

О.В. ЮЩЕНКО, А.Ю. БАДАЛЯН

Сумський державний університет

(Вул. Римського-Корсакова, 2, Суми 40007; e-mail: yushchenko@phe.sumdu.edu.ua)

## МІКРОСКОПІЧНИЙ ОПИС НЕЕКСТЕНСИВНИХ СИСТЕМ У РАМКАХ МОДЕЛІ ІЗІНГА

УДК 538.91

*Деформований гамільтоніан Ізінга для опису поведінки неекстенсивних систем було представлено шляхом заміни спінової змінної  $s_i$  на деформовану  $s_i^q$ . У рамках теорії середнього поля було досліджено фазовий перехід парамагнетик-феромагнетик для деформованої статсуми. У наближенні Ландау було проаналізовано вплив параметра неекстенсивності  $q$  на густину вільної енергії та на стаціонарне значення параметра порядку.*

*Ключові слова:* модель Ізінга, Константіно Тсалліс.

### 1. Вступ

Ще у 1865 р. Р. Клаузіусом була введена концепція (і сам термін) ентропії в контексті класичної термодинаміки та без урахування мікроскопічної взаємодії. Однією з властивостей, що природно виникли у рамках концепції Клаузіуса, є екстенсивність (адитивність) ентропії, яка в мікроскопічному розумінні пов'язана з числом елементів системи. Л. Больцман, а потім і Д. Гіббс запропонували співвідношення  $S_{BG} = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i$ , яке пов'язує ентропію Клаузіуса з мікростанами системи ( $W$  – число відповідних мікростанів,  $p_i$  – імовірність їх реалізації,  $k$  – стала Больцмана). Однак, виявилось, що теорія Больцмана-Гіббса не є універсальною і має обмежену сферу застосування.

З одного боку, дана теорія заснована на припущенні, що всі елементи системи незалежні, в результаті чого і реалізується властивість адитивності (екстенсивності) ентропії. Крім того, була використана гіпотеза молекулярного хаосу, в рамках якої частинки системи до зіткнення ніяк не корелюють одна з одною. Звичайно для більшості макроскопічних фізичних систем сили взаємодії між частинками є короткодійними і поширюються тільки на обмежене число найближчих су-

сідів, але як бути з тими складними системами, в яких виявлена далекодійча взаємодія? Крім того, необхідно врахувати той факт, що на мікроскопічному рівні, зазвичай, реалізується більш слабкий хаос і чутливість до зовнішніх умов зростає не експоненціально, а згідно зі степеневим законом.

З іншого боку, дана теорія описує специфічний стаціонарний стан, що називається *термодинамічною рівновагою*, а, як відомо, останнім часом все більше уваги привертають складні фізичні, біологічні, соціальні та інші системи, для яких основними є *нерівноважні* стаціонарні стани.

У результаті виникає природне запитання: а чи можливо створити більш загальну теорію, яка в окремому випадку приводить до теорії Больцмана-Гіббса за умови термодинамічної рівноваги і незалежності елементів системи. Однозначної відповіді на це питання поки що не існує, але у 1988 р. бразильським вченим Константіно Тсаллісом була зроблена спроба розширити сферу застосування статистичної механіки і термодинаміки, в результаті чого виник новий напрям *неекстенсивна статистична механіка та термодинаміка*. Основою даного напрямку є узагальнений вираз для ентропії:

$$S_q = -k \sum_{i=1}^W p_i^q \ln_q p_i = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1},$$

© О.В. ЮЩЕНКО, А.Ю. БАДАЛЯН, 2013

що в межі  $q \rightarrow 1$  приводить до звичайної ентропії Больцмана ( $q$  – параметр деформації).

На сьогоднішній день сфери застосування неекстенсивної статистичної механіки досить широкі, про що свідчить безліч прикладів із різних областей науки [1]. При цьому кожен випадок заслуговує окремого аналізу, оскільки деякі з них доведені експериментально і/або теоретично, інші є феноменологічними спостереженнями, коли параметр деформації  $q$  отримується прямою підстановкою (здебільшого через невизначеність, що має місце в мікроскопічному світі). Нарешті, опис деяких випадків може бути представлений тільки як імовірнісний через нестачу даних. Крім того, необхідно враховувати, що для одних прикладів  $q$  задає степінь розподілу, для інших – чутливість до зовнішніх умов, мультифрактальність і т.ін.

В астрофізиці та космології зв'язок з  $q$ -деформованою теорією встановлений для самогравітуючих систем [2], для розподілу швидкостей спіральних галактик [3], проблеми сонячного нейтрино [4–7], космічного фонового мікрохвильового випромінювання [8–10], енергії розподілу космічних променів [11]. У фізиці твердого тіла подібний зв'язок виявляється під час вивчення високих температур надпровідності [12], бозе-ейнштейнівської конденсації [13] і сильного зв'язку електронів [14]; в нелінійній динаміці особлива увага приділяється застосуванню теорії Тсалліса до тривимірної турбулентності [15]. Крім того, в рамках зазначеної теорії закон Арреніуса виконується і для аномальної дифузії [16]. Явище самоорганізованої критичності (зокрема, для моделі біологічної еволюції [17]) представляється близьким до концепцій, що виникли в рамках існуючого неекстенсивного формалізму.

Слід зазначити ще один приклад застосування статистичної теорії неекстенсивних систем – опис об'єктів кінцевого розміру, важливість дослідження яких зростає з розвитком нанотехнологій. Наприклад, для задачі про розділення макросистеми на декілька частин було виявлено, що точність (з урахуванням різниці поверхневих енергій цілої та розділених частин системи), з якою зберігається адитивність, приблизно дорівнює розміру атома, поділеному на розмір системи. Таким чином, чим меншим є розмір системи, тим більшими будуть ефекти неадитивності. Дійсно, для кінцевої кількості частинок  $N$  параметр деформації набуває

значення [18]:

$$q = \left(1 - \frac{\alpha}{d} N^{-1}\right)^{-1}, \quad (1)$$

де  $\alpha$  – показник подібності координатної залежності гамільтоніана (наприклад, для гармонійного осцилятора  $\alpha = 2$ ),  $d$  – розмірність системи. Короткодійчі потенціали ( $\alpha > 0$ ) характеризуються значеннями  $q \geq 1$ , а далекодійчим ( $-d \leq \alpha \leq 0$ ) відповідає величина  $q \leq 1$  (при  $\alpha < -d$  застосовується статистика Больцмана–Гіббса [19]). В термодинамічній межі  $N \rightarrow \infty$  отримуємо значення  $q = 1$  зі звичайною статистикою, а зі спаданням числа частинок  $N$  різниця  $|q - 1|$  зростає, досягаючи максимальної величини  $\alpha/(d - \alpha)$  при  $\alpha > 0$  і  $|\alpha|/(d + |\alpha|)$  при  $\alpha < 0$ .

Запропонована робота присвячена розгляду мікроскопічної теорії неекстенсивних систем у рамках моделі Ізінга. Стаття побудована таким чином. Розділ 2 подає основи  $q$ -деформованої алгебри, у рамках якої побудований формалізм неекстенсивних систем. У розділі 3 запропоновано  $q$ -деформований гамільтоніан Ізінга для опису неекстенсивних систем, знайдено співвідношення для можливих значень параметра  $q$  та обчислено дробове середнє значення спіну. В рамках розділу 4 знайдено статистичну суму за всіма мікростанами неекстенсивної системи та густину вільної енергії, яка на межі  $q \rightarrow 1$  приводить до класичного розкладу Ландау. Розділ 5 присвячено аналізу рівноважного значення параметра порядку.

## 2. Формалізм неекстенсивної статистичної системи

На відміну від звичайного статистичного ансамблю неекстенсивна система підпорядковується статистичі Цалліса [1], у рамках якої стани розподілені не за Гіббсом, а згідно з ескортною імовірністю [20]:

$$P_q(x) = \frac{p^q(x)}{\int p^q(x) dx}, \quad p(x) = Z_q^{-1} \exp_q(x), \quad (2)$$

де статистична сума  $Z_q$  визначається умовою нормування початкової імовірності  $p(x)$ . Остання, у свою чергу, задається деформованою експонентою Цалліса:

$$\exp_q(x) := [1 + (1 - q)x]_+^{\frac{1}{1-q}},$$

$$[y]_+ \equiv \max(y, 0), \tag{3}$$

яка на межі  $q \rightarrow 1$  зводиться до звичайної експоненти  $e^x = \exp_1(x)$ . Відповідно, логарифм Цалліса, який відіграє роль функції, зворотної експоненті (3), визначається рівністю

$$\ln_q(x) \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}. \tag{4}$$

Крім того, сума, різниця, добуток і частка позитивних величин  $x, y$  набувають вигляду [21]:

$$\begin{aligned} x \oplus_q y &:= x + y + (1 - q)xy, \\ x \ominus_q y &:= \frac{x - y}{1 + (1 - q)y}, \\ x \otimes_q y &:= [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]_+^{\frac{1}{1-q}}, \\ x \oslash_q y &:= [x^{1-q} - y^{1-q} + 1]_+^{\frac{1}{1-q}}. \end{aligned} \tag{5}$$

При цьому функції (3), (4) задовольняють правила

$$\begin{aligned} \ln_q(x \otimes_q y) &= \ln_q x + \ln_q y, \\ \ln_q(x \oslash_q y) &= \ln_q x - \ln_q y, \\ \ln_q(xy) &= \ln_q x \oplus_q \ln_q y, \\ \ln_q(x/y) &= \ln_q x \ominus_q \ln_q y, \\ \exp_q(x) \otimes_q \exp_q(y) &= \exp_q(x + y), \\ \exp_q(x) \oslash_q \exp_q(y) &= \exp_q(x - y), \\ \exp_q(x) \exp_q(y) &= \exp_q(x \oplus_q y), \\ \exp_q(x) / \exp_q(y) &= \exp_q(x \ominus_q y). \end{aligned} \tag{6}$$

$q$ -факторіал

$$n!_q := 1 \otimes_q 2 \otimes_q \dots \otimes_q n \tag{7}$$

натурального числа  $n \gg 1$  задається формулою Стірлінга [22]:

$$\begin{aligned} \ln_q(n!_q) &\simeq \\ &\simeq \begin{cases} \left( \frac{n}{2-q} + \frac{1}{2} \right) \ln_q n - \frac{n-1}{2-q}, & 0 < q \neq 2; \\ \left[ n - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] - \ln n, & q = 2. \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

### 3. Основні рівняння

Модель Ізінга є основою мікроскопічної теорії фазових переходів [23]. На відміну від моделі Гейзенберга, де для кожного вузла регулярної ґратки спін може набувати будь-яке значення (див. рис. 1, *b*), перевага моделі Ізінга у її простоті, коли припускається, що кожний вузол (див. рис. 1, *a*) має тільки два значення спіну  $s_i = \pm 1$ .

Незважаючи на це, точного аналітичного опису фазового переходу парамагнетик–феромагнетик (PM–FM) у рамках моделі Ізінга для тривимірного випадку до цих пір не існує. Проте дана модель дозволяє якісно представити основні властивості фазового переходу PM–FM у рамках наближення середнього поля. Але для опису об’єктів кінцевого розміру, як уже зазначалося, статистика Гіббса–Больцмана не підходить, тому необхідно звернутися до більш загального підходу Цалліса [1]. Виникає питання, як вплине подібна “деформація” на картину фазового переходу. З формальної точки зору узагальнення статистики Гіббса–Больцмана відбувається завдяки заміні вихідної імовірності  $p_i$  на деформовану  $p_i^q$ . Спробуємо поширити дану процедуру на мікроскопічному рівні, тобто використаємо деформований гамільтоніан Ізінга за рахунок заміни спіну  $i$ -го вузла  $s_i$  на деформований варіант  $s_i^q$ .

Відповідно до поставленої задачі гамільтоніан набуває вигляду

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{i,j} s_i^q s_j^q - h \sum_i s_i^q. \tag{9}$$

Тут сума береться за всіма вузлами  $N$  ґратки з індексами  $i \neq j$ ;  $J_{ij}$  – потенціал ефективної взаємодії;  $h$  – зовнішнє поле;  $s_i = \pm 1$  – значення спіну у кожному вузлі;  $q$  – параметр екстенсивності (деформації); коефіцієнт  $\frac{1}{2}$  враховує подвійний перебір індексів  $i \neq j$ .

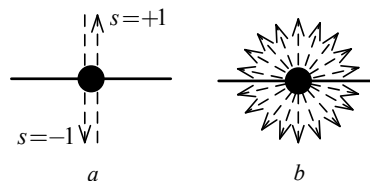


Рис. 1. Схематичне зображення можливих напрямків спінів вузлів регулярної ґратки для: *a* – моделі Ізінга, *b* – моделі Гейзенберга

У рамках наближення середнього поля врахуємо, що:

– множник  $s_i^q$  замінюється середнім значенням  $\langle s^q \rangle$ ;

– основний внесок до гамільтоніана надає тільки взаємодія найближчих сусідів, число яких дорівнює  $z$ ;

– потенціал ефективної взаємодії зводиться до позитивної константи  $J > 0$ , знак якої визначає тип матеріалу (FM).

У результаті ефективний гамільтоніан має вигляд

$$\mathcal{H}_{\text{ef}} = \sum_i \varepsilon_i, \quad (10)$$

де

$$\varepsilon_i = -h_q s_i^q; \quad h_q = h + T_c \langle s^q \rangle. \quad (11)$$

В останньому виразі введена критична температура  $T_c = zJ$ , при цьому  $\varepsilon_i$  може бути розглянута, як енергія  $i$ -го вузла.

Оскільки модель Ізінга має дискретну симетрію, інваріантну до перетворення спіну  $s_i \rightarrow -s_i$  та зовнішнього поля  $h \rightarrow -h$ , то наша теорія має сенс при виконанні умови  $(-1)^q = -1$ . Тоді, використовуючи комплексне подання для  $-1$ , можна отримати додаткову умову на можливі значення  $q$ :

$$q = \frac{2m + 1}{2n + 1}, \quad (12)$$

де  $m, n$  – цілі числа ( $m, n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ ) (див. таблицю).

Для подальшого розгляду необхідно визначити середнє  $\langle s^q \rangle$  з дробовим показником  $q$ . У роботі [24] було розглянуто аналогічну задачу. Наприклад, якщо для змінної  $s$  існує початковий розподіл  $P(s)$ , то може існувати ще один розподіл  $P_q(x)$  для стохастичної змінної  $x = s^q$ . Крім того, можна припустити, що ці два розподіли зв'язані між собою співвідношенням  $s^q P(s) ds = x P_q(x) dx$ . Якщо середнє за розподілом  $P_q(x)$  позначити  $\langle \dots \rangle_q$  та використати звичайні кутові дужки  $\langle \dots \rangle$  для позначення середнього за початковим розподілом  $P(s)$ , то можна отримати співвідношення  $\langle s^q \rangle = \langle x \rangle_q$ . При цьому у [24] доведено, що така задача має сенс тільки у випадку самоподібних систем, де функція розподілу має степеневий вигляд, тобто

$P(s) = N_p^{-1} s^{-\mu}$ , де  $\mu$  – показник степеня,  $N_p$  – константа нормування:

$$N_p = \frac{1}{|1 - \mu|} a^{\mu-1}, \quad a \rightarrow 0. \quad (13)$$

Звернемося до визначення показника  $\mu$ . З [24] відомо, що при  $1 < \mu < 2$ , коли фрактальна розмірність фазового простору

$$D = 2 - \mu$$

буде меншою за 1, система завжди буде неупорядкованою; у випадку, коли  $0 < \mu < 1$  фрактальна розмірність  $D > 1$  і система може бути впорядкованою. Тому подальший розгляд всіх можливих залежностей рівноважного значення параметра порядку ми будемо розглядати лише в області  $\mu \in (0, 1)$ .

У результаті дробове середнє можна представити у вигляді

$$\langle s^q \rangle = \beta^{-1} (N_p (2 - \mu))^{\beta-1} \langle s \rangle^\beta, \quad (14)$$

де введено позначення

$$\beta \equiv \frac{q + 1 - \mu}{2 - \mu}. \quad (15)$$

Оскільки у початковій мікроскопічній теорії, побудованій на основі моделі Ізінга, параметр порядку, що відрізняє неупорядкований стан (PM) від впорядкованого (FM), являв собою середній спін  $\langle s_i \rangle = \langle s \rangle = \eta$ , то і у випадку неекстенсивних систем логічно буде скористатися цим співвідношен-

**Деякі можливі значення параметра  $q$  у вигляді звичайного та десяткового дробу для різних значень  $m$  та  $n$**

| $m$ | $n$ | $q$   | $q$   |
|-----|-----|-------|-------|
| 0   | 5   | 1/11  | 0,091 |
| 0   | 2   | 1/5   | 0,2   |
| 1   | 2   | 3/5   | 0,6   |
| 3   | 4   | 7/9   | 0,778 |
| 1   | 1   | 1     | 1     |
| 10  | 9   | 21/19 | 1,105 |
| 3   | 2   | 7/5   | 1,4   |
| 4   | 2   | 9/5   | 1,8   |
| 5   | 2   | 11/5  | 2,2   |
| 6   | 2   | 13/5  | 2,6   |

ням. У результаті отримаємо ефективний гамільтоніан неекстенсивної системи у вигляді

$$\mathcal{H}_{\text{ef}} = - \sum_i (h + CT_c \eta^\beta) s_i, \quad (16)$$

де параметр

$$C \equiv \beta^{-1} (N_p(2 - \mu))^{\beta-1}. \quad (17)$$

Оскільки гамільтоніан (16) від'ємний, то початок відліку не можна вибрати нульовим, в протилежному випадку система при впорядкуванні буде мати нескінченно велику від'ємну енергію. Щоб уникнути цього слід врахувати самодію, що відображає принцип Ле-Шательє. Вперше це зробив академік АН УРСР М.М. Боголюбов у 50-х роках минулого століття при поясненні на мікроскопічному рівні явища надтекучості. В його теорії складова гамільтоніана, що відображає самодію, задається квадратичним доданком

$$\mathcal{H}_0 = \frac{N}{2} T_c \eta^2. \quad (18)$$

У кінцевому вигляді ефективний гамільтоніан системи подається таким чином:

$$\mathcal{H}_{\text{ef}} = \frac{N}{2} T_c \eta^2 - h \sum_i s_i - CT_c \eta^\beta \sum_i s_i. \quad (19)$$

#### 4. Отримання феноменологічної теорії з мікроскопічної картини

Як відомо, феноменологічна теорія фазових переходів Ландау дає співвідношення для рівноважного параметра порядку  $\eta \equiv \langle s \rangle$ . Для задач подібного типу середнє визначають згідно з розподілом Гіббса:

$$P\{s_i\} = Z^{-1} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}_{\text{ef}}}{T}\right), \quad (20)$$

де  $Z$  – статистична сума,  $\mathcal{H}_{\text{ef}}$  – гамільтоніан (19),  $T$  – температура в енергетичних одиницях.

Спочатку знайдемо статистичну суму за всіма наборами можливих орієнтацій спінів для всіх вузлів:

$$Z = Z_0 \sum_{\{s_i\}} \exp\left(\alpha \sum_i s_i\right). \quad (21)$$

Тут

$$Z_0 \equiv \exp\left(-\frac{N}{2} \frac{T_c}{T} \eta^2\right), \quad (22)$$

$$\alpha \equiv \frac{h}{T} + C \frac{T_c}{T} \eta^\beta. \quad (23)$$

Оскільки під експонентою у формулі (21) стоїть сума за всіма вузлами, то дану експоненту можна представити у вигляді добутку вузельних експонент, який, в свою чергу, можна поміняти місцями із сумою за всіма наборами спінів. У результаті отримаємо вираз

$$Z = Z_0 \prod_{i=1}^N \sum_{s_i} \exp(\alpha s_i), \quad (24)$$

де залишаються тільки ті доданки, котрі відносяться до даного вузла  $i$ , тобто  $\{s_i\} \rightarrow s_i$ . Оскільки  $s_i = \pm 1$ , то остання сума у (24) легко обчислюється:

$$Z = Z_0 (2 \operatorname{ch} \alpha)^N. \quad (25)$$

Підставляючи до (25) співвідношення (22), (23), маємо

$$Z = \exp\left(-\frac{N}{2} \frac{T_c}{T} \eta^2\right) \left[2 \operatorname{ch} \left(\frac{h}{T} + C \frac{T_c}{T} \eta^\beta\right)\right]^N. \quad (26)$$

Із термодинаміки відомо, що вільна енергія пов'язана зі статичною сумою співвідношенням

$$F = -T \ln Z. \quad (27)$$

Підставляючи статистичну суму неекстенсивної системи (26) до (27), отримуємо остаточний вираз для вільної енергії неекстенсивної системи:

$$F = \frac{N}{2} T_c \eta^2 - TN \ln 2 - TN \ln \operatorname{ch} \left(\frac{h}{T} + C \frac{T_c}{T} \eta^\beta\right). \quad (28)$$

Тут перший доданок відповідає енергії самодії, другий доданок не залежить від параметра порядку, але відіграє важливу роль, оскільки визначає зменшення енергії за рахунок зростання безладу. Основну роль у рівнянні (28) відіграє останній доданок, який не зводиться до стандартної форми (наприклад, до форми Ландау). Але цього і не

повинно бути, оскільки енергія (28) отримана із мікроскопічної теорії та вірна за будь-якої температури  $T$ , а феноменологічна теорія Ландау, поперше, вірна поблизу критичної температури  $T_c$ , по-друге, не враховує властивість неаддитивності.

Для отримання феноменологічної теорії слід провести розклад косинуса гіперболічного та логарифма в рівнянні (28). У результаті отримаємо формулу для вільної енергії у загальній формі:

$$F = \frac{N}{2} T_c \eta^2 - T N \ln 2 - \frac{TN}{2} \left[ \left( \frac{h}{T} + C \frac{T_c}{T} \eta^\beta \right)^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{h}{T} + C \frac{T_c}{T} \eta^\beta \right)^4 \right]. \quad (29)$$

Далі введемо позначення густини вільної енергії, яка припадає на один вузол:

$$f = \frac{F}{N}. \quad (30)$$

У наближенні  $h = 0$  рівняння (29) можна переписати у вигляді

$$f = -T \ln 2 + \frac{T_c}{2} \eta^2 - \frac{C^2 T_c^2}{2T} \eta^{2\beta} + \frac{C^4 T_c^4}{12T^3} \eta^{4\beta}. \quad (31)$$

Перший доданок у (31) виник у зв'язку зі зменшенням вільної енергії за рахунок переходу із неупорядкованого стану до упорядкованого та не залежить від параметра порядку, при цьому під зміною вільної енергії мається на увазі тільки різниця в початках відліку упорядкованої та неупорядкованої фаз. Цей доданок нехарактерний для феноменологічної теорії, оскільки містить надлишкову інформацію, котру неможливо отримати наближеними методами. Таким чином, виразом  $-T \ln 2$  для феноменологічного випадку можна знехтувати. У результаті отримаємо

$$f = \frac{T_c}{2} \eta^2 - \frac{C^2 T_c^2}{2T} \eta^{2\beta} + \frac{C^4 T_c^4}{12T^3} \eta^{4\beta}. \quad (32)$$

Враховуючи те, що для  $q \rightarrow 1$  всі співвідношення, використані у рамках неекстенсивної механіки, набувають "класичного" вигляду, розглянемо, який вигляд у цьому випадку матиме густина енергії (32):

$$f_{q \rightarrow 1} = \frac{T - T_c}{2} \eta^2 + \frac{1}{4} \frac{T_c}{3} \eta^4. \quad (33)$$

Тут враховано, що згідно з (17) коефіцієнт  $C \equiv 1$  при  $q \rightarrow 1$ .

Порівнюючи рівняння (33) з розкладом Ландау

$$f_L = \frac{A}{2} \eta^2 + \frac{B}{4} \eta^4,$$

можна записати, що в нашому випадку  $B = T_c/3$ ,  $A = \alpha(T - T_c)$ , де  $\alpha \equiv 1$ .

Не враховуючи доданок, пропорційний  $\ln 2$ , розглянемо густину вільної енергії, отриману із (29), на границі  $q \rightarrow 1$ :

$$f_{q \rightarrow 1} = \frac{T - T_c}{2} \eta^2 + \frac{1}{4} \frac{T_c}{3} \eta^4 - \eta h + O(h, \eta). \quad (34)$$

Оскільки доданок  $O(h, \eta)$  містить добутки  $h$  та  $\eta$  зі степенями, вищими за першу, то в наближенні слабких полів цими доданками можна знехтувати. У результаті рівняння (34) зводиться до стандартної форми Ландау для вільної енергії з урахуванням зовнішнього поля:

$$f_L = \frac{A}{2} \eta^2 + \frac{B}{4} \eta^4 - \eta h. \quad (35)$$

Таким чином, співвідношення (33) та (35) на границі  $q \rightarrow 1$  приводять до стандартної феноменологічної теорії Ландау.

## 5. Рівноважне значення параметра порядку

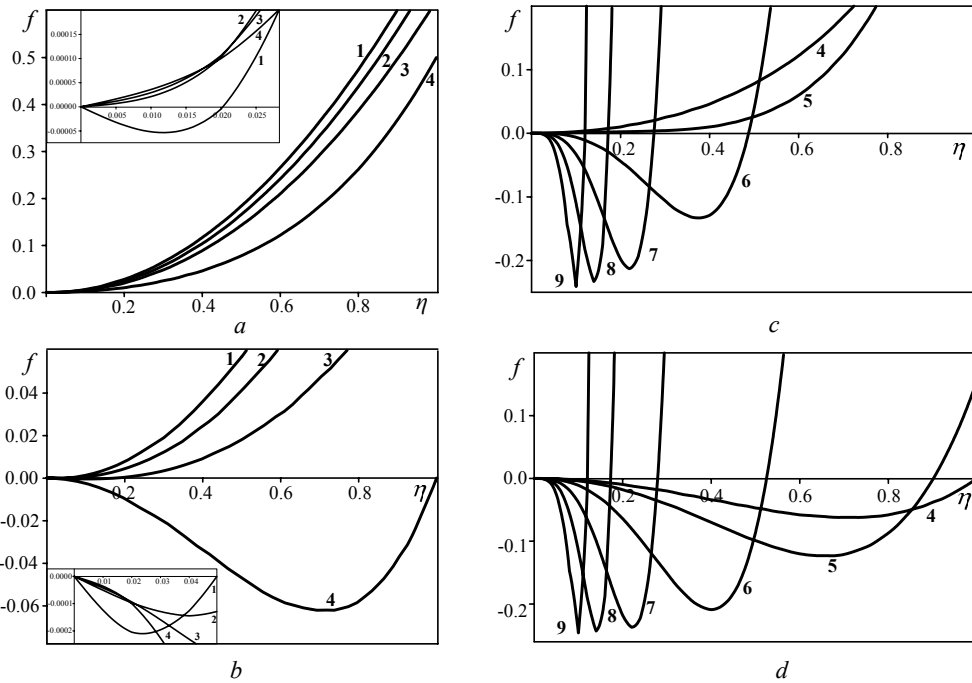
Згідно з умовою рівноваги  $\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$  для випадку нульового зовнішнього поля із (32) отримаємо співвідношення

$$\eta \frac{T_c}{T} \left[ T - \beta C^2 T_c \eta^{2(\beta-1)} + \frac{\beta C^4 T_c^3}{3T^2} \eta^{2(2\beta-1)} \right] = 0. \quad (36)$$

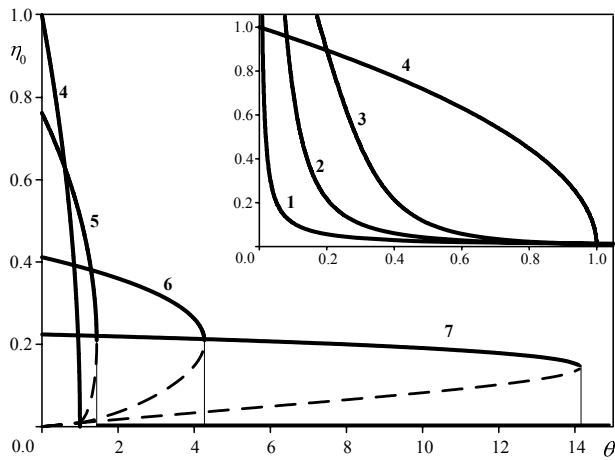
Очевидно, що перше стаціонарне рішення  $\eta_0 = 0$  відповідає неупорядкованому стану. Дорівнюючи нулю квадратну дужку, після поділу на критичну температуру  $T_c$  отримуємо неявний вигляд стаціонарного рішення, що відповідає упорядкованому стану:

$$\frac{T}{T_c} - \beta C^2 \eta_0^{2(\beta-1)} + \frac{\beta C^4}{3} \frac{T_c^2}{T^2} \eta_0^{2(2\beta-1)} = 0. \quad (37)$$

За аналогією з теорією Ландау розглянемо нашу систему поблизу критичної температури, тобто



**Рис. 2.** Залежність безрозмірної вільної енергії (40) від параметра порядку  $\eta$  для  $a = 0,001$ ,  $\mu = 0,5$ , поля (a), (c) відповідають  $\theta = 0,5$ , поля (b), (d) –  $\theta = 1,5$ ; для кривої 1 –  $q = 1/5$ ; 2 –  $q = 3/5$ ; 3 –  $q = 7/9$ ; 4 –  $q = 1$ ; 5 –  $q = 21/19$ ; 6 –  $q = 7/5$ ; 7 –  $q = 9/5$ ; 8 –  $q = 11/5$ ; 9 –  $q = 13/5$



**Рис. 3.** Залежність рівноважного значення параметра порядку  $\eta_0$  від безрозмірної температури  $\theta$  для  $a = 0,001$ ,  $\mu = 0,5$ . Крива 1 відповідає  $q = 1/5$ ; 2 –  $q = 3/5$ ; 3 –  $q = 7/9$ ; 4 –  $q = 1$ ; 5 –  $q = 21/19$ ; 6 –  $q = 7/5$ ; 7 –  $q = 9/5$

для випадку  $|T - T_c| \ll T_c$ . Крім того, введемо безрозмірну температуру

$$\theta = \frac{T}{T_c}. \quad (38)$$

504

У результаті можна отримати залежність  $\theta(\eta_0)$ :

$$\theta = \beta C^2 \eta_0^{2(\beta-1)} \left( 1 - \frac{C^2}{3} \eta_0^{2\beta} \right). \quad (39)$$

Враховуючи те, що для температури у ролі масштабу вимірювання ми вибрали критичну температуру  $T_c$ , природно буде далі вибрати масштаби і для інших змінних. Для параметра порядку можна скористатися загальновідомим співвідношенням теорії Ландау  $\eta_{0L} = (-\varepsilon)^{1/2}$ , що відображає залежність рівноважного значення параметра порядку від відносної температури  $\varepsilon \equiv \frac{T - T_c}{T_c}$ . Порівнюючи  $\eta_{0L}$  з  $\eta_0$  із (39) для випадку  $q \rightarrow 1$ , отримуємо масштаб вимірювання параметра порядку  $\eta_s \equiv \sqrt{3}$ . Для густини вільної енергії вибираємо масштаб  $f_s \equiv \eta_s^2 T_c$ , а для поля  $h_s \equiv T_c$  відповідно.

У результаті у безрозмірному випадку рівняння (32) і (39) набувають вигляду

$$f = \frac{\theta}{2} \eta^2 - \frac{3^{\beta-1} C^2}{2} \eta^{2\beta} + \frac{3^{2(\beta-1)} C^4}{4} \eta^{4\beta}, \quad (40)$$

$$\theta = \beta C^2 \eta_0^{2(\beta-1)} \left( 1 - \frac{C^2}{3} \eta_0^{2\beta} \right). \quad (41)$$

Відповідні залежності зображені на рис. 2 та 3 відповідно.

Як видно з рис. 2, чим більше параметр неекстенсивності відрізняється від критичного значення  $q = 1$ , тим для менших значень параметра порядку реалізується впорядкований стан. Крім того, як свідчать крива 1 (див. вставку на рис. 2, *a*) та криві 6–9 (див. рис. 2, *c*), навіть для температур, менших за критичну, можлива реалізація впорядкованого стану.

На рис. 3 відображена температурна залежність рівноважного значення параметра порядку для різних значень параметра  $q$ . При цьому для  $q < 1$  змінюється характер залежності (порівн. криві 1–3 з кривою 4 на рис. 3). Слід відзначити також, що для кривих 2, 3 максимально можливе значення параметра порядку реалізується за температури порядку 0,1–0,2  $T_c$ , але цей результат можна пояснити тим, що залежність (32) була отримана за умови наближення  $|T - T_c| \ll T_c$ . Аналізуючи криві 5–7 на рис. 3, можна зробити висновок, що рівноважне значення параметра порядку зазнає стрибка, тобто фазовий перехід для неекстенсивних систем може реалізуватися за механізмом фазового переходу першого роду (останнє може бути перевірено лише експериментально), або значення параметра  $q > 1$  для такого випадку не реалізуються.

## 6. Висновки

Останнім часом багато теоретиків під час дослідження складних систем все частіше звертаються до узагальнення статистики Больцмана–Гіббса за допомогою підходу Цалліса. Завдяки цьому узагальненню стало можливим описання багатьох явищ та ефектів, що спостерігалися раніше, але не знайшли теоретичного відображення.

У даній роботі підхід Цалліса було застосовано до гамільтоніана Ізінга та до статистичної суми, що описує мікроскопічну систему із набору спінових змінних. У результаті в рамках наближення середнього поля із мікроскопічної картини можна отримати феноменологічний підхід, який характеризує перехід парамагнетик–ферромагнетик для неекстенсивних систем.

Дана робота була виконана за участю Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України в рамках держбюджетної теми № 0112U001380.

1. C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics – Approaching a Complex World* (Springer, New York, 2009).
2. A. Taruya and M. Sakagami, *Physica A* **307**, 185 (2002).
3. A. Lavagno, G. Kaniadakis, M. Rego-Monteiro et al., *Astrophys. Lett. & Comm.* **35**, 449 (1998).
4. W. Alberico, A. Lavagno, and P. Quarati, *Eur. Phys. J. C* **12**, 499 (1999).
5. M. Coraddu, G. Kaniadakis et al., *Braz. J. Phys.* **29**, 153 (1999).
6. G. Kaniadakis, A. Lavagno, and P. Quarati, *Phys. Lett. B* **369**, 308 (1996).
7. A. Lavagno and P. Quarati, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **87**, 209 (2000).
8. F. Buyukkilic, I. Sokmen, and D. Demirhan, *Chaos, Solitons and Fractals* **13**, 749 (2002).
9. S. Martinez, F. Pennini et al., *Physica A* **295**, 224 (2001).
10. S. Martinez, F. Pennini, A. Plastino, and C. Tessone, *Physica A* **309**, 85 (2002).
11. C. Tsallis, J.C. Anjos, and E.P. Borges, *Phys. Lett. A* **310**, 372 (2003).
12. H. Uys, H.G. Miller, and F.C. Khanna, *Phys. Lett. A* **289**, 264 (2001).
13. *Salasnich Int. J., Mod. Phys. B* **14**, 405 (2000).
14. L. Borland and J.G. Menchero, *Braz. J. Phys.* **29**, 169 (1999).
15. N. Arimitsu and T. Arimitsu, *Europhys. Lett.* **60**, 60 (2002).
16. E.K. Lenzi, C. Anteneodo, and L. Borland, *Phys. Rev. E* **63**, 051109 (2001).
17. F.A. Tamarit, S.A. Cannas, and C. Tsallis, *Eur. Phys. J. B* **1**, 545 (1998).
18. A.B. Adiba, A.A. Moreirab, J.S. Andrade Jr. et al., *Physica A* **322**, 276 (2003).
19. S. Abe, *Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications*, ed. by Okamoto Y (Springer, Berlin, 2001).
20. C. Tsallis, R.S. Mendes, and A.R. Plastino, *Physica A* **261**, 534 (1998).
21. E.P. Borges, *Physica A* **340**, 95 (2004).
22. H. Suyari, e-print arXiv:cond-mat/0401541(2004).
23. R. Brout, *Phase Transitions* (University of Brussel, New York–Amsterdam, 1965).
24. A.I. Olemskoi and D.O. Kharchenko, *Physica A* **293**, 178 (2001).

Одержано 23.06.12



О.В. Ющенко, А.Ю. Бадалян

МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ  
ОПИСАНИЕ НЕЭКСТЕНСИВНЫХ  
СИСТЕМ В РАМКАХ МОДЕЛИ ИЗИНГА

Резюме

Деформированный гамильтониан Изинга для описания поведения неэкстенсивных систем был представлен путем замены спиновой переменной  $s_i$  на деформированную  $s_i^q$ . В рамках теории среднего поля был исследован фазовый переход парамагнетик–ферромагнетик для деформированной статсуммы. В приближении Ландау было проанализировано влияние параметра неэкстенсивности  $q$  на плотность свободной энергии и стационарное значение параметра порядка.

O.V. Yushchenko, A.Yu. Badalyan

MICROSCOPIC DESCRIPTION  
OF NONEXTENSIVE SYSTEMS  
IN THE FRAMEWORK OF THE ISING MODEL

Summary

To describe the behavior of nonextensive systems, the deformed Ising Hamiltonian is introduced by substituting the spin variable  $s_i$  by the deformed one  $s_i^q$ . In the framework of mean-field theory, the phase transition paramagnet–ferromagnet is investigated for the deformed partition function. The influence of the non-extensive parameter  $q$  on the free-energy density and the steady-state value of order parameter is studied in the Landau approximation.

Ющенко О.В. Мікроскопічний опис неекстенсивних систем у рамках моделі Ізінга [Текст] /  
О.В. Ющенко, А.Ю. Бадалян // Український фізичний журнал. — 2013. — Т.58 (№5). — с.498-506.