

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Шифр: „НІТ”

КОНКУРСНА СТУДЕНТСЬКА НАУКОВО-ДОСЛІДНА РОБОТА

**„НЕРІВНОВАЖНІ ПЕРЕХОДИ, ІНДУКОВАНІ ВЗАЄМНО
КОРЕЛЬОВАНИМИ ШУМАМИ: ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ”**

ГРУПА СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ „ФІЗИКА”

2010

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
1 ШУМ У ФІЗИЧНИХ СИСТЕМАХ	6
2 ТЕОРЕТИЧНА МОДЕЛЬ	9
3 АЛГОРИТМ ЧИСЕЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ	11
4 РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ.....	13
ВИСНОВКИ.....	17
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	18
ДОДАТОК А Текст програм чисельного експерименту.....	20

ВСТУП

Проблема конструктивної ролі шуму в нелінійних системах – одна з пріоритетних в сучасній теоретичній фізиці. До її кола входить вивчення таких явищ, як стохастичний резонанс [1], направлений транспорт [2], індуковані шумом нерівноважні переходи [3], тощо.

В курсі загальної фізики [4] значна увага приділяється вивченню замкнених систем, що знаходяться в стані теплової рівноваги. В той же час фізичні системи, як правило, є відкритими, тобто обмінюються речовиною та енергією з навколишнім середовищем, і початково знаходяться в станах, далеких від рівноваги. В свою чергу властивості зовнішнього середовища можуть випадково змінюватися у часі, тобто флюктувати. Його вплив на систему може бути врахований за допомогою шуму з відомими статистичними характеристиками [3].

Індуковані шумом переходи можуть спостерігатися в сильно нерівноважних макроскопічних системах, що взаємодіють з випадковим середовищем. Суть цього явища полягає в появі нових стаціонарних станів системи, неможливих при детермінованому впливі зовнішнього середовища. Така якісна зміна в поведінці системи, яка відображається в її стаціонарній щільності ймовірності, відбувається при певному критичному значенні інтенсивності шуму. Тобто нерівноважні переходи, індуковані шумом, нагадують рівноважні та нерівноважні фазові переходи. Їх вперше відкрили Хорстхемке та Лефевр, розглянувши відносно простий клас систем, а саме: лише одна динамічна змінна, яка достатньо добре описує стан системи; стан системи залежить тільки від часу, і не залежить від просторових координат (такі системи називаються просторово-однорідними, або нульвимірними). Індуковані шумом переходи можуть спостерігатися в електричних колах, лазерах, хімічних реакціях, динаміці біологічних популяцій, тощо.

Актуальність теми. Для систем мікро- і наномасштабу значними є не тільки зовнішні флюктуації, але і внутрішні, які пов'язані з тепловим рухом атомів, молекул системи. Розмежування флюктуацій є умовним, і залежить від того, де прово-

диться межа між системою і середовищем. Їх вплив на поведінку, наприклад, наномеханічних систем експериментально досліджується в роботі [5]. В теоретичній роботі [6] спільна дія флуктуацій враховується за допомогою двох, у загальному випадку взаємно корельованих, шумів з відомими статистичними характеристиками; точними аналітичними методами знаходиться рівноважна щільність ймовірності системи та вивчається роль взаємної кореляції в явищі нерівноважних переходів, індукованих двома шумами. Подальше дослідження запропонованої в роботі [6] теоретичної моделі в рамках наближених методів є актуальним.

Мета дослідження – виявити критичне уповільнення в динаміці нерівноважного переходу, індукованого взаємно корельованими шумами. Для досягнення поставленої мети в роботі розв’язуються наступні задачі:

- розробляється алгоритм чисельного експерименту;
- знаходяться рівноважна і нерівноважна щільності ймовірності системи;
- знаходяться точки максимуму нерівноважної щільності ймовірності.

Методи дослідження. Для описання часової еволюції динамічної системи, що збуджується двома шумами, використовується метод рівняння Ланжевена. Це диференційне рівняння чисельно розв’язується методом Ейлера. Значення щільності ймовірності системи знаходяться за допомогою методу Монте-Карло.

Основні наукові результати. Отримані в роботі чисельні результати для рівноважної щільності ймовірності системи повністю співпадають з результатами, отриманими точними аналітичними методами в роботі [6]. Знайдена нерівноважна щільність ймовірності системи, яку точними методами вчислити не уявляється можливим. Досліджена часова еволюція її точок максимумів, які визначають параметр порядку нерівноважного переходу, індукованого взаємно корельованими шумами; виявлено критичне уповільнення в динаміці переходу.

Практичне значення роботи. Результати, отримані в роботі, розширюють знання про процеси, що відбуваються в динамічних системах з флуктуючими параметрами. Розроблений алгоритм чисельного експерименту може бути викорис-

таний у подальшому при дослідженні схожих систем. Результати можуть бути використані при підготовці спеціалістів фізико-математичного профілю.

Апробація результатів. Результати роботи доповідалися і обговорювалися на таких конференціях:

- науково-технічна конференція викладачів, співробітників, аспірантів і студентів факультету Електроніки та інформаційних технологій СумДУ (Суми, 2010);
- V-а міжвузівська науково-технічна конференція викладачів, співробітників, аспірантів та студентів „Інформатика, математика, механіка” (Суми, 2010);
- Студентська конференція „Перший крок у науку” факультету Електроніки та інформаційних технологій СумДУ (Суми, 2010);
- X Всеукраїнська науково-технічна конференція студентів і аспірантів “Інформаційні системи і технології” (Одеса, 2010).

Публікації. Результати роботи викладені в статті в науковому журналі, що входить до переліку ВАК України, і 4 збірниках тез конференцій.

1 ШУМ У ФІЗИЧНИХ СИСТЕМАХ

Як відомо, шум – це випадковий процес різної фізичної природи, який можна представити у вигляді коливань з випадковими амплітудою та частотою [7,8]. Відповідно його коливальний спектр є суцільним, при цьому якщо спектр плоский, шум називається білим. Така назва походить з аналогії з білим світлом, в спектрі якого інтенсивності різних частот представлені в однаковій мірі.

Як правило з поняттям «шум» впершу чергу асоціюється акустичний шум [9], уявлення про який всім добре відоме. Тому зазвичай вважається, що шум може оказувати лише деструктивну дію, що шум – це завада, яку треба усувати. Прикладом акустичного білого шуму є шум водопада. Генератори білого акустичного шуму використовуються в засобах захисту інформації.

Наступний приклад шуму у фізичних системах – тепловий шум [7,8]. Його природа фундаментальна і пов'язана з тепловим рухом атомів і молекул, з яких складається система. Тепловий шум призводить до явища броунівського руху, яке полягає в нерегулярному непередбачуваному русі невеличких частинок у рідині і газі.

Теорію броунівського руху вперше запропонував Ейнштейн, вивівши рівняння дифузії для відносної концентрації частинок. Трохи згодом Ланжевен використав інший підхід до цієї проблеми. Він записав диференціальне рівняння руху для однієї броунівської частинки, яке в одномірному випадку можна представити у вигляді:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = \sigma\xi(t), \quad (1)$$

де m – маса броунівської частинки; x – її координата; $\gamma\dot{x}$ – сила в'язкого тертя (сила Стокса) [4]; γ – коефіцієнт згасання, пропорційний коефіцієнту динамічної в'язкості; точка – похідна за часом; $\xi(t)$ – випадкова сила, обумовлена поштовха-

ми оточуючих частинку молекул [7,8]; σ^2 – її інтенсивність. Середнє значення і кореляційну функцію випадкової сили можна подати у вигляді

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t'),$$

де кутові дужки означають усереднення за ансамблем багатьох систем, кожна з яких складається з однієї броунівської частинки; δ – дельта-функція Дірака. Середнє значення випадкової сили дорівнює нулю; кожний поштовх молекули з частинкою є практично миттєвим, послідовні поштовхи не корелюють один з одним. На додаток, так як випадкова сила обумовлена багатьма випадковими факторами, вона має властивості гаусівського процесу [10]. Таким чином, тепловий шум $\xi(t)$ є гаусівським та білим.

Розв'язавши рівняння (1) відносно швидкості $v = \dot{x}$, знайдемо середню кінетичну енергію броунівської частинки. Після чого, використавши закон статистичної фізики про рівнорозподіл енергії за ступенями вільності [4], отримаємо вираз для флуктуаційно-дисипативної теореми [7,8]:

$$\sigma^2 = 2\gamma kT,$$

де $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана; T – абсолютна температура. З цієї формули видно, що інтенсивність σ^2 теплового шуму набуває дуже малих значень, тому тепловий шум значний для мікроскопічних систем, в макроскопічних же системах він стає знехтовно малим.

У випадку сильного згасання, тобто коли параметр $\lambda = \gamma/m$ набуває великих значень, від рівняння другого порядку (1) можна перейти до рівняння першого порядку, використавши метод адіабатичного вилучення (метод вилучення швидких змінних) [8]. В нашому випадку $v = \dot{x}$ – швидка змінна, вона миттєво досягає стаціонарного значення, тому $\dot{v} = \ddot{x} = 0$. Рівняння для x прийме вигляд $\gamma \dot{x} = \sigma \xi(t)$,

або $\dot{y} = \xi(t)$ для нового масштабу координати. Траєкторія броунівської частинки на масштабах часу, значно більших часу релаксації її швидкості, є вінеровським процесом [3,7,8]. Розглянутий метод пов'язаний з іменем Хакена, дозволяє значно спрощувати задачі, застосовний і до нелінійних рівнянь.

В макроскопічних системах випадковість може бути пов'язана з явищем детермінованого (динамічного) хаосу [11,12]. Його вперше відкрив Лоренц, розглянувши задачу про конвекцію в шарах атмосфери, яка описується нелінійною системою з трьох рівнянь. Він встановив, що чутливість системи до незначного збурдження початкових умов призводить до того, що дві початково близькі траєкторії через деякий час значно розходяться. Це робить довгостроковий прогноз погоди принципово неможливим.

Явище детермінованого хаосу пояснюється на фізичному рівні строгості експоненціальним розходженням траєкторій у фазовому просторі та збереженням фазового об'єму. Це призводить до перемішування фазових траєкторій – властивості, яку вперше ввів Гібс у статистичну фізику. Тобто, деякі нелінійні, виключно детерміновані системи, принаймні з трьома ступенями вільності, можуть демонструвати непередбачувану поведінку і описуватися статистично, як і випадкові процеси. Якщо така система взаємодіє з іншою системою, тоді останню можна розглядати як таку, що знаходиться під впливом хаотичного шуму [3]. Хаотичний шум, на відміну від теплового, не залежить від характерних розмірів системи, тому його інтенсивність може бути значною і в макроскопічних системах. Відомо, що турбулентність – це хаотичний стан [12], тому хаотичний шум ще називають турбулентним.

Треба зазначити, метод рівняння Ланжевена є дуже зручним і потужним, тому майже впродовж ста років широко використовується при дослідженні нерівноважних процесів в системах з флуктуючими параметрами. Саме цей метод застосовується при вивченні явища нерівноважних переходів, індукованих взаємно корельованими шумами [6], подальшому дослідженню якого в рамках чисельних методів присвячена ця робота.

2 ТЕОРЕТИЧНА МОДЕЛЬ

Розглядається просторово-однорідна динамічна система, стан якої описується тільки однією змінною. Безрозмірне рівняння Ланжевена в наближенні сильного згасання має вигляд [6]

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sigma_1 g(x(t)) \xi_1(t) + \sigma_2 \xi_2(t), \quad (2)$$

де $x(t)$ – динамічна змінна, $x(0) = 0$; точка – похідна за часом; $f(x)$ – детермінована сила, $f(x) = -dU(x)/dx$, $U(x)$ – детермінований потенціал; $g(x)$ – амплітуда флуктуацій мультиплікативного шуму; $\xi_1(t)$ і $\xi_2(t)$ – гаусівські білі шуми з нульовими середніми значеннями, інтенсивностями σ_1^2 і σ_2^2 , та кореляційними функціями:

$$\langle \xi_i(t) \xi_i(t') \rangle = \delta(t-t') \quad (i = 1, 2), \quad \langle \xi_1(t) \xi_2(t') \rangle = r \delta(t-t');$$

кутові дужки – усереднення за ансамблем реалізацій шумів; r – коефіцієнт взаємної кореляції шумів, $|r| \leq 1$; $\delta(t)$ – дельта-функція Дірака. Треба зазначити, шум $\xi_1(t)$ являється мультиплікативним, тобто в рівнянні (2) він помножається на деяку функцію $g(x)$, що залежить від динамічної змінної $x(t)$. Шум $\xi_2(t)$ являється адитивним, в рівнянні (1) він входить як доданок. Якщо шуми приймають значення незалежно один від одного, тоді коефіцієнт взаємної кореляції дорівнює нулю, $r = 0$. Це відповідає випадку, коли джерела шумів ізольовані. Якщо $r = \pm 1$, це свідчить про те, що між шумами є функціональний зв'язок, і на систему фактично діє одне джерело шуму. Якщо провести аналогію з гармонічними коливання, то випадок $r = 1$ відповідає коливанням в однаковій фазі, а випадок $r = -1$ – коливанням в протилежній фазі.

Як добре відомо, рівняння Ланжевена з мультиплікативним білим шумом, до яких відноситься і рівняння (2), не мають сенсу поки не буде прийняте відповідне

числення [3,7,8]. Використовуються числення Іто, в якому значення мультиплікативних функцій у відповідних різницевих схемах знаходяться в лівій точці інтервалу, та числення Стратоновича, в якому значення мультиплікативних функцій у різницевих схемах знаходяться в середній точці інтервалу. В фізиці, як правило, використовується числення Стратоновича, тому що до нього можна прийти, спрямувавши час кореляції реального шуму до нуля, отримавши при цьому білий шум.

Для рівняння Ланжевена (2) приймається числення Стратоновича, відповідна різницева схема має вид

$$x_{i+1} = x_i + f(x_i)\Delta t + \sigma_1 g\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)\Delta W_{1i} + \sigma_2 \Delta W_{2i}, \quad (3)$$

де Δt – крок дискретизації за часом, $t_{i+1} = t_i + \Delta t$; ΔW_{1i} і ΔW_{2i} – прирости вінеровських процесів.

Рівняння (2) може описувати, наприклад, направлений транспорт броунівських частинок [13], стохастичний резонанс в моделі нелінійного ротатора (при умові, що функція f також явно залежить від часу) [14], та інші фізичні процеси, в яких взаємна кореляція шумів відіграє важливу роль [6] (і посилання в цій статті). У подальшому приймемо, що $f(x) = -ax$, тобто детермінована сила є лінійною відновлювальною з параметром a ($a > 0$); $g(x) = -x^2/(1+x^2)$, амплітуда флуктуацій в околі нуля (точки стійкої рівноваги в детермінованій динаміці) є квадратичною, а для великих x – сталою. Саме в цьому випадку динамічна система, що описується рівнянням (2), демонструє нерівноважні переходи, індуковані взаємно корельованими шумами, як і було показано в [6]. Вираз рівноважної щільності ймовірності для динамічної змінної $x(t)$ має вигляд

$$p(x) = C \left[\left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^2 + 2rv \frac{x^2}{1+x^2} + v^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{a}{\sigma_1^2} \int_0^{x^2} \frac{dz}{\left(\frac{z}{1+z} \right)^2 + 2rv \frac{z}{1+z} + v^2} \right], \quad (4)$$

де C – константа нормування, $v = -\sigma_2/\sigma_1$. Критичні параметри, які визначають умову нерівноважних переходів, визначаються з рівняння:

$$r\sigma_1\sigma_2 = a. \quad (5)$$

Як видно з виразу (5), параметри шумів r , σ_1 , σ_2 входять в нього симетрично.

3 АЛГОРИТМ ЧИСЕЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

В основу алгоритму чисельного експерименту покладено метод статистичних випробувань, або так званий метод Монте-Карло [15].

Різницева схема (3) є неявною, тому її безпосередньо не можна застосувати для чисельного розв'язку рівняння (2). Тому спочатку запишемо рівняння Ланжевена в численні Іто, яке статистично еквівалентне рівнянню Ланжевена (2) в численні Стратоновича. Для цього використаємо результати роботи [6], отримаємо:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \frac{\sigma_1^2}{2} g(x(t))g'(x(t)) + \frac{r}{2} \sigma_1\sigma_2 g'(x(t)) + \sigma_1 g(x(t))\xi_1(t) + \sigma_2 \xi_2(t),$$

де штрих – похідна за координатою. Тепер можна застосувати до цього рівняння метод Ейлера [16], різницева схема набуде вигляд

$$x_{i+1} = x_i + \left[f(x_i) + \frac{\sigma_1^2}{2} g(x_i)g'(x_i) + \frac{r}{2} \sigma_1\sigma_2 g'(x_i) \right] \Delta t + \sigma_1 g(x_i) \Delta W_{1i} + \sigma_2 \Delta W_{2i}, \quad (6)$$

де Δt – як і для (3) крок дискретизації за часом, $t_{i+1} = t_i + \Delta t$; ΔW_{1i} і ΔW_{2i} – прирости вінеровських процесів, значення яких знаходяться за формулами: $\Delta W_{1i} = \xi_{1i} \sqrt{\Delta t}$ і $\Delta W_{2i} = \xi_{2i} \sqrt{\Delta t}$ [16]. Тут ξ_{1i} і ξ_{2i} – взаємно корельовані випадкові величини з коефіцієнтом кореляції r , які розподілені за нормальним законом з нульовим середнім значення та одиничною дисперсією. Для генерування корельованих значень цієї пари величин використаємо наступну формулу [17]:

$$\xi_{2i} = r\xi_{1i} + \sqrt{1-r^2} \xi_i,$$

де ξ_{1i} і ξ_i – вже незалежні гаусівські величини, які отримуються за допомогою бібліотечних функцій програмного забезпечення.

Різницева схема (6) застосовується для знаходження N вибірових реалізацій динамічної змінної $x(t)$ системи для заданого часового інтервалу $[0, t_m]$. Вони використовуються для обчислення нерівноважної щільності ймовірності системи $p(x, t)$ за формулою:

$$p(x_j, t_i) = \frac{N_j}{N\Delta x}, \quad (7)$$

де N_j – число реалізацій, які у момент часу t_i потрапляють в інтервал $[x_j, x_j + \Delta x)$; Δx – крок дискретизації за координатою. Фізичний зміст формули (7) полягає у наступному. Якщо застосувати модель броунівського руху, з рівнянням (2) зв'язати броунівську частинку і розглянути ансамбль з N таких систем, тоді вираз (7) є відносна концентрація частинок у момент часу t_i в елементі довжини $[x_j, x_j + \Delta x)$. Формулу (7) також можна використовувати для знаходження рівноважної щільності ймовірності $p(x)$, яка визначається для моменту часу t_m . Причому повинна виконуватися умова: $t_m \gg a^{-1}$, де a^{-1} – час релаксації системи.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

Чисельний експеримент проводиться при наступних фіксованих значеннях параметрів системи: коефіцієнт лінійної відновлювальної сили, $a = 1$; інтенсивність адитивного шуму, $\sigma_2^2 = 4$; коефіцієнт взаємної кореляції, $r = 0,9$. Варіюється інтенсивність σ_1^2 мультиплікативного шуму, тобто цей параметр приймається керуючим. Його відповідне критичне значення $\sigma_{1cr} = a/(r\sigma_2) \approx 0,56$. Треба зазначити, що вибір керуючого параметру – умовний. У відповідності з рівнянням (5) для критичної кривої в якості керуючого параметру можна взяти і інтенсивність адитивного шуму, і коефіцієнт взаємної кореляції, якісно картина від цього не зміниться. Чисельні значення параметрів системи вибираються таким чином, щоб спостережуване явище нерівноважних переходів, індукованих взаємно корельованими шумами, було якомога виразнішим.

Параметри алгоритму чисельного експерименту: крок дискретизації за часом, $\Delta t = 0,01$; крок дискретизації за координатою, $\Delta x = 0,02$; максимальний час спостереження вибіркової траєкторії, $t_m = 5$; кількість вибірових траєкторій, $N = 10^8$ (якщо в підпису до рисунку не вказано інакше).

На рис. 1 наведені графіки рівноважної щільності ймовірності $p(x)$, які отримані у відповідності з точним виразом (4) та алгоритмом чисельного експерименту. При $\sigma_1 < \sigma_{1cr}$ функція $p(x)$ є унімодальною з глобальним максимумом в точці $x = 0$ (рис. 1а), найбільш ймовірний стан системи в стохастичній динаміці відповідає точці стійкої рівноваги в детермінованій динаміці. При $\sigma_1 > \sigma_{1cr}$ рівноважна щільність ймовірності є бімодальною з двома локальними максимумами однакової висоти і одним локальним мінімумом в нулі (рис. 1б), найбільш ймовірні стани системи вже не відповідають точці стійкої рівноваги в детермінованій динаміці. Отже, при $\sigma_1 = \sigma_{1cr}$ відбувається нерівноважний, а саме унімодальний-бімодальний перехід, індукований взаємно корельованими шумами.

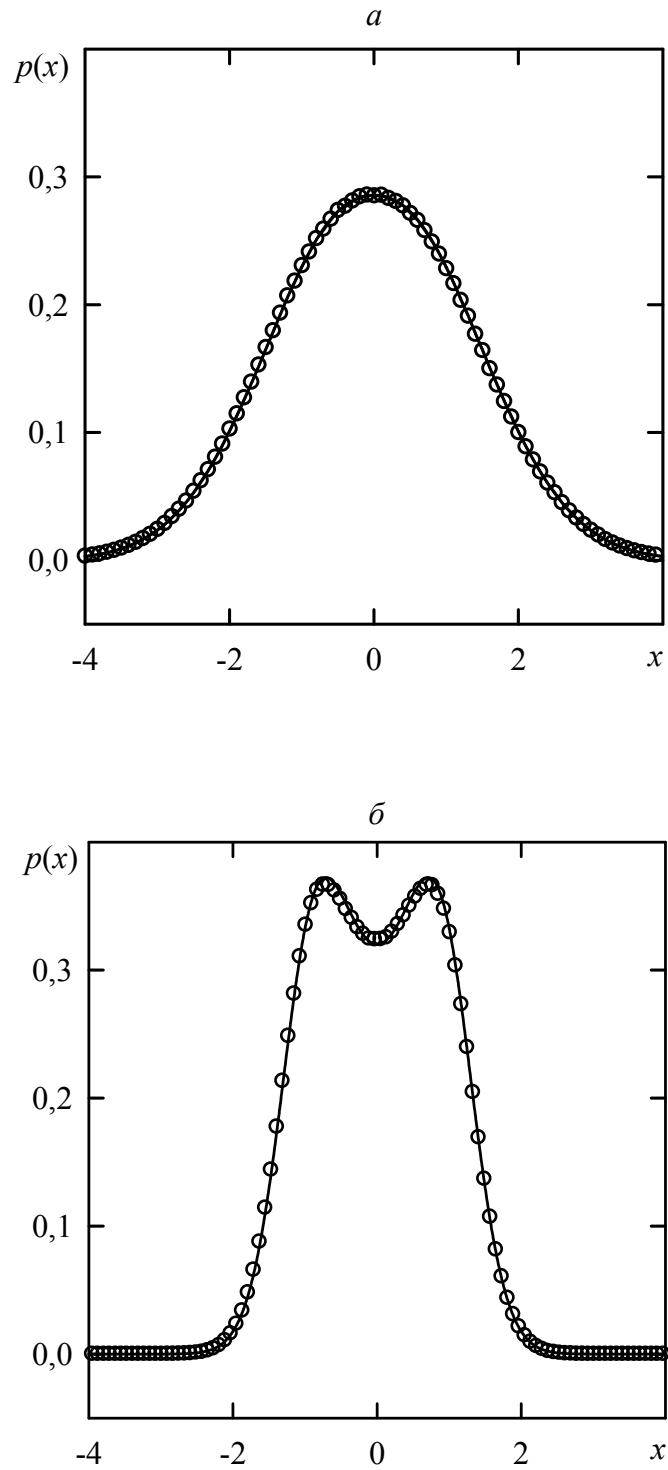


Рис. 1 – Рівноважна щільність ймовірності. Аналітичні результати представлені суцільною лінією, чисельні – окружностями. $\sigma_1 = 0,2$ (а); $\sigma_1 = 2$ (б)

З рис. 1 видно, що чисельні результати узгоджуються з аналітичними і якісно, і достатньо добре кількісно. Це свідчить про коректність запропонованого алгоритму чисельного експерименту, і о можливості його подальшого використання для обчислення нерівноважної щільності ймовірності системи, точний вираз якої аналітичними методами отримати не уявляється можливим. Можна додати, що для знаходження траєкторій системи також випробовувався більш точний метод Рунге-Кутта четвертого порядку [16], але різниці в обчисленні рівноважних щільностей ймовірності не було помітно.

На рис. 2 представлена часова еволюція нерівноважної щільності ймовірності системи до рівноважної у випадку $\sigma_1 = 2$ ($\sigma_1 > \sigma_{1cr}$). У початковий момент часу щільність ймовірності представляє дельта-пік у нулі, $p(x) = \delta(x)$, тобто є унімодальною. З плином деякого критичного часу t_{cr} вона становиться плоскою, тобто подвійним максимумом, а потім видозмінюється в бімодальну функцію з двома

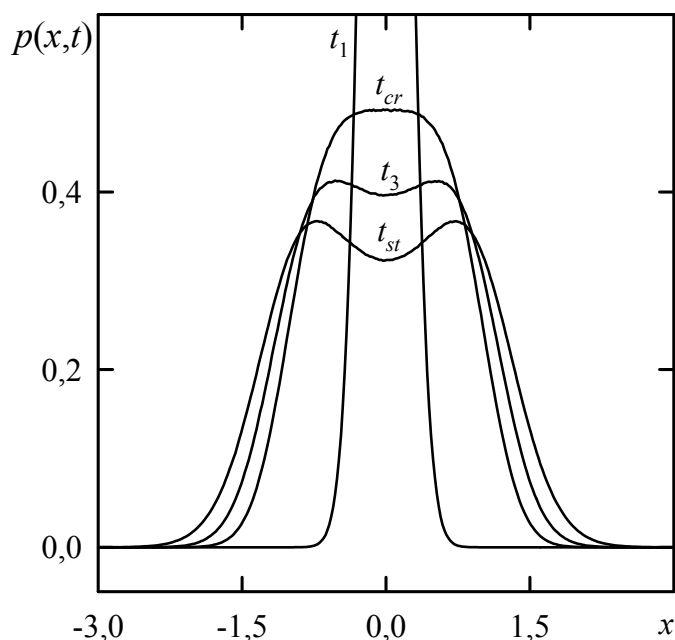


Рис. 2 – Еволюція нерівноважної щільності ймовірності:

$$t_1 < t_{cr} < t_3 < t_{st} \quad (\sigma_1 > \sigma_{1cr})$$

максимумами, які становляться найбільш виразними для рівноважної щільності ймовірності в момент часу t_{st} .

Використовуючи значення нерівноважної щільності ймовірності при різних значеннях керуючого параметру σ_1 , більших σ_{1cr} , знайдемо критичний час t_{cr} . Для цього побудуємо графіки часової еволюції точок максимуму щільності ймовірності, які визначають параметр порядку переходу (рис. 3). З рисунку видно, що при наближенні зверху керуючого параметру до критичного, час, за який початково унімодална щільність ймовірності змінюється в бімодалну, зростає; тобто система все довше і довше залишається у проміжному стані $x_m = 0$. Це свідчить про критичне уповільнення динаміки нерівноважного переходу.

В додатку А наведені тексти програм чисельного експерименту, реалізовані в середовищі Delphi 7.

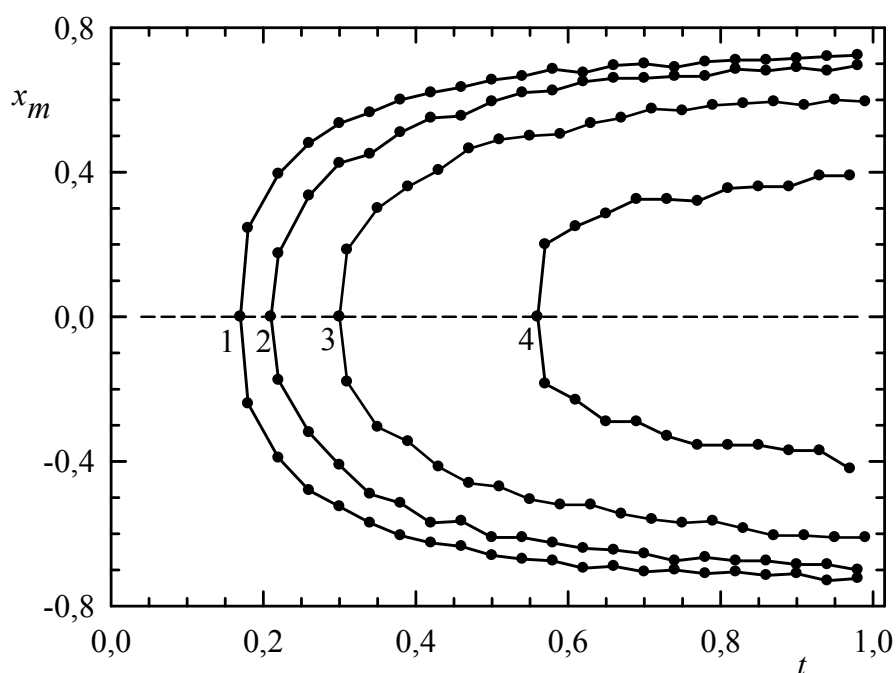


Рис. 3 – Еволюція точок максимумів. 1 – $\sigma_1 = 2,5$; 2 – $\sigma_1 = 2$; 3 – $\sigma_1 = 1,5$; 4 – $\sigma_1 = 1$.

Кількість вибірових траєкторій $N = 10^9$

ВИСНОВКИ

Проведено чисельний експеримент для динамічної системи, що збуджується двома гаусівськими білими шумами. Отримані значення рівноважної щільності ймовірності. Встановлено, що система демонструє нерівноважний, а саме унімодальний-бімодальний перехід, індукований шумами при наявності взаємної кореляції, причому в повній відповідності з результатами, отриманими точними аналітичними методами в [6]. Знайдена нерівноважна щільність ймовірності, яку точними методами отримати не уявляється можливим. Досліджена часова еволюція її точок максимуму, які визначають параметр порядку переходу. Встановлено, зі зменшенням керуючого параметру до критичного, час, за який початково унімодальна щільність ймовірності змінюється в бімодальну, збільшується. Це свідчить про критичне уповільнення в динаміці нерівноважного переходу. Дана властивість доповнює аналогію унімодального-бімодального переходу в розглянутій системі з класичними фазовими переходами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер, Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // УФН. – 1999. – Т. 169, №1. – С. 7–38.
2. P. Reimann, Brownian motors: noisy transport far from equilibrium // Phys. Rep. – 2002. – Vol. 361. – P. 57–265.
3. В. Хорстхемке, Р. Лефевр, Индуцированные шумом переходы. Теория и применение в физике, химии и биологии: Перев. с англ. – М.: Мир, 1987.
4. И.В. Савельев, Курс общей физики: механика, молекулярная физика. – Т.1. – М.: Наука, 1982.
5. J.S. Aldridge, A.N. Cleland, Noise-enabled precision measurements of a Duffing nanomechanical resonator // Phys. Rev. Lett. – 2005. – Vol. 94. – P. 156403(4).
6. S.I. Denisov, A.N. Vitrenko, W. Horsthemke, Nonequilibrium transitions induced by the cross-correlation of white noises // Phys. Rev. E. – 2003. – Vol. 68. – P. 046132(5).
7. Н.Г. Ван Кампен, Стохастические процессы в физике и химии: Перев. с англ. – М.: Высш. шк., 1990.
8. К.В. Гардинер, Стохастические методы в естественных науках: Перев. с англ. – М.: Мир, 1986.
9. Р. Тэйлор, Шум: Перев. с англ. – М.: Мир, 1978.
10. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Перев. с англ. – 3-е изд. – Т. 1. – М.: Мир, 1984.
11. С.П. Кузнецов, Динамический хаос. – М.: Физматлит, 2001.
12. Д. Рюэль, Случайность и хаос. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

13. L. Cao, D.J. Wu, Noise-induced transport in a periodic system driven by Gaussian white noises with intensive cross-correlation // *Phys. Lett. A.* – 2001. – Vol. 291. – P. 371–375.
14. K.P. Singh, G. Ropars, M. Brunel, A. Le Floch, Lever-assisted two-noise stochastic resonance // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – Vol. 90. – P. 073901(4).
15. И.М. Соболев, Численные методы Монте-Карло. – М: Наука, 1973.
16. В.И. Тихонов, М.А. Миронов, Марковские процессы. – М.: Сов. Радио, 1977.
17. Д.В. Кирьянов, Е.Н. Кирьянова, Вычислительная физика. – М.: Полибук Мультимедиа, 2006.

ДОДАТОК А

Текст програм чисельного експерименту

```

program PDF;
{Розв'язок рівняння Ланжевена з двома взаємно корельованими білими шумами
методом Ейлера та знаходження нерівноважних щільностей ймовірності}
{$APPTYPE CONSOLE} // консольний додаток Delphi 7
uses
  SysUtils,
  Math;
const a = 1.0; // фіксований
{параметри пари випадкових чисел a1 и a2}
sigma1 = 2.0{0.75}{3.0}{2.5}{1.5}{1.0}{2.0}{4.0}; // змінюємо
sigma2 = 2.0; // фіксований
r = 0.9; // фіксований
x0 = 0.0; // початкова умова
dt = 0.01; // крок дискретизації за часом
tmax = 5.0; // максимальний час спостереження вибіркової траєкторії
N = 100000000; // кількість вибірових траєкторій
Xmin = -5.0; // мінімальне значення для аргументу щільності ймовірності
Xmax = 5.0;
NdeltaX = 500; // кількість елементарних відрізків
deltaX = (Xmax - Xmin)/ NdeltaX; // крок дискретизації за координатою
UpdatePeriod = 10000; //через скільки циклів оновлюється інформація на екрані
var
  a1, a2 : extended; //пара випадкових чисел для генерування вінеровських процесів
  t, x_t : extended; // час і координата для траєкторій системи
  I, J, K : integer; // лічильники

```

```

Nt : integer; // кількість нерівноважних щільностей ймовірності
x : array of real; // абсциси щільності ймовірності
p : array of array of real; // ординати щільності ймовірності
data : text; // файл з точками щільностей ймовірності
dat : text; //файл з параметрами
{службові змінні, що використовуються для зменшення операцій в циклі}
sqrt1_r2, Sigma1SqrtDt, Sigma2SqrtDt, r_2Sigma1Sigma2, SqrSigma1_2 : real;
function f(a, x : extended) : extended;
begin
  f := -a*x;
end;
function g(x : extended) : extended;
begin
  g := -x*x/(1 + x*x);
end;
function dg(x : extended) : extended;
begin
  dg := -2*x/sqr(1 + x*x);
end;

begin
  AssignFile(data, 'data1.txt');
  Rewrite(data);
  AssignFile(dat, 'data1.dat');
  Rewrite(dat);
  Randomize;
  {нерівноважна щільність ймовірності знаходиться для Nt моментів часу}
  Nt := trunc(tmax/dt);

```

```

SetLength(x,NdeltaX); // виділяємо пам'ять під динамічні масиви
SetLength(p, Nt, NdeltaX);
{запис параметрів задачі у файл}
writeln(dat, ' a = ', ' sigma1 =', ' sigma2 =', ' r = ');
writeln(dat, a:10:1, ' ', sigma1:10:1, ' ', sigma2:10:1, ' ', r:10:3);
writeln(dat, ' dt = ', ' tmax =', ' x0 = ');
writeln(dat, dt:10:3, ' ', tmax:10:2, ' ', x0:10:2);
writeln(dat, ' N = ', ' Xmin =', ' Xmax =', ' NdeltaX =');
writeln(dat, N:10, ' ', Xmin:10:2, ' ', Xmax:10:2, NdeltaX:10);
writeln(dat, 't = ');
for I := 1 to Nt do
  writeln(dat, I*dt:0:2);
CloseFile(dat);
{ініціалізація службових змінних, що використовуються для зменшення операцій
в циклі}
sqrt1_r2 := sqrt(1-r*r);
Sigma1SqrtDt := sigma1*sqrt(dt);
Sigma2SqrtDt := sigma2*sqrt(dt);
SqrSigma1_2 := sqr(sigma1)/2;
r_2Sigma1Sigma2 := r/2*sigma1*sigma2;
for K := 0 to NdeltaX-1 do
  x[K] := Xmin + deltaX/2 + K*deltaX; {значення щільності ймовірності знахо-
диться в середині інтервалу}
  for I := 0 to N-1 do
    begin
    t := 0; x_t := x0;
    J := -1;
    repeat

```

```

{sqrt1_r2=sqrt(1-r*r); Sigma1SqrtDt=sigma1*sqrt(dt); Sigma2SqrtDt=sigma2*sqrt(dt)}
  a1 := randG(0,1);
  a2 := (r*a1 + sqrt1_r2*randG(0,1))*Sigma2SqrtDt;
  a1 := a1*Sigma1SqrtDt;
  t := t + dt;
  x_t := x_t + (f(a,x_t) + (SqrSigma1_2*g(x_t)+r_2Sigma1Sigma2)*dg(x_t)
    )*dt + g(x_t)*a1 + a2;
  // sqr(sigma1)/2 = SqrSigma1_2; r/2*sigma1*sigma2 = r_2Sigma1Sigma2
  J := J + 1;
  if (x_t>=Xmin) and (x_t<=Xmax) then
    begin
      K := trunc((x_t - Xmin) / deltaX);
      p[J,K] := p[J,K] + 1;
    end;
  until (tmax-t)<= 1e-6;
  if I mod UpdatePeriod = 0 then writeln(I/N*100:0:3);
  end;
  for K := 0 to NdeltaX-1 do
    begin
      write(data, x[K]:0:4);
      for J := 0 to Nt-1 do
        begin
          p[J,K] := p[J,K]/N/deltaX;
          write(data, ' ', p[J,K]:0:10);
        end;
      writeln(data);
    end;
  CloseFile(data);
end.

```

```

program Max_Fun;
{Програма для визначення максимумів щільності ймовірності}
{$APPTYPE CONSOLE}
uses
  SysUtils;
var
  data_fun : text; // вхідний файл с точками щільності ймовірності
  data_xmax : text; // файл с точками максимумів
  data_dat : text; // файл зі значеннями параметрів
  f : array of array of real;
  x, t : array of real; //f - функція, x - аргумент, t - момент часу
  I, J, Nx, Nx_2 : integer; // Nx_2 половина от кількості точок Nx
  ym1, ym2, xm1, xm2, dt : real;
      // ym1 - максимуми функції для від'ємних аргументів
      // ym2 - максимуми функції для додатних аргументів
  Nt : integer; // кількість стовбців значень для функції
  a1, a2 : integer; //змінні для зчитування з файлу параметрів
  b1, b2, b3, b4 : real;
begin
  AssignFile(data_dat, 'data1.dat');
  reset(data_dat);
  AssignFile(data_fun, 'data1.txt');
  reset(data_fun);
  AssignFile(data_xmax, 'Xmax1.txt');
  Rewrite(data_xmax);
  readln(data_dat); //пропуск
  readln(data_dat);
  readln(data_dat);
  readln(data_dat, b1, b2, b3);

```



```
readln(data_dat);
readln(data_dat, a1, b2, b3, a2);
readln(data_dat);
dt := b1;
Nx := a2;
J := 0;
while not eof(data_dat) do
begin
  J := J + 1;
  SetLength(t,J);
  readln(data_dat, t[J-1]);
end;
Nt := J; //після циклу while J дорівнює числу комірок в масиві t
SetLength(x,Nx);
SetLength(f,Nx,Nt);
I := 0;
while not eof(data_fun) do
begin
  I := I + 1;
  read(data_fun, x[I-1]);
  J := 0;
  while not eoln(data_fun) do
begin
  J := J + 1;
  read(data_fun, f[I-1, J-1]);
end;
  readln(data_fun);
end;
Nx_2 := Nx div 2;
```

```

for J := 0 to Nt-1 do
  begin
    ym1 := f[0,J];
    xm1 := x[0];
    for I := 1 to Nx_2-1 do
      if f[I,J]>ym1 then
        begin
          ym1 := f[I,J];
          xm1 := x[I];
        end;
    ym2 := f[Nx_2,J];
    xm2 := x[Nx_2];
    for I := Nx_2+1 to Nx-1 do
      if f[I,J]>ym2 then
        begin
          ym2 := f[I,J];
          xm2 := x[I];
        end;
    if abs(xm2-xm1)<=0.04{dt} then
      writeln(data_xmax, t[J]:0:2, ' ', 0.0:0:4, ' ', 0.0:0:4) //
    else
      writeln(data_xmax, t[J]:0:2, ' ', xm1:0:4, ' ', xm2:0:4);
    end;
  CloseFile(data_dat);
  CloseFile(data_fun);
  CloseFile(data_xmax);

end.

```