциале, то в зависимости от его формы, может наблюдаться как диффузионное поведение, так и релаксация к стационарному состоянию. В последнем случае, как правило, наблюдаются стохастические процессы с классическим экспоненциальным законом релаксации  $\langle x(t) \rangle = x_0 \exp(-t/\tau)$ , где  $\tau$  – время релаксации. Однако, возможны и другие законы, например, затянута экспоненциальная релаксация (stretched exponential)  $\langle x(t) \rangle = x_0 \exp[-(t/\tau)^\alpha]$ , где  $0 < \alpha < 1$ ; степенная релаксация  $\langle x(t) \rangle = x_0 (1 + t/\tau)^{-n}$ , где  $n > 0$ .

### 1.6. Стохастические системы с двумя источниками шума

В последние годы интенсивно исследуются свойства стохастических систем с двумя источниками гауссовского белого шума. Метод уравнений Ланжевена является эффективным инструментом для изучения многих эффектов в таких системах. Если один из шумов – внутренний, а другой – внешний, то шумы независимы друг от друга. Их совместное действие может вызывать новые эффекты, например, двойной (doubly) стохастический резонанс [104], при котором мультипликативный шум индуцирует бимодальность, а аддитивный – стохастический резонанс; индуцированную мультипликативным шумом сверхчувствительность к слабым периодическим сигналам [105,106]; подавление шумового фона в нединамической стохастической системе внешним шумом [107].

Если шумы порождаются одной флуктуирующей средой, то они могут быть коррелированы [108,109], как в случае системы с двумя устойчивыми состояниями, для которой флуктуации некоторых параметров модели эквивалентны воздействию коррелированных аддитивного и мультипликативного шумов [109]. Взаимная корреляция играет важную роль в одномодовом лазере [110-111], в явлениях индуцированного шумом транспорта классических [112-

114] и квантовых [115] частиц, резонансной активации [116], стохастического резонанса [19,117-120], фазовых переходов в пространственно-распределенных системах [121]. В [122-124] изучаются различные нелинейные стохастические системы с двумя гауссовскими белыми шумами; показывается, что аддитивный шум, коррелированный или некоррелированный с мультипликативным шумом, может индуцировать неравновесные переходы. В [125] рассматривается система с двумя устойчивыми состояниями и экспоненциальной корреляцией между белыми шумами; устанавливается, что при определенных значениях времени корреляции в системе параметр корреляции индуцирует реверсивные неравновесные переходы. Возможность существования неравновесных переходов, индуцированных взаимной корреляцией белых шумов, в пространственно-однородных системах с одним устойчивым состоянием, в которых некоррелированные шумы не могут вызвать такие качественные изменения в их поведении, ранее не изучалась. Для уравнения Ланжевена с двумя взаимно-коррелированными гауссовскими белыми шумами в исчислении Стратоновича соответствующее уравнение Фоккера-Планка выведено [108,126-128]. При этом уравнение Ланжевена с двумя шумами может быть сведено к уравнению Ланжевена с одним шумом вида (1.4).

Однако в некоторых случаях требуется рассматривать источники цветного и белого шума, как, например, при изучении индуцированного шумом неравновесного транспорта [129,130], удвоенного (double) стохастического резонанса [131], подавления шума в динамической стохастической системе внешним цветным шумом [132]. Процесс Орнштейна-Уленбека с экспоненциальной корреляционной функцией широко используется в качестве гауссовского цветного шума. Для вывода соответствующего уравнения Фоккера-Планка используются приближенные методы, как и для систем с одним цветным шумом [38-40]. В рамках этих приближений изучены стохастическая система, возбуждаемая двумя процессами Орнштейна-Уленбека, в случае, если корреляция шумов и взаимная корреляция имеют одинаковое время корреляции [133,134],

стохастическая система с экспоненциальной корреляцией между белым шумом и шумом Орнштейна-Уленбека [135]. Для систем с двумя гауссовскими цветными шумами с произвольными корреляционными функциями не существует общих методов нахождения точных статистических характеристик. Поэтому рассмотрение частных случаев, для которых их можно записать, представляет интерес.

Таким образом, с учетом вышесказанного можно сделать вывод, что особенности влияния двух внешних шумов на статистическое поведение сильно затухающих пространственно-однородных систем изучены не в полном объеме. А именно, не изучена роль взаимной корреляции в явлении индуцированных шумом неравновесных переходов, не исследованы особенности временной эволюции систем в среде, аномально релаксирующей к стационарному состоянию, также не рассмотрена временная эволюция стохастических систем с двумя источниками цветного шума, для которых могут быть получены точные статистические характеристики. Решению этих проблем посвящена данная диссертационная работа.

## РАЗДЕЛ 2

### НЕРАВНОВЕСНЫЕ ПЕРЕХОДЫ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИЕЙ БЕЛЫХ ШУМОВ

#### 2.1. Обоснование модели

Рассмотрим осцилляторы с одной степенью свободы, т.е. частицы, совершающие одномерное движение под действием восстанавливающей силы. В простейшем случае квазилинейной силы имеем гармонический осциллятор, уравнение движения которого с учетом затухания имеет вид

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (2.1)$$

где  $x(t)$  – координата частицы;

$\lambda$  – коэффициент затухания;

$\omega_0$  – частота собственных колебаний.

Решение уравнения (2.1) можно представить в виде

$$x(t) = c_1 e^{(-\lambda+i\omega)t} + c_2 e^{(-\lambda-i\omega)t}, \quad (2.2)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – некоторые константы, зависящие от начальных значений координаты и скорости;

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$  – частота затухающих колебаний.

При  $\lambda > \omega_0$  корни уравнения (2.2) действительные, частицы совершают аperiодическое затухание. Рассмотрим случай сильного затухания,  $\lambda \gg \omega_0$  или  $\omega_0 \tau \ll 1$ , где  $\tau$  – время релаксации системы. В этом случае уравнение (2.2) пере-

писывается (с точностью до первого исчезающего малого слагаемого в показателе степени второго частного решения):

$$x(t) = c_1 e^{-2\lambda t} + c_2 e^{-\frac{\omega_0^2}{2\lambda} t}. \quad (2.3)$$

В уравнении (2.3) множитель в показателе степени первого частного решения значительный, поэтому это решение быстро становится пренебрежимо малым. Во втором решении, напротив, множитель в показателе степени очень мал по модулю, поэтому это решение медленно спадает во времени. Затухание балансирует с гармонической силой, скорость остается постоянной на малых временных масштабах. Поэтому, эффект инерции важен в первое мгновение после начала движения. Затем при  $t \gg (2\lambda)^{-1}$  им можно пренебречь, первое частное решение в (2.3) спадает до нуля. Координата частицы описывается уравнением

$$x(t) \sim \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2\lambda} t\right), \text{ которое может быть получено из уравнения движения (2.1) в}$$

пренебрежении инерционным слагаемым  $\ddot{x}(t)$ :

$$2\lambda \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение движения (2.4) описывает сильно затухающий гармонический осциллятор, т.е. частицу, совершающую одномерное движение в условиях большого трения под действием квазилинейной восстанавливающей силы. Возможна подобная терминология: 1) сильно демпфированный осциллятор (Гардинер [3]); 2) передемпфированный осциллятор (Гинзбург [106]); 3) сверхзаторможенная частица, т.е. частица, для которой скорость пропорциональна силе (Ван Кампен [4]). Вводя новый безразмерный временной масштаб  $t' = 2\lambda t$  (в дальнейшем штрих опускается), обезразмерим уравнение (2.4). Получим  $\dot{x} = -ax$ , где  $a$  – безразмерный коэффициент восстанавливающей силы.



При рассмотрении систем малых масштабов значительными становятся флуктуации ее параметров, которые необходимо учитывать. Рассмотренное выше уравнение сильно затухающего гармонического осциллятора с учетом флуктуаций примет вид

$$\dot{x} = -[a - \xi_1(t)]x + \xi_2(t), \quad (2.5)$$

где  $\xi_1(t)$  – линейный мультипликативный шум (флуктуация частоты, вызванная случайностями в эффективной “пружинке”);

$\xi_2(t)$  – аддитивный шум (случайная сила, обусловленная толчками со стороны окружающих частицу молекул).

Уравнение (2.5) описывает, например, малые упругие поперечные смещения центров масс протяженных механических систем микро- и наномасштаба (нанобалки, др.) в достаточно вязкой среде. Образом указанных физических систем является частица на “пружинке”. При своем движении во внешнем флуктуирующем гармоническом потенциале частица вызывает изменения в состоянии тепловой бани, которая, в свою очередь, также воздействует на нее посредством внутреннего аддитивного шума. Таким образом, частица находится под влиянием внешнего шума и внутреннего шума, модифицированного внешним. Это можно приближенно учесть, рассматривая частицу в поле двух взаимно-коррелированных шумов. Если время релаксации системы  $a^{-1}$  много меньше времени релаксации источников шума, тогда применимо приближение белого шума, т.е. шума с нулевым временем корреляции. В большинстве случаев флуктуации обусловлены множеством факторов, что приводит к гауссовским распределениям. Таким образом, гауссовский белый шум – приемлемая, как правило, идеализация реального шума с малым временем корреляции.

Нужно отметить, что уравнение (2.5) классифицируется как осциллятор лишь в том случае, если для любых моментов времени  $a - \xi_1(t) > 0$ , что накладывает некоторые ограничения на флуктуации, которые не должны изменить вос-

становливающий характер силы. В противном случае смещения частицы перестанут быть малыми, что повлечет за собой необходимость учета членов более высокого порядка в разложении внешнего потенциала.

Уравнение (2.5) в отсутствии флуктуаций, т.е.  $\xi_1(t) \equiv 0$  и  $\xi_2(t) \equiv 0$  при всех значениях времени  $t$ , является линеаризованным макроскопическим уравнением движения замкнутой неравновесной системы, описывающим процесс ее релаксации [12]. Предполагается, что в любой момент времени состояние системы полностью определяется классической величиной  $x$ , а физическая природа системы целиком зависит от природы этой величины. Нужно отметить, что пренебрежение внутренними флуктуациями справедливо лишь для больших в сравнении со средними равновесными флуктуациями  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$  значений величины  $x$ . При произвольных же значениях  $x$ , включающих окрестность равновесного состояния, необходимо учитывать флуктуации скорости – неучтенные степени свободы системы, приводящие к аддитивному шуму  $\xi_2(t)$ . В дополнение, макроскопическая система может быть открытой и взаимодействовать с окружающими ее макроскопической средой, случайности в которой приведут к флуктуациям параметра  $a$  и к появлению линейного мультипликативного шума. Таким образом, уравнение (2.5) описывает релаксацию открытой неравновесной системы к стационарному состоянию. Предполагается, что эта система: 1) является пространственно-однородной, т.е. параметр состояния  $x$  зависит от времени и не зависит от радиус-вектора; 2) достаточно хорошо описывается одной степенью свободы; 3) флуктуации параметров системы учитываются посредством гауссовских белых шумов.

Придадим уравнению (2.5) канонический общий вид, рассмотрев произвольный внешний потенциал и взаимно-коррелированные мультипликативные шумы с произвольными амплитудами флуктуаций. Безразмерное уравнение Ланжевена имеет вид

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^2 g_i(x(t)) \xi_i(t), \quad (2.6)$$

где  $x(t)$  – параметр состояния системы (динамическая переменная);

$f(x)$  – детерминированная сила,  $f(x) = -U'(x)$ ;

$U(x)$  – детерминированный потенциал;

$g_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) – мультипликативные функции (амплитуды флуктуаций), которые характеризуют воздействие шумов в зависимости от параметра состояния;

$\xi_i(t)$  – внешние гауссовские белые шумы, средние значения которых равняются нулю, а корреляционные функции имеют вид

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2\Delta_{ij} \delta(t - t'), \quad (2.7)$$

где матрица  $\Delta_{ij}$  записывается в следующей форме

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & r\sqrt{\Delta_1\Delta_2} \\ r\sqrt{\Delta_1\Delta_2} & \Delta_2 \end{pmatrix},$$

$\Delta_1 (\geq 0)$  и  $\Delta_2 (\geq 0)$  – интенсивности шумов  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$ , соответственно;

$r$  – коэффициент корреляции между  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$ .

Уравнение (2.6) описывает одномерное движение классических частиц с координатой  $x(t)$  в условиях большого трения в детерминированном потенциале  $U(x)$ , возмущаемом двумя взаимно-коррелированными мультипликативными шумами  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$ . Если потенциал  $U(x)$  имеет одно или несколько устойчивых состояний, причем  $U(-\infty) = U(\infty) = \infty$ , тогда уравнение (2.6) описывает сильно затухающие стохастические осцилляторы. Нужно отметить, что сила  $f(x)$  и амплитуды флуктуаций  $g_i(x)$  могут также явно зависеть от времени.

## 2.2. Уравнение Фоккера-Планка и его стационарное решение

Динамику частиц можно описывать через плотность вероятности для состояний, удовлетворяющей уравнению Фоккера-Планка. В случае мультипликативных гауссовских белых шумов существует бесконечное число уравнений Фоккера-Планка, соответствующих уравнению Ланжевена (2.6). Для того, чтобы установить однозначное соответствие, примем, что каждый гауссовский белый шум  $\xi_i(t)$  характеризуется своим собственным параметром  $\gamma_i$  ( $0 \leq \gamma_i \leq 1$ ), определяющим моменты времени, в которых вычисляются значения мультипликативной функции  $g_i(x(t))$  в соответствующей интегральной сумме. Представим уравнение Ланжевена (2.6) в виде разностной схемы (А.1) (Приложение А). Уравнение Фоккера-Планка примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x) + h(x)]P(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} d(x)P(x, t), \quad (2.8)$$

где функции  $h(x)$  и  $d(x)$  определяются выражениями (А.7) и (А.8), соответственно.

Так как статистические характеристики (средние значения и интенсивности) флуктуаций принимаются постоянными во времени, то можно ожидать, что по истечении достаточно долгого времени стохастическая система, описываемая уравнением Ланжевена (2.6), достигнет стационарного состояния. Это означает, что при  $t \rightarrow \infty$  устанавливается стационарная плотность вероятности  $P_{st}(x)$ , которая не зависит от времени. На практике стационарное состояние устанавливается для моментов времени, значительных в сравнении со временем релаксации системы.

Получим стационарное решение уравнения Фоккера-Планка (2.8). Для этого введем поток вероятности, выражение которого имеет вид

$$J(x,t) = [f(x) + h(x)]P(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} d(x)P(x,t).$$

Тогда уравнение Фоккера-Планка можно переписать

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} J(x,t).$$

Это уравнение непрерывности, выражающее сохранение вероятности. Так как стационарная плотность вероятности не зависит от времени, то  $\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Значит, производная потока вероятности по координате равна нулю, поэтому  $J(x) = \text{const}$ . При выводе уравнения Фоккера-Планка использовались естественные граничные условия (или зеркальные граничные условия), следовательно, значение этой константы равняется нулю и можно перейти к рассмотрению обыкновенного дифференциального уравнения. Решая его методом разделения переменных, запишем выражение для равновесной плотности вероятности в виде

$$P_{st}(x) = \frac{1}{Zd(x)} \exp \left[ \int_{\mu}^x dy \frac{f(y) + h(y)}{d(y)} \right], \quad (2.9)$$

где  $Z$  – нормирующий множитель, равный (если существует)

$$Z = \int_{\alpha}^{\beta} dx \frac{1}{d(x)} \exp \left[ \int_{\mu}^x dy \frac{f(y) + h(y)}{d(y)} \right],$$

$$x(t) \in (\alpha, \beta), \alpha \leq \mu \leq \beta.$$

Полагая, что  $d(x) > 0$ , изучим влияние взаимной корреляции шумовых источников на наиболее вероятные равновесные состояния системы. Для этого запишем уравнение  $P'_{st}(x) = 0$ , которое определяет локальные точки экстремума равновесной плотности вероятности (2.9). Производная равна

$$P'_{st}(x) = \frac{P(x)}{d(x)} [f(x) + h(x) - d'(x)].$$

Таким образом, искомое уравнение имеет вид

$$f(x) + h(x) - d'(x) = 0. \quad (2.10)$$

Исследуем возможность существования неравновесных переходов, индуцированных взаимной корреляцией белых шумов, в стохастической системе, описываемой уравнением (2.6). При этом обратим внимание на то, чтобы каждый шум в отдельности эти переходы не вызывал. Это означает, что для  $r=0$  уравнение (2.10) имеет такое же самое число корней, как и уравнение  $f(x)=0$ , т.е. некоррелированные шумы не изменяют число наиболее вероятных состояний системы. А при некотором значении  $r=r_{cr}$  ( $r_{cr} \neq 0$  и  $-1 \leq r_{cr} \leq 1$ ) число локальных максимумов равновесной плотности вероятности  $P_{st}(x)$  является различным при  $r=r_{cr}-0$  и при  $r=r_{cr}+0$ . Наиболее вероятные состояния системы не соответствуют ее стационарным состояниям в детерминированном случае, т.е. при  $r=r_{cr}$  происходит индуцированный взаимной корреляцией шумов неравновесный переход.

Рассмотрим сравнительно простые стохастические системы с аддитивным шумом  $\xi_2(t)$ , т.е.  $g_2(x) \equiv 1$ . В этом случае выражение (А.8) примет вид

$$d(x) = \Delta_1 g_1^2(x) + 2r\sqrt{\Delta_1 \Delta_2} g_1(x) + \Delta_2 \quad (2.11)$$

Также в соответствии с (А.11) можно записать, что  $h(x) = \gamma_1 d'(x)$ . Подставляя это выражение в (2.9), выражение для равновесной плотности вероятности примет вид

$$P_{st}(x) = \frac{1}{Z_1 d^{1-\gamma_1}(x)} \exp \left[ \int_{\mu}^x dy \frac{f(y)}{d(y)} \right], \quad (2.12)$$

где  $Z_1$  – новая константа нормировки, связанная со старой константой соотношением  $Z_1 = Z d^{\gamma_1}(\mu)$ .

Так как в данной задаче белый шум – модель реального шума с конечным временем корреляции, то параметр  $\gamma_1$  для мультипликативного шума  $\zeta_1(t)$  принимается равным  $1/2$ , что соответствует исчислению Стратоновича. С другой стороны, не должно быть качественных различий между равновесными плотностями вероятности, как в исчислении Стратоновича, так и в исчислении Ито с параметром  $\gamma_1$ , равным  $0$ . В противном случае, такого рода расхождения свидетельствуют о неправильно выбранной процедуре описания системы. Также примем естественные граничные условия, т.е.  $\alpha = -\infty$  и  $\beta = \infty$ , и параметр интегрирования  $\mu$  в (2.12) можно положить равным нулю.

Равновесную плотность вероятности (2.12) можно представить в виде экспоненциального распределения Больцмана,  $P_{st}(x) \sim \exp[-U_{ef}(x)]$ , где  $U_{ef}(x)$  – эффективный потенциал. Он записывается в следующем виде

$$U_{ef}(x) = - \int_0^x dy \frac{f(y)}{d(y)} + (1 - \gamma_1) \ln d(x). \quad (2.13)$$

При  $r = 0$  эффективный потенциал совпадает с детерминированным потенциалом  $U(x)$ . А при  $r = r_{cr}$  число его локальных минимумов изменяется, что свиде-

тельствует о неравновесном переходе, индуцированном взаимной корреляцией шумов.

### 2.3. Нелинейные стохастические системы

2.3.1. Стохастическая система с линейной восстанавливающей силой и квадратичной мультипликативной функцией в окрестности нуля.

В качестве первого примера рассмотрим простейшую систему с линейной восстанавливающей силой  $f(x) = -ax$  ( $a > 0$ ) и квадратичной мультипликативной функцией в окрестности нуля,  $g_1(x) = bx^2$  ( $b > 0$ ). В этом случае уравнение движения (2.6) примет вид

$$\dot{x} = -ax + bx^2\xi_1(t) + \xi_2(t). \quad (2.14)$$

Коэффициент диффузии:

$$d(x) = \Delta_1 b^2 (x^4 + 2rvx^2 + v^2),$$

$$\text{где } v = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}.$$

Уравнение, определяющее точки экстремума равновесной плотности вероятности:

$$x(x^2 + rv + 1/\eta) = 0,$$

$$\text{где } \eta = \frac{4(1 - \gamma_1)\Delta_1 b^2}{a}.$$



Исследуем это уравнение. Если  $r=0$ , существует единственное действительное его решение  $x=0$ , соответствующее наиболее вероятному состоянию системы. Таким образом, некоррелированный мультипликативный шум не может индуцировать неравновесные переходы в рассматриваемой системе. Если  $r \neq 0$ , тогда существует критическое значение параметра корреляции  $r_{cr} = -1/\eta v$  ( $|r_{cr}| < 1$ ), такое, что при  $r > r_{cr}$ , ( $r_{cr} < 0$ ) число корней уравнения не изменяется, а при  $r < r_{cr}$ , появляется два дополнительных корня  $x = \pm \sqrt{-rv - 1/\eta}$ . Следовательно, при  $r = r_{cr}$  происходит индуцированный параметром взаимной корреляции неравновесный переход. С другой стороны, при фиксированном отрицательном параметре корреляции, неравновесный переход может индуцировать как мультипликативный шум, так и аддитивный.

Нужно отметить, что в любой стохастической системе с линейной восстанавливающей силой и мультипликативной функцией, которая в окрестности нуля зависит от  $x$  как  $x^2$ , параметр взаимной корреляции шумов может индуцировать неравновесные переходы. Прежде, чем проводить дальнейшие исследования, обратим внимание на одну особенность рассматриваемой стохастической системы. Положим в уравнении (2.14)  $\zeta_2(t) \equiv 0$ . Делая замену переменных  $x(t) = y(t)e^{-at}$ , его решение можно записать в виде

$$x(t) = \frac{e^{-at}}{x_0^{-1} - \Xi(t)}, \quad (2.15)$$

где  $x_0 = x(0)$  – значение параметра состояния в начальный момент времени;

$\Xi(t) = b \int_0^t e^{-a\tau} \xi_1(\tau) d\tau$  – гауссовский случайный процесс с нулевым средним значением и асимптотической дисперсией  $\sigma^2 = \langle \Xi^2(\infty) \rangle = \Delta_1 b^2 / a$ .

Выражение (2.15) стремится к бесконечности,  $|x(t)| \rightarrow \infty$ , если его знаменатель стремится к нулю,  $x_0^{-1} - \Xi(t) \rightarrow 0$ . Шум  $\xi_1(t)$  принимает значения из бесконечного интервала  $(-\infty, \infty)$ , тогда процесс  $\Xi(t)$  имеет такой же бесконечный интервал значений. В этом случае существует ненулевая вероятность того, что выражение  $x_0^{-1} - \Xi(t)$  на интервале  $(0, t)$  хотя бы один раз принимает значение равное нулю. Это означает, что состояние системы  $x(t)$  достигает бесконечность с ненулевой вероятностью на любом конечном временном интервале. Далее, если  $x_0^{-1} - \Xi(t) = +0$  и  $x_0^{-1} - \Xi(t) = -0$ , т.е. бесконечно малое изменение времени, тогда  $x(t) = +\infty$  и  $x(t) = -\infty$ , соответственно. Возможность такого нефизического поведения стохастических систем с мультипликативным шумом, амплитуда флуктуаций которого на больших временах возрастает быстрее, чем  $x$ , была отмечена, например, в работе [52]. Действительно, если параметры системы принимают, например, значения  $a = b = \Delta_1 = x_0 = 1$ , тогда вероятность  $p$  того, что случайный стационарный процесс  $\Xi(t)$  достигнет уровня  $x_0^{-1}$  ( $x_0 > 0$ ), в простейшем приближении равна  $p = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{x_0^{-1}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \approx 0,1587$ . С другой стороны, если  $b = 0,1$ , то вероятность  $p$  уже практически равна нулю. Таким образом, о физическом или нефизическом поведении рассматриваемой системы можно судить лишь, зная значения ее параметров.

Чтобы не акцентировать внимание на явных значениях параметров системы, рассмотрим такую амплитуду флуктуаций мультипликативного шума, которая при  $|x| \ll 1$  зависит от  $x$  как  $x^2$ , а при  $|x| \gg 1$  – остается постоянной:

$$g_1(x) = b \frac{x^2}{1 + x^2} \quad (b > 0).$$

В этом случае выражение (2.11) для коэффициента диффузии примет вид

$$d(x) = \Delta_1 b^2 \left[ \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^2 + 2rv \frac{x^2}{1+x^2} + v^2 \right], \quad (2.16)$$

Определим его производную и запишем уравнение (2.10)

$$x \left[ -a + \frac{4(\gamma_1 - 1)\Delta_1 b^2}{(1+x^2)^2} \left( \frac{x^2}{1+x^2} + rv \right) \right] = 0.$$

Введем новые обозначения, уравнение примет окончательный вид

$$x[z^3 + \eta(1+rv)z - \eta] = 0, \quad (2.17)$$

где  $z = 1 + x^2$ .

Подставим выражение (2.16) в выражение (2.12) и получим равновесную плотность вероятности

$$P_{st}(x) = C \left[ \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^2 + 2rv \frac{x^2}{1+x^2} + v^2 \right]^{\gamma_1 - 1} \exp \left[ -q \int_0^{x^2} \frac{dz}{\left( \frac{z}{1+z} \right)^2 + 2rv \frac{z}{1+z} + v^2} \right], \quad (2.18)$$

где  $C$  – константа нормировки;

$$q = 2(1 - \gamma_1)/\eta$$

Исследуем уравнение (2.17). Если  $r=0$ , тогда функция  $z^3 + \eta z - \eta$  принимает значения большие или равные 1. Действительно, учтем, что  $z = 1 + x^2$ , и при  $z=1$  эта функция равна 1, а при  $z > 1$  она монотонно возрастает, поэтому принимает значения строго большие 1. Таким образом, уравнение (2.17), точно как и

уравнение  $f(x)=0$ , имеет единственный действительный корень  $x_{cr}=0$ , который соответствует максимуму  $P_{st}(x)$ . Это означает, что некоррелированные шумы не изменяют одномодальный характер плотности вероятности  $P_{st}(x)$ , т.е., индуцированные шумом переходы не происходят. Они могут происходить, если кубическое уравнение

$$z^3 + \eta(1 + rv)z - \eta = 0 \quad (2.19)$$

имеет действительные корни, которые удовлетворяют условию  $z > 1$ . Простой анализ показывает, что из трех корней  $z_n$  ( $n = \overline{1,3}$ ) уравнения (2.19) только один корень, обозначим его  $z_3$ , удовлетворяет этому условию. В самом деле, как хорошо известно (см., например, [136]), если детерминант кубического уравнения

$$Q = \frac{\eta^2}{4} + \frac{\eta^3(1 + rv)^3}{27}$$

положителен, то уравнение (2.19) имеет два комплексно сопряженных корня  $z_1$  и  $z_2$ , и один действительный корень  $z_3$ . Не трудно проверить, что  $z_3 > 1$ , только если  $1 + r\eta v < 0$ . Далее, при  $Q=0$  все корни кубического уравнения (2.19) действительные и два корня, обозначим  $z_1$  и  $z_2$ , одинаковые. Используя теорему Виета, которая выражает коэффициенты полинома через его корни, можно написать соотношения

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0, \quad z_1 z_2 z_3 = \eta,$$

которые показывают, что в этом случае корни  $z_1$  и  $z_2$  отрицательные и должны быть отвергнуты. И, наконец, для  $Q < 0$  все корни действительные и различные, и по той же причине, как в предыдущем случае, корни  $z_1$  и  $z_2$  должны быть также отброшены.

Таким образом, если  $r > r_{cr} = -1/\eta\nu$ , то (2.17) имеет единственный действительный корень  $x=0$ , и равновесная плотность вероятности (2.18) является одномодальной с глобальным максимумом, расположенным в точке  $x=0$  (см. рис.2.1а). Для  $r < r_{cr}$  (это условие может быть выполнено, если неравенство  $|r_{cr}| < 1$  выполняется), уравнение (2.17) имеет три корня  $x=0$ ,  $x=\tilde{x}$ , и  $x=-\tilde{x}$ , где  $\tilde{x} = \sqrt{z_3 - 1}$ . В этом случае, точка  $x=0$  соответствует локальному минимуму плотности  $P_{st}(x)$ , а точки  $x=\tilde{x}$  и  $x=-\tilde{x}$  – локальным максимумам одинаковой высоты, т.е.,  $P_{st}(x)$  – бимодальная плотность вероятности (см. рис.2.1б). Следовательно, при  $r=r_{cr}$  происходит одномодальный-бимодальный переход. Отметим также, что расстояние  $2\tilde{x}$  между локальными максимумами  $P_{st}(x)$  возрастет, когда  $r$  уменьшается. В частности, определим значение  $\tilde{x}$ , если  $r=r_{cr}-\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – некоторая бесконечно малая величина, такая что  $\varepsilon/|r_{cr}| \ll 1$ . Подставим это значение для  $r$  в уравнение (2.19) и разложим  $z^3$  по малому параметру  $\theta$  до слагаемого первого порядка. Учитывая выражения для  $r_{cr}$ , получим выражение для параметра  $\theta$ :  $\theta = \varepsilon\eta\nu / (2 + \eta - \varepsilon\eta\nu) \approx \varepsilon\eta\nu / (2 + \eta)$ . Таким образом,  $\tilde{x} = \sqrt{\varepsilon\eta\nu / (2 + \eta)}$  и  $\tilde{x} = 0$ , если  $r=r_{cr}$ .

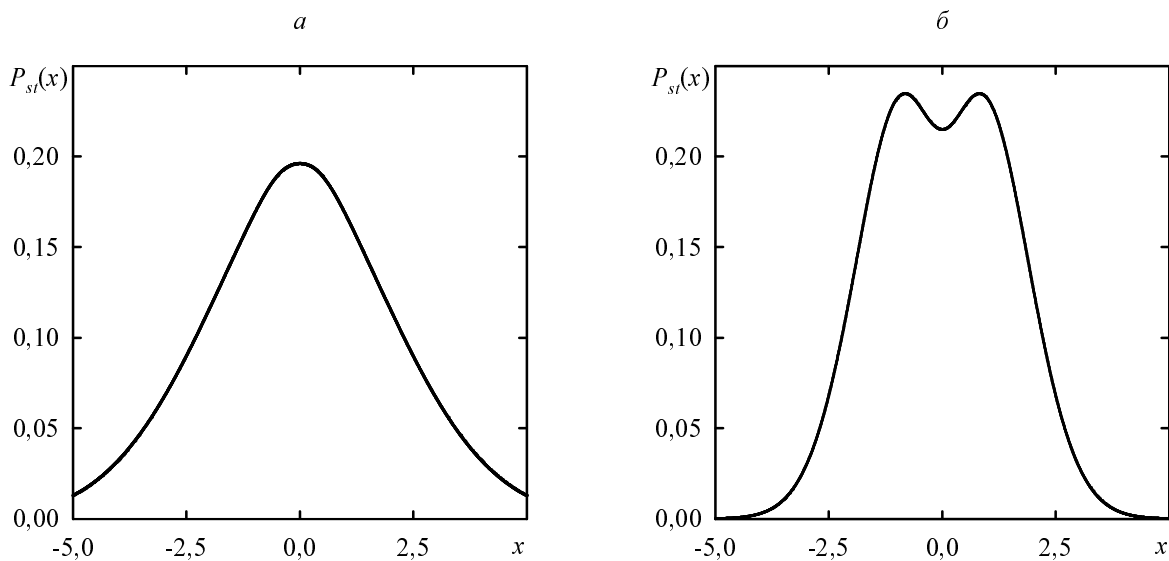


Рис. 2.1. Равновесная плотность вероятности при  $\eta=2$ ,  $\nu=2$ ,  $\gamma_1=0,5$  ( $r_{cr}=-0,25$ ):

а)  $r=0$ ; б)  $r=-0,9$ .

Одномодальный-бимодальный неравновесный переход имеет отличительную особенность: глобальный максимум  $P_{st}(x)$  трансформируется в локальный минимум в точке перехода  $r = r_{cr}$ . Бифуркационная диаграмма представлена на рис.2.2.

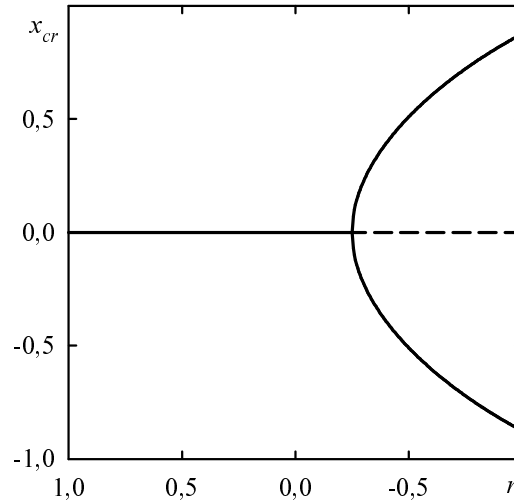


Рис. 2.2. Диаграмма бифуркации удвоения, соответствующая одномодальному-бимодальному переходу, индуцированному параметром корреляции ( $\eta = 2, v = 2, \gamma_1 = 0,5, r_{cr} = -0,25$ ).

Выражение эффективного потенциала (2.13) для данного примера системы примет вид

$$U_{ef}(x) = \frac{2(1-\gamma_1)}{\eta} \int_0^{x^2} \frac{dz}{\left(\frac{z}{1+z}\right)^2 + 2rv \frac{z}{1+z} + v^2} + (1-\gamma_1) \ln \left\{ \frac{a\eta}{4(1-\gamma_1)} \left[ \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + 2rv \frac{x^2}{1+x^2} + v^2 \right] \right\}. \quad (2.20)$$

Графики эффективного потенциала (2.20) приведены на рис.2.3. Видно, что для случая  $r > r_{cr}$  (рис.2.3а) эффективный потенциал имеет один минимум при  $x=0$ , что соответствует точке устойчивого равновесия в детерминистической дина-

мике, (частица движется в параболическом потенциале  $U(x)=ax^2/2 + \text{const}$ ). Напротив, при  $r < r_{cr}$  (рис.2.3б) эффективный потенциал имеет два минимума, которые не соответствуют минимуму в детерминистическом потенциале. Это указывает на то, что при  $r = r_{cr}$  происходит одномодальный-бимодальный переход, индуцированный взаимной корреляцией шумов.

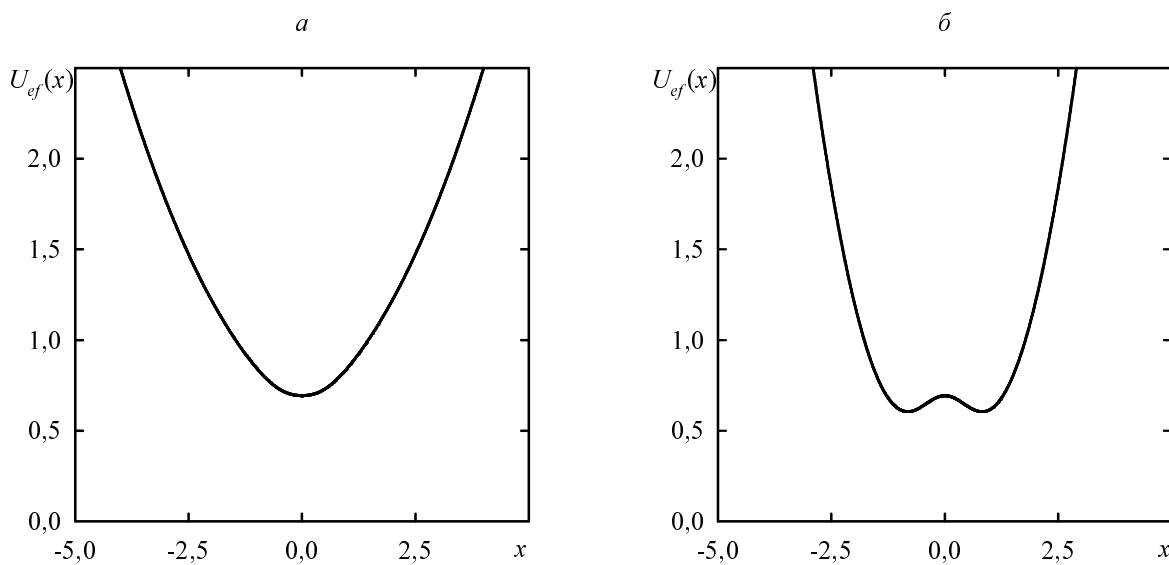


Рис. 2.3. Эффективный потенциал при  $\eta = 2$ ,  $\nu = 2$ ,  $a = 1$ ,  $\gamma_1 = 0,5$  ( $r_{cr} = -0,25$ ):

а)  $r = 0$ ; б)  $r = -0,9$ .

Исследуем влияние параметров  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $a$ ,  $b$  на неравновесные переходы. Для фиксированных параметров  $r$  ( $r < 0$ ),  $\Delta_2$ ,  $a$ ,  $b$  существует такое значение  $\Delta_{1cr}$ , для которого, если  $\Delta_1 < \Delta_{1cr}$ , то плотность вероятности имеет один максимум, а при  $\Delta_1 > \Delta_{1cr}$  – два максимума, т.е. при  $\Delta_1 = \Delta_{1cr}$ , происходит неравновесный переход, индуцированный интенсивностью мультипликативного шума (рис.2.4а). Аналогично, при фиксированных параметрах  $r$  ( $r < 0$ ),  $\Delta_1$ ,  $a$ ,  $b$  существует такое значение  $\Delta_{2cr}$ , для которого, если  $\Delta_2 < \Delta_{2cr}$ , плотность вероятности имеет один максимум, а при  $\Delta_2 > \Delta_{2cr}$  – два максимума, т.е. при  $\Delta_2 = \Delta_{2cr}$ , происходит неравновесный переход, индуцированный интенсивностью аддитивного шума (рис.2.4а). Характер влияние параметров  $a$ ,  $b$  отображают рис.2.4б и рис.2.4в, соответственно.

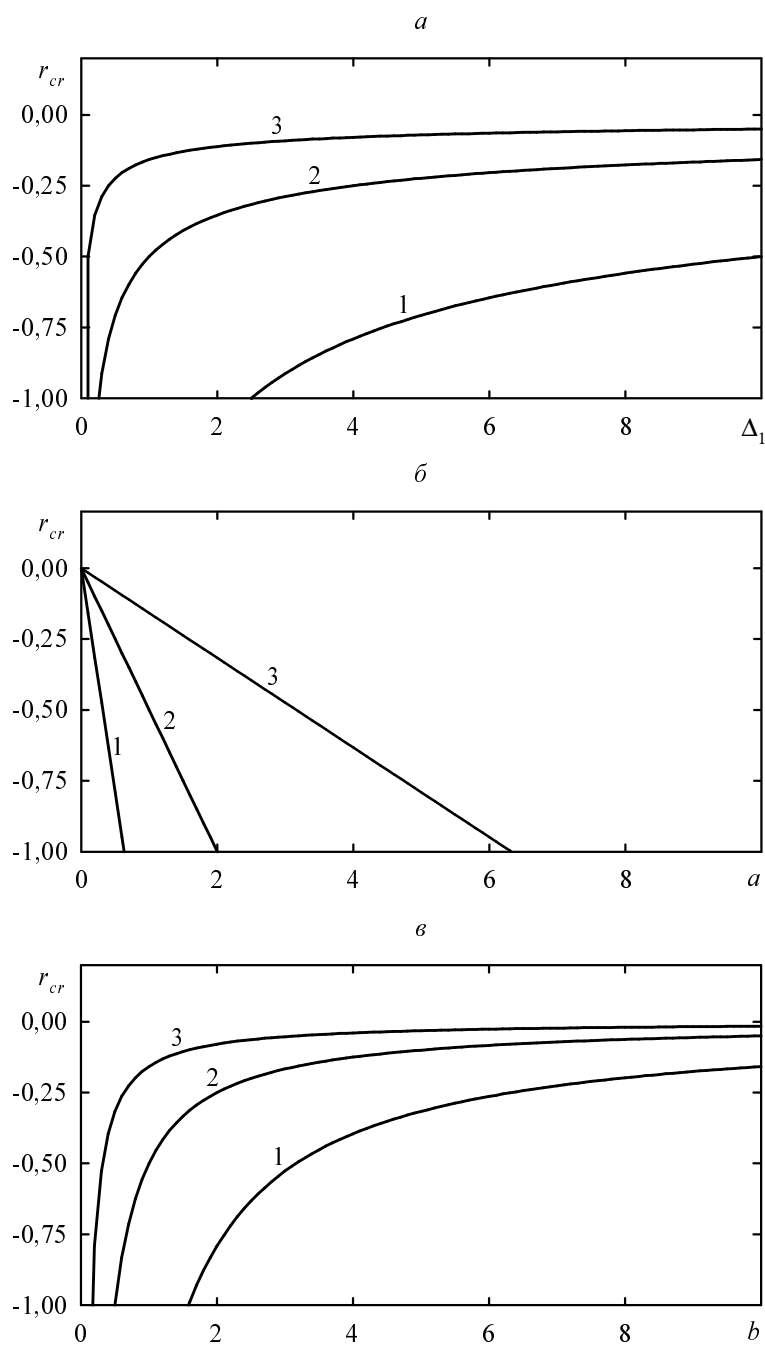


Рис. 2.4. а) Фазовая диаграмма в плоскости параметров  $(\Delta_1, r)$  при  $\gamma_1 = 0,5$ ,  $a = 1$ ,  $b = 0,1$ : 1)  $\Delta_2 = 0,1$ ;  $\Delta_2 = 1$ ;  $\Delta_2 = 10$ ; б) фазовая диаграмма в плоскости параметров  $(a, r)$  при  $\gamma_1 = 0,5$ ,  $b = 0,1$ ,  $\Delta_2 = 1$ : 1)  $\Delta_1 = 0,1$ ;  $\Delta_1 = 1$ ;  $\Delta_1 = 10$ ; в) фазовая диаграмма в плоскости параметров  $(b, r)$  при  $\gamma_1 = 0,5$ ,  $a = 1$ ,  $\Delta_2 = 1$ : 1)  $\Delta_1 = 0,1$ ;  $\Delta_1 = 1$ ;  $\Delta_1 = 10$ . Область над кривой соответствует одномодальной плотности вероятности, под кривой – бимодальной.



2.3.2. Стохастическая система с кубической восстанавливающей силой и мультипликативной функцией четвертой степени в окрестности нуля.

В качестве второго примера рассмотрим стохастическую систему с кубической восстанавливающей силой  $f(x) = -2ax^3$  ( $a > 0$ , множитель 2 вводится в целях удобства) и следующей мультипликативной функцией

$$g_1(x) = b \frac{x^4}{1+x^4} \quad (b > 0). \quad (2.21)$$

Таким образом,  $g_1(x) \sim x^4$  при  $|x| \ll 1$ , и  $g_1(x) \sim b$  при  $|x| \gg 1$ .

В этом случае выражение для коэффициента диффузии (2.11) имеет вид

$$d(x) = \Delta_1 b^2 \left[ \left( \frac{x^4}{1+x^4} \right)^2 + 2rv \frac{x^4}{1+x^4} + v^2 \right]. \quad (2.22)$$

Равновесная плотность вероятности (2.12):

$$P_{st}(x) = C \left[ \left( \frac{x^4}{1+x^4} \right)^2 + 2rv \frac{x^4}{1+x^4} + v^2 \right]^{\gamma_1 - 1} \exp \left[ -q \int_0^{x^4} \frac{dz}{\left( \frac{z}{1+z} \right)^2 + 2rv \frac{z}{1+z} + v^2} \right]. \quad (2.23)$$

Найдем производную  $d'(x)$ , уравнение (2.10) для точек экстремума равновесной плотности вероятности примет вид

$$x \left[ -a + \frac{4(\gamma_1 - 1)\Delta_1 b^2}{(1+x^4)^2} \left( \frac{x^4}{1+x^4} + rv \right) \right] = 0.$$

Так как это уравнение может быть приведено к уравнению (2.17) с  $z=1+x^4$ , можно сделать вывод, что форма плотности вероятности (2.23) зависит от управляющего параметра  $r$  качественно таким же образом как в предыдущем случае. А именно, для  $r > r_{cr} = -1/\eta v$  функция  $P_{st}(x)$  имеет одномодальное распределение, для  $r < r_{cr}$  – бимодальное распределение, а при  $r = r_{cr}$  происходит одномодальный-бимодальный переход.

2.3.3. Стохастическая система с линейной восстанавливающей силой и мультипликативной функцией четвертой степени в окрестности нуля.

Рассмотрим систему с линейной восстанавливающей силой и с мультипликативной функцией  $g_1(x)$  вида (2.21). В этом случае из выражений (2.12) и (2.22) получим равновесную плотность вероятности

$$P_{st}(x) = C \left[ \left( \frac{x^4}{1+x^4} \right)^2 + 2rv \frac{x^4}{1+x^4} + v^2 \right]^{\gamma_1-1} \exp \left[ -q \int_0^{x^2} \frac{dz}{\left( \frac{z^2}{1+z^2} \right)^2 + 2rv \frac{z^2}{1+z^2} + v^2} \right]. \quad (2.24)$$

Уравнение (2.10) для точек экстремума плотности вероятности примет вид

$$x[(1+x^4)^3 + 2\eta(1+rv)x^6 + 2\eta rv x^2] = 0. \quad (2.25)$$

В соответствии с этим уравнением параметр  $r_{cr}$  может быть представлен как  $r_{cr} = -v^{-1}\varphi(\eta)$ , где  $\varphi(\eta)$  – положительная функция  $\eta$ . Численный анализ показывает, что если  $r > r_{cr}$ , то уравнение (2.25) имеет единственный действительный корень  $x=0$ , и  $P_{st}(x)$  – одномодальная плотность вероятности как на рис.2.1а. Если  $r < r_{cr}$  (это условие может быть выполнено, если  $|r_{cr}| < 1$ ), то урав-

нение (2.25) имеет пять действительных корней, три из которых,  $x = 0$ ,  $x = -\tilde{x}$ , и  $x = \tilde{x}$  ( $\tilde{x}$  возрастает, когда  $r$  уменьшается), соответствуют локальным максимумам плотности вероятности (2.24) (см. рис.2.5). Таким образом, при  $r = r_{cr}$  происходит одномодальный-тримодальный переход. Отметим, что в этом случае  $\tilde{x} \neq 0$  при  $r = r_{cr}$ , в отличие от предыдущих примеров.

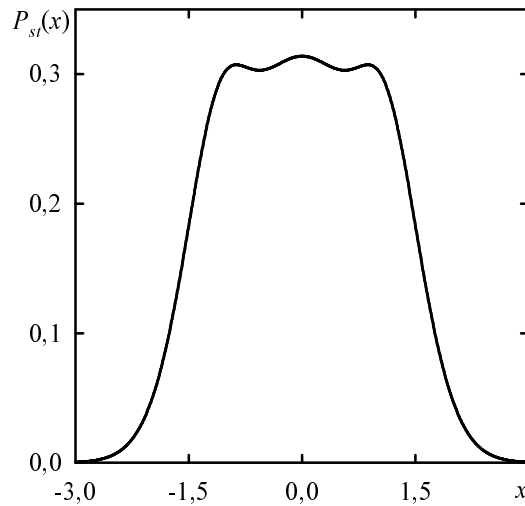


Рис. 2.5. Равновесная плотность вероятности при  $\eta = 1$ ,  $\nu = 2$ ,  $\gamma_1 = 0,5$ ,  $r = -1$ , ( $r_{cr} \approx -0,88$ ).

Выражение для эффективного потенциала в данном случае имеет вид

$$U_{ef}(x) = \frac{2(1-\gamma_1)}{\eta} \int_0^{x^2} \frac{dz}{\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + 2rv \frac{z^2}{1+z^2} + \nu^2} +$$

$$+ (1-\gamma_1) \ln \left\{ \frac{a\eta}{4(1-\gamma_1)} \left[ \left(\frac{x^4}{1+x^4}\right)^2 + 2rv \frac{x^4}{1+x^4} + \nu^2 \right] \right\}.$$

При  $r > r_{cr}$  эффективный потенциал имеет один локальный минимум как на рис.2.2а, а при  $r < r_{cr}$  – три (рис.2.6).

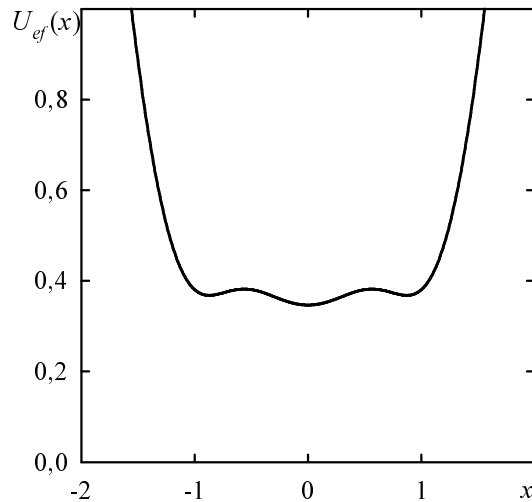


Рис. 2.6. Эффективный потенциал при  $\eta = 1$ ,  $\nu = 2$ ,  $a = 1$ ,  $\gamma_1 = 0,5$ ,  $r = -1$  ( $r_{cr} \approx -0,88$ ).

Нужно отметить, что одномодальный-тримодальный переход является структурно-неустойчивым, и потому в любой реальной физической системе, содержащей малые возмущения, будет разрушен. Действительно, он обусловлен мультипликативной функцией, для которой первый член разложения в ряд в окрестности нуля четвертого порядка, т.е.  $g_1(x) \sim x^4$ . Эта функция является элементарной катастрофой Тома и содержит малые возмущения  $\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2$  [138]. С учетом этого в реальной системе вместо тримодальной равновесной плотности вероятности (рис.2.5) будет наблюдаться бимодальная равновесная плотность вероятности (как на рис.2.1б). Таким образом, в реальной физической системе для этого случая при  $r = r_{cr}$  происходит одномодальный-бимодальный неравновесный переход.

## 2.4. Стохастический нелинейный осциллятор

В предыдущем подразделе были рассмотрены простые нелинейные стохастические системы, в которых необходимым условием существования инду-

цированных шумом неравновесных переходов является наличие корреляции между мультипликативным и аддитивным шумом. В этом подразделе рассмотрим стохастический нелинейный осциллятор, физической реализацией которого являются, например, значительные упругие поперечные смещения центров масс нанобалок.

Детерминированное уравнение затухающего нелинейного осциллятора имеет вид

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \alpha x^2 + \beta x^3 = 0,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – некоторые параметры.

Рассмотрим случай сильного затухания, запишем уравнение движения в масштабе времени, для которого коэффициент при кубическом члене равняется единице:

$$\dot{x} = -ax - bx^2 - x^3 \quad (a > 0 \text{ и } b > 0).$$

Предположим, что выполняются условия  $a \gg b$  и  $b \ll 1$ , и введем флуктуации параметра при квадратичном члене и скорости (флуктуациями параметра при линейном члене пренебрегаем). Уравнение Ланжевена (2.6) примет вид

$$\dot{x} = -ax - b[1 - \xi_1(t)]x^2 - x^3 + \xi_2(t). \quad (2.26)$$

Таким образом, в этом случае  $f(x) = -ax - bx^2 - x^3$  и  $g_1(x) = bx^2$ ,  $g_2(x) = 1$ .

Коэффициент диффузии, соответствующий уравнению (2.26), имеет вид

$$d(x) = \Delta_1 b^2 (x^4 + 2rvx^2 + v^2),$$

$$\text{где } v = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}.$$

Подставим его в (2.12), запишем равновесную плотность вероятности:

$$P_{st}(x) = C(x^4 + 2rvx^2 + v^2)^{\gamma_1 - 1} \exp\left(-\frac{1}{\Delta_1 b^2} \int_0^x dy \frac{ay + by^2 + y^3}{y^4 + 2rvy^2 + v^2}\right). \quad (2.27)$$

Уравнение, определяющее точки экстремума плотности вероятности (2.27) имеет вид

$$x \left( x^2 + \frac{b}{1+\rho} x + \frac{a + \rho vr}{1+\rho} \right) = 0, \quad (2.28)$$

$$\text{где } \rho = 4(1 - \gamma_1) \Delta_1 b^2.$$

Исследуем это уравнение вначале при  $r=0$ . Дискриминант квадратного уравнения равен

$$D = \frac{b^2}{(1+\rho)^2} - \frac{4a}{1+\rho}.$$

Учитывая предположения о параметрах, приходим к выводу, что дискриминант всегда отрицательный. Уравнение (2.28) имеет единственный корень  $x=0$ , наиболее вероятное равновесное состояние осциллятора соответствует точке устойчивого равновесия детерминированной системы, т.е. некоррелированные шумы не вызывают неравновесные переходы. В случае  $r \neq 0$  дискриминант равен

$$D = \frac{b^2}{(1+\rho)^2} - \frac{4(a + \rho vr)}{1+\rho}.$$

Приравнивая его нулю, определим критическое значение для корреляции:

$$r_{cr} = \frac{b^2 - 4a - 4a\rho}{4\rho v(1 + \rho)}.$$

Учитывая предположения о параметрах, пренебрежем в числителе  $b$ :

$$r_{cr} = -\frac{a}{\rho v}.$$

И, наконец, вводя такой же, как и в предыдущих пунктах, параметр  $\eta = \rho/a$ , окончательно получим, что  $r_{cr} = -1/\eta v$ . При  $r > r_{cr}$  уравнение (2.28) имеет единственный действительный корень  $x=0$ , и равновесная плотность вероятности (2.27) является одномодальной как на рис.2.1а. При  $r < r_{cr}$  (это условие может быть выполнено, если неравенство  $|r_{cr}| < 1$  выполняется) уравнение (2.28) имеет три корня, и равновесная плотность вероятности (2.27) – бимодальная как на рис.2.1б. Следовательно, при  $r = r_{cr}$  происходит одномодальный-бимодальный переход.

Выражение для эффективного потенциала имеет вид

$$U_{ef}(x) = \frac{1}{\Delta_1 b^2} \int_0^x dy \frac{ay + by^2 + y^3}{y^4 + 2rvy^2 + v^2} + (1 - \gamma_1) \ln[\Delta_1 b^2 (x^4 + 2rvx^2 + v^2)].$$

Его графики имеют качественно такой же вид как на рис.2.3. При  $r > r_{cr}$  эффективный потенциал имеет один минимум (как на рис.2.3а), а при  $r < r_{cr}$  – два минимума (как на рис.2.3б).

Нужно отметить, что формально, положив параметр  $b$  восстанавливающей силы в уравнении (2.26) меньшим нуля, неравновесные переходы будут наблюдаться при положительной взаимной корреляции шумовых источников.

## 2.5. Выводы к разделу 2

1. Изучение роли взаимной корреляции шумов в явлении индуцированных шумом неравновесных переходов достигается рассмотрением уравнения Ланжевена с двумя мультипликативными взаимно-коррелированными гауссовскими белыми шумами, для которого принимается общее исчисление, включающее, в частности, исчисление Ито и Стратоновича. Соответствующее уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности выводится посредством нового простого метода, основанного на двухступенчатом усреднении некоторой функции, зависящей от параметра состояния системы.

2. Исследование влияния взаимной корреляции шумов на равновесное решение уравнения Фоккера-Планка аналитическими и численными методами показывает, что даже в сравнительно простых стохастических системах с линейной и кубической восстанавливающей силой изменение интенсивности взаимной корреляции может приводить к качественному изменению равновесной плотности вероятности, а именно к одномодальной-бимодальному неравновесному переходу, индуцированному шумом. Такого рода качественные изменения также могут вызываться, при наличии ненулевой корреляции, как интенсивностью мультипликативного шума, так и интенсивностью аддитивного шума.

Основные результаты, представленные в данном разделе, опубликованы в работе [5].



## РАЗДЕЛ 3

### ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ

#### 3.1. Обоснование модели

В предыдущем разделе было рассмотрено явление неравновесных переходов, индуцированных взаимной корреляцией шумовых источников. Оно обусловлено исключительно флуктуациями окружающей среды, и не связано с ее систематической эволюцией во времени. Предположение о стационарности среды может быть выполнено, по крайней мере, на протяжении времени наблюдения за системой. В противном случае необходимо принимать во внимание релаксацию системы к стационарному состоянию. Как правило, она экспоненциально быстро достигает это состояние, и с момента времени, много большего времени релаксации среды, можно исследовать эволюцию системы в стационарной среде. Однако возможны отклонения от этого закона, как в случае экспоненциально затянутой (*stretched exponential*) релаксации или еще более медленной степенной релаксации. Возникает интерес исследовать эффекты, обусловленные двумя факторами: флуктуациями среды и ее систематическим изменением во времени. Особенности временной эволюции системы в среде, аномально релаксирующей к стационарному состоянию, ранее не исследовались.

Рассмотрим стохастическую систему с линейной восстанавливающей силой и двумя источниками шума, один из которых мультипликативный, а другой – аддитивный. Предположим, что релаксация данной системы происходит в нестационарной во времени среде. Безразмерное уравнение Ланжевена имеет вид

$$\lambda(t)\dot{x}(t) + [\kappa - \xi_1(t)]x(t) = \xi_2(t), \quad (3.1)$$

где  $x(0) = x_0$  – начальное значение параметра состояния;

$\lambda(t)$  – положительно определенный коэффициент затухания, зависимость от времени которого обусловлена нестационарностью среды;

$\kappa > 0$  – параметр линейной восстанавливающей силы (жесткость “пружинки”).

Уравнение (3.1) непосредственно следует из уравнения (2.6) в предположении, что детерминированная сила, мультипликативная функция и амплитуда аддитивного шума зависят явно от времени, т.е.  $f(x, t) = -\kappa x / \lambda(t)$ ,  $g_1(x, t) = x / \lambda(t)$  и  $g_2(x, t) \equiv g_2(t) = 1 / \lambda(t)$ , соответственно. Оно описывает сильно затухающий гармонический осциллятор с флуктуирующей жесткостью и скоростью. Будем полагать, что время релаксации системы всегда много больше времени релаксации источников шума, поэтому приближение гауссовского белого шума применимо и уравнение (3.1) понимается в исчислении Стратоновича. Предположим также, что шумы некоррелированные. Таким образом, их статистические характеристики определяются выражением (2.7) с  $r = 0$ .

Зависимость от времени коэффициента затухания может быть вызвана, например, изменением температуры среды во времени, вследствие чего параметры, зависящие от температуры, также изменяются во времени. Например, если рассматривается движение частиц в жидкости, то затухание, согласно формуле Стокса, зависит от вязкости жидкости. Как известно, с повышением температуры она уменьшается, с понижением – увеличивается. Если рассматривается электрический осциллятор, то его затухание непосредственно связано с сопротивлением. Для проводников с увеличением температуры оно увеличивается, причем прямо пропорционально, а для полупроводников – экспоненциально убывает. Нужно отметить, что на аналоговых схемах можно реализовать множество нелинейных режимов изменения коэффициента затухания, причем несвязанных с изменением температуры. Для исследования примем степенной закон изменения коэффициента затухания во времени в виде

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1, & t < t_0 \\ lt^\beta, & t_0 < t < t_1, \\ \lambda, & t > t_1 \end{cases} \quad (3.2)$$

где  $l$  ( $l > 0$ ) и  $\beta$  – некоторые параметры коэффициента затухания;

$$lt_0^\beta = 1 \text{ и } lt_1^\beta = \lambda.$$

Таким образом, предполагается, что среда аномально эволюционирует на конечном временном интервале  $(t_0, t_1)$ , и в момент времени  $t_1$  достигает стационарное состояние, характеризуемое постоянным коэффициентом  $\lambda$ .

Нужно отметить, что предложенная модель (3.1) со степенным коэффициентом затухания (3.2) может быть реализована на аналоговых электрических схемах, состоящих из умножителей и сумматоров [1,137]. В самом деле, они являются пространственно-однородными физическими системами, которые могут быть описаны одной динамической переменной. Что касается применения приближения гауссовского белого шума, то оно может быть выполнено при использовании электронных генераторов шума, интенсивность которых постоянна до некоторого значения частоты. Если это обрезающее спектр значение частоты намного больше характерных частот системы, то такой шум можно считать белым шумом. Простой способ генерации такого “квазибелого” шума состоит в усилении теплового шума сопротивления, интенсивность которого не изменяется в очень большой области частот (шум Найквиста). Сигнал с выхода интегратора через цифровой аналоговый преобразователь подается на компьютер, который и выдает окончательные результаты – плотности вероятности. Соответствующая аналоговая схема рассматриваемой системы приведена на рис.3.1. Изменение затухания обеспечивается переменным резистором  $R$ . Изменяемая величина  $x$  – напряжение. Внешние шумы (могут быть как коррелированные, так и некоррелированные) генерируются двумя генераторами.

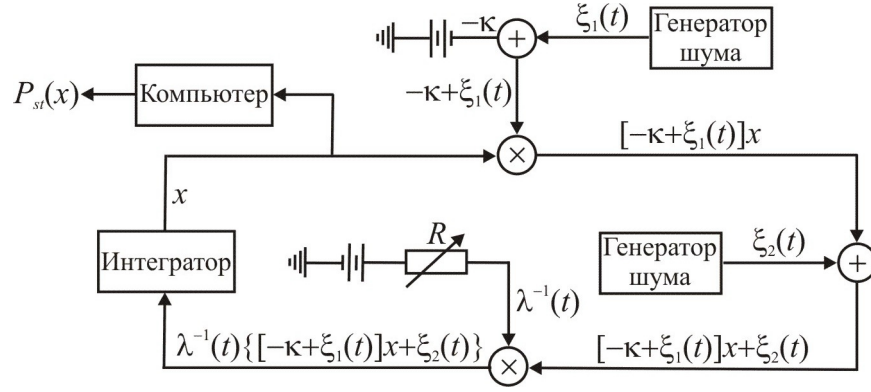


Рис. 3.1. Аналоговая схема

Нужно отметить одну особенность уравнения Ланжевена (3.1) с коэффициентом затухания (3.2). Рассматривая эволюцию системы на временном интервале  $(t_0, t_1)$ , можно сделать замену переменных  $\tau = \frac{1}{l(1-\beta)} t^{1-\beta}$  ( $\beta \neq 1$ ) и перейти к новому масштабу времени  $\tau$ . При этом уравнение Ланжевена (3.1) сводится к уравнению с постоянным коэффициентом затухания:

$$\dot{x}(\tau) + [\kappa - \xi_1(\tau)]x(\tau) = \xi_2(\tau),$$

где  $\xi_1(\tau)$  и  $\xi_2(\tau)$  – белые шумы с новыми статистическими характеристиками.

Используя выражение для дельта-функции от произвольной функции, определим корреляционные функции шумов  $\xi_1(\tau)$  и  $\xi_2(\tau)$ :

$$\langle \xi_1(\tau) \xi_1(\tau') \rangle = 2\Delta_1(\tau') \delta(\tau - \tau'), \quad \langle \xi_2(\tau) \xi_2(\tau') \rangle = 2\Delta_2(\tau') \delta(\tau - \tau'),$$

где интенсивности шумов имеют вид

$$\Delta_1(\tau') = l^{1/(\beta-1)} [(1-\beta)\tau']^{\beta/(\beta-1)} \Delta_1, \quad \Delta_2(\tau') = l^{1/(\beta-1)} [(1-\beta)\tau']^{\beta/(\beta-1)} \Delta_2.$$

Таким образом, используя нелинейную замену времени от уравнения с непостоянным во времени затуханием и постоянными интенсивностями шумов можно перейти к уравнению с постоянным затуханием и непостоянными во времени интенсивностями. Выбор между этими двумя уравнениями определяется конкретной ситуацией. В каждой реальной физической системе есть свой набор естественных переменных (физических величин), изменяющихся во времени по тому или иному закону, как в случае аналоговой схемы на рис.3.1., в которой нелинейность во времени реализуется для затухания.

### 3.2. Релаксация стохастической системы: приближенные результаты

Несмотря на свою простоту, получить точные выражения статистических характеристик для уравнения Ланжевена (3.1) не представляется возможным. Используем приближенный подход. Следуя Приложению А, а также результатам [108,109,127], представим уравнение (3.1) с двумя белыми шумами в виде уравнения с одним белым шумом в исчислении Стратоновича:

$$\lambda(t)\dot{x} = -\kappa x + \sqrt{\Delta_1 x^2 + \Delta_2} \xi(t), \quad (3.3)$$

где  $\xi(t)$  – гауссовский белый шум с нулевым средним значением и единичной интенсивностью:

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\delta(t-t'). \quad (3.4)$$

Введем характеристическую амплитуду [139]:  $s = \sqrt{\Delta_2/\Delta_1}$ , и разделим область значений параметра состояния  $x$  на два интервала,  $|x| < s$  и  $|x| > s$ , в каждом из ко-

торых один из шумовых источников преобладает над другим. Так в области  $|x| < s$  доминирует аддитивный шум, и вкладом мультипликативного шума можно пренебречь. Соответственно, в области  $|x| > s$  основной вклад делает мультипликативный шум, а вклад аддитивного шума пренебрежимо мал. Так как система статистически симметрична относительно преобразования  $x \rightarrow -x$ , ограничимся в дальнейшем рассмотрением абсолютного значения  $|x|$ . Предположим, что начальное значение параметра состояния  $x_0$  положительно, причем  $x_0 > s$ .

### 3.2.1. Вклад аддитивного шума пренебрежимо мал.

Рассмотрим область значений  $x$ , в которой доминирует мультипликативный шум, т.е.  $|x| > s$ . Пренебрегая аддитивным шумом, уравнение (3.3) примет вид

$$\lambda(t)\dot{x} = -\kappa x + \sqrt{\Delta_1} x \xi(t). \quad (3.5)$$

Согласно теореме Вонга и Закаи [140], обычные правила исчисления применимы к уравнениям Ланжевена, если они интерпретируются как стохастические уравнения Стратоновича. Введем новую переменную

$$y(t) = x(t) \exp \left[ \int_0^t \frac{\kappa d\tau}{\lambda(\tau)} \right]. \quad (3.6)$$

Из уравнения (3.5) получим

$$\lambda(t)\dot{y} = \sqrt{\Delta_1} y \xi(t).$$

Разделим переменные и проинтегрируем это уравнение:

$$y(t) = x_0 \exp \left[ \sqrt{\Delta_1} \int_0^t \frac{\xi(\tau) d\tau}{\lambda(\tau)} \right].$$

Таким образом, решение уравнения (3.5) можно представить в виде

$$x(t) = x_0 \exp \left[ \sqrt{\Delta_1} \Xi(t) - \kappa \Lambda(t) \right], \quad (3.7)$$

где  $\Xi(t)$  – гауссовский случайный процесс, характеризующий вклад шума:

$$\Xi(t) = \int_0^t \frac{\xi(\tau) d\tau}{\lambda(\tau)}; \quad (3.8)$$

$\Lambda(t)$  – детерминированная функция, характеризующая вклад восстанавливающей силы:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\lambda(\tau)}. \quad (3.9)$$

Гауссовский процесс  $\Xi(t)$  полностью определяется своим средним значением  $\langle \Xi(t) \rangle$ , равным нулю, и корреляционной функцией  $\langle \Xi(t) \Xi(t') \rangle$ :

$$\langle \Xi(t) \Xi(t') \rangle = \int_0^t \int_0^{t'} d\tau_1 d\tau_2 \frac{\langle \xi(\tau_1) \xi(\tau_2) \rangle}{\lambda(\tau_1) \lambda(\tau_2)}.$$

Подставим выражение для корреляционной функции (3.4) и, используя свойство дельта-функции, окончательно получим:

$$\langle \Xi(t)\Xi(t') \rangle = 2 \int_0^{\min(t,t')} \frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)}. \quad (3.10)$$

Определим статистические моменты параметра состояния (3.7):

$$\langle x^n(t) \rangle = x_0^n \exp[-n\kappa\Lambda(t)] \langle \exp[n\sqrt{\Delta_1}\Xi(t)] \rangle,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$

Выражение в угловых скобках представляет моменты логарифмически-нормального случайного процесса [52]. Используя известное выражение, окончательно получим

$$\langle x^n(t) \rangle = x_0^n \exp\left[n^2\Delta_1\sigma^2(t)/2 - n\kappa\Lambda(t)\right],$$

где  $\sigma^2(t) = \langle \Xi^2(t) \rangle$  – дисперсия случайного процесса  $\Xi(t)$ :

$$\sigma^2(t) = 2 \int_0^t \frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)}. \quad (3.11)$$

Таким образом, выражение для среднего значения (первого момента) параметра состояния имеет вид

$$\langle x(t) \rangle = x_0 \exp\left[\Delta_1 \int_0^t \frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)} - \kappa \int_0^t \frac{d\tau}{\lambda(\tau)}\right]. \quad (3.12)$$

Будем полагать, что время достижения средним значением (3.12) уровня  $s$  меньше времени  $t_1$ , после которого коэффициент затухания принимает стационарное значение  $\lambda$ . Подставим (3.2) в (3.11), получим



$$\sigma^2(t) = 2t_0 + \frac{2}{l^2(1-2\beta)} (t^{1-2\beta} - t_0^{1-2\beta}),$$

где  $\beta \neq 1/2$ ;

$$\sigma^2(t) = 2t_0 + \frac{2}{l^2} \ln \frac{t}{t_0}.$$

где  $\beta = 1/2$ .

Подставим (3.2) в (3.9), получим

$$\Lambda(t) = t_0 + \frac{1}{l(1-\beta)} (t^{1-\beta} - t_0^{1-\beta})$$

где  $\beta \neq 1$ ;

$$\Lambda(t) = t_0 + \frac{1}{l} \ln \frac{t}{t_0}.$$

где  $\beta = 1$ .

В зависимости от значений параметра  $\beta$  возможны следующие случаи: 1)  $\beta=0$ ; 2)  $\beta<0$ ; 3)  $0<\beta<1/2$ ; 4)  $\beta=1/2$ ; 5)  $1/2<\beta<1$ ; 6)  $\beta=1$ ; 7)  $\beta>1$ .

В первом случае,  $\beta=0$ , коэффициент затухания остается постоянным во времени. Не нарушая общности, примем, что  $\lambda=l=1$ . Выражение для первого момента имеет вид

$$\langle x(t) \rangle = x_0 \exp[(\Delta_1 - \kappa)t]. \quad (3.13)$$

Нужно отметить, что флуктуации параметра восстанавливающей силы  $\kappa$  не должны изменять восстанавливающий характер силы. Поэтому в данном примере и в дальнейшем должно выполняться условие,  $\Delta_1 \ll \kappa$ . Следовательно, в рассматриваемом случае, согласно (3.13), наблюдается обычная экспоненциальная релаксация.

Во втором случае,  $\beta < 0$ , коэффициент затухания, согласно (3.2), уменьшается от 1 до  $\lambda$  на временном интервале  $t_0 < t < t_1$ . Выражение для первого момента (3.12) с точностью до некоторого постоянного множителя  $A$  имеет вид

$$\langle x(t) \rangle = x_0 A \exp \left[ \frac{\Delta_1}{l^2 (1 - 2\beta)} t^{1-2\beta} - \frac{\kappa}{l(1-\beta)} t^{1-\beta} \right]. \quad (3.14)$$

Согласно этому выражение, в зависимости от конкретных значений параметра  $\beta$ , возможна ситуация, при которой дисперсия возрастает быстрее, чем функция, характеризующая вклад восстанавливающей силы. Поэтому, среднее значение возрастает, и система не демонстрирует релаксационное поведение, а идет в разнос, что соответствует разрыву эффективной «пружинки». Необходимо учитывать нелинейные ограничивающие слагаемые. Другая возможная ситуация – сжатая экспоненциальная релаксация.

В третьем случае,  $0 < \beta < 1/2$ , первый момент на временном интервале  $t_0 < t < t_1$  определяется выражением (3.14). Дисперсия возрастает медленнее, чем функция, характеризующая вклад восстанавливающей силы, система демонстрирует затянутую экспоненциальную релаксацию.

Рассмотрим четвертый случай,  $\beta = 1/2$ . Первый момент имеет вид

$$\langle x(t) \rangle = x_0 A \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{\Delta_1}{l^2}} \exp \left( - \frac{2\kappa}{l} t^{1/2} \right).$$

Экспонента убывает во времени быстрее, система демонстрирует затянутую экспоненциальную релаксацию.

Пятый случай,  $1/2 < \beta < 1$ , качественно подобен третьему случаю с той лишь разницей, что дисперсия не возрастает, а убывает к некоторому постоянному значению. Это означает, что затухание возрастает настолько быстро, что

случайная сила уже не может приводить к движению систему. Релаксация системы обеспечивается детерминированной силой, и она является затянутой экспоненциальной.

В шестом случае,  $\beta = 1$ , зависимость от времени параметра затухания обуславливается действием детерминированной силой, среднее значение параметра затухания имеет вид

$$\langle x(t) \rangle = x_0 A \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-\kappa/l}.$$

Таким образом, релаксация, в отличие от предыдущих случаев, носит степенной характер.

И, наконец, в седьмом случае,  $\beta > 1$ , затухание возрастает настолько быстро, что не только случайная сила, но и детерминированная, через некоторое конечное время не могут вызвать движение системы, и среднее значение параметра состояния характеризуется постоянным значением.

Таким образом, в области доминирования мультипликативного шума наблюдаются следующие режимы релаксации среднего значения параметра состояния: экспоненциальный, сжатый экспоненциальный, затянутый экспоненциальный и степенной. При достижении им значения, равного характеристической амплитуде, необходимо уже учитывать вклад аддитивного шума, и при дальнейшем уменьшении среднего значения влияние мультипликативного шума становится пренебрежимо малым.

### 3.2.2. Вклад мультипликативного шума пренебрежимо мал.

Рассмотрим область значений  $x$ , в которой доминирует аддитивный шум, т.е.  $|x| < s$ . Пренебрегая мультипликативным шумом, уравнение (3.3) примет вид

$$\lambda(t)\dot{x} = -\kappa x + \sqrt{\Delta_2}\xi(t), \quad (3.15)$$

где  $x(0) = s$ .

Используя подстановку (3.6), от уравнения (3.15) перейдем к следующему уравнению

$$\lambda(t)\dot{y} = \sqrt{\Delta_2} \exp[\kappa\Lambda(t)]\xi(t).$$

Разделяя переменные и интегрируя по частям, его решение записывается в виде

$$y(t) = s + \sqrt{\Delta_2} \int_0^t \exp[\kappa\Lambda(\tau)] \frac{\xi(\tau)d\tau}{\lambda(\tau)}.$$

И, наконец, учитывая это выражение, решение уравнения (3.15) примет окончательный вид

$$x(t) = \left\{ s + \sqrt{\Delta_2} \int_0^t \exp[\kappa\Lambda(\tau)] \frac{\xi(\tau)d\tau}{\lambda(\tau)} \right\} \exp[-\kappa\Lambda(t)]. \quad (3.16)$$

Нужно отметить, что отсчет времени для этого уравнения начинается с момента достижения выборочной траекторией уровня  $s$ , и будем предполагать, что зависимость коэффициента затухания от времени уже имеет степенной характер вида (3.2).

Для дальнейшего анализа ограничимся нахождением первого момента (среднего значения) параметра состояния (3.16). Он имеет вид

$$\langle x(t) \rangle = s \exp[-\kappa\Lambda(t)].$$

Таким образом, характер релаксации первого момента полностью определяется детерминированной силой. И в зависимости от значений параметра  $\beta$  коэффициента затухания могут наблюдаться такие же режимы релаксации, как и предыдущем пункте, а именно: экспоненциальный при  $\beta=0$ ; сжатый экспоненциальный при  $\beta<0$ ; затянутый экспоненциальный при  $0<\beta<1$ ; и степенной при  $\beta=1$ . В случае  $\beta>1$  среднее значение будет постоянным во времени. При достижении коэффициентом затухания стационарного значения  $\lambda$  (момент времени  $t_1$ , отсчитанный от начала движения из точки  $x_0$ ) дальнейшее изменение во времени среднего значения описывается экспоненциальным законом.

Обобщая результаты данного подраздела, нужно отметить одну особенность. В выражении (3.7) величина  $x_0 \exp[\sqrt{\Delta_1} \Xi(t)]$ , назовем ее стохастической амплитудой, не зависит от параметра восстанавливающей силы  $\kappa$ , с другой стороны она может характеризоваться бесконечной дисперсией, что характерно для диффузионного поведения. Исследуем его в общем случае двух мультипликативных шумов. Отличительная особенность – могут быть получены точные результаты.

### 3.3. Модель аномальной диффузии частиц в случайном поле скоростей

Рассмотрим диффузию частиц, совершающих одномерное движение в условиях большого трения в случайном поле скоростей, порождаемом двумя мультипликативными взаимно коррелированными ( $r \neq 0$ ) гауссовскими белыми шумами. Безразмерное уравнение движения с зависимым во времени коэффициентом затухания имеет вид

$$\lambda(t)\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 g_i(x(t))\xi_i(t). \quad (3.17)$$

Статистические характеристики шумов  $\xi_i(t)$  определяются выражением (2.7). Так как они – внешние, то затухание и стохастические силы в (3.17) не связаны флуктуационно-диссипативной теоремой. Отметим также, что это уравнение не учитывает эффекты инерции частиц, так как во многих случаях они важны только для очень короткого начального временного интервала. Для больших временных масштабов этими эффектами можно пренебречь. Поэтому главные статистические характеристики решения уравнения (3.17) могут быть представлены без приближений.

### 3.3.1. Плотность вероятности и ее моменты.

Используя метод Ланжевена, получим выражение нестационарной плотности вероятности  $P(x, t)$  для координаты частицы  $x(t)$  и вычислим ее моменты. Уравнение Ланжевена (3.17) с двумя белыми шумами статистически эквивалентно уравнению Ланжевена с одним белым шумом. Для случая исчисления Стратоновича получим

$$\lambda(t)\dot{x}(t) = G(x(t))\xi(t), \quad (3.18)$$

где  $x(0) = x_0$ ;

функция  $G(x)$  определяется выражениями (A.8) и (A.10) и имеет вид

$$G(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Delta_{ij} g_i(x) g_j(x)}, \quad (3.19)$$

$\xi(t)$  – гауссовский белый шум с нулевым средним значением и корреляционной функцией (3.4).

В общем случае, амплитуда флуктуаций  $G(x)$  является неотрицательной. Рассмотрим случай с ограничением  $G(x) > 0$  для всех  $x$  и, следовательно,  $x(t) \in (-\infty, \infty)$ .

Для того чтобы найти плотность вероятности для  $x(t)$ , используем явное выражение для  $x(t)$ , которое следует из уравнения (3.18) (Альтернативное получение плотности вероятности посредством решения соответствующего уравнения Фоккера-Планка представлено в Приложении Б). Получим решение для  $x(t)$ , разделяя переменные и интегрируя уравнение (3.18). Будем иметь:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{G(x')} = \int_0^t \frac{\xi(t') dt'}{\lambda(t')}. \quad (3.20)$$

Введем новое обозначение

$$\Psi(x) - \Psi(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{G(x')}. \quad (3.21)$$

Тогда уравнение (3.20) может быть переписано в следующей форме

$$\Psi(x(t)) = \Xi(t) + u_0, \quad (3.22)$$

где  $\Xi(t)$  – случайный процесс (3.8);

$$u_0 = \Psi(x_0).$$

Следуя определению (3.21), функция  $u = \Psi(x)$  является непрерывной и монотонно возрастающей; следовательно,  $\min u = \Psi(-\infty)$ ,  $\max u = \Psi(\infty)$ . С другой стороны, область значений функции  $\Xi(t)$  – все действительные числа. Следовательно, уравнение (3.22) применимо для всех значений времени только, если  $\Psi(-\infty) = -\infty$  и  $\Psi(\infty) = \infty$ . Предположим, что эти условия выполняются и примем

во внимание, что обратная функция  $x = \Psi^{-1}(u)$  является однозначной, также непрерывная и монотонно возрастающая. Запишем единственное решение уравнения (3.18) в следующей форме

$$x(t) = \Psi^{-1}(\Xi(t) + u_0). \quad (3.23)$$

Соотношение (3.23) показывает, что статистические свойства  $x(t)$  определяются гауссовским процессом  $\Xi(t)$ , который полностью характеризуется его средним значением  $\langle \Xi(t) \rangle$ , равным нулю, и корреляционной функцией (3.10).

Пусть  $P_x(x, t)$  и  $P_\xi(\xi, t)$  обозначают одномерные плотности вероятности того, что  $x(t) = x$  и  $\Xi(t) = \xi$ , соответственно. Так как существует однозначное соответствие между  $x(t)$  и  $\Xi(t)$ , должно выполняться условие  $P_x(x, t)|dx| = P_\xi(\xi, t)|d\xi|$ . Примем во внимание, что одномерная плотность вероятности  $P_\xi(\xi, t)$  гауссовского процесса имеет вид

$$P_\xi(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\sigma^2(t)}\right],$$

где  $\sigma^2(t)$  – дисперсия (3.11).

Используем соотношение  $dx/d\xi = G(x)$ , которое следует из (3.21) и (3.22), получим искомую плотность вероятности:

$$P_x(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}G(x)\sigma(t)} \exp\left[-\frac{(\Psi(x) - u_0)^2}{2\sigma^2(t)}\right]. \quad (3.24)$$

Эта плотность вероятности удовлетворяет условию нормировки, а именно  $\int_{-\infty}^{\infty} P_x(x, t)dx = 1$ . По определению ее целые моменты равны



$$\langle x^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n P_x(x, t), \quad (3.25)$$

где  $n = 1, 2, \dots$

Моменты содержат полезную информацию о стохастической динамике системы. Подставим (3.24) в (3.25) и введем новую переменную  $y = (\Psi(x) - u_0) / \sigma(t)$ , выражение для моментов (3.25) сведется к удобной для исследования форме

$$\langle x^n(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy [\Psi^{-1}(y\sigma(t) + u_0)]^n e^{-y^2/2}. \quad (3.26)$$

В зависимости от того, как коэффициент затухания  $\lambda(t)$  зависит от времени, частицы могут быть локализованы или делокализованы при  $t \rightarrow \infty$ . Если  $\sigma(\infty) < \infty$ , т.е., если  $\lambda(t)$  растет достаточно быстро, то стационарная плотность вероятности  $P_x(x, \infty)$  существует, и частицы локализованы. Броуновские частицы в замерзающей жидкости служат в качестве примера. Напротив, если  $\sigma(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , то частицы делокализованы. Исследуем подробно последний случай.

### 3.3.2. Асимптотическое поведение моментов для больших времен.

Для того чтобы изучить поведение координаты частицы  $x(t)$  при больших временах, исследовать режимы диффузии, получим асимптотические выражения для моментов  $\langle x^n(t) \rangle$  при  $t \rightarrow \infty$ . Это комплексная задача, потому что подынтегральное выражение в (3.26) содержит обратную функцию  $\Psi^{-1}(u)$  интегральной функции  $\Psi(x)$ . Так как дисперсия  $\sigma^2(t)$  стремится к бесконечности для больших времен, обратная функция для  $y > 0$  и  $y < 0$  может быть заменена ее

асимптотиками при  $u \rightarrow \infty$  и  $u \rightarrow -\infty$ , соответственно. Для того чтобы найти эти асимптотики, допустим, что асимптотика для функции  $G(x)$  имеет вид

$$G(x) \sim \sqrt{\Delta_\rho} |x|^{\alpha_\rho} \quad (x \rightarrow \rho\infty), \quad (3.27)$$

где  $\rho = +$  или  $-$ ;

$\Delta_\rho$  – эффективная интенсивность белого шума при  $x = \rho\infty$ ;

$\alpha_\rho (\leq 1)$  – действительный параметр.

При указанных значениях параметра  $\alpha_\rho$  обеспечивается условие  $\Psi(\pm\infty) = \pm\infty$ . Нужно отметить, что случай  $\alpha_\rho = 1$  соответствует линейному мультипликативному шуму,  $\alpha_\rho = 0$  – аддитивному шуму. Можно указать еще одну физическую возможность, нелинейный мультипликативный шум с  $\alpha_\rho = 1/2$ , при котором линейная зависимость реализуется не для амплитуды шума, а для его интенсивности. Он имеет непосредственное отношение к явлению направленной перколяции [143], также встречается в квантовой оптике [144]. В дальнейшем будем проводить исследования для произвольного значения  $\alpha_\rho (\leq 1)$ . Выбранная степенная зависимость амплитуды шума соответствует предположению о самоподобии стохастической системы [33].

Асимптотику коэффициента затухания примем в виде  $\lambda(t) \sim lt^\beta$  ( $t \rightarrow \infty$ ), где  $l$  – положительный параметр и  $\beta \leq 1/2$  (это условие гарантирует, что  $\sigma(\infty) = \infty$ ). Эффективный коэффициент трения, который принадлежит к указанному классу, использовался, например, при описании аномальной диффузии броуновских частиц в неоднородной среде, такой как окружение живой клетки [83]. Выбранные степенные зависимости для  $G(x)$  и  $\lambda(t)$  совместно упоминались в контексте диффузии в комплексной среде, такой как турбулентная жидкость [103]. Таким образом, физической реализацией модели (3.1) могут служить малые упругие смещения фрагментов полимерных цепочек в достаточно вязкой неоднородной среде. В свою очередь уравнение (3.17) может описывать эволюцию случайного

процесса, вызванного флуктуациями жесткости, в указанной физической системе, которая взаимодействует с неоднородной либо турбулентной средой.

При выбранной асимптотике (3.27) выражение (3.21) примет форму

$$\Psi(x) \sim \frac{\rho}{\sqrt{\Delta_\rho}} \begin{cases} \ln \frac{|x|}{a_\rho}, & \alpha_\rho = 1 \\ \frac{|x|^{1-\alpha_\rho}}{1-\alpha_\rho}, & \alpha_\rho < 1 \end{cases}. \quad (3.28)$$

Параметр нормировки  $a_\rho$  может быть найден, если точная форма функции  $\Psi(x)$  известна. Наконец, из выражения (3.28) получим

$$\Psi^{-1}(u) \sim \rho a_\rho \exp(\sqrt{\Delta_\rho} |u|) \quad (u \rightarrow \rho\infty), \quad (3.29)$$

где  $\alpha_\rho = 1$ ,

и

$$\Psi^{-1}(u) \sim \rho \left[ \sqrt{\Delta_\rho} (1-\alpha_\rho) |u| \right]^{\frac{1}{1-\alpha_\rho}} \quad (u \rightarrow \rho\infty), \quad (3.30)$$

где  $\alpha_\rho < 1$ .

Рассмотрим эти два случая отдельно.

### 3.3.2.1. Случай линейного мультипликативного шума.

В этом случае,  $\alpha_\rho = 1$ , заменим обратную функцию  $\Psi^{-1}(y\sigma(t) + u_0)$  ее асимптотиками, т.е.,  $a_+ \exp[\sqrt{\Delta_+} (y\sigma(t) + u_0)]$  при  $y > 0$  и  $-a_- \exp[\sqrt{\Delta_-} (y\sigma(t) + u_0)]$  при  $y < 0$ , выражение (3.26) при  $t \rightarrow \infty$  примет вид

$$\langle x^n(t) \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_\rho (\rho a_\rho)^n \int_0^\infty dy \exp(n\sqrt{\Delta_\rho} (y\sigma(t) + \rho u_0) - y^2/2). \quad (3.31)$$

Используем стандартную интегральную формулу [142]

$$\int_0^{\infty} dy e^{-py - y^2/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{p^2/2} \operatorname{erfc}\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right),$$

где  $\operatorname{erfc}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_z^{\infty} dt e^{-t^2}$  – дополнительная функция ошибок.

Принимая во внимание, что  $\operatorname{erfc}(-\infty) = 2$ , сведем асимптотическую формулу (3.31) к следующей форме

$$\langle x^n(t) \rangle \sim \sum_{\rho} (\rho a_{\rho})^n \exp(\rho n \sqrt{\Delta_{\rho}} u_0 + n^2 \Delta_{\rho} \sigma^2(t)/2). \quad (3.32)$$

Важно отметить, так как выражение (3.29) представляет главный член асимптотического разложения функции  $\Psi^{-1}(u)$ , то необходимо оставить только наибольшее слагаемое в правой части выражения (3.32). В частности, если  $\Delta_+ > \Delta_-$ , то

$$\langle x^n(t) \rangle \sim a_+^n \exp(n \sqrt{\Delta_+} u_0 + n^2 \Delta_+ \sigma^2(t)/2) \quad (t \rightarrow \infty), \quad (3.33)$$

т.е., частицы стремятся к плюс бесконечности. А если  $\Delta_+ < \Delta_-$ , то

$$\langle x^n(t) \rangle \sim (-1)^n a_-^n \exp(-n \sqrt{\Delta_-} u_0 + n^2 \Delta_- \sigma^2(t)/2) \quad (t \rightarrow \infty), \quad (3.34)$$

т.е., частицы стремятся к минус бесконечности. Подчеркнем, что такое поведение  $x(t)$  прямое следствие мультипликативной природы шума.

Если  $\Delta_+ = \Delta_- = \Delta$ , то  $a_+ = a_- = a$ , оба слагаемые в правой части выражения (3.32) имеют тот же порядок, и асимптотическое соотношение (3.32) сведется к следующему

$$\langle x^n(t) \rangle \sim 2a^n \cosh(n\sqrt{\Delta}u_0) \exp(n^2 \Delta \sigma^2(t)/2) \quad (t \rightarrow \infty), \quad (3.35)$$

где  $n$  – четное,

$$\langle x^n(t) \rangle \sim 2a^n \sinh(n\sqrt{\Delta}u_0) \exp(n^2 \Delta \sigma^2(t)/2) \quad (t \rightarrow \infty), \quad (3.36)$$

где  $n$  – нечетное.

Последние соотношения показывают, что, в противоположность предыдущим случаям (соотношения (3.33) и (3.34)), не происходит систематического роста первого момента  $\langle x(t) \rangle$  для  $u_0 = 0$ , т.е.,  $x_0 = \Psi^{-1}(0)$ . Другими словами, в этом случае координата частицы  $x(t)$  демонстрирует чисто диффузионное поведение, которое может характеризоваться дисперсией  $\sigma_x^2(t) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2$ . Так как  $\sigma_x^2(t) \sim 2a^2 e^{2\Delta \sigma^2(t)}$  при  $t \rightarrow \infty$ , могут существовать различные режимы диффузии для больших времен.

При выбранной асимптотике коэффициента затухания  $\lambda(t) \sim lt^\beta$  ( $t \rightarrow \infty$ ), используя выражение (3.11), для случая  $\beta < 1/2$  получим

$$\ln \sigma_x^2(t) \sim \frac{4\Delta}{l^2(1-2\beta)} t^{1-2\beta} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (3.37)$$

Таким образом, назовем диффузионное поведение затянутым экспоненциальным (stretched exponential), если  $0 < \beta < 1/2$ , экспоненциальным, если  $\beta = 0$ , сжатым экспоненциальным (compressed exponential), если  $\beta < 0$ . Если  $\beta = 1/2$ , тогда  $\sigma^2(t) \sim (2/l^2) \ln(t/\tilde{t})$ , где  $\tilde{t}$  – некоторый характеристический временной масштаб. Асимптотическое выражение для дисперсии координаты частицы примет вид

$$\sigma_x^2(t) \sim 2a^2 (t/\tilde{t})^{\frac{4\Delta}{l^2}} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (3.38)$$

Эта асимптотическая формула демонстрирует замечательную особенность рассматриваемой системы, а именно: характер ее диффузионного режима определяется эффективной интенсивностью  $\Delta$  белого шума, которая в общем случае зависит от коэффициента корреляции  $r$ . Следуя общепринятой терминологии, скажем, что система демонстрирует субдиффузию, если  $\Delta < l^2/4$ , нормальную диффузию, если  $\Delta = l^2/4$ , и супердиффузию, если  $\Delta > l^2/4$  (см. рис. 3.2).

Графики временной зависимости дисперсии координаты частицы, определяемой выражениями (3.37) и (3.38) схематически представлены на рис. 3.3. Самой быстрой в этом случае является сжатая экспоненциальная диффузия, а самой медленной – субдиффузия.

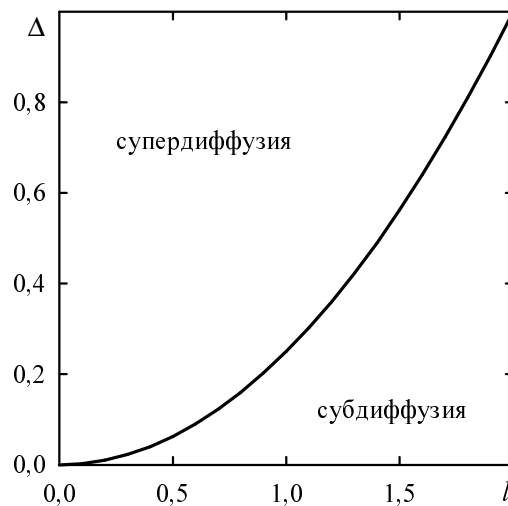


Рис. 3.2. Диаграмма зависимости  $\Delta$  от  $l$ . Вдоль сплошной линии  $\Delta = l^2/4$  реализовывается нормальная диффузия, в области  $\Delta > l^2/4$  – супердиффузия, в области  $\Delta < l^2/4$  – субдиффузия.

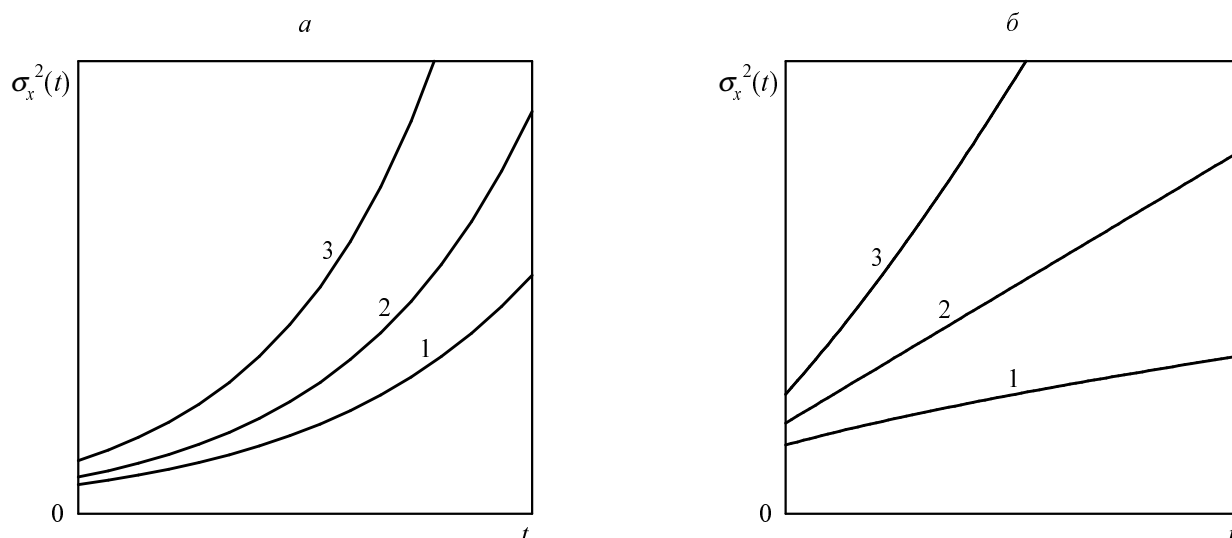


Рис. 3.3. а) Схематический вид зависимости дисперсии (3.37) от времени ( $\Delta = 1, l = 1$ ): кривая 1 –  $\beta = 0,05$  (затянутая экспоненциальная диффузия); кривая 2 –  $\beta = 0$  (экспоненциальная диффузия); кривая 3 –  $\beta = -0,05$  (сжатая экспоненциальная диффузия); б) вид зависимости дисперсии (3.38) от времени ( $2a^2 = 1, \tilde{t} = 1, l = 1$ ): кривая 1 –  $\Delta = 0,15$  (субдиффузия); кривая 2 –  $\Delta = 0,25$  (нормальная диффузия); кривая 3 –  $\Delta = 0,35$  (супердиффузия).

### 3.3.2.2. Случай нелинейного мультипликативного шума.

В этом случае,  $\alpha_\rho < 1$ , подставим асимптотику (3.30) в выражение (3.26) и используем стандартную интегральную формулу [142]:

$$\int_0^\infty dy y^\mu e^{-y^2/2} = 2^{\frac{\mu-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right), \quad (3.39)$$

где  $\mu > -1$ ;

$\Gamma(z) = \int_0^\infty dx x^{z-1} e^{-x}$  – гамма-функция.

Получим асимптотическое выражение для моментов

$$\langle x^n(t) \rangle \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{\rho} (\rho 1)^n \Gamma(\eta_{\rho}/2) [\sqrt{2\Delta_{\rho}} (1 - \alpha_{\rho}) \sigma(t)]^{\eta_{\rho}-1} \quad (t \rightarrow \infty), \quad (3.40)$$

где  $\eta_{\rho} = 1 + n/(1 - \alpha_{\rho})$ .

Важно отметить, что в правой части этого асимптотического соотношения необходимо оставить только наибольшее слагаемое. В частности, если  $\alpha_+ > \alpha_-$ , то

$$\langle x^n(t) \rangle \sim \frac{\Gamma(\eta_+/2)}{2\sqrt{\pi}} [\sqrt{2\Delta_+} (1 - \alpha_+) \sigma(t)]^{\eta_+-1} \quad (t \rightarrow \infty),$$

а если  $\alpha_+ < \alpha_-$ , то

$$\langle x^n(t) \rangle \sim (-1)^n \frac{\Gamma(\eta_-/2)}{2\sqrt{\pi}} [\sqrt{2\Delta_-} (1 - \alpha_-) \sigma(t)]^{\eta_- - 1} \quad (t \rightarrow \infty).$$

И, наконец, если  $\alpha_{\rho} = \alpha$ , ( $\eta_{\rho} = \eta$ ), то оба слагаемые имеют тот же порядок, и выражение (3.40) примет вид

$$\langle x^n(t) \rangle \sim \frac{\Gamma(\eta/2)}{2\sqrt{\pi}} [\Delta_+^{\frac{\eta-1}{2}} + (-1)^n \Delta_-^{\frac{\eta-1}{2}}] [\sqrt{2}(1 - \alpha) \sigma(t)]^{\eta-1} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Эти соотношения показывают, если  $\Delta_+ \neq \Delta_-$ , все моменты для  $x(t)$  расходятся при  $t \rightarrow \infty$ .

Предположим, что  $\alpha_{\rho} = \alpha$  и  $\Delta_{\rho} = \Delta$ . Используя асимптотическое соотношение (3.30), выражение (3.26) сведется к следующему соотношению

$$\langle x^n(t) \rangle \sim \frac{\Gamma(\eta/2)}{\sqrt{\pi}} [\sqrt{2\Delta} (1 - \alpha) \sigma(t)]^{\eta-1} \quad (t \rightarrow \infty), \quad (3.41)$$

где  $n$  – четное,



$$\langle x^n(t) \rangle \sim u_0 \frac{\eta-1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right) [\sqrt{2\Delta}(1-\alpha)]^{\eta-1} \sigma^{\eta-2}(t) \quad (t \rightarrow \infty), \quad (3.42)$$

где  $n$  – нечетное.

Последнее соотношение показывает, что  $\langle x(t) \rangle = 0$ , если  $u_0 = 0$ , частицы демонстрируют чисто диффузионное поведение. В этом случае выражение для дисперсии координаты частицы примет вид

$$\sigma_x^2(t) \sim \frac{\Gamma(1/(1-\alpha) - 1/2)}{\sqrt{\pi}} [\sqrt{2\Delta}(1-\alpha)\sigma(t)]^{\frac{2}{1-\alpha}} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Характер диффузии зависит от показателя  $\alpha$  и асимптотического поведения  $\sigma(t)$ . Если  $\lambda(t) \propto t^\beta$  ( $t \rightarrow \infty$ ,  $\beta \leq 1/2$ ), тогда  $\sigma^2(t) \propto t^{1-2\beta}$  при  $\beta < 1/2$  и  $\sigma^2(t) \propto \ln(t/\tilde{t})$  при  $\beta = 1/2$ . Таким образом, в первом случае  $\sigma_x^2(t) \propto t^{\frac{1-2\beta}{1-\alpha}}$ , частицы демонстрируют супердиффузию, если  $\alpha > 2\beta$ , нормальную диффузию, если  $\alpha = 2\beta$ , субдиффузию, если  $\alpha < 2\beta$  (см. рис. 3.4). Во втором случае частицы демонстрируют степенно-логарифмическую диффузию,  $\sigma_x^2(t) \propto \ln^{\frac{2}{1-\alpha}}(t/\tilde{t})$ .

Таким образом, мультипликативная природа шумов и временная зависимость коэффициента затухания могут приводить к аномальному поведению системы. В частности, если  $\lambda = \text{const}$ , то условия  $G(x)|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow \infty$  и  $G(x)|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$  отвечают за быструю и медленную диффузию, соответственно. С другой стороны, если  $G(x) = \text{const}$  (белый шум – аддитивный), то диффузия быстрая, если  $\lambda(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  и медленная, если  $\lambda(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$ . Замечательно, что одновременное присутствие этих факторов может приводить к новому стохастическому явлению, а именно к зависимости характера аномальной диффузии от эффективной интенсивности белого шума.

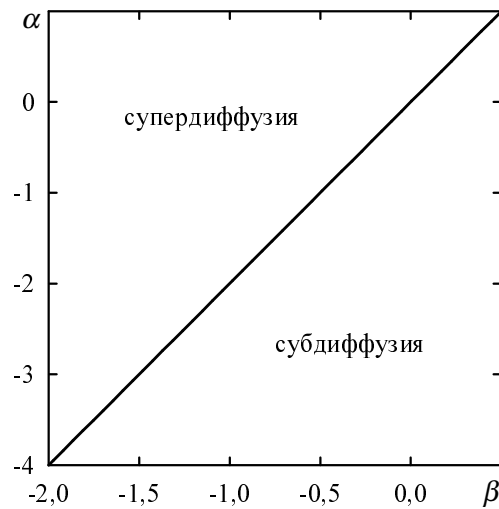


Рис. 3.4. Диаграмма зависимости  $\alpha$  от  $\beta$ . Вдоль сплошной линии  $\alpha = 2\beta$  реализуется нормальная диффузия, в области  $\alpha > 2\beta$  – супердиффузия, в области  $\alpha < 2\beta$  – субдиффузия.

3.3.3. Подтверждение асимптотического поведения точными результатами.

Для подтверждения асимптотических результатов вычислим явные выражения моментов для координаты частицы  $x(t)$  в двух частных случаях.

#### 3.3.3.1. Два аддитивных шума.

В качестве первого примера рассмотрим случай, в котором два белых шума являются аддитивными, т.е.,  $g_1(x) = g_2(x) = 1$ . Тогда,  $G^2(x) = \Delta_1 + \Delta_2 + 2r\sqrt{\Delta_1\Delta_2} \equiv G^2$ ,  $\Psi(x) = x/G$ ,  $\Psi^{-1}(u) = Gu$ ,  $u_0 = x_0/G$ , и выражение (3.26) сводится к следующему

$$\langle x^n(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy [yG\sigma(t) + x_0]^n e^{-y^2/2}.$$

Используя биномиальную и интегральную (3.39) формулы, после вычислений получим выражение для моментов

$$\langle x^n(t) \rangle = \frac{x_0^n}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \left[ \frac{\sqrt{2G}}{x_0} \sigma(t) \right]^{2k},$$

где  $[n/2]$  – целая часть  $n/2$ ;

$C_n^m = n!/(n-m)!m!$  – биномиальные коэффициенты.

Следуя этой формуле, главный член асимптотического разложения  $\langle x^n(t) \rangle$  для больших времен имеет вид слагаемого в сумме, соответствующего  $k = [n/2]$ , т.е.,

$$\langle x^n(t) \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) [\sqrt{2G}\sigma(t)]^n,$$

где  $n$  – четное,

$$\langle x^n(t) \rangle \sim \frac{x_0}{\sqrt{\pi}} n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) [\sqrt{2G}\sigma(t)]^{n-1},$$

где  $n$  – нечетное.

Так как  $\Delta = G^2$ ,  $\alpha = 0$  и  $\eta = n + 1$ , такое же асимптотическое поведение следует также из формул (3.41) и (3.42), соответственно.

### 3.3.3.2. Аддитивный и линейный мультипликативный шумы.

Получим вначале явные выражения нестационарной плотности вероятности и ее моментов. Рассмотрим случай, при котором коэффициент затухания

постоянен, корреляция между шумами отсутствует, один шум – линейный мультипликативный, другой – аддитивный, т.е.  $\lambda(t) \equiv 1$ ,  $r=0$ ,  $g_1(x)=x$ ,  $g_2(x) \equiv 1$ . Следуя определению (3.21), получим

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{arcsinh} \left( x \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta_2}} \right). \quad (3.43)$$

При этом нестационарная плотность вероятности (3.24) имеет вид

$$P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}(\Delta_1 x^2 + \Delta_2)} \exp \left\{ -\frac{1}{4\Delta_1 t} \left[ \operatorname{arcsinh} \left( x \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta_2}} \right) - \operatorname{arcsinh} \left( x_0 \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta_2}} \right) \right]^2 \right\}. \quad (3.44)$$

Подставим одномерную плотность вероятности (3.44) в выражение для моментов (3.25) и выполним замену переменной  $u = \Psi(x)$ , где функция  $\Psi(x)$  определяется выражением (3.43). Получим

$$\langle x^n(t) \rangle = \left( \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right)^{n/2} \frac{\exp(-u_0^2/(4t))}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} du \sinh^n(\sqrt{\Delta_1} u) \exp \left( -\frac{u^2}{4t} + \frac{u_0 u}{2t} \right), \quad (3.45)$$

где  $u_0 = \Psi(x_0)$ .

Для вычисления интеграла в выражении (3.45) используем формулы степеней гиперболической функции  $\sinh x$  [142]

$$\sinh^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{2n}^k \cosh 2(n-k)x + \frac{(-1)^n}{2^{2n}} C_{2n}^n, \quad (3.46)$$

$$\sinh^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2n+1}^k \sinh(2n-2k+1)x, \quad (3.47)$$

где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  – биномиальные коэффициенты.

Подставим выражения (3.46) и (3.47) в выражение (3.45) и примем во внимание интегральную формулу [142]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-by^2+cy} \left[ \frac{\sinh(py)}{\cosh(py)} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp\left(\frac{c^2+p^2}{4b}\right) \left[ \frac{\sinh(cp/2b)}{\cosh(cp/2b)} \right], \quad (3.48)$$

где  $b > 0$ .

Окончательно получим точные выражения для целых моментов:

$$\begin{aligned} \langle x^{2n}(t) \rangle = & \frac{1}{2^{2n}} \left( \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right)^n \left\{ 2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{2n}^k \exp[4\Delta_1 t(n-k)^2] + \right. \\ & \left. + \cosh \left[ 2(n-k) \operatorname{arcsinh} \left( x_0 \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta_2}} \right) \right] + (-1)^n C_{2n}^n \right\}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \langle x^{2n+1}(t) \rangle = & \frac{1}{2^{2n}} \left( \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right)^{n+1/2} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2n+1}^k \exp \left[ 4\Delta_1 t \left( n - k + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \times \\ & \times \sinh \left[ 2 \left( n - k + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arcsinh} \left( x_0 \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta_2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Таким образом, из выражения (3.50) среднее значение для координаты частицы имеет вид

$$\langle x(t) \rangle = x_0 e^{\Delta_1 t}. \quad (3.51)$$

Соответственно из (3.49), используя свойства гиперболических и обратных гиперболических функций, следует выражение среднего значения квадрата координаты частицы

$$\langle x^2(t) \rangle = \left( x_0^2 + \frac{\Delta_2}{2\Delta_1} \right) e^{4\Delta_1 t} - \frac{\Delta_2}{2\Delta_1}. \quad (3.52)$$

Используя выражения (3.51) и (3.52), найдем дисперсию координаты частицы  $\sigma_x^2(t) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2$ :

$$\sigma_x^2(t) = x_0^2(e^{4\Delta_1 t} - e^{2\Delta_1 t}) + \frac{\Delta_2}{2\Delta_1}(e^{4\Delta_1 t} - 1). \quad (3.53)$$

Таким образом, если принять, что начальная координата частицы равняется нулю,  $x_0=0$ , тогда первый момент равен нулю,  $\langle x(t) \rangle=0$ . В этом случае частицы демонстрируют чисто диффузионное поведение, которое может характеризоваться дисперсией координаты частицы (3.53). Ее асимптотика для больших времен будет иметь вид  $\sigma_x^2(t) \sim \frac{\Delta_2}{2\Delta_1} e^{4\Delta_1 t}$ . Следовательно, режим диффузии – экспоненциальный.

Учтем зависимость коэффициента затухания от времени и корреляцию между шумами. Следуя определению (3.19), в этом случае

$$G(x) = \sqrt{\Delta_1(x^2 + 2rvx + v^2)}, \quad (3.54)$$

где  $v = \sqrt{\Delta_2/\Delta_1}$ .

Для  $|r| < 1$  получим

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{x + rv}{v\sqrt{1-r^2}} \right), \quad (3.55)$$

и

$$\Psi^{-1}(u) = v\sqrt{1-r^2} \sinh(\sqrt{\Delta_1}u) - rv. \quad (3.56)$$

Подставим выражение (3.56) в выражение (3.26). Используя соотношение

$$\sinh(\sqrt{\Delta_1}u_0) = \frac{x_0 + rv}{v\sqrt{1-r^2}}, \quad (3.57)$$

которое следует из (3.56), и стандартную интегральную формулу (3.48), получим выражения для первого и второго моментов

$$\langle x(t) \rangle = (x_0 + rv)\exp[\Delta_1\sigma^2(t)/2] - rv,$$

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= [(x_0 + rv)^2 + v^2(1-r^2)/2] \exp[2\Delta_1\sigma^2(t)] - \\ &- 2rv(x_0 + rv)\exp[\Delta_1\sigma^2(t)/2] + v^2(3r^2 - 1)/2. \end{aligned}$$

При  $t \rightarrow \infty$  асимптотики этих выражений примут вид

$$\langle x(t) \rangle \sim (x_0 + rv)\exp[\Delta_1\sigma^2(t)/2], \quad (3.58)$$

$$\langle x^2(t) \rangle \sim [(x_0 + rv)^2 + v^2(1-r^2)/2] \exp[2\Delta_1\sigma^2(t)]. \quad (3.59)$$

С другой стороны, такие же асимптотические представления  $\langle x(t) \rangle$  и  $\langle x^2(t) \rangle$  для больших времен следуют из общих асимптотических формул (3.35) и (3.36). Чтобы проверить это, сравним (3.27) с асимптотическим соотношением  $G(x) \sim \sqrt{\Delta_1} |x|$ , которое следует из (3.54) при  $|x| \rightarrow \infty$ ; получим  $\Delta_\rho = \Delta = \Delta_1$  и  $\alpha_\rho = \alpha = 1$ . Далее, так как  $\operatorname{arcsinh} z \sim \rho \ln 2|z|$  при  $|z| \rightarrow \rho\infty$ , из (3.55) найдем асимптотическую формулу

$$\Psi(x) \sim \frac{\rho}{\sqrt{\Delta_1}} \ln \left( \frac{2|x|}{v\sqrt{1-r^2}} \right) \quad (x \rightarrow \rho\infty).$$

Сравнивая это выражение с выражением (3.28), получим  $a_\rho = a = v\sqrt{1-r^2}/2$ . И, наконец, подставляя значения для  $\Delta$  и  $a$  в формулы (3.36) [ $n=1$ ] и (3.35) [ $n=2$ ] и используя соотношение (3.57), в самом деле, получим асимптотические формулы (3.58) и (3.59).

Таким образом, точные результаты подтверждают общие асимптотические формулы, полученные в предыдущем подразделе. Приведенные в данном подразделе результаты могут быть проверены на аналоговой схеме (рис.3.1) при условии, что напряжение  $k$  равняется нулю, а выборки для измеряемого напряжения  $x$  производятся на временном интервале  $(t_0, t_1)$ .

### 3.4. Выводы к разделу 3

1. Изучение временной эволюции пространственно-однородной стохастической системы с двумя источниками шума в нестационарной среде достигается рассмотрением уравнения Ланжевена с зависимым во времени коэффициентом затухания, которое описывает сильно затухающий гармонический осциллятор с флуктуирующей частотой и скоростью. Для затухания принимается степенная зависимость в конечном временном интервале, которая непосредственно может быть реализована в электрических контурах. Также предполагается применимость приближения гауссовского белого шума.

2. Для изучения релаксации применяется приближенный подход, основанный на разбиении области значений параметра состояния на два интервала, в каждом из которых доминирует один из шумов, и соответственно вклад другого пренебрегается. В зависимости от значений параметра коэффициента затухания



хания могут наблюдаться экспоненциальный, сжатый экспоненциальный, затянутый экспоненциальный и степенной режимы релаксации первого момента на каждом временном интервале. После достижения коэффициентом затухания стационарного значения релаксация обычная, экспоненциальная. В области доминирования мультипликативного шума выделена стохастическая амплитуда, которая не зависит от параметра восстанавливающей силы и может характеризоваться бесконечными статистическими моментами.

3. Изучение динамики частиц при больших временах в случайном поле скоростей, порождаемом двумя мультипликативными шумами, достигается вычислением асимптотик моментов плотности вероятности. При их анализе выявлены различные режимы аномальной диффузии частиц, а именно: нормальный, субдиффузия, супердиффузия, экспоненциальный, затянутый экспоненциальный, сжатый экспоненциальный и степенно-логарифмический. В некоторых частных случаях общие асимптотические результаты были подтверждены точными формулами для моментов. Обнаружена отличительная особенность стохастических систем с линейным мультипликативным шумом: режим их диффузионного поведения может определяться эффективной интенсивностью белого шума, которая, в общем случае, зависит от параметра взаимной корреляции.

Основные результаты, представленные в данном разделе, опубликованы в работах [6,7,9].

## РАЗДЕЛ 4

# ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ИСТОЧНИКАМИ ЦВЕТНОГО ШУМА

### 4.1. Обоснование модели

В предыдущих двух разделах изучалось поведение стохастических систем в приближении гауссовских белых шумов. Данный подход применим, если время релаксации источников шума намного меньше времени релаксации системы. В рамках данного подхода использовались методы уравнений Ланжевена и Фоккера-Планка, позволяющие получить плотность вероятности и ее моменты. Если же время релаксации источников шума сравнимо со временем релаксации системы, то необходимо рассматривать цветные шумы с ненулевым временем корреляции. В этом случае нет возможности получить точные статистические характеристики стохастической системы, и для исследования ее временной эволюции широкое применение получили приближенные методы. Учитывая важность точных результатов, возникает интерес выполнить это исследование в рамках точных результатов, нахождению которых посвящен данный раздел.

Рассмотрим стохастическую систему с линейной восстанавливающей силой и двумя источниками цветного шума. Безразмерное уравнение Ланжевена имеет вид

$$\dot{x}(t) + [\kappa - f_1(t)]x(t) = |x(t)|^\alpha f_2(t), \quad (4.1)$$

где  $x(0) = x_0 > 0$ ;

$\kappa > 0$  – коэффициент линейной восстанавливающей силы;

$\alpha$  – действительный параметр нелинейного мультипликативного шума;  
 $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  – цветные шумы с нулевыми средними значениями и известными статистическими характеристиками.

Нужно отметить, что предположение положительности начального значения параметра состояния не ограничивает общности рассматриваемого уравнения, т.к. стохастическая система статистически симметрична относительно преобразования  $x \rightarrow -x$ .

В детерминированном случае, т.е. при всех значениях времени  $f_1(t) \equiv 0$  и  $f_2(t) \equiv 0$ , уравнение (4.1) описывает свободный сильно затухающий гармонический осциллятор с параметром  $\kappa$ , соответствующим квадрату частоты собственных колебаний. Случай с одним мультипликативным цветным шумом,  $f_1(t) \equiv 0$ , подробно изучен в [52], при этом уравнение Ланжевена (4.1) описывает широкий класс случайных процессов. В частности, если время релаксации системы  $\kappa^{-1}$  намного больше времени корреляции шума  $f_2(t)$ , т.е. он является гауссовским белым шумом, тогда при  $\kappa=0$  и  $\alpha=0$  параметр состояния  $x(t)$  – винеровский процесс, описывающий положение броуновской частицы в пространстве; при  $\kappa>0$  и  $\alpha=0$  – процесс Орнштейна-Уленбека, описывающий скорость броуновской частицы; при  $\kappa>0$  и  $\alpha=1$  – логарифмически нормальный процесс, описывающий сильно затухающий гармонический осциллятор с флуктуирующей частотой. Таким образом, уравнение Ланжевена (4.1) обобщает уравнение Ланжевена с одним мультипликативным цветным шумом на случай двух мультипликативных цветных шумов, один из которых линейный, другой – нелинейный.

В предыдущем разделе уже рассматривался нелинейный мультипликативный шум со степенной амплитудой флуктуаций, и указывались возможные с физической точки зрения значения параметра  $\alpha$ , а именно:  $\alpha=0$ ,  $\alpha=1/2$ ,  $\alpha=1$ . Если  $\alpha=1$ , тогда уравнение (4.1) содержит два линейных мультипликативных шума, и оно может быть представлено в виде уравнения с одним шумом:

$$\dot{x}(t) + \kappa x(t) = x(t)f(t),$$

где  $x(t) \geq 0$  и  $f(t) \equiv f_2(t) + f_1(t)$ .

Если  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  – гауссовские шумы с нулевыми средними значениями и известными корреляционными функциями, тогда шум  $f(t)$  – тоже гауссовский, и его статистические характеристики могут быть определены. Этот случай уже исследован в [52], поэтому в дальнейшем рассматривается уравнение Ланжевена (4.1) параметром  $\alpha < 1$ . Это позволит использовать уже известные результаты для стохастической системы с нелинейным мультипликативным цветным шумом и проверять полученные в частных случаях. Но с физической точки зрения выделяется случай  $\alpha = 0$ , соответствующий сильно затухающему гармоническому осциллятору с флуктуирующими частотой и скоростью. При этом линейный мультипликативный и аддитивный цветные шумы считаются внешними. Поэтому они не связаны с затуханием и флуктуационно-диссипативная теорема не выполняется. С другой стороны, уравнение (4.1) может описывать гармонический осциллятор, помещенный в тепловую баню, если для внутренних флуктуаций применима идеализация белого шума. В противном случае, необходимо записывать уравнение с ядром памяти силы трения вида (1.8).

Нужно отметить, что с математической точки зрения для случая  $0 < \alpha < 1$  решение уравнения Ланжевена (4.1) неединственное в точке  $x = 0$ . Существует два решения, проходящих через ноль, и в зависимости от физических предпосылок делается соответствующий выбор. Если точка  $x = 0$  рассматривается как адсорбирующая, тогда решение уравнения (4.1) при  $0 \leq t < t_{fp}$ , где  $t_{fp}$  – случайное время первого достижения частицей точки  $x = 0$ , совпадает с решением следующего уравнения

$$\{ \dot{x}(t) + [\kappa - f_1(t)]x(t) \} |x(t)|^{-\alpha} = f_2(t), \quad (4.2)$$

а при  $t > t_{fp}$   $x(t) \equiv 0$ . Так как рассматривается сильно затухающий гармонический осциллятор, то точка  $x=0$  является регулярной, и решение уравнения (4.1) совпадает с решением уравнения (4.2) при всех значениях времени  $t \geq 0$ . Получим его для случая произвольных независимых шумов  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ . Затем определим их статистические характеристики, позволяющие выразить статистические характеристики системы.

## 4.2. Статистические характеристики системы

### 4.2.1. Решение уравнения Ланжевена.

Чтобы получить решение уравнения (4.2) выполним нелинейное преобразование для координаты частицы. Введем новую функцию  $y(t) = x(t)|x(t)|^{\alpha-1}$  ( $\alpha \neq 1$ ), производная которой равна  $\dot{y}(t) = (1-\alpha)|x(t)|^{\alpha-1}\dot{x}(t)$ . Тогда нелинейное уравнение Ланжевена (4.2) сводится к линейному уравнению

$$\dot{y}(t) + [\omega - (1-\alpha)f_1(t)]y(t) = (1-\alpha)f_2(t), \quad (4.3)$$

где  $\omega = (1-\alpha)\kappa$ ;

$$y(0) = x_0^{1-\alpha}.$$

Чтобы получить решение уравнения (4.3) введем новую функцию  $z(t)$  такую, что (см., например, [145])

$$y(t) = z(t)\exp[-\omega t + (1-\alpha)\int_0^t d\tau f_1(\tau)].$$

Ее производная  $\dot{y}(t)$  равна

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & \dot{z}(t) \exp[-\omega t + (1 - \alpha) \int_0^t d\tau f_1(\tau)] + \\ & + z(t) \exp[-\omega t + (1 - \alpha) \int_0^t d\tau f_1(\tau)] [-\omega + (1 - \alpha) f_1(t)]. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для  $y(t)$  и  $\dot{y}(t)$  в уравнение (4.3), получим новое уравнение для случайной переменной  $z$

$$\dot{z}(t) = (1 - \alpha) f_2(t) \exp[\omega t - (1 - \alpha) \int_0^t d\tau f_1(\tau)],$$

где  $z(0) = x_0^{1-\alpha}$ .

Разделяя переменные [146], его решение примет вид

$$z(t) = x_0^{1-\alpha} + (1 - \alpha) \int_0^t d\tau f_2(\tau) \exp[\omega \tau - (1 - \alpha) \int_0^\tau d\tau_1 f_1(\tau_1)].$$

Следовательно, решение уравнения (4.3) может быть записано в виде

$$y(t) = \exp[-\omega t + (1 - \alpha) F_1(t)] \left[ x_0^{1-\alpha} + (1 - \alpha) \int_0^t d\tau f_2(\tau) \exp[\omega \tau - (1 - \alpha) F_1(\tau)] \right], \quad (4.4)$$

где

$$F_1(t) = \int_0^t d\tau f_1(\tau).$$

Введем в рассмотрение новый случайный процесс  $F(t)$ :

$$F(t) = e^{-\omega t} \left[ x_0^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_0^t d\tau f_2(\tau) \exp[\omega\tau - (1-\alpha)F_1(\tau)] \right]. \quad (4.5)$$

Тогда выражение (4.4) можно переписать:

$$y(t) = F(t) \exp[(1-\alpha)F_1(t)].$$

И, наконец, подставляя это выражение для  $y(t)$  в выражение  $x(t) = y(t)|y(t)|^{\alpha/(1-\alpha)}$ , решение уравнения (4.2) представим в следующей форме

$$x(t) = F(t) |F(t)|^{\alpha/(1-\alpha)} e^{F_1(t)}. \quad (4.6)$$

Используя это решение, определим характеристики шумов  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , позволяющие записать характеристики случайного процесса  $x(t)$ .

#### 4.2.2. Статистические характеристики шумов.

Для того чтобы получить одномерную нестационарную плотность вероятности параметра состояния  $x(t)$ , необходимо определить одномерные плотности вероятности процессов  $F_1(t)$  и  $F(t)$ .

Одномерную плотность вероятности для  $F_1(t)$  можно найти в случае гауссовского шума  $f_1(t)$ . Это предположение выполняется для многих источников реального шума. Действительно, его эффект часто обусловлен кумулятивным действием многих случайных фактор. Следуя центральной предельной теореме этот шум можно считать гауссовским. Примем, что гауссовский шум  $f_1(t)$  характеризуется нулевым средним значением и произвольной стационарной корреляционной функцией, зависящей лишь от разности двух моментов времени:

$$\langle f_1(t)f_1(t') \rangle = r_1(|t-t'|). \quad (4.7)$$

На функцию  $r_1(u)$  накладывается два ограничения:  $r_1(0) > 0$ , т.е. дисперсия, характеризующая разброс значений, положительна;  $r_1(\infty) = 0$ , т.е. значения шума в моменты времени, значительно удаленные друг от друга, не коррелируют. В силу линейной зависимости  $F_1(t)$  от  $f_1(t)$ , случайный процесс  $F_1(t)$  – гауссовский [147], который полностью характеризуется средним значением, равным нулю, и корреляционной функцией [52]:

$$K_1(t_1, t_2) = \langle F_1(t_1)F_1(t_2) \rangle = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 \langle f_1(\tau_1)f_1(\tau_2) \rangle = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 r(|\tau_1 - \tau_2|).$$

Для того чтобы записать корреляционную функцию в виде однократного интеграла, введем новые переменные,  $\tau_1 - \tau_2 = u$ ,  $\tau_1 + \tau_2 = v$ , и найдем якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial u} & \frac{\partial \tau_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial u} & \frac{\partial \tau_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Определив область интегрирования для новых переменных, корреляционную функцию случайного процесса  $F_1(t)$  можно представить в виде

$$K_1(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} du r(u)(t_2 - u) + \int_{t_1 - t_2}^{t_1} du r(u)(t_1 - u) + t_2 \int_0^{t_1 - t_2} du r(u) \quad (t_1 > t_2).$$

Таким образом, выражение для дисперсии принимает следующую форму



$$\sigma_1^2(t) = K_1(t, t) = 2 \int_0^t du r_1(u)(t-u). \quad (4.8)$$

Нужно отметить, в силу того, что гауссовские шумы  $f_1(t)$  и  $-f_1(t)$  являются статистически эквивалентными, то случайные гауссовские процессы  $F_1(t)$  и  $-F_1(t)$  также статистически эквиваленты. А это означает, что решение (4.6) можно представить в виде

$$x(t) = \frac{F(t) |F(t)|^{\alpha/(1-\alpha)}}{e^{F_1(t)}}. \quad (4.9)$$

Анализируя выражение (4.5), можно прийти к выводу, что нет возможности получить одномерную плотность вероятности для процесса  $F(t)$  в случае гауссовского шума  $f_2(t)$ , т.к. под знаком интеграла появляется негауссовский процесс. Определим статистические характеристики шума  $f_2(t)$  таким образом, чтобы под интегралом стоял гауссовский процесс. Для этого предположим, что между шумами  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  существует специальная зависимость, выраженная следующим соотношением

$$f_2(t) = f(t)e^{(1-\alpha)F_1(t)}, \quad (4.10)$$

где  $f(t)$  – гауссовский шум с нулевым средним значением и произвольной стационарной корреляционной функцией

$$\langle f(t)f(t') \rangle = r(|t-t'|). \quad (4.11)$$

Принимается, что шумы  $f(t)$  и  $f_1(t)$  являются независимыми. При этом шумы  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  хоть и зависимые, но некоррелированные. Действительно можно записать

$$\langle f_1(t)f_2(t') \rangle = \langle f_1(t)f(t')e^{(1-\alpha)F_1(t')} \rangle = \langle f(t') \rangle \langle f_1(t)e^{(1-\alpha)F_1(t')} \rangle.$$

Так как  $\langle f(t') \rangle = 0$ , то  $\langle f_1(t)f_2(t') \rangle = 0$ , что подтверждает тезис о некоррелированности зависимых шумов  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ .

Таким образом,  $f_2(t)$  – негауссовский процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией, которую можно записать в виде

$$\langle f_2(t)f_2(t') \rangle = r(|t-t'|) \langle e^{(1-\alpha)F_1(t)} e^{(1-\alpha)F_1(t')} \rangle.$$

Выражение в угловых скобках представляет корреляционную функцию логарифмически нормального процесса [52]:

$$\langle e^{(1-\alpha)F_1(t)} e^{(1-\alpha)F_1(t')} \rangle = e^{(1-\alpha)^2[\sigma_1^2(t)+\sigma_1^2(t')]/2} \left[ e^{K_1(t,t')} - 1 \right].$$

Подставим соотношение (4.11) в выражение (4.5) и определим статистические характеристики гауссовского процесса  $F(t)$ . Его среднее значение имеет вид

$$m(t) = \langle F(t) \rangle = x_0^{1-\alpha} e^{-\omega t}. \quad (4.12)$$

Определим корреляционную функцию [52]:

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) = \langle F(t_1)F(t_2) \rangle = e^{-\omega(t_1+t_2)} & \left[ x_0^{2(1-\alpha)} + (1-\alpha)x_0^{1-\alpha} \int_0^{t_1} d\tau_1 \langle f(\tau_1) \rangle e^{\omega \tau_1} + \right. \\ & \left. + (1-\alpha)x_0^{1-\alpha} \int_0^{t_2} d\tau_2 \langle f(\tau_2) \rangle e^{\omega \tau_2} + (1-\alpha)^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 \langle f(\tau_1)f(\tau_2) \rangle e^{\omega(\tau_1+\tau_2)} \right] = \end{aligned}$$

$$= e^{-\omega(t_1+t_2)} \left[ x_0^{2(1-\alpha)} + (1-\alpha)^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 r(|\tau_1 - \tau_2|) e^{\omega(\tau_1+\tau_2)} \right].$$

Сведем двукратный интеграл в последнем выражении к однократному. Для этого перейдем к новым переменным, таким же, как и в предыдущем случае. Корреляционная функция  $K(t_1, t_2)$  примет вид

$$K(t_1, t_2) = e^{-\omega(t_1+t_2)} \left\{ x_0^{2(1-\alpha)} + \frac{(1-\alpha)^2}{2\omega} \left\{ \int_0^{t_2} dur(u) [e^{\omega(2t_2-u)} - e^{\omega u}] + \int_{t_1-t_2}^{t_1} dur(u) [e^{\omega(2t_1-u)} - e^{\omega u}] + \int_0^{t_1-t_2} dur(u) [e^{\omega(2t_2+u)} - e^{\omega u}] \right\} \right\} \quad (t_1 > t_2).$$

Найдем дисперсию:

$$\sigma^2(t) = K(t, t) - m^2(t) = (1-\alpha)^2 \frac{e^{-2\omega t}}{\omega} \int_0^t dur(u) [e^{\omega(2t-u)} - e^{\omega u}].$$

Используя формулу для гиперболического синуса, окончательное выражение для дисперсии представим в виде

$$\sigma^2(t) = 2(1-\alpha) \frac{e^{-\omega t}}{\kappa} \int_0^t dur(u) \sinh[\omega(t-u)]. \quad (4.13)$$

Таким образом, уравнение Ланжевена (4.2) с произвольными независимыми шумами  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  сводится к следующему уравнению Ланжевена

$$\{\dot{x}(t) + [\kappa - f_1(t)]x(t)\} | x(t) \Gamma^\alpha = f(t) e^{(1-\alpha)F_1(t)}, \quad (4.14)$$

где  $f_1(t)$  и  $f(t)$  – статистически независимые гауссовские цветные шумы с известными статистическими характеристиками.

Определив статистические характеристики шумов, найдем нестационарную плотность вероятности для параметра состояния системы.

#### 4.2.3. Плотность вероятности параметра состояния.

Введем в рассмотрение степенно-нормальный случайный процесс  $p(t) = F(t)|F(t)|^{\alpha/(1-\alpha)}$  [52]. Пусть  $P_p(p, t)$  означает одномерную плотность вероятности того, что процесс  $p(t)$  в момент времени  $t$  принимает значение из интервала  $(p, p + dp)$ . Она имеет вид

$$P_p(p, t) = \frac{1-\alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)|p|^\alpha} \exp\left\{-\frac{[p|p|^\alpha - m(t)]^2}{2\sigma^2(t)}\right\}. \quad (4.15)$$

Случайный процесс  $l(t) = e^{F_1(t)}$  – логарифмически нормальный. Пусть  $P_l(l, t)$  означает одномерную плотность вероятности того, что процесс  $l(t)$  в момент времени  $t$  принимает значение из интервала  $(l, l + dl)$ , она имеет вид

$$P_l(l, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1(t)l} \exp\left[-\frac{\ln^2 l}{2\sigma_1^2(t)}\right] \quad (l \geq 0). \quad (4.16)$$

В соответствии с выражением (4.9), решение уравнения (4.14) может быть записано как  $x(t) = p(t)/l(t)$ , где  $p(t)$  и  $l(t)$  статистически независимые степенно-нормальный и логарифмически нормальный процессы. Не трудно прийти к выводу, что, вводя новую переменную  $p(t) = x(t)l(t)$ , уравнение (4.14) может быть получено из уравнения Ланжевена с одним шумом

$$[\dot{p}(t) + \kappa p(t)] |p(t)|^{-\alpha} = f(t),$$

где  $p(0) = x_0$ .

Пусть  $P_x(x, t)$  означает одномерную плотность вероятности того, что процесс  $x(t)$  в момент времени  $t$  принимает значение из интервала  $(x, x+dx)$ . Ее можно вычислить, используя формулу для плотности вероятности отношения двух случайных величин (см., например, [136]):

$$P_x(x, t) = \int_0^{\infty} dy y P_l(y, t) P_p(yx, t). \quad (4.17)$$

Подставляя выражения (4.15) и (4.16) в выражение (4.17) и делая замену переменных  $u = y^{1-\alpha}$ , получим окончательное выражение нестационарной одномерной плотности вероятности случайного процесса  $x(t)$ :

$$P_x(x, t) = \frac{1-\alpha}{2\pi\sigma_\alpha(t)\sigma(t)|x|^\alpha} \int_0^{\infty} du \exp\left\{-\frac{\ln^2 u}{2\sigma_\alpha^2(t)} - \frac{[ux|x|^{-\alpha} - m(t)]^2}{2\sigma^2(t)}\right\}, \quad (4.18)$$

где  $\sigma_\alpha(t) = (1-\alpha)\sigma_1(t)$ .

Построим графики плотности вероятности (4.18). Для этого выберем корреляционные функции (4.7) и (4.11) вида (1.6)

$$r_1(u) = \frac{D_1}{\tau_1} \exp\left(-\frac{u}{\tau_1}\right), \quad r(u) = \frac{D}{\tau} \exp\left(-\frac{u}{\tau}\right), \quad (4.19)$$

где  $D_1$  и  $D$  – интенсивности шумов  $f_1(t)$  и  $f(t)$ , соответственно;

$\tau_1$  и  $\tau$  – времена корреляции шумов.

В случае (4.19) выражения для дисперсии (4.8) и (4.13) примут вид

$$\sigma_1^2(t) = 2D_1 \left[ t + \tau_1 (e^{-t/\tau_1} - 1) \right],$$

$$\sigma^2(t) = \frac{D(1-\alpha)}{\kappa\tau} \left\{ \frac{\tau}{\omega\tau + 1} - \frac{2\tau^2\omega}{\tau^2\omega^2 - 1} \exp \left[ -t \left( \omega + \frac{1}{\tau} \right) \right] + \frac{\tau}{\tau\omega - 1} \exp(-2\omega t) \right\}.$$

Графики плотности вероятности (4.18) для разных значений параметра  $\alpha$  приведены на рис. 4.1.

Исследуем нестационарную плотность вероятности в предельных случаях. Если  $f_1(t) \equiv 0$  [ $\sigma_\alpha^2(t) \rightarrow 0$  для всех моментов времени  $t \geq 0$ ], малая окрестность точки  $u = 1$  делает основной вклад, поэтому можно записать

$$P_x(x, t) = \frac{1-\alpha}{2\pi\sigma(t)|x|^\alpha} \int_0^\infty du \exp \left\{ -\frac{[x|x|^{-\alpha} - m(t)]^2}{2\sigma^2(t)} \right\} \lim_{\sigma_\alpha^2(t) \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_\alpha(t)} \int_0^\infty du \exp \left[ -\frac{\ln^2 u}{2\sigma_\alpha^2(t)} \right].$$

Делая замену переменных  $z = \ln u$ , сведем интеграл в предыдущем выражении к табличному

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp \left[ z - \frac{z^2}{2\sigma_\alpha^2(t)} \right] = \sqrt{2\pi}\sigma_\alpha(t) \exp \left[ \frac{1}{2}\sigma_\alpha^2(t) \right].$$

Таким образом, в этом случае выражение (4.18) сводится к одномерной плотности вероятности степенно-нормального распределения (4.15).

Если  $f(t) \equiv 0$  [ $\sigma^2(t) \rightarrow 0$  для всех моментов времени  $t \geq 0$ ], примем во внимание, что

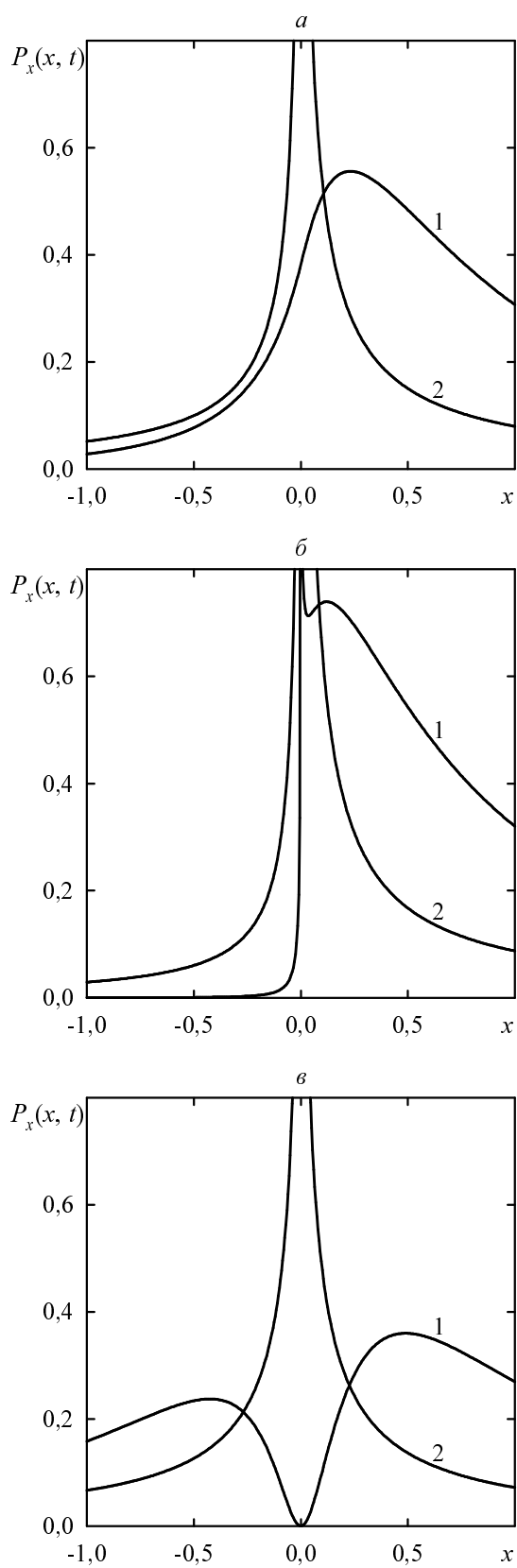


Рис. 4.1. График плотности вероятности при  $x_0 = 1$ ,  $\kappa = 0,1$ ,  $D_1 = D = \tau_1 = \tau = 1$ :

а)  $\alpha = 0$ ; б)  $\alpha = 0,5$ ; в)  $\alpha = -2$ . Кривая 1 –  $t = 1$ ; кривая 2 –  $t = 5$ .

$$\lim_{\sigma^2(t) \rightarrow 0} \left\{ \left[ \sqrt{2\pi} \left[ \frac{\sigma(t)}{|x|^{1-\alpha}} \right] \right]^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ u - \frac{m(t)}{x|x|^{-\alpha}} \right]^2 \left[ \frac{\sigma(t)}{|x|^{1-\alpha}} \right]^{-2} \right\} \right\} = \delta \left[ u - \frac{m(t)}{x|x|^{-\alpha}} \right],$$

где  $\delta(x)$  – дельта функция Дирака.

Таким образом, выражение (4.18) можно представить в виде

$$\begin{aligned} P_x(x, t) &= \frac{1-\alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma_\alpha(t)|x|} \int_0^\infty du \exp \left[ -\frac{\ln^2 u}{2\sigma_\alpha^2(t)} \right] \delta \left[ u - \frac{m(t)}{x|x|^{-\alpha}} \right] = \\ &= \frac{1-\alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma_\alpha(t)|x|} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\alpha^2(t)} \ln^2 \left[ \frac{m(t)}{x|x|^{-\alpha}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Если  $x_0 > 0$ , эволюция частиц происходит на полу бесконечной прямой  $[0, \infty)$ , если же  $x_0 < 0$ , то  $x \in (-\infty, 0]$ . Для случая  $x_0 > 0$ , учитывая выражение (4.12) для среднего значения  $m(t)$ , после преобразований можно записать

$$P_x(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1(t)x} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_1^2(t)} \left( \ln \frac{x}{x_0} + \kappa t \right)^2 \right] \quad (x \geq 0). \quad (4.20)$$

Таким образом, выражение (4.18) сводится к одномерной плотности вероятности логарифмически нормального распределения (4.20) [52].

В момент времени  $t=0$  плотность вероятности  $P_x(x, t)$  (4.18) переходит в дельта-функцию  $\delta(x-x_0)$ . Действительно, можно записать

$$\lim_{t \rightarrow 0} P_x(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \lim_{\sigma_\alpha^2(t) \rightarrow 0} P_x(x, t) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \lim_{\sigma^2(t) \rightarrow 0} P_x(x, t) \right).$$



Принимая во внимание, что выражения (4.15) или (4.20) для нулевого момента времени являются дельта-функциями, приходим к выводу, что плотность вероятности  $P_x(x, t)$  при  $t=0$  также дельта-функция.

#### 4.2.4. Дробные моменты плотности вероятности.

Перейдем к вычислению дробных нестационарных моментов для параметра состояния системы  $x(t)$ . По определению они равны

$$m_r^v(t) = \langle |x(t)|^{r-v} x^v(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx P_x(x, t) |x|^{r-v} x^v, \quad (4.21)$$

где  $r$  – действительное число,  $v = 0$  или  $1$ .

Дробные моменты при  $r > 0$  являются полезным инструментом для исследования поведения плотности вероятности  $P(x, t)$  при  $|x| \rightarrow \infty$ , в свою очередь, при  $r < 0$  они предоставляют информацию о поведении  $P(x, t)$  в окрестности точки  $x=0$ . Сходимость или расходимость дробных моментов при частном значении параметра  $r$  позволяет делать выводы о поведении при  $|x| \rightarrow \infty$  и  $x \rightarrow 0$ , соответственно. Дробные моменты  $m_r^1(t)$  характеризуют асимметричность распределения и всегда  $m_r^0(t) \geq m_r^1(t)$ . Если же плотность вероятности определена, например, только для положительных значений параметра состояния, как в случае логарифмически нормального распределения,  $P(x, t) \equiv 0$  при  $x < 0$ , тогда  $m_r^0(t) = m_r^1(t)$ .

Подставляя в (4.21) выражение  $x(t) = p(t) l(t)$ , дробные моменты для параметра состояния можно представить в виде произведения дробных моментов степенно-нормального распределения и логарифмически нормального:

$$m_r^v(t) = \langle |p(t)|^{r-v} p^v(t) \rangle \langle l^r(t) \rangle.$$

Дробные моменты логарифмически нормального процесса [52]:

$$\langle l^r(t) \rangle = \int_0^{\infty} dy y^r P_l(y, t) = \exp[r^2 \sigma_1^2(t) / 2]. \quad (4.22)$$

Дробные моменты степенно-нормального распределения [52]:

$$\begin{aligned} \langle |p(t)|^{r-v} p^v(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dy P_p(y, t) |y|^{r-v} y^v = \frac{\Gamma(\eta)}{\sqrt{2\pi}} \sigma^{\eta-1}(t) \exp[-a^2(t)/4] \times, \\ &\times \left\{ D_{-\eta}[-a(t)] + (-1)^v D_{-\eta}[a(t)] \right\}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где  $\eta = 1 + r / (1 - \alpha)$ ;

$a(t) = m(t) / \sigma(t)$ ;

$D_{-\eta}(z)$  – интегральное представление функции параболического цилиндра

$$D_{-\eta}(z) = \frac{e^{-z^2/4}}{\Gamma(\eta)} \int_0^{\infty} dy y^{\eta-1} e^{-y^2/2 - zy} \quad (\eta > 0), \quad (4.24)$$

$\Gamma(\eta)$  – гамма-функция

$$\Gamma(\eta) = \int_0^{\infty} dy y^{\eta-1} e^{-y}.$$

Отметим, что для  $\eta = n + 1$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , функции параболического цилиндра (4.24) можно представить в виде

$$D_{-n-1}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n}{n!} e^{-z^2/4} \frac{d^n}{dz^n} \left( e^{z^2/2} \operatorname{erfc} \frac{z}{\sqrt{2}} \right),$$

где  $\operatorname{erfc}(z)$  – дополнительный интеграл вероятности

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} dt e^{-t^2}.$$

Таким образом, используя выражения (4.22) и (4.23), дробные моменты для  $x(t)$  примут вид

$$m_r^v(t) = \frac{\Gamma(\eta)}{\sqrt{2\pi}} \sigma^{\eta-1}(t) \exp[r^2 \sigma_1^2(t)/2 - a^2(t)/4] \{D_{-\eta}[-a(t)] + (-1)^v D_{-\eta}[a(t)]\}. \quad (4.25)$$

Если  $\eta \leq 0$ , все дробные моменты расходятся. Также можно убедиться, что  $m_0^0(t) = 1$ , поэтому одномерная плотность вероятности  $P(x, t)$  должным образом нормирована.

Отметим, что при  $\sigma_1^2(t) \rightarrow 0$  для всех моментов времени  $t$  выражение (4.25) непосредственно переходит в дробные моменты степенно-нормального распределения (4.23). Определим асимптотику дробных моментов при  $\sigma^2(t) \rightarrow 0$  для всех моментов времени  $t$ . Запишем

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma^2(t) \rightarrow 0} m_r^v(t) &= \frac{\Gamma(\eta)}{\sqrt{2\pi}} \exp[r^2 \sigma_1^2(t)/2] \times \\ &\times \lim_{\sigma^2(t) \rightarrow 0} \sigma^{\eta-1}(t) \exp\left[-\frac{m^2(t)}{4\sigma^2(t)}\right] \left\{ D_{-\eta}\left[-\frac{m(t)}{\sigma(t)}\right] + (-1)^v D_{-\eta}\left[\frac{m(t)}{\sigma(t)}\right] \right\}. \end{aligned}$$

Используя выражение (4.24), определим предел

$$\begin{aligned}
& \lim_{\sigma^2(t) \rightarrow 0} \sigma^{\eta-1}(t) \exp\left[-\frac{m^2(t)}{4\sigma^2(t)}\right] D_{-\eta}\left[\pm \frac{m(t)}{\sigma(t)}\right] = \\
& = \frac{1}{\Gamma(\eta)} \lim_{\sigma^2(t) \rightarrow 0} \sigma^{\eta-1}(t) \exp\left[-\frac{m^2(t)}{2\sigma^2(t)}\right] \int_0^\infty dy y^{\eta-1} \exp\left[-\frac{y^2}{2} \mp \frac{m(t)}{\sigma(t)} y\right] = \\
& \quad \frac{1}{\Gamma(\eta)} \lim_{\sigma^2(t) \rightarrow 0} \sigma^{\eta-1}(t) \int_0^\infty dy y^{\eta-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[y \pm \frac{m(t)}{\sigma(t)}\right]^2\right\} = \\
& \quad \frac{1}{\Gamma(\eta)} \lim_{\sigma^2(t) \rightarrow 0} \sigma^{\eta-1}(t) \int_0^\infty dy y^{\eta-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma(t)}{m(t)} y \pm 1\right]^2 \left[\frac{\sigma(t)}{m(t)}\right]^{-2}\right\}.
\end{aligned}$$

Введем новую переменную  $s = y\sigma(t)/m(t)$  и сгруппируем, получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\eta)} m^{\eta-1}(t) \int_0^\infty ds s^{\eta-1} \lim_{\sigma^2(t) \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sigma(t)}{m(t)}\right]^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(s \pm 1)^2 \left[\frac{\sigma(t)}{m(t)}\right]^{-2}\right\} = \\
& = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\eta)} m^{\eta-1}(t) \int_0^\infty ds s^{\eta-1} \delta(s \pm 1).
\end{aligned}$$

Учтем, что

$$\int_0^\infty ds s^{\eta-1} \delta(s \pm 1) = \begin{cases} 1, & s-1=0 \\ 0, & s+1=0 \end{cases}.$$

Таким образом

$$\lim_{\sigma^2(t) \rightarrow 0} m_r^y(t) = m^{\eta-1}(t) \exp[r^2 \sigma_1^2(t)/2].$$

Подставляя выражения для параметра  $\eta$  и среднего значения  $m(t)$ , окончательно получим

$$\lim_{\sigma^2(t) \rightarrow 0} m_r^v(t) = x_0^r \exp[r^2 \sigma_1^2(t) / 2 - r \kappa t]. \quad (4.26)$$

Выражение (4.26) – дробные моменты логарифмически нормального распределения [52].

### 4.3. Асимптотическое поведение для больших времен

В предыдущем подразделе были получены точные выражения для плотности вероятности и ее моментов стохастической системы с двумя мультипликативными цветными шумами. Исследуем асимптотическое поведение этих статистических характеристик для больших времен, т.е.  $t \rightarrow \infty$ .

В этом случае  $m(\infty) = 0$  и  $a(\infty) = 0$ . Асимптотическая форма выражения дисперсии (4.13) примет вид

$$\sigma^2(\infty) = \frac{1 - \alpha}{\kappa} \int_0^\infty dur(u) e^{-\omega u}. \quad (4.27)$$

Так как  $r(u) \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow \infty$ , то значение дисперсии для больших времен (4.27) ограничено, т.е.  $\sigma^2(\infty) < \infty$ . Асимптотическая форма выражения дисперсии (4.8) может быть записана в форме

$$\sigma_1^2(t) \sim 2tR_1(t) \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$\text{где } R_1(t) = \int_0^t dur_1(u).$$

Следуя [50], если

$$R_1(t) = o(1/t) \quad (t \rightarrow \infty), \quad (4.28)$$

тогда  $\sigma_1^2(\infty) < \infty$ , а если  $0 < R_1(\infty) \leq \infty$  или  $R_1(\infty) = 0$  [ $R_1(\infty)$  – интенсивность шума], но выражение (4.28) не выполняется, тогда  $\sigma_1^2(\infty) = \infty$ . Таким образом, существует два качественно разных случая асимптотического поведения для больших времен выражения (4.8), а именно,  $\sigma_1^2(\infty) < \infty$  и  $\sigma_1^2(\infty) = \infty$ .

Для того чтобы определить асимптотическое поведение моментов  $m_r^v(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , вычислим  $D_{-\zeta}(0)$ . Из выражения (4.24)

$$D_{-\eta}(0) = \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^{\infty} dy y^{\eta-1} e^{-y^2/2}.$$

Введем новую переменную  $s = y^2/2$  и представим интеграл через гамма-функцию, получим

$$\int_0^{\infty} dy y^{\eta-1} e^{-y^2/2} = 2^{\eta/2-1} \Gamma(\eta/2).$$

Таким образом

$$D_{-\eta}(0) = 2^{\eta/2-1} \frac{\Gamma(\eta/2)}{\Gamma(\eta)}. \quad (4.29)$$

Подставляя (4.29) в (4.25), получим

$$m_r^v(\infty) = \frac{\Gamma(\eta/2)}{\sqrt{2\pi}} 2^{\eta/2} \sigma^{\eta-1}(\infty) e^{r^2 \sigma_1^2(\infty)/2} \frac{1+(-1)^v}{2} \quad (\eta > 0). \quad (4.30)$$

Если условие (4.28) выполняется [ $\sigma_1^2(\infty) < \infty$ ], все дробные моменты (4.30) при  $r > \alpha - 1$  ограничены, и стационарная плотность вероятности  $P_{st}(x) = P_x(x, \infty)$  имеет вид

$$P_{st}(x) = \frac{1 - \alpha}{2\pi\sigma_\alpha(\infty)\sigma(\infty)|x|^\alpha} \int_0^\infty du \exp\left\{-\frac{\ln^2 u}{2\sigma_\alpha^2(\infty)} - \frac{u^2 |x|^{2(1-\alpha)}}{2\sigma^2(\infty)}\right\}.$$

Отметим, что функция  $P_{st}(x)$  – четная, что также подтверждается тем фактом, что  $m_r^1(\infty) = 0$ . Значение функции  $P_{st}(x)$  в точке  $x = 0$  зависит от параметра  $\alpha$ ; если  $0 < \alpha < 1$ , то  $P_{st}(0) = \infty$ , если  $\alpha = 0$ , то  $P_{st}(0) = e^{\sigma_1^2(\infty)/2} / [\sqrt{2\pi}\sigma(\infty)]$ , и если  $\alpha < 0$ , то  $P_{st}(0) = 0$ .

Если условие (4.28) не выполняется [ $\sigma_1^2(\infty) = \infty$ ], то  $m_r^0(\infty) = \infty$  и  $m_r^1(\infty) = 0$ . Стационарная плотность вероятности  $P_{st}(x) = P_x(x, \infty)$  может быть представлена в виде

$$P_{st}(x) \sim \frac{1}{2\pi\sigma(\infty)|x|^\alpha \sqrt{2tR_1(t)}} \int_0^\infty du \exp\left\{-\frac{\ln^2 u}{4(1-\alpha)^2 tR_1(t)} - \frac{u^2 |x|^{2(1-\alpha)}}{2\sigma^2(\infty)}\right\} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (4.31)$$

Для  $x \neq 0$  первым слагаемым экспоненты в (4.31) можно пренебречь в сравнении со вторым слагаемым, получим

$$P_{st}(x)|_{x \neq 0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\sigma(\infty)|x|^\alpha \sqrt{2tR_1(t)}} \int_0^\infty du \exp\left[-\frac{u^2 |x|^{2(1-\alpha)}}{2\sigma^2(\infty)}\right].$$

Используя табличный интеграл, найдем

$$P_{st}(x)|_{x \neq 0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{4|x| \sqrt{\pi t R_1(t)}} = 0. \quad (4.32)$$

Для  $x=0$  выражение (4.31) можно представить в виде

$$P_{st}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty, x \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\sigma(\infty)|x|^\alpha \sqrt{2tR_1(t)}} \int_0^\infty du \exp\left[-\frac{\ln^2 u}{4(1-\alpha)^2 t R_1(t)}\right].$$

Вычисляя интеграл, окончательно получим

$$P_{st}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty, x \rightarrow 0} \frac{(1-\alpha) \exp[(1-\alpha)^2 t R_1(t)]}{\sqrt{2\pi\sigma(\infty)|x|^\alpha}} = \infty. \quad (4.33)$$

Таким образом, значение стационарной плотности вероятности всюду равняется нулю, кроме точки  $x=0$ , в которое ее значение – бесконечность.

Чтобы бы лучше понять поведение  $P_{st}(x)$  в окрестности точки  $x=0$ , определим вероятность

$$W_\varepsilon(t) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx P_x(x, t) \quad (4.34)$$

того, что  $x(t) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Подставим выражение (4.18) в (4.34)

$$W_\varepsilon(t) = \frac{1-\alpha}{2\pi\sigma_\alpha(t)\sigma(t)} \int_0^\infty du \exp\left[-\frac{\ln^2 u}{2\sigma_\alpha^2(t)}\right] \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dx}{|x|^\alpha} \exp\left\{-\frac{[ux|x|^{-\alpha} - m(t)]^2}{2\sigma^2(t)}\right\}.$$

Введем новую переменную



$$y = \frac{ux |x|^{-\alpha} - m(t)}{\sqrt{2\sigma(t)}}, \quad dy = \frac{u}{\sqrt{2\sigma(t)}} \frac{1-\alpha}{|x|^\alpha} dx,$$

$$y_1 = y(-\varepsilon) = \frac{-u\varepsilon^{1-\alpha} - m(t)}{\sqrt{2\sigma(t)}}, \quad y_2 = y(\varepsilon) = \frac{u\varepsilon^{1-\alpha} - m(t)}{\sqrt{2\sigma(t)}}.$$

Получим

$$W_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\alpha(t)}} \int_0^\infty \frac{du}{u} \exp\left[-\frac{\ln^2 u}{2\sigma_\alpha^2(t)}\right] \int_{y_1}^{y_2} dy e^{-y^2}.$$

Для первого интеграла введем новую переменную  $z = \ln u$ , второй – представим в следующем виде

$$\int_{y_1}^{y_2} dy e^{-y^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [\operatorname{erf}(y_2) - \operatorname{erf}(y_1)],$$

где  $\operatorname{erf}(y)$  – интеграл вероятности

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y dt e^{-t^2}.$$

Окончательно запишем выражение для вероятности  $W_\varepsilon(t)$

$$W_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma_\alpha(t)}} \int_{-\infty}^\infty dz \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_\alpha^2(t)}\right] \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{e^z \varepsilon^{1-\alpha} - m(t)}{\sqrt{2\sigma(t)}}\right] + \operatorname{erf}\left[\frac{e^z \varepsilon^{1-\alpha} + m(t)}{\sqrt{2\sigma(t)}}\right] \right\}. \quad (4.35)$$

Для больших времен в случае  $\sigma_1^2(\infty) = \infty$  асимптотику выражения (4.35) можно представить в виде

$$W_\varepsilon(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi tA(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left[-\frac{z^2}{2tA(t)}\right] \operatorname{erf}\left[\frac{\varepsilon^{1-\alpha} e^z}{\sqrt{2\sigma(\infty)}}\right] \quad (t \rightarrow \infty),$$

где  $A(t) = 2(1 - \alpha)^2 R_1(t)$ .

Далее введем новую переменную  $z = s\sqrt{t}$ , получим

$$W_\varepsilon(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi A(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \exp\left[-\frac{s^2}{2A(t)}\right] \operatorname{erf}\left[\frac{\varepsilon^{1-\alpha} e^{s\sqrt{t}}}{\sqrt{2\sigma(\infty)}}\right] \quad (t \rightarrow \infty).$$

Учтем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{erf}\left[\frac{\varepsilon^{1-\alpha} e^{s\sqrt{t}}}{\sqrt{2\sigma(\infty)}}\right] = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}. \quad (4.36)$$

Т.е., выражение (4.36) представляет функцию Хевисайда  $h(s)$ . И вероятность  $W_\varepsilon(\infty)$  можно представить в виде

$$W_\varepsilon(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A(\infty)}} \int_{-\infty}^{\infty} ds h(s) \exp\left[-\frac{s^2}{2A(\infty)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi A(\infty)}} \int_0^{\infty} ds \exp\left[-\frac{s^2}{2A(\infty)}\right] = \frac{1}{2}.$$

Это означает, что для больших времен половина частиц будет локализована в окрестности нуля, а другая половина устремится к плюс или минус бесконечности.

Таким образом, учитывая это выражения, а также выражения (4.32) и (4.33), можно сделать вывод, что для случая  $\sigma_1^2(\infty) = \infty$  стационарная плотность вероятности не существует.

#### 4.4. Гармонический осциллятор с флуктуирующими параметрами

Рассмотрим сильно затухающий гармонический осциллятор с флуктуирующей частотой и скоростью. Координата частицы описывается уравнением Ланжевена (4.1) с линейным мультипликативным шумом  $f_1(t)$  и аддитивным шумом  $f_2(t)$  ( $\alpha=0$ ). Если флуктуации частоты пренебрежимо малы, тогда плотность вероятности для координаты частицы имеет вид (4.15). Соответственно, если пренебрежимо малы флуктуации скорости, она дается выражением (4.20). Предполагая между шумами зависимость (4.10), плотность вероятности для координаты частицы можно представить в виде интерполяционной формулы (4.18), дающей точные результаты в указанных выше частных случаях.

Графики названных плотностей вероятности для экспоненциальных корреляционных функций (4.19) гауссовских шумов  $f_1(t)$  и  $f(t)$  представлены на рис.4.2. Безразмерный параметр  $\kappa$  равен  $\omega_0^2/2\lambda$ , предполагается, что коэффициент затухания  $\lambda$  намного больше частоты колебаний  $\omega_0$ ,  $\lambda \gg \omega_0$ . Для моментов времени  $t \gg (2\lambda)^{-1}$  (в случае безразмерного времени  $t \gg 1$ ) массой частицы можно пренебречь, и приближение сильного затухания приемлемо описывает

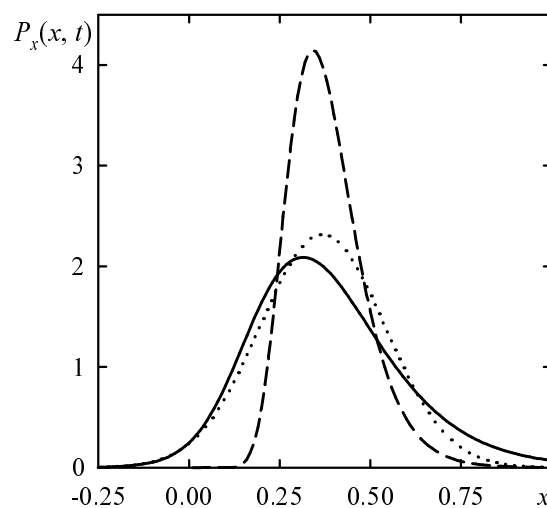


Рис. 4.2. Графики плотностей вероятности при  $x_0 = 1$ ,  $\kappa = 0,1$ ,  $t = 10$ ,  $\tau_1 = \tau = 10$ .

Пунктирная кривая —  $D_1 = 0,01$  и  $D = 0$ ; точечная кривая —  $D_1 = 0$  и  $D = 0,01$ ;

сплошная кривая —  $D_1 = 0,01$  и  $D = 0,01$ .

ее эволюцию. Принимается, что дисперсия  $D_1$  мультипликативного шума намного меньше параметра  $\kappa$ , что обеспечивает восстанавливающий характер мультипликативной силы. Также время релаксации системы  $\kappa^{-1}$  сравнимо со временами корреляции шумов  $\tau_1$  и  $\tau$ , что вызывает необходимость применения модели цветного шума.

Выражения для среднего значения координаты частицы и ее дисперсии (4.25) имеют вид

$$\langle x(t) \rangle = x_0 \exp\left[\frac{1}{2}\sigma_1^2(t) - \kappa t\right], \quad (4.37)$$

$$\sigma_x^2(t) = m^2(t)\{\exp[2\sigma_1^2(t)] - \exp[\sigma_1^2(t)]\} + \sigma^2(t)\exp[2\sigma_1^2(t)], \quad (4.38)$$

где  $\sigma_1^2(t)$ ,  $m(t)$  и  $\sigma^2(t)$  даются выражениями (4.8), (4.12) и (4.13), соответственно.

Определим область применимости интерполяционной формулы для плотности вероятности (4.18) при описании временной эволюции сильно затухающего осциллятора с двумя независимыми гауссовскими цветными шумами. Для этого запишем выражения среднего значения (4.37) и дисперсии (4.38) в случае гауссовских белых шумов, т.е.  $r_1(u) = D_1\delta(u)$  и  $r(u) = D\delta(u)$ , при нулевом параметре  $\kappa$ :

$$\langle x(t) \rangle = x_0 e^{D_1 t}, \quad (4.39)$$

$$\sigma_x^2(t) = x_0^2 (e^{4D_1 t} - e^{2D_1 t}) + 2Dte^{4D_1 t}. \quad (4.40)$$

Сравним эти приближенные результаты с точными результатами в случае гауссовских белых шумов в исчислении Стратоновича при нулевом параметре  $\kappa$  (подпункт 3.3.3.2). Оказывается, что средние значения (3.51) и (4.39) полностью совпадают, а дисперсии (3.53) и (4.40) отличаются вторыми слагаемыми

$\frac{\Delta_2}{2\Delta_1}(e^{4\Delta_1 t} - 1)$  и  $2Dte^{4D_1 t}$ . Чтобы численные значения последних статистических

характеристик были практически близкими, наложим ограничения: 1) интенсивность аддитивного шума намного меньше интенсивности мультипликативного шума, т.е.  $\Delta_2 \ll \Delta_1$ ; 2) произведение интенсивности аддитивного шума и времени много меньше единицы, т.е.  $Dt \ll 1$ . Графики плотностей вероятности (3.44) и (4.18) при указанных ограничениях приведены на рис.4.3. Они достаточно хорошо накладываются друг на друга.

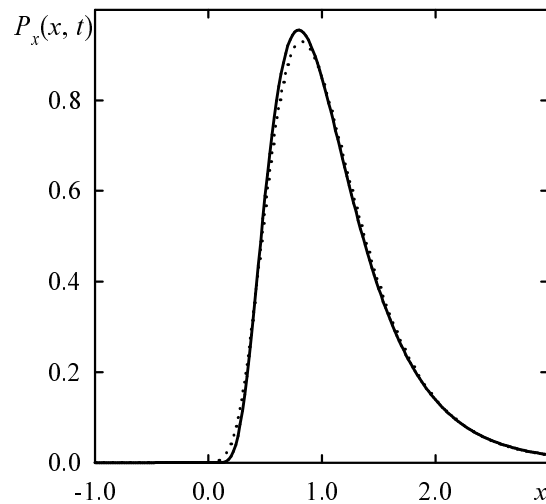


Рис. 4.3. Графики функции распределения вероятности для случая точного (точечная кривая) и приближенного результата (сплошная кривая) при  $x_0 = 1$ ,  $\kappa = 0$ ,  $t = 10$ ,  $\tau_1 = \tau = 0$ ,  $D_1 = 0,01$  и  $D = 0,001$ .

Таким образом, интерполяционная формула может быть применима при исследовании эволюции осциллятора в начальные моменты времени в случае слабого аддитивного шума.

#### 4.5. Выводы к разделу 4

1. Исследование временной эволюции сильно затухающей стохастической системы с линейной восстанавливающей силой и двумя мультипликативными цветными шумами, амплитуды которых зависят от параметра состояния системы  $x$  как  $x$  и  $|x|^\alpha$ , достигается путем рассмотрения специальной зависимости между шумами. При таком подходе параметр состояния может быть представлена в виде произведения двух независимых степенно-нормального и логарифмически-нормального процессов. Это позволяет записать выражения нестационарной плотности вероятности и дробных моментов.

2. Сравнение точных результатов для независимых гауссовских белых шумов в исчислении Стратоновича при нулевом параметре восстанавливающей силы со специальными результатами показывает, что они хорошо согласуются при описании временной эволюции осциллятора с флуктуирующей частотой и скоростью для начальных моментов времени при слабом аддитивном шуме.

Результаты, представленные в данном разделе, опубликованы в работах [8,10,11].

## ВЫВОДЫ

В данной диссертационной работе рассмотрены пространственно-однородные стохастические системы, состояние которых может быть достаточно хорошо описано одной динамической переменной. В случае сильного затухания исследована их временная эволюция под воздействием двух шумов. Наиболее важными результатами диссертации являются следующие:

1. Для нелинейных систем в приближении взаимно-коррелированных гауссовских белых шумов установлено, что изменение коэффициента взаимной корреляции может приводить к качественному изменению равновесной плотности вероятности динамической переменной. Тем самым, выявлена конструктивная роль взаимной корреляции в явлении одномодального-бимодального неравновесного перехода.
2. Исследована временная эволюция системы в нестационарной среде. Рассмотрение проведено на примере сильно затухающего гармонического осциллятора с коэффициентом затухания, изменяющимся во времени по степенному закону. Установлено, что случайные осцилляции, вызванные флуктуациями жесткости, характеризуются статистическими моментами, неограниченно возрастающими во времени.
3. Изучена аномальная диффузия частиц, совершающих одномерное движение в случайном поле скоростей, которое порождается коррелированными мультипликативными шумами. Рассмотрение проведено для случая большого трения, изменяющегося во времени по степенному закону. В зависимости от параметров затухания и шумов выявлены следующие диффузионные режимы: нормальный, субдиффузионный, супердиффузионный, экспоненциальный, затянутый экспоненциальный, сжатый экспоненциальный, логарифмический.

4. В специальном классе систем с линейным мультипликативным шумом обнаружено нетипичное для обычных диффузионных процессов изменение характера диффузии при изменении интенсивности  $\Delta$  этого шума. Показано, что существует критическое значение интенсивности  $\Delta_{cr}$  такое, что при  $\Delta < \Delta_{cr}$  имеет место субдиффузия (медленная диффузия), при  $\Delta = \Delta_{cr}$  – нормальная диффузия, а при  $\Delta > \Delta_{cr}$  – супердиффузия (быстрая диффузия).
5. Исследована временная эволюция сильно затухающего гармонического осциллятора, возбуждаемого двумя источниками цветного шума. Разработан метод определения нестационарной плотности вероятности для динамической переменной и ее моментов. Установлено, что среднее значение динамической переменной экспоненциально убывает во времени и определяется параметрами флуктуирующего коэффициента жесткости: его средним значением и корреляционной функцией.



**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. Теория и применение в физике, химии и биологии: Перев. с англ. – М.: Мир, 1987. – 400с.
2. Aldridge J.S. and Cleland A.N. Noise-enabled precision measurements of a Duffing nanomechanical resonator // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – Vol. 94. – P. 156403(4).
3. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках: Перев. с англ. – М.: Мир, 1986. – 528с.
4. Ван Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии: Перев. с англ. – М.: Высш. шк., 1990. – 376с.
5. Denisov S.I., Vitrenko A.N., Horsthemke W. Nonequilibrium transitions induced by the cross-correlation of white noises // *Phys. Rev. E.* – 2003. – Vol. 68. – P. 046132(5).
6. Denisov S.I., Vitrenko A.N., Horsthemke W., Hänggi P. Anomalous diffusion for overdamped particles driven by cross-correlated white noise sources // *Phys. Rev. E.* – 2006. – Vol. 73. – P. 036120(6).
7. Витренко А.Н. Статистические характеристики свободной частицы в поле двух независимых белых шумов // *Вісник СумДУ.* – 2003. – №10(56). – С. 58–63.
8. Vitrenko A.N. Exactly solvable nonlinear model with two multiplicative Gaussian colored noises // *Physica A.* – 2006. – Vol. 359. – P. 65–74.
9. Витренко А.Н. Режим аномальной диффузии для сверхзатухающих частиц, ведомых взаимно-коррелированными белыми шумами // Тезисы докладов VII Международной научной конференции “Физические явления в твердых телах”. – Харьков: ХНУ. – 2005. – С. 6.
10. Витренко А.Н. Функция распределения вероятности системы, подвержен-

- ной воздействию двух цветных шумов // *Материалы I Международной научно-практической конференции “Наука и технологии: шаг в будущее – 2006”*. – Белгород: Руснауцкнига. – 2006. – С. 37–39.
11. Вітренко А. Режимы аномальной диффузии частинок, викликаної дією двох залежних кольорових шумів // *Збірник тез Міжнародної конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики “Еврика – 2006”*. – Львів: ЛНУ. – 2006. – С. С51.
  12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Статистическая физика, часть 1. – Т.5. – М.: Наука, 1976. – 584с.
  13. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. – Т.1. – М.: Янус, 1995. – 624с.
  14. Люиселл У. Излучение и шумы в квантовой электронике: Перев. с англ. – М.: Наука, 1972. – 400с.
  15. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1961. – 558с.
  16. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. – Т.1. – Случайные процессы. – М.: Наука, 1976. – 494с.
  17. *Modern challenges in statistical mechanics: patterns, noise, and the interplay of nonlinearity and complexity*, edited by Kenkre V.M. and Lindenberg K. – New York: AIP, 2003.
  18. Benzi R., Sutera A., Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance // *J. Phys. A*. – 1981. – Vol. 14. – P. L453–L457.
  19. Gammaitoni L., Hänggi P., Jung P., and Marchesoni F. Stochastic resonance // *Rev. Mod. Phys.* – 1998. – Vol. 70. – P. 223–287.
  20. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // *УФН*. – 1999. – Т.169, №1. – С. 7–38.
  21. Doering C.R., Gadoua J.C. Resonant activation over a fluctuating barrier // *Phys. Rev. Lett.* – 1992. – Vol. 69. – P. 2318–2321.

22. Magnasco M.O. Forced thermal ratchets // *Phys. Rev. Lett.* – 1993. – Vol. 71. – P. 1477–1481.
23. Reimann P. Brownian motors: noisy transport far from equilibrium // *Phys. Rep.* – 2002. – Vol. 361. – P. 57–265.
24. Gang H., Ditzinger T., Ning C., and Haken H. Stochastic resonance without external periodic force // *Phys. Rev. Lett.* – 1993. – Vol. 71. – P. 807–810.
25. Pikovsky A.S. and Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system // *Phys. Rev. Lett.* – 1997. – Vol. 78. – P. 775–778.
26. Garcia-Ojalvo J. and Sancho J.M. Noise in spatially extended systems. – N.Y.: Springer, 1999. – 307 p.
27. Van den Broeck C., Parrondo J.M.R., and Toral R. Noise-induced nonequilibrium phase transition // *Phys. Rev. Lett.* – 1994. – Vol. 73. – P. 3395–3398.
28. Van den Broeck C., Parrondo J.M.R., Toral R., Kawai R. Nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise // *Phys. Rev. E.* – 1997. – Vol. 55. – P. 4084–4094.
29. Lindner J.F., Chandramouli S., Bulsara A.R., Löcher M., and Ditto W.L. Noise enhanced propagation // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – Vol. 81. – P. 5048–5051.
30. Zhang Y., Hu G., and Gammaitoni L. Signal transmission in one-way coupled bistable systems: noise effect // *Phys. Rev. E.* – 1998. – Vol. 58. – P. 2952–2956.
31. Garcia-Ojalvo J., Hernandez-Machado A., and Sancho J.M. Effects of external noise on the Swift-Hohenberg equation // *Phys. Rev. Lett.* – 1993. – Vol. 71. – P. 1542–1545.
32. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика: Физическая кинетика. – Т.10. – М.: Наука, 1979. – 528с.
33. Олемской А.И. Теория стохастических систем с сингулярным мультипликативным шумом // *УФН.* – 1998. – Т.168, №3. – С. 287–321.
34. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Сов. Радио, 1977. – 488с.

35. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Пер. с англ. – 3-е изд. – Т. 1. – М.: Мир, 1984. – 528с.
36. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы: Перев. с англ. – М.: ИЛ, 1956. – 605с.
37. Hänggi P. and Jung P. Colored noise in dynamical systems // *Adv. Chem. Phys.* – 1995. – Vol. 89. – P. 239–326.
38. Sancho J.M., San Miguel M., Katz S.L., and Gunton J.D. Analytical and numerical studies of multiplicative noise // *Phys. Rev. A.* – 1982. – Vol. 26. – P. 1589–1609.
39. Hänggi P., Mroczkowski T.T., Moss F., and McClintock P.V.E. Bistability driven by colored noise: theory and experiment // *Phys. Rev. A.* – 1985. – Vol. 32 – P. 695–698.
40. Jung P. and Hänggi P. Dynamical systems: a unified colored-noise approximation // *Phys. Rev. A.* – 1987. – Vol. 35. – P. 4464–4466.
41. Reichl L.E. Translational Brownian motion in a fluid with internal degrees of freedom // *Phys. Rev. A.* – 1981. – Vol. 24. – P. 1609–1616.
42. Srokowski T. and Ploszajczak M. Anomalous Diffusion in chaotic scattering // *Phys. Rev. Lett.* – 1995. – Vol. 75. – P. 209–212.
43. Zacherl A., Geisel T., Nierwetberg J., and Radons G. Power spectra for anomalous diffusion in the extended Sinai billiard // *Phys. Lett. A.* – 1966. – Vol. 29. – P. 255–284.
44. Mori H. Transport, collective motion, and Brownian motion // *Prog. Theor. Phys.* – 1965. – Vol. 33. – P. 423–455.
45. Mori H. A continued-fraction representation of the time-correlation functions // *Prog. Theor. Phys.* – 1965. – Vol. 34. – P. 399–416.
46. Lee M.H. Derivation of the generalized Langevin equation by a method of recurrence relations // *J. Math. Phys.* – 1983. – Vol. 24. – P. 2512–2514.
47. Lee M.H. Solutions of the generalized Langevin equation by a method of recurrence relations // *Phys. Rev. B.* – 1982. – Vol. 26. – P. 2547–2551.
48. Kubo R. The fluctuation-dissipation theorem // *Rep. Prog. Phys.* – 1986. – Vol.

114. – P. 317–321.
49. Masoliver J. and Wang K. G. Free inertial processes driven by Gaussian noise: probability distributions, anomalous diffusion, and fractal behavior // *Phys. Rev. E.* – 1995. – Vol. 51. – P. 2987–2995.
  50. Denisov S.I. and Horsthemke W. Anomalous diffusion of particles driven by correlated noise // *Phys. Rev. E.* – 2000. – Vol. 62. – P. 7729–7734.
  51. Denisov S.I. and Horsthemke W. Anomalous diffusion and stochastic localization of damped quantum particles // *Phys. Lett. A.* – 2001. – Vol. 282. – P. 367–372.
  52. Denisov S.I. and Horsthemke W. Statistical properties of a class of nonlinear systems driven by colored multiplicative Gaussian noise // *Phys. Rev. E.* – 2002. – Vol. 65. – P. 031105(13).
  53. Masoliver J. Second-order processes driven by dichotomous noise // *Phys. Rev. A.* – 1992. – Vol. 45. – P. 706–713.
  54. Heinrichs J. Probability distributions for second-order processes driven by Gaussian noise // *Phys. Rev. E.* – 1993. – Vol. 47. – P. 3007–3012.
  55. Ito K. On stochastic differential equations on a differentiable manifold // *Nagoya Math. J.* – 1950. – Vol. 1. – P. 35–47.
  56. Stratonovich R.L. A new representation for stochastic integrals and equations // *SIAM J. Control.* – 1966. – Vol. 4. – P. 362–371.
  57. Hänggi P. Correlation functions and masterequations of generalized (non-Markovian) Langevin equations // *Z. Phys. B.* – 1978. – Vol. 31. – P. 407–416.
  58. Hänggi P. Nonlinear effects of colored nonstationary noise: exact results // *Phys. Lett. A.* – 1981. – Vol. 83. – P. 196–198.
  59. Jung P. Colored noise in dynamical systems: some exact solutions // *Lect. Notes Phys.* – 1997. – Vol. 484. – P. 23–31.
  60. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир, 1984 – 528с.
  61. Horsthemke W. and Lefever R. Phase transition induced by external noise //

- Phys. Lett. A. – 1977. – Vol. 64. – P. 19–21.
62. Smythe J. and Moss F. Observation of a noise-induced phase transition with an analog simulator // Phys. Rev. Lett. – 1983. – Vol. 51. – P. 1062–1065.
  63. Kabashima S. and Kawakubo T. Observation of a noise-induced phase transition in a parametric oscillator // Phys. Lett. A. – 1979. – Vol. 70. – P. 375–376.
  64. Kabashima S., Kogure S., Kawakubo T., and Okada T. Oscillatory-to-nonoscillatory transition due to external noise in a parametric oscillator // J. Appl. Phys. – 1979. – Vol. 50. – P. 6296–6302.
  65. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Гидродинамика. – Т.6. – М.: Наука, 1986. – 736с.
  66. Chandrasekhar S. Stochastic problems in physics and astronomy // Rev. Mod. Phys.– 1943. – Vol. 15. – P. 1–89.
  67. Bouchaud J.P. and Georges A. Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications // Phys. Rep. – 1990. – Vol. 195. – P. 127–293.
  68. Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Phys. Rep. – 2002. – Vol. 371. – P. 461–580.
  69. Metzler R. and Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – Vol. 37. – P. R161–R208.
  70. Scher H. and Montroll E. Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids // Phys. Rev. B. – 1975. – Vol. 12. – P. 2455–2477.
  71. Gu Q., Schiff E.A., Grebner S., and Schwartz R. Non-Gaussian transport measurements and the Einstein relation in amorphous silicon // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 76. – P. 3196–3199.
  72. Havlin S., Movshovitz D., Trus B. and Weiss G.H. Probability densities for the displacement of random walks on percolation clusters // J. Phys. A: Math. Gen. – 1985. – Vol. 18. – P. L719–L722.
  73. Porto M., Bunde A., Havlin S., and Roman H.E. Structural and dynamical prop-

- erties of the percolation backbone in two and three dimensions // *Phys. Rev. E.* – 1997. – Vol. 56. – P. 1667–1675.
74. Young W., Pumir A., Pomeau Y. Anomalous diffusion of tracer in convection rolls // *Phys. Fluids A.* – 1989. – Vol. 1. – P. 462–469.
  75. Amblard F., Maggs A.C., Yurke B., Pargellis A.N., and Leibler S. Subdiffusion and anomalous local viscoelasticity in actin networks // *Phys. Rev. Lett.* – 1996. – Vol. 77. – P. 4470–4473.
  76. Richardson L.F. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph // *Proc. Roy. Soc. A.* – 1926. – Vol. 110. – P. 709–737.
  77. Shlesinger M.F., West M.F., Klafter J. Levy dynamics of enhanced diffusion: application to turbulence // *Phys. Rev. Lett.* – 1987. – Vol. 58. – P. 1100–1103.
  78. Geisel T., Nierwetberg J., and Zacherl A. Accelerated diffusion in Josephson junctions and related chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* – 1985. – Vol. 54. – P. 616–619.
  79. Bohr T. and Pikovsky A. Anomalous diffusion in the Kuramoto-Sivashinsky equation // *Phys. Rev. Lett.* – 1993. – Vol. 70. – P. 2892–2895.
  80. Zumofen G., Klafter J., and Blumen A. Trapping aspects in enhanced diffusion // *J. Stat. Phys.* – 1991. – Vol. 65. – P. 991–1013.
  81. Solomon T.H., Weeks E.R., and Swinney H.L. Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow // *Phys. Rev. Lett.* – 1993. – Vol. 71. – P. 3975–3978.
  82. Weeks E.R. and Swinney H.L. Anomalous diffusion resulting from strongly asymmetric random walks // *Phys. Rev. E.* – 1998. – Vol. 57. – P. 4915–4920.
  83. Caspi A., Granek R., and Elbaum M. Enhanced diffusion in active intracellular transport // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – Vol. 85. – P. 5655–5658.
  84. Luedtke W.D. and Landman U. Slip diffusion and Levy flights of an adsorbed gold nanocluster // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – Vol. 82. – P. 3835–3838.
  85. Schaufler S., Schleich W.P., and Yakovlev V.P. Keyhole look at Levy flights in subrecoil laser cooling // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – Vol. 83. – P. 3162–3165.

86. Hilfer R. Exact solutions for a class of fractal time random walks // *Fractals*. – 1995. – Vol. 3. – P. 211–216.
87. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Phys. Rep.* – 2000. – Vol. 339. – P. 1–77.
88. Fogedby H.C. Langevin equations for continuous time Lévy flights // *Phys. Rev. E*. – 1994. – Vol. 50. – P. 1657–1660.
89. Compte A. Stochastic foundations of fractional dynamics // *Phys. Rev. E*. – 1996. – Vol. 53. – P. 4191–4193.
90. Metzler R., Barkai E., and Klafter J. Anomalous diffusion and relaxation close to thermal equilibrium: a fractional Fokker-Planck equation approach // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – Vol. 82. – P. 3563–3567.
91. Barkai E. Fractional Fokker-Planck equation, solution, and application // *Phys. Rev. E*. – 2001. – Vol. 63. – P. 046118(17).
92. Lutz E. Fractional Langevin equation // *Phys. Rev. E*. – 2001. – Vol. 64. – P. 051106(4).
93. Bazzani A., Bassi G., and Turchetti G. Diffusion and memory effects for stochastic processes and fractional Langevin equations // *Physica A*. – 2003. – Vol. 324. – P. 530–550.
94. O'Shaughnessy B. and Procaccia I. Analytical solutions for diffusion on fractal objects // *Phys. Rev. Lett.* – 1985. – Vol. 54. – P. 455–458.
95. Muralidhar R., Ramkrishna D., Nakanishi H., and Jacobs D. Anomalous diffusion – a dynamic perspective // *Physica A*. – 1990. – Vol. 167. – P. 539–559.
96. Wang K.G. and Tokuyama M. Nonequilibrium statistical description of anomalous diffusion // *Physica A*. – 1999. – Vol. 265. – P. 341–351.
97. Srokowski T. Nonstationarity induced by long-time noise correlations in the Langevin equation // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – Vol. 85. – P. 2232–2235.
98. Morgado R., Oliveira F.A., Batrouni G.G., and Hansen A. Relation between anomalous and normal diffusion in systems with memory // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – Vol. 89. – P. 100601(4).



99. Bao J.D. and Zhuo Y.Z. Anomalous dissipation: strong non-Markovian effect and its dynamical origin // *Phys. Rev. E.* – 2005. – Vol. 71. – P. 010102(R)(4).
100. Mokshin A.V., Yulmetyev R.M., and Hänggi P. Simple measure of memory for dynamical processes described by a generalized Langevin equation // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – Vol. 95. – P. 200601(4).
101. Vinales A.D. and Desposito M.A. Anomalous diffusion: Exact solution of the generalized Langevin equation for harmonically bounded particle // *Phys. Rev. E.* – 2006. – Vol. 73. – P. 016111(4).
102. Lillo F. and Mantegna R.N. Drift-controlled anomalous diffusion: a solvable Gaussian model // *Phys. Rev. E.* – 2000. – Vol. 61. – P. R4675–R4678.
103. Kwok Sau Fa Exact solution of the Fokker-Planck equation for a broad class of diffusion coefficients // *Phys. Rev. E.* – 2005. – Vol. 72. – 020101(R).
104. Zaikin A.A., Kurths J., and Schimansky-Geier L. Doubly stochastic resonance // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – Vol. 85. – P. 227–231.
105. Ginzburg S.L. and Pustovoit M.A. Noise-induced hypersensitivity to small time-dependent signals // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – Vol. 80. – P. 4840–4842.
106. Гинзбург С.Л., Пустовойт М.А. Индуцированная шумом сверхчувствительность к слабым переменным сигналам // *Письма в ЖЭТФ.* – 1998. – Т. 67, № 8. – С. 592–596.
107. Vilar J.M.G. and Rubi J.M. Noise suppression by noise // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – Vol. 86. – P. 950–953.
108. Fulinski A. and Telejko A. On the effect of interference of additive and multiplicative noises // *Phys. Lett. A.* – 1991. – Vol. 152. – P. 11–14.
109. Madureira A.J.R., Hänggi P., and Wio H.S. Giant suppression of the activation rate in the presence of correlated white noise sources // *Phys. Lett. A.* – 1996. – Vol. 217. – P. 248–252.
110. Cao L. and Wu D.J. Cross-correlation of multiplicative and additive noises in a single-mode laser white-gain-noise model and correlated noises induced transitions // *Phys. Lett. A.* – 1999. – Vol. 260. – P. 126–131.

111. Cao L. and Wu D.J. Mean first-passage time of laser phase in a single-mode laser // *Phys. Lett. A.* – 2001. – Vol. 283. – P. 313–318.
112. Cao L. and Wu D.J. Fluctuation-induced transport in a spatially symmetric periodic potential // *Phys. Rev. E.* – 2000. – Vol. 62. – P. 7478–7481.
113. Cao L. and Wu D.J. Noise-induced transport in a periodic system driven by Gaussian white noises with intensive cross-correlation // *Phys. Lett. A.* – 2001. – Vol. 291. – P. 371–375.
114. Li J.H., Łuczka J., and Hänggi P. Transport of particles for a spatially periodic stochastic system with correlated noises // *Phys. Rev. E.* – 2001. – Vol. 64. – P. 011113(6).
115. Fuliński A. and Góra P.F. Transport of a quantum particle in a dimer under the influence of two correlated dichotomic colored noises // *Phys. Rev. E.* – 1993. – Vol. 48. – P. 3510–3517.
116. Li J.H., Hu B., Xing D.Y., and Dong J.M. Escape over a fluctuating barrier with additive and multiplicative noise // *Phys. Rev. E.* – 1999. – Vol. 60. – P. 6443–6448.
117. Li J.H. and Hänggi P. Spatially periodic stochastic system with infinite globally coupled oscillators // *Phys. Rev. E.* – 2001. – Vol. 64. – P. 011106(8).
118. Tessone C.J., Wio H.S., and Hänggi P. Stochastic resonance driven by time-modulated correlated white noise sources // *Phys. Rev. E.* – 2000. – Vol. 62. – P. 4623–4632.
119. Jia Y., Yu S.N., and Li J.R. Stochastic resonance in a bistable system subject to multiplicative and additive noise // *Phys. Rev. E.* – 2000. – Vol. 62. – P. 1869–1878.
120. Singh K.P., Ropars G., Brunel M., and Le Floch A. Lever-assisted two-noise stochastic resonance // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – Vol. 90. – P. 073901(4).
121. Olemskoi A.I., Kharchenko D.O., and Knyaz' I.A. Phase transitions induced by noise cross-correlations // *Phys. Rev. E.* – 2005. – Vol. 71. – P. 041101(12).
122. Zaikin A.A. and Schimansky-Geier L. Spatial patterns induced by additive noise

- // Phys. Rev. E. – 1998. – Vol. 58. – P. 4355–4360.
123. Landa P.S., Zaikin A.A., Ushakov V.G., and Kurths J. Influence of additive noise on transitions in nonlinear systems // Phys. Rev. E. – 2000. – Vol. 61. – P. 4809–4820.
  124. Zaikin A.A. and Kurths J. Additive noise in noise-induced nonequilibrium transitions // Chaos. – 2001. – Vol. 11. – P. 570–580.
  125. Jia Y. and Li J.R. Reentrance phenomena in a bistable kinetic model driven by correlated noise // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 78. – P. 994–997.
  126. Dekker H. Correlation time expansion for multidimensional weakly non-markovian gaussian processes // Phys. Lett. A. – 1982. – Vol. 90. – P. 26–30.
  127. Wu D.J., Cao L., and Ke S.Z. Bistable kinetic model driven by correlated noises: steady-state analysis // Phys. Rev. E. – 1994. – Vol. 50. – P. 2496–2502.
  128. Gitterman M. Simple treatment of correlated multiplicative and additive noises // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – Vol. 32. – P. L293-L297.
  129. Doering C. R., Horsthemke W., and Riordan J. Nonequilibrium fluctuation-induced transport // Phys. Rev. Lett. – 1994. – Vol. 72. – P. 2984–2987.
  130. Bartussek R., Reimann P., Hänggi P. Precise numerics versus theory for correlation ratchets // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 76. – P. 1166–1169.
  131. Jia Y., Zheng X. P., Hu X. M., Li J. R. Effects of colored noise on stochastic resonance in a bistable system subject to multiplicative and additive noise // Phys. Rev. E. – 2001. – Vol. 63. – P. 031107(8).
  132. Гинзбург С.Л., Пустовойт М.А. Геращенко О.В. Подавление шума динамической системы внешним шумом и периодическим сигналом // Письма в ЖЭТФ. – 2001. – Т. 73, № 11. – С. 672–676.
  133. Wei X. Q., Cao L., Wu D. J. Stochastic dynamics for systems driven by correlated colored noise // Phys. Lett. A. – 1995. – Vol. 207. – P. 338–341.
  134. Liang G. Y., Cao L., Wang J., Wu D. J. Modulated stochastic multiresonance in a single-mode laser system drive by colored additive and multiplicative noises without external periodic force // Phys. Lett. A. – 2003. – Vol. 327. – P. 304–

- 312.
135. Jia Y. and Li J.R. Stochastic system with colored correlation between white noise and colored noise // *Physica A*. – 1998. – Vol. 252. – P. 417–427.
136. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров): Пер. с англ. – М.: Наука, 1978. – 832 с.
137. Luchinsky D.G., McClintock P.V.E. and Dykman M.I. Analogue studies of nonlinear systems // *Rep. Prog. Phys.* – 1998. – Vol. 61. – P. 889–997.
138. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. – Т.1. – М.: Мир, 1984. – 350с.
139. Nakao H. Asymptotic power law of moments in a random multiplicative process with weak additive noise // *Phys. Rev. E*. – 1998. – Vol. 58. – P. 1591–1600.
140. Hänggi P. and Thomas H. Stochastic processes: time evolution, symmetries and linear response // *Phys. Rep.* – 1982. – Vol. 88. – P. 207–319.
141. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736с.
142. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800с.
143. Muñoz M. A. Nature of different types of absorbing states // *Phys. Rev. E*. – 1998. – Vol. 57. – P. 1377–1383.
144. Martin-Regalado J.; Balle S.; Abraham N.B. Spatio-temporal dynamics of gain-guided semiconductor laser arrays // *IEEE J. Quantum Electronics*. – 1996. – Vol. 32. – P. 257–276.
145. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Пер. с нем. – М.: Наука, 1976. – 576с.
146. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. – 468с.
147. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Радио и связь, 1989. – 656с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Соответствие между уравнением Ланжевена и уравнением Фоккера-Планка

Чтобы записать уравнение Фоккера-Планка, соответствующее уравнению Ланжевена (2.6), представим уравнение (2.6) как среднеквадратичный предел при  $\tau \rightarrow 0$  неявной разностной схемы

$$\delta x = f(x(t))\tau + \sum_{i=1}^2 g_i(x(t_i))\delta W_i, \quad (\text{A.1})$$

где  $\delta x = x(t + \tau) - x(t)$ ;

$t_i = t + \gamma_i\tau$ ;  $0 \leq \gamma_i \leq 1$ ;

$\delta W_i = W_i(t + \tau) - W_i(t)$  – приращения винеровских процессов  $W_i(t)$ , которые удовлетворяют условиям

$$\overline{\delta W_i} = 0, \quad \overline{\delta W_i \delta W_j} = 2\Delta_{ij}\tau, \quad (\text{A.2})$$

где вертикальная черта означает усреднение по приращениям винеровских процессов.

Отметим, что возможные значения параметра корреляции  $r$  ограничены неравенством  $|r| \leq 1$ , потому что  $\overline{(\delta W_1 \pm \delta W_2)^2} = 2\tau(\Delta_1 + \Delta_2 \pm 2r\sqrt{\Delta_1\Delta_2}) \geq 0$ .

Так как равенство  $x(t_i) = x(t) + \gamma_i\delta x$  записывается с точностью до первого порядка по  $\delta x$ , разложим до первого порядка функцию  $g_i(x(t_i))$ :

$$g_i(x(t_i)) = g_i(x(t)) + g_i'(x(t))\gamma_i\delta x,$$

и подставим ее в выражение (A.1), получим

$$\delta x = f(x(t))\tau + \sum_{i=1}^2 g_i(x(t))\delta W_i + \sum_{i=1}^2 \gamma_i g'_i(x(t))\delta x \delta W_i.$$

В это выражение вместо  $\delta x$  поставим выражение (A.1) и, принимая во внимание, что  $\delta W_i \propto \tau^{1/2}$ , запишем с точностью до первого порядка по  $\tau$  окончательную формулу для  $\delta x$

$$\delta x = f(x(t))\tau + \sum_{i=1}^2 g_i(x(t))\delta W_i + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \gamma_i g'_i(x(t))g_j(x(t))\delta W_i \delta W_j. \quad (\text{A.3})$$

Затем, введем дважды дифференцируемую функцию  $u(x)$  и вычислим разность  $\delta u = u(x(t+\tau)) - u(x(t))$ . Подставляя (A.3) в приближенную формулу  $\delta u = \delta x u'(x(t)) + 1/2(\delta x)^2 u''(x(t))$ , найдем с такой же самой точностью, как и выражение (A.3)

$$\begin{aligned} \delta u &= u'(x(t))f(x(t))\tau + u'(x(t))\sum_{i=1}^2 g_i(x(t))\delta W_i + \\ &+ u'(x(t))\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \gamma_i g'_i(x(t))g_j(x(t))\delta W_i \delta W_j + \\ &+ \frac{1}{2}u''(x(t))\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_i(x(t))g_j(x(t))\delta W_i \delta W_j. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Следующий шаг состоит в усреднении (A.4). Результат запишем в следующем виде  $\langle \delta u \rangle = \langle \cdot \rangle$ , где точка означает правую часть выражения (A.4). Введем в рассмотрение плотность вероятности  $P(x, t)$  того, что  $x(t) = x$ . Тогда

$$\langle u(x(t)) \rangle = \langle u(x) \rangle_{P(x,t)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x) P(x,t).$$

Следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} \langle \delta u \rangle &= \langle u(x(t+\tau)) \rangle - \langle u(x(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x) [P(x,t+\tau) - P(x,t)] = \\ &= \tau \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x) \frac{P(x,t+\tau) - P(x,t)}{\tau} \quad (\tau \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle \delta u \rangle = \tau \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x) \frac{\partial}{\partial t} P(x,t) \quad (\tau \rightarrow 0). \quad (\text{A.5})$$

Далее, так как  $\langle \cdot \rangle$  может быть представлено в форме двухступенчатого усреднения, т.е.  $\langle \cdot \rangle = \langle \cdot \rangle_{P(x,t)}$ , выражения (A.2) и (A.4) дают

$$\langle \cdot \rangle = \tau \left\langle u'(x) f(x) + 2u'(x) \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \gamma_i \Delta_{ij} g'_i(x) g_j(x) + u''(x) \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Delta_{ij} g_i(x) g_j(x) \right\rangle_{P(x,t)}. \quad (\text{A.6})$$

Введем следующие обозначения

$$h(x) = 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \gamma_i \Delta_{ij} g'_i(x) g_j(x), \quad (\text{A.7})$$

$$d(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Delta_{ij} g_i(x) g_j(x). \quad (\text{A.8})$$

Используя интегральное представление средних значений и принимая зеркальные граничные условия, т.е. поток вероятности обращается в нуль на концах интервала  $(\alpha, \beta)$ , который в частности может быть бесконечным, проинтегрируем по частям. Найдем

$$\langle u'(x)f(x) \rangle = - \int_{\alpha}^{\beta} dx u(x) \frac{\partial}{\partial x} f(x) P(x, t),$$

$$\langle u'(x)h(x) \rangle = - \int_{\alpha}^{\beta} dx u(x) \frac{\partial}{\partial x} h(x) P(x, t),$$

$$\langle u''(x)d(x) \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} dx u(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} d(x) P(x, t).$$

Таким образом, выражение (А.6) примет вид

$$\langle \cdot \rangle = \tau \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x) \left\{ - \frac{\partial}{\partial x} [f(x) + h(x)] P(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} d(x) P(x, t) \right\}. \quad (\text{A.9})$$

Наконец, сравнивая правые части выражений (А.5) и (А.9) и принимая во внимание, что  $u(x)$  – произвольная функция, получим уравнение Фоккера-Планка (2.8). Это уравнение статистически эквивалентно уравнению Ланжевена (2.6).

Принимая данный подход для вычисления условного среднего  $\langle u(x(t)) \rangle|_{x(t_0)=x_0}$  ( $t_0 \leq t$ ), можно подтвердить, что плотность условной вероятности  $P(x, t | x_0, t_0)$  удовлетворяет этому же уравнению Фоккера-Планка (2.8). Нужно также обратить внимание на то, что это уравнение также применимо в общем случае, когда функции  $f(x)$  и  $g_i(x)$  явно зависят от времени.

Эти результаты показывают, что уравнение (2.6) определяет марковский диффузионный процесс с коэффициентом сноса, равным  $f(x) + h(x)$  и коэффициентом диффузии, равным  $2d(x)$ . Собственные значения матрицы  $\Delta_{ij}$  имеют вид



$$\kappa_{1,2} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + 4r^2 \Delta_1 \Delta_2}.$$

Они неотрицательные, это означает, что выражение (А.8) – неотрицательно определенная квадратичная форма, т.е.  $d(x) \geq 0$ . Полностью вырожденный случай  $d(x) \equiv 0$  имеет место, если: 1)  $g_1(x) = g_2(x) \equiv 0$ ; 2)  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ; 3)  $\Delta_1 = 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ , и  $g_2(x) \equiv 0$  [или  $\Delta_2 = 0$ ,  $\Delta_1 > 0$ , и  $g_1(x) \equiv 0$ ]; 4)  $r = -1$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2 > 0$ , и  $g_1(x) = g_2(x)$  [или  $r = 1$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2 > 0$ , и  $g_1(x) = -g_2(x)$ ]. Условия 1)-3) представляют тривиальные случаи, в которых шумы не воздействуют на систему, а условие 4) означает, что шумы полностью нейтрализуют друг друга, т.е.,  $\langle [\xi_1(t) \pm \xi_2(t)]^2 \rangle = 0$  если  $r = \mp 1$ . Во всех остальных случаях  $d(x) \neq 0$ .

Сравнивая уравнение Фоккера-Планка (1.9) с уравнением Фоккера-Планка (2.8), можно сделать вывод, что уравнение Ланжевена (1.4), в котором белый шум характеризуется выражением (1.5), статистически эквивалентно уравнению Ланжевена (2.6), в котором белые шумы характеризуются выражением (2.7) (принимается одинаковое начальное условие для обоих уравнений), если

$$F(x) = f(x) + h(x) - \gamma d'(x), \quad G(x) = \sqrt{d(x)/\Delta}. \quad (\text{А.10})$$

Отметим, что для систем с одним шумом соотношение  $H(x) = \gamma D'(x)$  всегда выполняется, т.е.,  $H(x) \propto D'(x)$ . Для систем с двумя шумами оно заменяется общим соотношением. Для того чтобы его найти, учтем, что

$$\frac{\partial d(x)}{\partial g_i(x)} = 2 \sum_{j=1}^2 \Delta_{ij} g_j(x), \quad d'(x) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial d(x)}{\partial g_i(x)} \frac{dg_i(x)}{dx}.$$

Таким образом, можно записать

$$h(x) = \sum_{i=1}^2 \gamma_i g_i'(x) \frac{\partial d(x)}{\partial g_i(x)}. \quad (\text{A.11})$$

Анализируя выражение (A.11), можно сделать вывод, что соотношение  $h(x) \propto d'(x)$  выполняется только в частных случаях; например, если  $g_1(x) = \text{const}$ , или  $g_2(x) = \text{const}$ , или  $\gamma_1 = \gamma_2$ , или  $g_1(x) = g_2(x)$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Решение нестационарного уравнения Фоккера-Планка

Получим плотность вероятности (3.24) для координаты частицы  $x(t)$  с помощью альтернативного метода, основанного на решении уравнения Фоккера-Планка. Будем полагать, что каждый мультипликативный гауссовский белый шум  $\xi_i(t)$  характеризуется своим собственным параметром  $\gamma_i$  (см. Приложение А). Уравнение Фоккера-Планка, соответствующее уравнению Ланжевена (3.17), имеет вид

$$\lambda^2(t) \frac{\partial}{\partial t} P_x(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} h(x) P_x(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} d(x) P_x(x, t), \quad (\text{Б.1})$$

где  $P_x(x, 0) = \delta(x - x_0)$ ;

$h(x)$  – коэффициент сноса (определяется выражением (А.7));

$d(x)$  – коэффициент диффузии (определяется выражением (А.8)).

Для того чтобы получить решение уравнения (Б.1), введем новую переменную  $u = U(x)$ , где функция  $U(x)$  будет определена. Если функции  $U(x)$  и  $U^{-1}(u)$  являются взаимно обратными и  $U'(x) > 0$ , тогда

$$P_x(x, t) = P_u(u, t) U'(x). \quad (\text{Б.2})$$

В соответствии с выражением (Б.1), плотность вероятности  $P_u(u, t)$  случайного процесса  $u(t) = U(x(t))$  удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка, для которого коэффициенты сноса и диффузии (как функции старой переменной  $x$ ) имеют вид [34]

$$\tilde{h}(x) = h(x)U'(x) + d(x)U''(x), \quad \tilde{d}(x) = d(x)[U'(x)]^2.$$

Если выбрать  $\tilde{d}(x) = 1$ , тогда  $U'(x) = 1/\sqrt{d(x)}$  и

$$\tilde{h}(x) = \frac{2h(x) - d'(x)}{2\sqrt{d(x)}}.$$

Замечательно, если  $\gamma_i = 1/2$ , т.е., если используется исчисление Стратоновича для уравнения Ланжевена (3.17), тогда  $\tilde{h}(x) = 0$  и уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности  $P_u(u, t)$  примет простейшую форму

$$\lambda^2(t) \frac{\partial}{\partial t} P_u(u, t) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} P_u(u, t), \quad (\text{Б.3})$$

где  $P_u(u, 0) = \delta(x - x_0) \sqrt{d(x)}$  – начальное условие.

Получим решение этого уравнения методом характеристической функции [141]. Умножим обе его части на выражение  $\exp(i\Omega u)$  и проинтегрируем по переменной  $u$  в бесконечных пределах:

$$\lambda^2(t) \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\partial P_u(u, t)}{\partial t} \exp(i\Omega u) = \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\partial^2 P_u(u, t)}{\partial u^2} \exp(i\Omega u). \quad (\text{Б.4})$$

Введем в рассмотрение характеристическую функцию. По определению она равна

$$\Theta(\Omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} du \exp(i\Omega u) P_u(u, t). \quad (\text{Б.5})$$

Перейдем к уравнению для  $\Theta(\Omega, t)$ . Для этого проинтегрируем по частям правую часть уравнения (Б.4). Учитывая выражение (Б.5), получим

$$\lambda^2(t) \frac{d}{dt} \Theta(\Omega, t) = -\frac{1}{2} \Omega^2 \Theta(\Omega, t).$$

Решим это уравнение методом разделения переменных:

$$\Theta(\Omega, t) = \Theta(\Omega, 0) \exp\left[-\frac{1}{2} \Omega^2 \sigma^2(t)\right],$$

где  $\sigma^2(t)$  определяется выражением (3.11).

Начальное значение характеристической функции  $\Theta(\Omega, 0)$  найдем из (Б.5), подставив начальное значение функции распределения  $P_u(u, 0)$ :

$$\Theta(\Omega, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[i\Omega U(x)] \delta(x - x_0) = \exp[i\Omega U(x_0)].$$

Таким образом, окончательное выражение для характеристической функции имеет вид

$$\Theta(\Omega, t) = \exp\left[i\Omega U(x_0) - \frac{1}{2} \Omega^2 \sigma^2(t)\right]. \quad (\text{Б.6})$$

Перейдем от (Б.6) к плотности вероятности  $P_u(u, t)$ . Используем формулу

$$P_u(u, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \exp(-i\Omega u) \Theta(\Omega, t). \quad (\text{Б.7})$$

Подставим выражение (Б.6) в (Б.7), получим

$$P_u(u, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \exp\left\{-i\Omega[u - U(x_0)] - \frac{1}{2}\Omega^2\sigma^2(t)\right\}.$$

Используя для вычисления этого выражения табличный интеграл [142]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2 - qx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left(\frac{q^2}{4p}\right)$$

найдем окончательное выражение для плотности вероятности, которая является решением уравнения (Б.3)

$$P_u(u, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\left[-\frac{(u - u_0)^2}{2\sigma^2(t)}\right].$$

Наконец, подставляя этот результат в (Б.2) и принимая во внимание, что  $U(x) = \Psi(x)$ ,  $d(x) = G^2(x)$  и  $u = \Psi(x)$ , снова получим выражение (3.24).