ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 174, № 3
март, 2013

 А. И. Олемской[*†], **О. В. Ющенко[*]**, **А. Ю. Бадалян[*]**

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ НЕАДДИТИВНОЙ СИСТЕМЫ

На основе квантово-полевых методов развита статистическая теория сложных систем, термодинамические потенциалы которых не обладают свойством аддитивности. В рамках метода Мартина–Сиггиа–Роуза найден эффективный лагранжиан системы, исходя из которого определены уравнения эволюции наиболее вероятных значений параметра порядка и амплитуды его флуктуаций. Показано, что деформация статистического распределения не изменяет эти уравнения, тогда как вероятность реализации различных фазовых траекторий существенно зависит от параметра неаддитивности. Найден производящий функционал неаддитивной системы и установлена его связь с корреляторами, введена пара аддитивных производящих функционалов, разложение которых дает набор многоточечных функций Грина и их собственно-энергетических частей. Найдены уравнения для производящего функционала систем, обладающих внутренней симметрией и связями. В рамках гармонического приближения определены статистическая сумма и моменты параметра порядка в зависимости от параметра неаддитивности. Развита теория возмущений, использование которой позволяет найти поправки произвольного порядка к указанным величинам.

Ключевые слова: параметр неаддитивности, производящий функционал, статистическая сумма.

DOI: 10.4213/tmf8408

1. ВВЕДЕНИЕ

Статистическая физика основывается, как известно, на предположении о перемешивании фазового пространства [1], [2]. Согласно этому предположению в ходе эволюции выделенный объем быстро сжимается по одним направлениям и расширяется по другим, приобретая с течением времени настолько разветвленную форму, что его точки можно найти в любой конечной части фазового пространства. Будучи дополненной предположением о бесконечном числе степеней свободы, гипотеза перемешивания приводит к распределению Гиббса, из которого следует аддитивность термодинамических потенциалов. При этом выполняются следующие условия [3]:

[*]Сумский государственный университет, Сумы, Украина

[†]Институт прикладной физики НАН Украины, Сумы, Украина.
E-mail: yushchenko@phe.sumdu.edu.ua

• кинетическое – перемешивание протекает экспоненциально быстро (это обеспечивает хорошо развитую хаотическую структуру и требует положительности наибольшего из показателей Ляпунова);

• динамическое – все силы, включая те, что обеспечивают микроскопическую память, являются короткодействующими (в результате стохастический процесс имеет марковский характер);

• геометрическое – фазовое пространство обладает обычными свойствами непрерывности, гладкости, евклидовости и т. п.

В последнее время обнаружено множество систем, проявляющих неаддитивное поведение. К ним относятся ферромагнетики, спиновые стекла, двумерная электронная плазма в турбулентном режиме, системы с аномальной диффузией Леви, гранулированные системы, твердые тела, подвергнутые ионной бомбардировке, гравитационные системы, солнечные нейтрино, черные дыры, элементарные частицы, сталкивающиеся с высокой энергией, квантовые системы, проявляющие эффекты запутывания, и многие другие [3]. В таких системах экспоненциально быстрое перемешивание приобретает степенной характер, в результате чего происходит только слабая хаотизация фазового пространства. Кроме того, этим системам присущи эффекты дальнодействия, немарковское поведение, мультифрактальные граничные или патологические начальные условия, некоторые специальные механизмы диссипации и т. д.

С формальной точки зрения теория неаддитивных систем основывается на деформации логарифмической и экспоненциальной функций, которая модифицирует энтропию Больцмана–Гиббса таким образом, что функция распределения приобретает либо дальнодействующие степенны́е асимптотики [4]–[11], либо обрезается на конечных значениях энергии [12], [13]. Характерной особенностью неаддитивных систем является самоподобие их фазового пространства, объем которого остается неизменным при деформации, комбинирующей сжатие (растяжение) координаты и растяжение (сжатие) импульса [14].

С другой стороны, деформация перестановочных соотношений в квантовой теории позволила развить нетривиальные физические представления таких объектов, как черные дыры и анионные сверхпроводники [15]. Эти представления основаны на формализме квантовых групп, который сводится к так называемому q-исчислению [16]–[18], впервые введенному Хейне и Джексоном [19], [20] при изучении базово-деформированных гипергеометрических рядов [21], [22]. С математической точки зрения q-исчисление представляет собой наиболее удобный формализм для описания мультифрактальных множеств, которые образуются в результате многократного действия оператора дилатации, определяющего производную Джексона [14]. Более того, оказывается [6], [23], что для q-деформированных бозонов и фермионов естественное обобщение термостатистики основано на q-исчислении, а стационарное решение деформированного уравнения Фоккера–Планка представляет собой q-аналог экспоненциальной функции в представлении базово-деформированных гипергеометрических рядов [12], [13]. Такого рода системы обнаруживают дискретную масштабную инвариантность [24], описание которой [25] достигается использованием производной и интеграла Джексона (например, свободная энергия спиновых систем, определенных на иерархической решетке, сводится к однородной функции, представляющей q-интеграл [26]).

Следует отметить еще один пример приложения статистической теории неаддитивных систем – к описанию объектов конечного размера, важность исследования которых возросла с развитием нанотехнологий. Действительно, при конечном числе частиц N параметр неаддитивности принимает значение [27]

$$q = \left(1 - \frac{\alpha}{d} N^{-1}\right)^{-1}, \tag{1}$$

где α – показатель подобия координатной зависимости гамильтониана (например, для гармонического осциллятора $\alpha = 2$), d – размерность системы. Короткодействующие потенциалы ($\alpha > 0$) характеризуются значениями $q \geqslant 1$, а дальнодействующим ($-d \leqslant \alpha \leqslant 0$) отвечает величина $q \leqslant 1$ (при $\alpha < -d$ применима статистика Больцмана–Гиббса [28]). В термодинамическом пределе $N \to \infty$ получаем значение $q = 1$, отвечающее обычной статистике, а со спаданием числа частиц N разность $|q-1|$ возрастает, достигая максимальной величины $\alpha/(d-\alpha)$ при $\alpha > 0$ и $|\alpha|/(d+|\alpha|)$ при $\alpha < 0$.

Настоящая работа посвящена рассмотрению неаддитивных статистических систем в рамках полевого формализма, который, основываясь на использовании методов квантовой теории поля, представляет собой один из наиболее мощных инструментов исследования [29], [30]. Формальной основой стандартной полевой схемы является, как известно, производящий функционал, который представляет собой обобщенное преобразование Фурье–Лапласа, дающее переход от распределения флуктуирующего параметра порядка (амплитуды гидродинамической моды) к вспомогательному полю [31]. Благодаря экспоненциальному характеру этого преобразования определение корреляторов параметра порядка достигается дифференцированием производящего функционала по указанному полю.

Представленная схема становится несостоятельной при переходе к неаддитивным статистическим системам, поскольку экспонента Больцмана–Гиббса принимает биномиальную форму Цаллиса [3]. В результате построение генерирующего функционала требует деформации преобразования Фурье–Лапласа, а вместо обычного дифференцирования следует использовать оператор, относительно которого инвариантно ядро деформированного преобразования [32]. Так, например, при построении статистической теории самоподобно распределенных полей роль базисной функции играет степенна́я зависимость, для которой производящий функционал сводится к пребразованию Меллина статистического функционала, а оператор дифференцирования представляет собой производную Джексона [2], [33].

Работа построена следующим образом. В разделе 2 приводятся основные соотношения теории Мартина–Сиггиа–Роуза [34], использование которой позволяет определить эффективный лагранжиан системы исходя из стохастического уравнения движения и найти пару уравнений для сопряженных координаты и импульса, роль которых играют наиболее вероятные значения амплитуд гидродинамической моды и ее флуктуаций. Раздел 3 посвящен обобщению полевой схемы для неаддитивных систем. Показано, что деформация статистического распределения не изменяет уравнения эволюции наиболее вероятных значений параметра порядка и амплитуды его флуктуаций, тогда как вероятность реализации различных фазовых траекторий существенно зависит от параметра неаддитивности. В разделе 4 найден производящий функционал неаддитивной системы и установлена его связь с корреляторами; введена пара аддитивных производящих функционалов, разложение которых дает набор многоточечных функций Грина и их собственно-энергетических частей; найдены уравнения для производящего функционала систем, обладающих внутренней симметрией и связями. Центральное место занимает раздел 5, посвященный описанию термодинамических свойств неаддитивной системы: сначала используется простейшее гармоническое приближение, в рамках которого определены явные выражения для одноузельной статистической суммы и моментов параметра порядка в зависимости от параметра неаддитивности; затем развита теория возмущений, использование которой позволяет найти поправки произвольного порядка к указанным величинам. В разделе 6 содержится обсуждение полученных результатов. И наконец, приложение содержит основные сведения из q-деформированной алгебры [35], лежащей в основе неаддитивной статистики.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЙ СХЕМЫ

Представим поведение стохастической системы пространственно-временно́й зависимостью $x(\mathbf{r}, t)$ амплитуды гидродинамической моды, среднее значение которой сводится к параметру порядка. Для описания этой зависимости будем исходить из уравнения Ланжевена [36]

$$\dot{x}(\mathbf{r}, t) - D\nabla^2 x = -\gamma \frac{\partial F}{\partial x} + \zeta(\mathbf{r}, t). \tag{2}$$

Здесь точка означает временну́ю производную, $\nabla \equiv \partial/\partial\mathbf{r}$, D – параметр неоднородности, γ – кинетический коэффициент, $F(x)$ – свободная энергия, $\zeta(\mathbf{r}, t)$ – стохастическая добавка, определенная условиями белого шума:

$$\langle\zeta(\mathbf{r}, t)\rangle = 0, \qquad \langle\zeta(\mathbf{r}, t)\zeta(\mathbf{0}, 0)\rangle = \gamma T\delta(\mathbf{r})\delta(t), \tag{3}$$

где угловые скобки означают усреднение по гауссову распределению величины ζ, T – температура, задающая интенсивность шума. Далее удобно ввести единицы измерения $(\gamma T)^2/D^3$, $\gamma T/D$, $D^3/\gamma^3 T^2$, $D^3/(\gamma T)^2$ для времени t, координаты $\mathbf{r}$, плотности термодинамического потенциала F и стохастической переменной ζ соответственно (при этом подразумевается, что амплитуда гидродинамической моды x изначально принята безразмерной). В результате уравнение движения (2) принимает канонический вид

$$\dot{x}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta x} + \zeta(\mathbf{r}, t), \tag{4}$$

где использована краткая форма записи вариационной производной:

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta x} \equiv \frac{\delta\mathcal{F}\{x(\mathbf{r}, t)\}}{\delta x(\mathbf{r}, t)} = \frac{\partial F(x)}{\partial x} - \nabla^2 x, \qquad \mathcal{F}\{x\} \equiv \int \left[F(x) + \frac{1}{2}(\nabla x)^2\right] d\mathbf{r}. \tag{5}$$

Кроме того, в формуле (3) пропадает коэффициент γT, а распределение переменной ζ приобретает стандартную гауссову форму

$$P_0\{\zeta\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-1/2)\int \zeta^2(\mathbf{r}, t)\, d\mathbf{r}\, dt}. \tag{6}$$

Статистическая теория поля основывается на методе производящего функционала [31], [34]:

$$\mathcal{Z}\{u(\mathbf{r}, t)\} = \int Z\{x\} e^{\int ux\, d\mathbf{r}\, dt} \{\delta x\}, \qquad \{\delta x\} \equiv \prod_{\mathbf{r}, t} \delta x(\mathbf{r}, t), \tag{7}$$

который представляет собой функциональное преобразование Лапласа обобщенной статистической суммы

$$\mathcal{Z}\{x(\mathbf{r},t)\} \equiv \left\langle \prod_{(\mathbf{r},t)} \delta\left\{\dot{x} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta x} - \zeta\right\} \det\left|\frac{\delta\zeta}{\delta x}\right|\right\rangle. \tag{8}$$

В ее определении δ-функционал учитывает уравнение Ланжевена (4), а детерминант определяет переход от континуального интегрирования по ζ к x.

Варьирование производящего функционала (7) по пробному полю $u(\mathbf{r},t)$ позволяет найти корреляторы наблюдаемой величины $x(\mathbf{r},t)$:

$$\langle x(\mathbf{r}_1,t_1)\dots x(\mathbf{r}_n,t_n)\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}\{u=0\}}[\mathcal{D}_{u(\mathbf{r}_1,t_1)}\dots\mathcal{D}_{u(\mathbf{r}_n,t_n)}]\mathcal{Z}\{u(\mathbf{r},t)\}\bigg|_{u(\mathbf{r},t)=0}, \tag{9}$$

где $\mathcal{Z}\{0\} \equiv \mathcal{Z}\{u(\mathbf{r},t)=0\}$, $\mathcal{D}_{u(\mathbf{r},t)} \equiv \delta/\delta u(\mathbf{r},t)$. С учетом тождественности N частиц, составляющих систему, статистическая сумма определяется выражением

$$Z_N = \frac{1}{N!}\mathcal{Z}\{0\} = \frac{1}{N!}\int \mathcal{Z}\{x(\mathbf{r},t)\}\{\delta x\}. \tag{10}$$

Кроме корреляторов наблюдаемых величин, использование производящего функционала (7) позволяет проследить за эволюцией наиболее вероятных значений стохастической переменной x и ее дисперсии. С этой целью представим δ-функционал в выражении (8) функциональным разложением Лапласа

$$\delta\{x(\mathbf{r},t)\} = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-\int px\,d\mathbf{r}\,dt}\{\delta p\} \tag{11}$$

по полю духов $p(\mathbf{r},t)$, физический смысл которого будет установлен ниже. Тогда после усреднения по распределению (6) статистический функционал (8) принимает стандартный вид

$$\mathcal{Z}\{x(\mathbf{r},t)\} = \int e^{-S\{x(\mathbf{r},t),p(\mathbf{r},t)\}}\{\delta p\}, \tag{12}$$

где эффективное действие $S = \int \mathcal{L}\,dt$ определяется лагранжианом

$$\mathcal{L} = p\left(\dot{x} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta x}\right) - \frac{p^2}{2}, \quad \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta x} \equiv -f - \nabla^2 x, \quad f \equiv -\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{13}$$

Далее следует использовать уравнение Эйлера

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}} - \nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\mathbf{x}} + \nabla^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla^2\mathbf{x}} = \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\dot{\mathbf{x}}}, \qquad \mathbf{x} \equiv \{x,p\} \tag{14}$$

с диссипативной функцией $\mathcal{R} = \dot{x}^2/2$ [37]. В результате получаем уравнения для наиболее вероятных значений статистических полей $x(\mathbf{r},t)$, $p(\mathbf{r},t)$:

$$\dot{x} - \nabla^2 x = f + p, \tag{15}$$

$$\dot{p} + \dot{x} + \nabla^2 p = -f'p, \tag{16}$$

где штрих означает дифференцирование по x. Сравнение уравнения (15), записанного в виде $\dot{x} = -\delta\mathcal{F}/\delta x + p$, с выражением (4) показывает, что поле $p(\mathbf{r},t)$ представляет наиболее вероятные значения амплитуды флуктуаций $\zeta(\mathbf{r},t)$ сопряженной силы f.

3. ЭВОЛЮЦИЯ НЕАДДИТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Сравнение деформированной δ-функции (см. формулу (П.10) в приложении) со стандартным функциональным представлением (11) показывает, что с точностью до замены числа k на комплексное поле $ip(\mathbf{r},t)$ эти выражения имеют одинаковую форму. Благодаря этому статистический функционал

$$\mathcal{Z}_q\{x(\mathbf{r},t)\} = \frac{2\pi}{2-q}\int e_q^{-S_q\{x(\mathbf{r},t),p(\mathbf{r},t)\}}\{\delta p\} \tag{17}$$

отличается от стандартного представления (12) несущественным множителем и заменой обычной экспоненты на деформированную (П.2) (см. приложение). В результате деформация статистической системы не влияет на форму лагранжиана (13). Поэтому варьирование функционала (17) приводит к тем же уравнениям эволюции (15), (16), что и для аддитивной статистической системы.

Таким образом, деформация фазового пространства не изменяет форму траекторий, по которым протекает эволюция неаддитивной системы. Определим плотность свободной энергии разложением Ландау

$$F = \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \tag{18}$$

с безразмерной температурой ε, отсчитанной от точки превращения; кроме того, градиентные слагаемые $\nabla^2 x$ и $\nabla^2 p$ аппроксимируем линейными функциями x/ξ^2, p/λ^2 с масштабами ξ и λ. В результате система (15), (16) принимает вид

$$\dot{x} = -[(\varepsilon - \xi^{-2}) + x^2]x + p, \tag{19}$$

$$\dot{p} + \dot{x} = [(\varepsilon - \lambda^{-2}) + 3x^2]p. \tag{20}$$

Поскольку уравнения (19), (20) симметричны относительно одновременного обращения знаков переменных x, p, то отвечающие им фазовые портреты (рис. 1) имеют центрально-симметричную форму.

Из рис. 1а видно, что при сильной неоднородности флуктуаций выше точки перехода, когда выполняются условия $0 < \varepsilon < \lambda^{-2}$, реализуются устойчивый узел O, расположенный в начале координат $x_0 = 0$, $p_0 = 0$, и пара центрально-симметричных седел $S_{1,2}$. Очевидно, такая картина отвечает однородному неупорядоченному состоянию. С ослаблением неоднородности в распределении флуктуаций до такой степени, что нарушается неравенство $\varepsilon < \lambda^{-2}$, и усилением неоднородности распределения параметра порядка, обеспечивающим условие $\varepsilon < \xi^{-2}$ (рис. 1б), седла $S_\pm$ симметрично смещаются на ось абсцисс, а узел O трансформируется в фокус. Уместно предположить, что такая ситуация представляет эволюцию неупорядоченной системы через стадию гетерофазных флуктуаций. И, наконец, с размытием пространственных распределений амплитуды флуктуаций и параметра порядка, когда одновременно выполняются неравенства $\varepsilon > \lambda^{-2}$, $\varepsilon > \xi^{-2}$, происходит обратная бифуркация пары седел $S_\pm$ и узла O в седло S, расположенное в начале координат. Согласно рис. 1в такой случай не отвечает какому-либо стационарному состоянию.

Переход в упорядоченную фазу $\varepsilon < 0$ (рис. 1г–1е) обеспечивает выполнение условий $\varepsilon < \lambda^{-2}$, $\varepsilon < \xi^{-2}$, при которых возможные конфигурации фазовых портретов определяются наличием пяти особых точек – седла S, расположенного в начале координат, центрально-симметричных устойчивых узлов/фокусов $N_{1,2}/F_{1,2}$ и пары седел $S_\pm$, симметрично расположенных на оси абсцисс. Согласно рис. 1г размытие

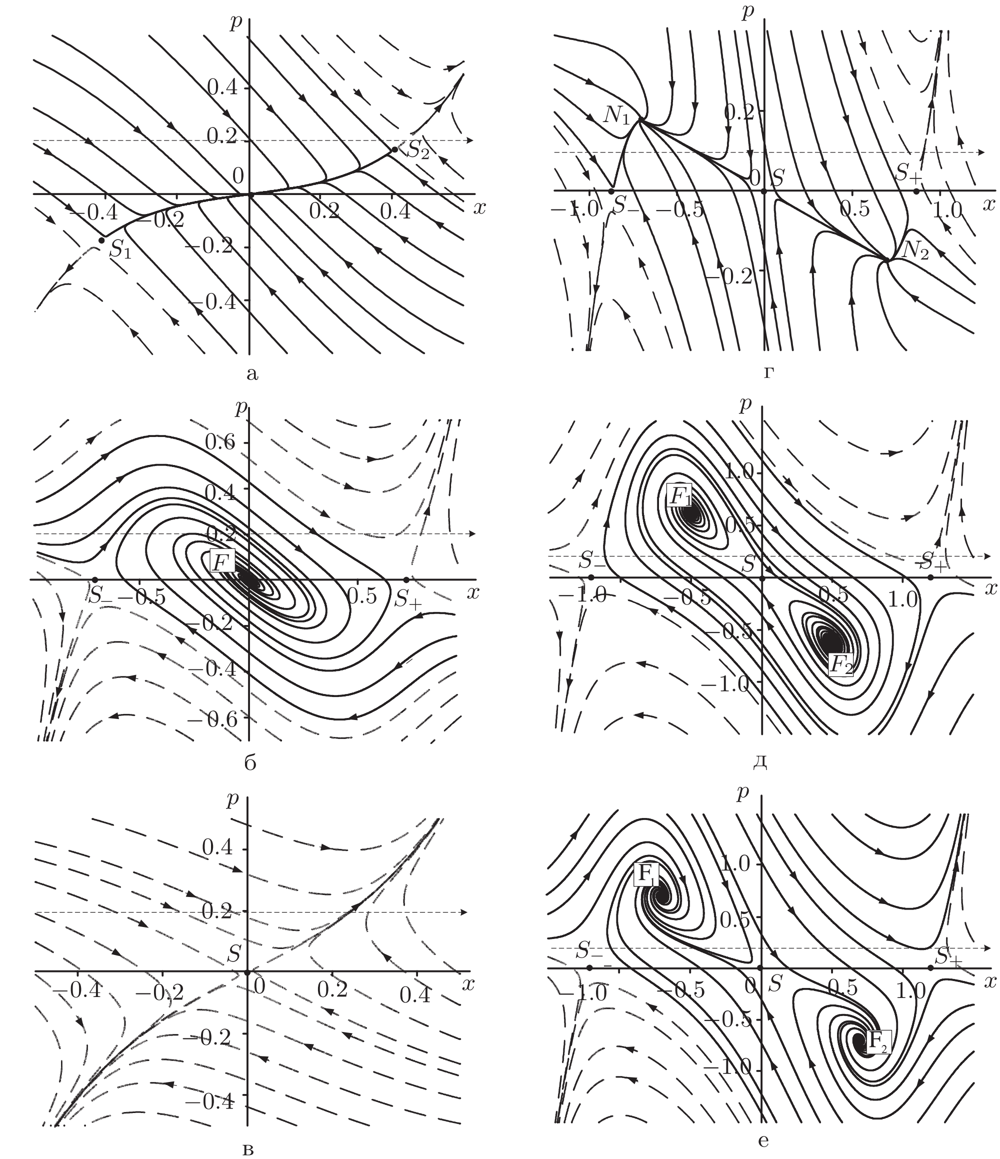

Рис. 1. Фазовые портреты: выше точки перехода ($\varepsilon = 0.5$) при $\xi = 2$, $\lambda = 1$ (а), $\xi = 1$, $\lambda = 2$ (б), $\xi = 10$, $\lambda = 10$ (в) и ниже точки перехода ($\varepsilon = -0.5$) при $\xi = 2$, $\lambda = 1$ (г), $\xi = 1$, $\lambda = 2$ (д), $\xi = 1$, $\lambda = 1$ (е). Штриховыми линиями указаны траектории, реализуемые с малой вероятностью, пунктирные лучи отвечают постоянной амплитуде флуктуаций $p = 0.2$.

неоднородности параметра порядка за счет роста масштаба ξ приводит к ослаблению колебательного режима вблизи стационарных состояний $N_{1,2}/F_{1,2}$, а размытие неоднородности распределения флуктуаций за счет увеличения масштаба λ (рис. 1д) усиливает его. В явном виде влияние масштабов ξ, λ определяется показателями Ляпунова

$$\lambda_{1,2} = -(\alpha+\beta) \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha - 6x_0 p_0},$$
$$\alpha \equiv (\varepsilon - \xi^{-2}) + 3x_0^2, \qquad \beta \equiv \frac{1}{2}(1 + \xi^{-2} + \lambda^{-2}), \tag{21}$$

где x_0, p_0 – координаты особых точек.

Как уже указывалось, деформация неаддитивной статистической системы не изменяет вид фазовых портретов. Покажем, что она существенно сказывается на вероятности реализации фазовых траекторий

$$P_q\{p(x)\} = Z_q^{-1} e_q^{-S\{p(x)\}}. \tag{22}$$

Здесь эффективное действие $S\{p(x)\} = S_{\min}\{x(\mathbf{r},t), p(\mathbf{r},t)\}$ принимает минимальные значения, отвечающие оптимальным фазовым траекториям эволюции системы, а статистическая сумма определяется условием нормировки

$$Z_q = \int e_q^{-S\{p(x)\}} \{\delta p\}, \qquad \{\delta p\} \equiv \prod_x \delta p(x). \tag{23}$$

Для представления функциональной зависимости (22) в графическом виде будем проводить перебор фазовых траекторий вдоль лучей, показанных на рис. 1 при постоянной амплитуде флуктуаций $p = 0.2$. В результате получаем распределения вероятностей реализации этих траекторий, показанные на рис. 2. Из них видно, что указанные вероятности определяются положениями сепаратрис на фазовых портретах (на рис. 1 траектории, отвечающие конечным вероятностям, выделены сплошными линиями). Обращает на себя внимание тот факт, что в однородном неупорядоченном состоянии (рис. 1а) с конечной вероятностью реализуются траектории, ограниченные только большими значениями параметра порядка. С другой стороны, гетерофазные флуктуации неупорядоченного состояния (рис. 1б) и изменения параметра порядка во всех режимах упорядоченного состояния (рис. 1г–1е) ограничены как сверху, так и снизу. Сравнение рис. 1г с рис. 1д, 1е показывает, что трансформация притягивающих узлов в фокусы приводит к более рельефному изменению вероятности реализации различных траекторий. С другой стороны, из рис. 3 видно, что при значительном росте параметра неаддитивности все разрешенные траектории становятся практически равновероятными.

4. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Рассмотрим неаддитивный статистический ансамбль, состоящий из N частиц, распределенных по состояниям $\mathbf{q} = \{\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i\}$ в фазовом пространстве с координатами $\mathbf{r}_i$ и импульсами $\mathbf{p}_i$, от которых зависит гамильтониан $H = H(\mathbf{q})$. При пространственно-временной зависимости параметра порядка $x = x(\mathbf{r},t)$ статистический функционал

$$\mathcal{Z}_q\{x\} = \int e_q^{-\beta H(\mathbf{q})} \delta[x - x(\mathbf{q})]\, d\mathbf{q}, \tag{24}$$

зависящий от обратной температуры $\beta \equiv T^{-1}$, связан с эффективным действием $S_q\{x\}$ определением

$$\mathcal{Z}_q\{x\} := e_q^{-S_q\{x\}}. \tag{25}$$

В согласии с деформированным преобразованием Фурье (П.8) производящий функционал представляется обобщенным преобразованием Лапласа:

$$\mathcal{Z}_q\{u(\mathbf{r},t)\} := \int \mathcal{Z}_q\{x\} \otimes_q e_q^{u\cdot x}\{\delta x\} = \int e_q^{u\cdot x - S_q\{x\}}\{\delta x\}, \tag{26}$$

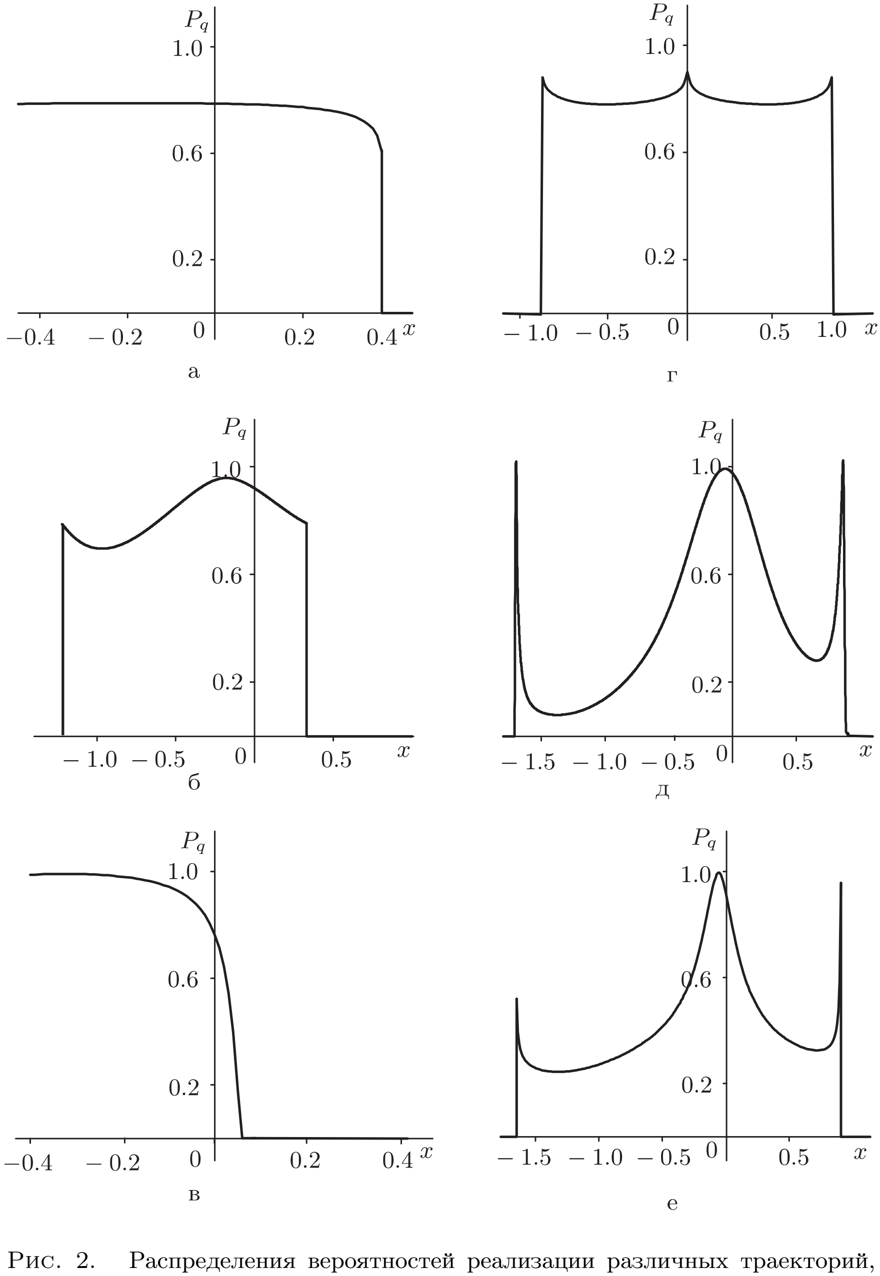

Рис. 2. Распределения вероятностей реализации различных траекторий, отвечающие изменениям параметра порядка x вдоль лучей, соответствующих постоянной амплитуде флуктуаций $p = 0.2$ при параметре неаддитивности $q = 0.4$.

где обозначено $u \cdot x \equiv \int ux\,d\mathbf{r}\,dt$. Поскольку экспонента Цаллиса e_q^x сохраняет свою форму под действием оператора $[1 + (1-q)x]_+ d/dx$, то далее удобно ввести q-вариационную производную $\mathcal{D}^q_{x(\mathbf{r},t)}$, действие которой на произвольный функцио-

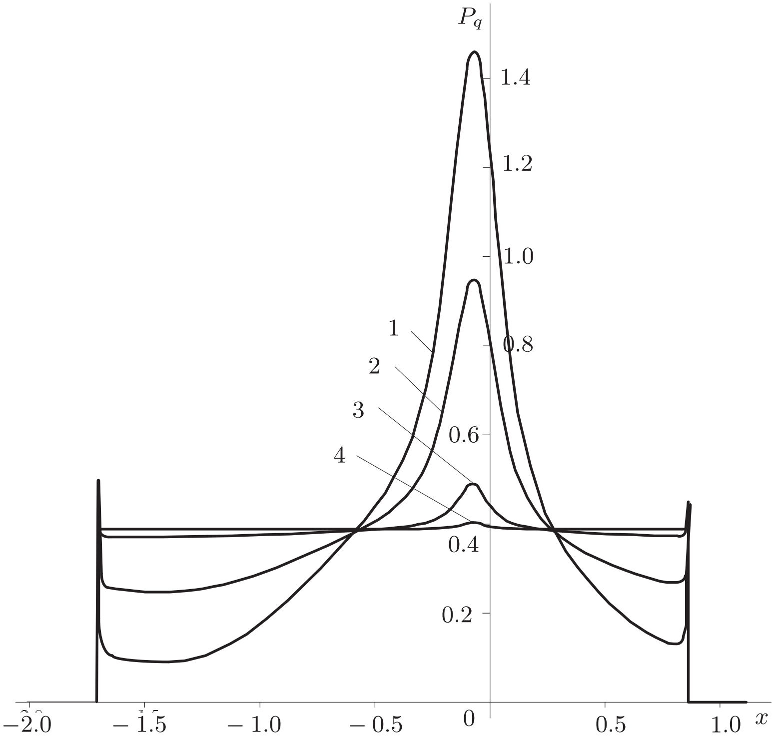

Рис. 3. Распределения вероятностей реализации фазовых траекторий на рис. 1д при параметрах неаддитивности $q = 0.4, 1.0, 10, 100$ (кривые 1–4 соответственно).

нал $f = f\{x(\mathbf{r},t)\}$ задается равенством

$$\mathcal{D}^q_{x(\mathbf{r},t)} f := [e_q^f]^{1-q} \frac{\delta f}{\delta x(\mathbf{r},t)}. \tag{27}$$

Тогда n-кратное варьирование производящего функционала (26) дает n-точечный коррелятор

$$\langle x(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots x(\mathbf{r}_n,t_n)\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}_q\{u\}|_{u=0}} \times \\ \times [\mathcal{D}^q_{u(\mathbf{r}_1,t_1)}\ldots\mathcal{D}^q_{u(\mathbf{r}_n,t_n)}]\mathcal{Z}_q\{u(\mathbf{r},t)\}\big|_{u(\mathbf{r}_1,t_1),\ldots,u(\mathbf{r}_n,t_n)=0}, \tag{28}$$

имеющий ту же структуру, что и в стандартной теории поля [31]. С учетом тождественности N частиц, составляющих систему, ее статистическая сумма определяется выражениями

$$Z_{Nq} := \frac{1}{N!}\mathcal{Z}_q\{u=0\} = \frac{1}{N!}\int e_q^{-S_q\{x\}}\{\delta x\}. \tag{29}$$

Как и в обычной полевой схеме [31], неудобство производящего функционала (26) состоит в его неаддитивности [38]. Для устранения этого недостатка введем функционал

$$\mathcal{G}_q\{u\} := \ln_q(\mathcal{Z}_q\{u\}), \tag{30}$$

представляющий собой деформированный логарифм (П.3) (см. приложение) выражения (26). Если в функциональной зависимости (30) удобно перейти от вспомогательного поля $u(\mathbf{r},t)$ к параметру порядка $x(\mathbf{r},t)$, то следует провести преобразование Лежандра

$$\Gamma_q\{x\} := u \cdot x - \mathcal{G}_q\{u\}, \tag{31}$$

приводящее к сопряженному функционалу $\Gamma_q = \Gamma_q\{x\}$. Пара функционалов $\mathcal{G}_q\{u\}$, $\Gamma_q\{x\}$ играет роль сопряженных потенциалов, вариация которых дает уравнения состояний

$$x(\mathbf{r},t) = \mathcal{D}_u^q \mathcal{G}_q\{u\} \quad \Leftrightarrow \quad u(\mathbf{r},t) = \mathcal{D}_x^q \Gamma_q\{x\}. \tag{32}$$

Первое из них представляет собой обобщение термодинамического определения параметра порядка, второе следует из преобразования Лежандра (31) после его вариации по параметру порядка. Являясь аналитическими функционалами, потенциалы $\mathcal{G}_q\{u\}$, $\Gamma_q\{x\}$ представляются следующими рядами:

$$\mathcal{G}_q\{u\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n]_q!} \sum_{1,\dots,n} \mathcal{G}^{(n)}_{1,\dots,n} u_1 \dots u_n, \tag{33}$$

$$\Gamma_q\{x\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n]_q!} \sum_{1,\dots,n} \Gamma^{(n)}_{i,\dots,n} \eta_1 \dots \eta_n, \qquad \eta_i \equiv x_i - \mathcal{G}_i^{(1)}. \tag{34}$$

Здесь $[n]_q!$ – факториалы q-деформированных чисел $[n]_q = [1+(1-q)(n-1)]_+^{-1} n = (e_q^n)^{-(1-q)} n$, индексы $i = 1,\dots,n$ означают координаты $\mathbf{r}_i$, t_i пространства-времени, ядра $\mathcal{G}^{(n)}_{1,\dots,n}$, $\Gamma^{(n)}_{1,\dots,n}$ сводятся к n-частичным функциям Грина и их неприводимым частям соответственно.

Подобно стандартной полевой схеме [31] производящий функционал (26) удовлетворяет некоторым формальным соотношениям. Первое из них отображает симметрию системы по отношению к вариации $\delta x_i = \epsilon f_i\{x\}$, заданной аналитическим функционалом $f_i = f_i\{x\}$ в пределе $\epsilon \to 0$. При варьировании последнее подынтегральное выражение в функционале (26) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & e_q^{-S\{x+\delta x\}+u(x+\delta x)} \simeq \\ & \simeq \left[(1+(1-q)(-S\{x\}+u\cdot x)) + (1-q)\left(-\frac{\partial S}{\partial x_i}+u_i\right)\delta x_i\right]_+^{1/(1-q)} = \\ & = e_q^{-S\{x\}+u\cdot x}\left[1+\frac{(1-q)(-\partial S/\partial x_i+u_i)}{1+(1-q)(-S\{x\}+u\cdot x)}\delta x_i\right]_+^{1/(1-q)} \simeq \\ & \simeq e_q^{-S\{x\}+u\cdot x}\left[1+\left(-\frac{\partial S}{\partial x_i}+u_i\right)\delta_q x_i\right]_+, \end{aligned} \tag{35}$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам и введен q-вириал (ср. с (27))

$$\delta_q x_i := [e_q^{-S\{x\}+u\cdot x}]^{q-1} \delta x_i. \tag{36}$$

С другой стороны, якобиан перехода от x к $x + \delta_q x$ дает множитель $1 + (\partial f_i/\partial_q x_i)\epsilon$, определенный оператором q-дифференцирования $(\partial f/\partial_q x) = (e_q^f)^{1-q}(\partial f/\partial x)$ типа (27). Собирая слагаемые, пропорциональные бесконечно малой величине ϵ, из свойства инвариантности производящего функционала (26) получаем

$$\left[f_i\{\mathcal{D}_u^q\}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\{\mathcal{D}_u^q\} - u_i\right) - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\{\mathcal{D}_u^q\}\right]\mathcal{Z}_q\{u\} = 0. \tag{37}$$

Здесь использовано первое уравнение состояний (32) для операторного представления

$$f_i\{x\}e_q^{-S\{x\}+u\cdot x} = f_i\{\mathcal{D}_u^q\}e_q^{-S\{x\}+u\cdot x}.$$

При $f_i\{x\} = \mathrm{const}$ выражение (37) принимает упрощенный вид, следующий непосредственно из производящего функционала (26) после его варьирования по полю x.

Второе из упомянутых соотношений позволяет учесть наличие произвольных связей $F_j\{x\} = 0$, $j = 1, 2, \ldots$, для искомого набора значений поля $x = x(\mathbf{r}, t)$. Учет этих связей достигается подстановкой δ-функционала $\delta_q\{F\}$ в подынтегральное выражение (26), что приводит к удлиненному производящему функционалу

$$\mathcal{Z}_q^{(F)}\{u, v\} := \int e_q^{-S\{x\}+u\cdot x+v\cdot F}\{\delta x\}\{\delta v\}. \tag{38}$$

Его варьирование по вспомогательному полю $v = v\{\mathbf{r}, t\}$ дает искомый результат

$$F_i\{\mathcal{D}_v^q\}\mathcal{Z}_q^{(F)}\{u, v\} = 0. \tag{39}$$

В сравнении со стандартной полевой схемой [31] главная особенность выражений (37), (39) состоит в том, что они содержат q-вариационную производную (27).

5. ТЕРМОДИНАМИКА НЕАДДИТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим сначала гармоническое приближение, в рамках которого эффективное действие $S_q^{(0)}\{x\} = \int \mathcal{L}_q^{(0)}(x(t))\,dt$ определяется суммой

$$\mathcal{L}_q^{(0)} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_q^{(0)}(x_i), \qquad \lambda_q^{(0)}(x) = \frac{x^2}{[2]_q\Delta^2}, \quad [2]_q \equiv \frac{2}{|2-q|}. \tag{40}$$

Здесь каждое слагаемое задается обратной кривизной Δ^2 и параметром неаддитивности q (ср. с работой [38]). С учетом правил (П.4), (П.5) производящий функционал (26) представляется деформированным произведением

$$\mathcal{Z}_q^{(0)}\{u\} = z_q^{(0)}(u_1) \otimes_q \cdots \otimes_q z_q^{(0)}(u_N) \tag{41}$$

одночастичных составляющих

$$z_q^{(0)}(u) = \int \exp_q\left[\int\left(ux - \frac{x^2}{[2]_q\Delta^2}\right)d\mathbf{r}\,dt\right]\delta x. \tag{42}$$

При нахождении статистической суммы $Z_{qN}^{(0)}$ следует учесть тождественность частиц, число перестановок которых равно q-факториалу (П.6) при $n = N$. В результате приходим к определению

$$Z_{qN}^{(0)} := \mathcal{Z}_q^{(0)}\{u = 0\} \oslash_q N!_q, \tag{43}$$

где q-деформированный факториал $N!_q$ числа $N \gg 1$ определяется формулой Стирлинга (П.7) (см. приложение), которой удобно придать вид[1)]

$$N!_q \simeq \exp_q\left[\frac{N}{|2-q|}\ln_q(N \oslash_q e_q)\right], \qquad q \neq 2. \tag{44}$$

[1)] Отметим, что при определении деформированного произведения в работе [39] упускалось условие положительности выражения, стоящего в квадратных скобках в формулах (П.4) (см. приложение). Поэтому для больших чисел $n \gg 1$ q-логарифм $\ln_q(n!_q)$ в формуле (П.7) может принимать отрицательные значения при $q > 2$. Во избежание этого следует брать разность $q-2$ по абсолютному значению.

Здесь $e_q \equiv |2-q|^{1/(1-q)}$ – q-деформированное основание натурального логарифма, принимающее обычное значение $e_1 \equiv e \simeq 2.718$ при $q=1$. Из формул (44), (П.7) (см. приложение) с использованием производящего функционала (41) находим

$$Z_{qN}^{(0)} = \underbrace{z_q^{(0)}(0) \otimes_q \cdots \otimes_q z_q^{(0)}(0)}_{N} \oslash_q \exp_q\left[\frac{N}{|2-q|}\ln_q(N \oslash_q e_q)\right], \tag{45}$$

где обозначено $z_q^{(0)}(0) \equiv z_q^{(0)}(u_i=0)$. Проводя q-логарифмирование, приводим равенство (45) к аддитивной форме $\ln_q(Z_{qN}^{(0)}) = N\ln_q(z_q^{(0)})$, где одночастичная статистическая сумма определяется выражением

$$z_q^{(0)} := \exp_q\left\{\ln_q[z_q^{(0)}(0)] - \frac{1}{|2-q|}\ln_q(N \oslash_q e_q)\right\}, \tag{46}$$

в котором величина $z_q^{(0)}(0)$ задается равенством (42).

Для вычисления удельной статистической суммы удобно ввести переменную

$$y = \frac{|(1-q)(2-q)|}{2\Delta^2}x^2, \tag{47}$$

переход к которой приводит к удвоению интеграла в формуле (42). В результате получаем выражение

$$z_q^{(0)} = \exp_q\left\{\ln_q\left[Q\Delta B\left(Q_0, \frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{|2-q|}\ln_q(N \oslash_q e_q)\right\}, \tag{48}$$

где бета-функция определена стандартным образом [40], а функции параметра неаддитивности $Q = Q(q)$ и $Q_0 = Q_0(q)$ заданы равенствами

$$Q = \sqrt{\frac{2}{|(1-q)(2-q)|}}, \qquad Q_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} + 1, & q \notin (1,2), \\ \dfrac{1}{q-1} - \dfrac{1}{2}, & q \in (1,2). \end{cases} \tag{49}$$

В явном виде q-логарифм статистической суммы (48) записывается следующим образом:

$$\ln_q(z_q^{(0)}) = \frac{|2-q|[z_q^{(0)}(0)]^{1-q} - N^{1-q}}{(1-q)|2-q|}, \qquad z_q^{(0)}(0) = Q\Delta B\left(Q_0, \frac{1}{2}\right). \tag{50}$$

Это выражение принимает скейлинговую форму $\ln_q(z_q^{(0)}) \propto N^{1-q}$ при условии $\Delta = \Delta_1 N$, где параметр Δ_1 не зависит от числа частиц. Это условие подтверждается примером аддитивных систем, где для d-мерного идеального газа параметр $\Delta_1 = (mT/(2\pi\hbar^2))^{d/2}n^{-1}$ определяется плотностью $n = N/V$; V – объем [37].

Моменты свободного поля определяются выражением

$$\langle x^m\rangle_q^{(0)} := \frac{1}{z_q^{(0)}(0)}\int_{-\infty}^{\infty} x^m e_q^{-x^2/[2]_q\Delta^2}\,dx. \tag{51}$$

Для нечетных порядков $m = 2n-1$, $n = 1,2,\ldots$, имеем $\langle x^{2n-1}\rangle_q^{(0)} = 0$, а моменты четных порядков $m = 2n$, $n = 1,2,\ldots$, принимают вид

$$\langle x^{2n}\rangle_q^{(0)} = \frac{(Q\Delta)^{2n+1}}{z_q^{(0)}(0)}B\left[Q_0(n), n+\frac{1}{2}\right], \qquad Q_0(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} + 1, & q \notin (1,2); \\ \dfrac{1}{q-1} - \left(n+\dfrac{1}{2}\right), & q \in (1,2). \end{cases} \tag{52}$$

При учете ангармонизма $V(x)$ производящий функционал представляется деформированным произведением типа (41), где одночастичная составляющая имеет вид (ср. с формулой (42))

$$z_q(u) = \int \exp_q \left\{ \int \left[ux - \left(\frac{x^2}{[2]_q \Delta^2} + V(x) \right) \right] d\mathbf{r}\, dt \right\} \delta x. \tag{53}$$

Проводя разложение экспоненты Цаллиса (П.2) (см. приложение) по степеням возмущения $V(x)$, находим $z_q(0) = z_q^{(0)}(0) + z'_q(0)$, где добавка к гармоническому приближению представляется рядом теории возмущений:

$$z'_q(0) = Q\Delta \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C(q,n) \int_0^{\infty} V^n(y)(1 \mp y)_+^{1/(1-q)-n} y^{-1/2}\, dy \tag{54}$$

с коэффициентами

$$C(q,n) = (1-q)^n \prod_{m=1}^{n} \frac{(2-q)/(1-q) - m}{m}. \tag{55}$$

При $q \notin (1,2)$ в биноме подынтегрального выражения (54) следует взять верхний знак, при котором ограничение, наложенное нижним индексом, сводит верхний предел интегрирования к единице; в интервале $q \in (1,2)$ берется нижний знак, и указанное ограничение снимается.

В первом порядке поправка $z'_q(0)$ составляет

$$z_q^{(1)}(0) = -Q\Delta \int_0^{\infty} V(y)(1 \mp y)_+^{q/(1-q)} y^{-1/2}\, dy. \tag{56}$$

Соответственно во втором порядке имеем

$$z_q^{(2)}(0) = \frac{Qq}{2} \Delta \int_0^{\infty} V^2(y)(1 \mp y)_+^{(2q-1)/(1-q)} y^{-1/2}\, dy. \tag{57}$$

Для стандартного возмущения

$$V = \frac{\lambda_1}{3} x^3 + \frac{\mu_1}{4} x^4, \tag{58}$$

определенного параметрами λ_1, μ_1, поправка первого порядка (56) не содержит кубического ангармонизма, поскольку он приводит к подынтегральной функции, антисимметричной относительно переменной x, от которой совершается переход к y согласно (47). В результате получаем

$$z_q^{(1)}(0) = -\frac{\mu(Q\Delta_1)^5}{4} B\left(Q_1, \frac{5}{2}\right) N, \qquad \mu \equiv \mu_1 N^4, \qquad Q_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & q \notin (1,2), \\ \dfrac{1}{q-1} - \dfrac{3}{2}, & q \in (1,2). \end{cases} \tag{59}$$

Кубический ангармонизм проявляется только в слагаемом (57) второго порядка, где он дает вклад

$$z_q^{(2)}(0) = \frac{\lambda^2 q(Q\Delta_1)^7}{18} B\left(Q_2, \frac{7}{2}\right) N, \qquad \lambda \equiv \lambda_1 N^3, \qquad Q_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} - 1, & q \notin (1,2), \\ \dfrac{1}{q-1} - \dfrac{3}{2}, & q \in (1,2). \end{cases} \tag{60}$$

Подстановка поправок (59), (60) в квадратные скобки выражения (50) приводит к уточнению величины одночастичной статистической суммы z_q.

С учетом возмущения $V(x)$ момент порядка m определяется выражением (ср. с формулой (51))

$$\langle x^m\rangle_q = \frac{(Q\Delta)^{m+1}}{z_q(0)}\int_0^\infty \left[(1\mp y)-(1-q)V(y)\right]_+^{1/(1-q)} y^{(m-1)/2}\,dy. \tag{61}$$

Подобно (54) здесь при $q\notin(1,2)$ следует взять верхний знак, при котором верхний предел интегрирования сводится к единице; в интервале $q\in(1,2)$ берется нижний знак. Далее в подынтегральном выражении (61) следует провести разложение по $V(x)$ и учесть подобную поправку (54) для производящей функции $z_q(0)=z_q^{(0)}(0)+z'_q(0)$. В результате изменение момента $\langle x^m\rangle'_q=\langle x^m\rangle_q-\langle x^m\rangle_q^{(0)}$ принимает вид

$$\begin{aligned}\langle x^m\rangle'_q = &-\frac{z'_q(0)}{z_q^{(0)}(0)}\langle x^m\rangle_q^{(0)}+\frac{(Q\Delta)^{m+1}}{z_q^{(0)}(0)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nC(q,n)\times\\ &\times\int_0^\infty V^n(y)(1\mp y)_+^{1/(1-q)-n}y^{(m-1)/2}\,dy,\end{aligned} \tag{62}$$

где в отличие от формулы (54) последний множитель содержит степень $(m-1)/2$ вместо $-1/2$. Комбинируя выражение (62) с равенствами (48), (52) и (54), находим

$$\begin{aligned}\langle x^m\rangle'_q = &\frac{(Q\Delta)^{m+1}}{z_q^{(0)}(0)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nC(q,n)\int_0^\infty V^n(y)(1\mp y)_+^{1/(1-q)-n}\times\\ &\times\left\{y^{m/2}-\frac{Q\Delta}{z_q^{(0)}}B\left[Q_0\left(\frac{m}{2}\right),\frac{m+1}{2}\right]\right\}y^{-1/2}\,dy.\end{aligned} \tag{63}$$

Как показывает пример определения поправок (59), (60), в силу связи (47) слагаемые ряда (63), содержащие множитель $y^{(m-1)/2}$ с нечетным m, дают нулевой вклад. С учетом формулы (58) поправка первого порядка принимает вид

$$\begin{aligned}\langle x^m\rangle_q^{(1)} = &-\frac{(Q\Delta)^{m+1}}{z_q^{(0)}(0)}\int_0^\infty (1\mp y)_+^{q/(1-q)}\left(\frac{\lambda}{3}y^{3/2}+\frac{\mu}{4}y^2\right)\times\\ &\times\left\{y^{m/2}-\frac{Q\Delta}{z_q^{(0)}}B\left[Q_0\left(\frac{m}{2}\right),\frac{m+1}{2}\right]\right\}y^{-1/2}\,dy.\end{aligned} \tag{64}$$

Опуская антисимметричные подынтегральные слагаемые, при нечетных показателях $m=2n-1$ находим

$$\langle x^{2n-1}\rangle_q^{(1)} = -\frac{(Q\Delta)^{2n}}{z_q^{(0)}(0)}\int_0^\infty (1\mp y)_+^{q/(1-q)}\left\{\frac{\lambda}{3}y^{n+1/2}-\frac{\mu}{4}\frac{Q\Delta}{z_q^{(0)}}B\left[Q_0\left(n-\frac{1}{2}\right),n\right]y^{3/2}\right\}dy. \tag{65}$$

Отсюда окончательно следует

$$\langle x^{2n-1}\rangle_q^{(1)} = \frac{(Q\Delta)^{2n}}{z_q^{(0)}(0)}\left\{\frac{\mu}{4}\,\frac{Q\Delta B[Q_{\rm odd}(1),5/2]}{z_q^{(0)}}B\left[Q_0\left(n-\frac{1}{2}\right),n\right]-\frac{\lambda}{3}B\left[Q_{\rm odd}(n),n+\frac{3}{2}\right]\right\}, \tag{66}$$

где обозначено

$$Q_{\rm odd}(n) = \begin{cases}\dfrac{1}{1-q}, & q\notin(1,2),\\[2mm] \dfrac{1}{q-1}-\left(n+\dfrac{1}{2}\right), & q\in(1,2).\end{cases} \tag{67}$$

Соответственно моменты четного порядка $m = 2n$ записываются в форме

$$\langle x^{2n}\rangle_q^{(1)} = -\frac{\mu}{4}\,\frac{(Q\Delta)^{2n+1}}{z_q^{(0)}(0)}\int_0^\infty (1\mp y)_+^{q/(1-q)}\left\{y^{n+3/2} - \frac{Q\Delta}{z_q^{(0)}}B\left[Q_0(n), n+\frac{1}{2}\right]y^{3/2}\right\}dy. \tag{68}$$

В результате получаем

$$\langle x^{2n}\rangle_q^{(1)} = \frac{\mu}{4}\,\frac{(Q\Delta)^{2n+1}}{z_q^{(0)}(0)}\left\{\frac{Q\Delta B[Q_{\rm even}(0), 5/2]}{z_q^{(0)}}B\left[Q_0(n), n+\frac{1}{2}\right] - B\left[Q_{\rm even}(n), n+\frac{5}{2}\right]\right\}, \tag{69}$$

где

$$Q_{\rm even}(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & q\notin(1,2),\\ \dfrac{1}{q-1} - \left(n+\dfrac{3}{2}\right), & q\in(1,2). \end{cases} \tag{70}$$

Как показывают выражения (66), (69), поправки к статистической сумме (54) приводят к положительным вкладам в моменты (61). С другой стороны, в моменты нечетного порядка (66) дают вклады как кубический, так и биквадратный ангармонизмы, тогда как при четном порядке сказывается только последний.

Везде выше мы пренебрегали вкладом градиентных слагаемых и межчастичным взаимодействием, благодаря чему наиболее удобным было использование одноузельного приближения. Для учета указанных эффектов следует перейти к волновому представлению, в рамках которого лагранжиан свободного неоднородного поля принимает вид (ср. с формулой (40))

$$\mathcal{L}_q^{(0)} := \frac{2}{[2]_q}\sum_{\mathbf{k}}\left(\frac{1}{\Delta^2} + \alpha\mathbf{k}^2\right)|x_{\mathbf{k}}|^2, \tag{71}$$

где $\alpha > 0$ – параметр неоднородности. Соответственно двухчастичное взаимодействие определяется вкладом

$$W_q := \frac{2}{[4]_q N}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}''} w_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}x^*_{\mathbf{k}'}x^*_{-\mathbf{k}'+\mathbf{k}''}x_{-\mathbf{k}+\mathbf{k}''}x_{\mathbf{k}}, \tag{72}$$

интенсивность которого задается ядром $w_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$ при $x^*_{\mathbf{k}} = x_{-\mathbf{k}}$.

В рамках волнового представления поведение системы определяется N степенями свободы, интенсивности которых задаются величинами $x_{\mathbf{k}}$. Статистическая сумма каждой из этих мод задается теми же формулами (50), (54), (56), (57), (59) и (60), в которых, как показывает сравнение равенств (71) и (40), следует заменить Δ на $\Delta/\sqrt{1+\alpha\Delta^2\mathbf{k}^2}$; такую же замену следует провести и в равенствах (52), (61)–(66), (68) и (69), определяющих моменты наблюдаемых величин. Что касается межчастичного взаимодействия, то наиболее простым образом его учет достигается в приближении среднего поля, в рамках которого в равенстве (72) следует пренебречь суммой по волновому вектору $\mathbf{k}''$, ядро $w_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$ положить равным постоянному значению $w_{\mathbf{0}}$, отвечающему $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, а произведения типа $x^*_{\mathbf{k}}x_{-\mathbf{k}}$ заменить средним значением $\rho \equiv N^{-1}\sum_{\mathbf{k}}\langle x^*_{\mathbf{k}}x_{-\mathbf{k}}\rangle$. В результате выражение (72) принимает квадратичную форму

$$W_q \simeq \frac{4w_{\mathbf{0}}\rho}{[4]_q}\sum_{\mathbf{k}} x^*_{\mathbf{k}}x_{-\mathbf{k}}, \tag{73}$$

подобную выражению (71).

Таким образом, учет пространственной неоднородности (71) и межчастичного взаимодействия (72) оставляет неизменной форму равенств (50), (52), (54), (56), (57), (59)–(66), (68) и (69), определяющих статистическую сумму и моменты наблюдаемых величин для каждой из степеней свободы, отвечающих волновому вектору $\mathbf{k}$. При этом в указанных равенствах под параметром Δ следует понимать диспергирующее значение

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta}{\sqrt{\left(1 + (2[2]_q/[4]_q)\Delta^2 w_{\mathbf{0}}\rho\right) + \alpha\Delta^2\mathbf{k}^2}}. \tag{74}$$

С учетом аддитивности q-логарифмов статистических сумм $z_{q\mathbf{k}}$, приходящихся на каждую степень свободы $\mathbf{k}$, полное значение Z_{qN} для N частиц определяется равенством

$$\ln_q(Z_{qN}) = \sum_{\mathbf{k}} \ln_q(z_{q\mathbf{k}}). \tag{75}$$

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведенное рассмотрение показывает, что деформация статистического распределения, приводящая к неаддитивности термодинамических потенциалов, не требует принципиальных изменений при использовании квантово-полевых методов [29]–[31] для описания сложных систем. В частности, оказывается, что эволюция наиболее вероятных значений параметра порядка и амплитуды его флуктуаций вообще не испытывает изменений, тогда как вероятности реализации различных фазовых траекторий зависят от параметра неаддитивности. При этом полевой формализм, основанный на методе производящего функционала [31], модифицируется в том же духе, что и статистика Цаллиса [3].

Термодинамические свойства неаддитивной системы, состоящей из N частиц, определяются q-деформированной свободной энергией $F_{qN} := -T\ln_q(Z_{qN})$. Поскольку q-логарифм статистической суммы сохраняет свою аддитивность, то определенный таким образом термодинамический потенциал может быть представлен в стандартной форме $F_{qN} = Nf_q$, где удельная свободная энергия $f_q := -T\ln_q(z_q)$ задается статистической суммой z_q, приходящейся на частицу. При $q \neq 1$ величина z_q зависит от числа частиц N, благодаря чему нарушается условие аддитивности $F_{qN} \propto N$ полной свободной энергии.

Следуя рассмотрению, проведенному в предыдущем разделе, представим зависимость удельной статистической суммы z_q от параметра неаддитивности q. Из рис. 4 видно, что в гармоническом приближении с ростом q в интервале $q \in (0,2)$ величина $\ln_q(z_q^{(0)})$ монотонно возрастает от конечного значения $\ln_0(z_0^{(0)}) = ((4/3)\Delta_1 - 1/2)N$ до бесконечности (формулы (43), (44) показывают, что расходимость q-логарифма статистической суммы при $q = 2$ обусловлена бесконечным возрастанием q-факториала $N!_q$, учитывающего тождественность частиц). При этом реализуются асимптотики

$$N^{q-1}\ln_q(z_q^{(0)}) \simeq \begin{cases} \left[\ln(\sqrt{2\pi}\Delta_1) + \dfrac{1}{|2-q|}\right] + \left[\dfrac{7}{8} - \dfrac{1}{2}\ln^2(\sqrt{2\pi}\Delta_1)\right](q-1), & |q-1| \ll 1; \\ \dfrac{1}{|2-q|}, & |2-q| \ll 1. \end{cases} \tag{76}$$

Согласно рис. 4б ангармонизм очень слабо влияет на статистическую сумму свободного поля.

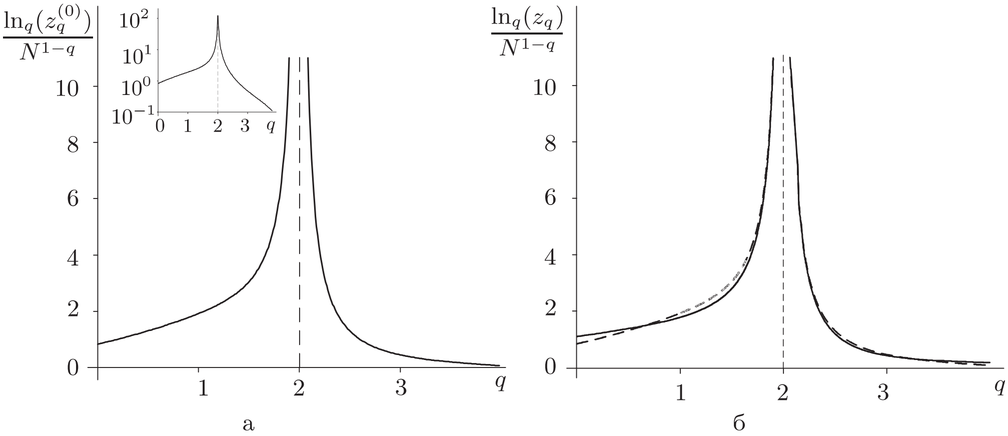

Рис. 4. Зависимость q-логарифма одночастичной статистической суммы (50) от параметра неаддитивности, на врезке использованы полулогарифмические координаты (а); та же зависимость для статистической суммы (б) в случае свободного поля (штриховая линия) и с учетом ангармонизма при $\lambda = \mu = 12$ (сплошная).

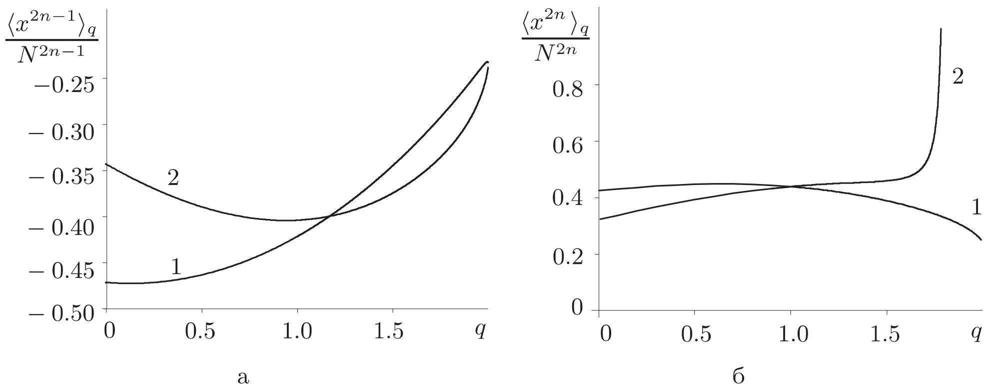

Рис. 5. Зависимость моментов $\langle x^{2n-1}\rangle_q$ (а) и $\langle x^{2n}\rangle_q$ (б) от параметра неаддитивности при $\lambda, \mu = 12$ (кривые 1, 2 отвечают $n = 1, 2$ соответственно).

Представим поведение моментов наблюдаемых величин в зависимости от параметра неаддитивности. Поскольку для свободного поля моменты нечетных порядков равны нулю, то на рис. 5 приведены данные для больших значений параметров ангармонизма $\lambda = \mu = 12$. Обращает на себя внимание тот факт, что при фиксированном порядке m момент $\langle x^m\rangle_q$ масштабируется числом частиц N^m, взятым в той же степени. Кроме того, оказывается, что моменты $\langle x^{2n-1}\rangle_q$ нечетного порядка принимают отрицательные значения, а $\langle x^{2n}\rangle_q$ – положительные. Из сравнения кривых, отвечающих различным степеням ангармонизма, на рис. 6 видно, что его рост приводит к увеличению абсолютных значений моментов нечетного порядка, тогда как для четных ангармонизм размывает особенность, наблюдающуюся для моментов $\langle x^{2n}\rangle_q^{(0)}$ свободного поля при $q = 2$. Подобно удельной статистической сумме (76)

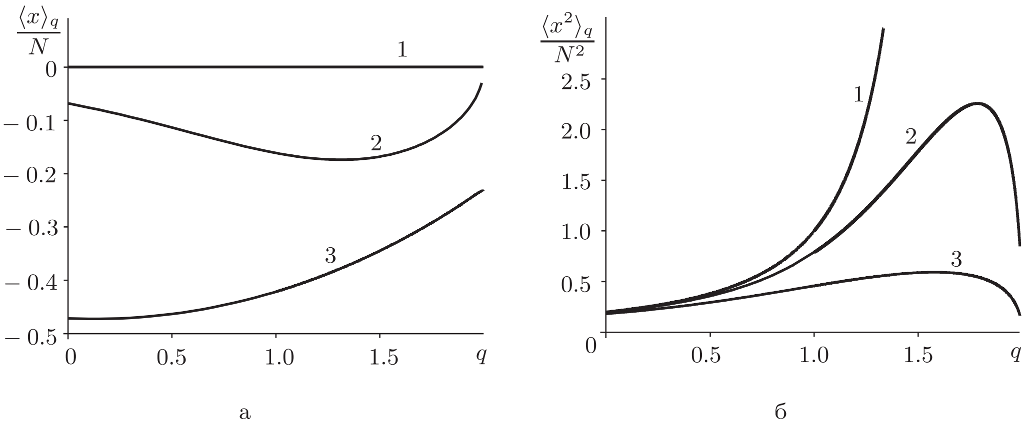

Рис. 6. Зависимость среднего значения $\langle x\rangle_q$ от параметра неаддитивности и ангармонизма: кривые 1, 2, 3 отвечают $\lambda, \mu = 0, 1, 12$ соответственно (а); та же зависимость для дисперсии $\langle x^2\rangle_q$: кривые 1, 2, 3 отвечают $\lambda, \mu = 0.0, 0.1, 1.0$ соответственно (б).

с ростом параметра неаддитивности q в интервале $q \in (0, 2)$ четные моменты $\langle x^{2n}\rangle_q^{(0)}$ монотонно возрастают от конечного значения $\langle x^{2n}\rangle_0^{(0)} = 3\Delta_1^{2n}N^{2n}/(2n+1)(2n+3)$ до бесконечности. При этом вблизи значений $q = 1$ и $q = 2$ реализуются асимптотики

$$\frac{\langle x^{2n}\rangle_q^{(0)}}{N^{2n}} \simeq \begin{cases} \dfrac{(2n)!}{n!}\left(\dfrac{\Delta_1^2}{2}\right)^n\left[1 + \dfrac{1}{2}\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\left(n + \dfrac{3}{2}\right)(q-1)\right], & |q-1| \ll 1, \\ \dfrac{(2n)!}{n!}\left(\dfrac{\Delta_1^2}{2}\right)^n |2-q|^{-n}, & |2-q| \ll 1. \end{cases} \tag{77}$$

При интерпретации найденных зависимостей статистической суммы и моментов наблюдаемых величин от параметра неаддитивности следует иметь в виду, что в самоподобных системах его значение q не является свободным. Это связано с тем, что при деформации фазового пространства, растягивающей одну из осей x, p в λ раз и сжимающей другую в той же степени (в результате фазовый объем не изменяется), должно выполняться условие самоподобия распределения состояний x, p. Это выражается в том, что физические значения величин задаются не исходной вероятностью $p(x)$, а эскортной (см. формулу (П.1)), представляющей степенную функцию $p(x)$. Исследование условий самоподобия показывает, что их выполнение обеспечивается уравнением [41]

$$(\lambda^q - 1)(\lambda^{q-1} - 1) = (\lambda - 1)^2, \tag{78}$$

определяющим связь параметра неаддитивности q и деформации λ. В результате получаем зависимость, приведенную на рис. 7.

Этот рисунок показывает, что изменение деформации λ от нуля до единицы приводит к спаданию параметра неаддитивности от $q = 2$ до золотого сечения $q = 1.618$, а при дальнейшем росте λ до бесконечности параметр q медленно уменьшается до $q = 1.5$. Согласно рис. 4–6 при этом удельная статистическая сумма также уменьшается, а моменты наблюдаемых величин могут изменяться немонотонным образом.

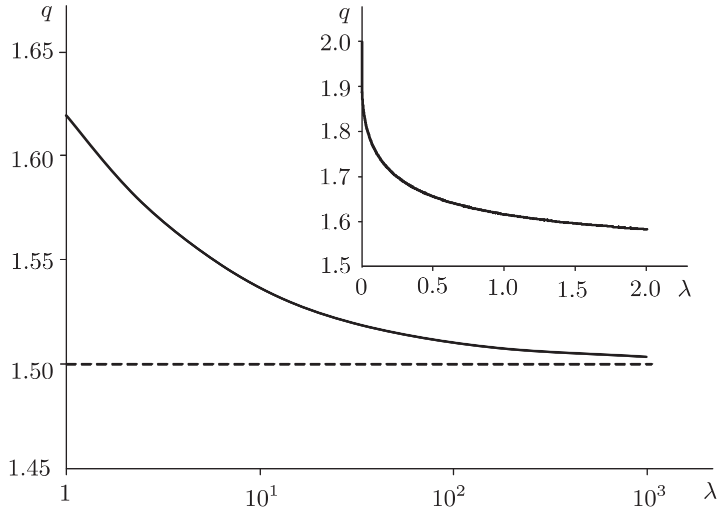

Рис. 7. Зависимость параметра неаддитивности q от деформации λ самоподобной системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Формализм неаддитивной статистической системы

В отличие от обычного статистического ансамбля неаддитивная система подчиняется статистике Цаллиса [3], [38], в рамках которой состояния распределены не по Гиббсу, а согласно эскортной вероятности [7]

$$P_q(x) = \frac{p^q(x)}{\int p^q(x)\,dx}, \qquad p(x) = Z_q^{-1} e_q^x, \tag{П.1}$$

где статистическая сумма Z_q определяется условием нормировки исходной вероятности $p(x)$. Последняя, в свою очередь, задается деформированной экспонентой Цаллиса

$$e_q^x := [1 + (1-q)x]_+^{1/(1-q)}, \qquad [y]_+ \equiv \max(y, 0), \tag{П.2}$$

которая в пределе $q \to 1$ сводится к обычной экспоненте $e^x = e_1^x$. Соответственно логарифм Цаллиса, играющий роль функции, обратной экспоненте (П.2), определяется равенством

$$\ln_q(x) \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}. \tag{П.3}$$

Кроме того, сумма, разность, произведение и частное положительных величин x, y принимают вид [35]

$$\begin{gathered} x \oplus_q y := x + y + (1-q)xy, \qquad x \ominus_q y := \frac{x-y}{1+(1-q)y}, \\ x \otimes_q y := [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]_+^{1/(1-q)}, \qquad x \oslash_q y := [x^{1-q} - y^{1-q} + 1]_+^{1/(1-q)}. \end{gathered} \tag{П.4}$$

При этом функции (П.2), (П.3) удовлетворяют правилам

$$\begin{gathered}\ln_q(x\otimes_q y)=\ln_q x+\ln_q y,\qquad \ln_q(x\oslash_q y)=\ln_q x-\ln_q y,\\ e_q^x\otimes_q e_q^y=e_q^{x+y},\qquad e_q^x\oslash_q e_q^y=e_q^{x-y},\\ \ln_q(xy)=\ln_q x\oplus_q\ln_q y,\qquad \ln_q\left(\frac{x}{y}\right)=\ln_q x\ominus_q\ln_q y,\\ e_q^x e_q^y=e_q^{x\oplus_q y},\qquad \frac{e_q^x}{e_q^y}=e_q^{x\ominus_q y},\end{gathered}\tag{П.5}$$

а q-факториал

$$n!_q:=1\otimes_q 2\otimes_q\cdots\otimes_q n\tag{П.6}$$

натурального числа $n\gg 1$ выражается формулой Стирлинга [39]

$$\ln_q(n!_q)\simeq\begin{cases}\left(\dfrac{n}{2-q}+\dfrac{1}{2}\right)\ln_q n-\dfrac{n-1}{2-q}, & 0<q\neq 2,\\ \left[n-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]-\ln n, & q=2.\end{cases}\tag{П.7}$$

Фурье-образ функции $f(x)$ определяется равенствами

$$F_q[f](k):=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\otimes_q e_q^{ikx}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}e_q^{ikx+\ln_q(f(x))}\,dx,\tag{П.8}$$

в первом из которых использовано деформированное произведение, а во втором – правила (П.5). С учетом (П.2), (П.4) подынтегральное выражение в первом из равенств (П.8) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}e_q^{ikx}\otimes_q f(x)&=\left\{[1+(1-q)ikx]+[f(x)]^{1-q}-1\right\}_+^{1/(1-q)}=\\ &=f(x)\left\{1+(1-q)ikx[f(x)]^{q-1}\right\}_+^{1/(1-q)}=f(x)e_q^{ikx[f(x)]^{q-1}}.\end{aligned}$$

В результате приходим к выражению [42]

$$F_q[f](k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e_q^{ikx[f(x)]^{q-1}}\,dx,\tag{П.9}$$

где переход от деформированного произведения к обычному достигается за счет введения степени исходной функции $f(x)$ в показатель экспоненты. При этом δ-функция представляется равенством [43]

$$\delta_q(x)=\frac{2\pi}{2-q}\int_{-\infty}^{\infty}e_q^{ikx}\,dk,\qquad q\in[1,2].\tag{П.10}$$

Список литературы

[1] Р. Балеску, *Равновесная и неравновесная статистическая механика*, Мир, М., 1978.

[2] А. И. Олемской, *Синергетика сложных систем*: *Феноменология и статистическая теория*, КРАСАНД, М., 2009.

[3] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World*, Springer, New York, 2009.

[4] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.*, **52**:1–2 (1988), 479–487.

[5] E. M. Curado, C. Tsallis, *J. Phys. A*, **24**:2 (1991), L69–L72.

[6] S. Abe, *Phys. Lett. A*, **224**:6 (1997), 326–330.

[7] C. Tsallis, R. S. Mendes, A. R. Plastino, *Physica A*, **261**:3–4 (1998), 534–554.

[8] G. Kaniadakis, *Phys. Rev. E*, **66**:5 (2002), 056125, 17 pp., arXiv: cond-mat/0210467.

[9] G. Kaniadakis, M. Lissia, A. M. Scarfone, *Phys. A*, **340**:1–3 (2004), 41–49; *Phys. Rev. E*, **71**:4 (2005), 046128, 12 pp., arXiv: cond-mat/0409683.

[10] J. Naudts, *Phys. A*, **340**:1–3 (2004), 32–40.

[11] A. M. Scarfone, T. Wada, *Phys. Rev. E*, **72**:2 (2005), 026123, 13 pp., arXiv: cond-mat/0504117.

[12] A. Lavagno, A. M. Scarfone, N. P. Swamy, *Eur. Phys. J. B*, **50**:1–2 (2006), 351–354, arXiv: cond-mat/0509477.

[13] A. Lavagno, A. M. Scarfone, N. P. Swamy, *Phys. A*, **40**:30 (2007), 8635–8654, arXiv: 0706.0426.

[14] G. Vitiello, *Topological defects, fractals and the structure of quantum field theory*, arXiv: 0807.2164.

[15] F. Wilczek, *Fractional statistics and anyon superconductivity*, World Sci., Singapore, 1990.

[16] L. C. Biedenharn, *Phys. A*, **22**:18 (1989), L873–L878.

[17] A. J. Macfarlane, *J. Phys. A*, **22**:21 (1989), 4581–4588.

[18] E. Celeghini, M. Rasetti, G. Vitiello, *Phys. Rev. Lett.*, **66**:16 (1991), 2056–2059.

[19] E. Heine, *J. reine angew. Math.*, **32** (1846), 210–212; **34** (1847), 285–328.

[20] F. H. Jackson, *Amer. J. Math.*, **38** (1909), 26; *Mess. Math.*, **38** (1909), 57.

[21] H. Exton, *q-Hypergeometric Functions and Applications*, Ellis Horwood, New York, 1983.

[22] C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics, **155**, Springer, New York, 1995.

[23] A. Lavagno, N. P. Swamy, *Phys. Rev. E*, **61**:2 (2000), 1218–1226, arXiv: quant-ph/9912111; **65**:3 (2002), 036101, 5 pp.

[24] D. Sornette, *Critical Phenomena in Natural Sciences. Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools*, Springer, Berlin, 2006.

[25] A. Erzan, J.-P. Eckmann, *Phys. Rev. Lett.*, **78**:17 (1997), 3245–3248.

[26] A. Erzan, *Phys. Lett. A*, **225**:4–6 (1997), 235–238.

[27] A. B. Adiba, A. A. Moreirab, J. S. Andrade Jr., M. P. Almeida, *Phys. A*, **322** (2003), 276–284.

[28] S. Abe, Y. Okamoto (eds.), *Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications*, Papers from the IMS Winter School on Statistical Mechanics: Nonextensive Generalization of Boltzmann–Gibbs Statistical Mechanics and its Applications (Okazaki, February 15–18, 1999), Lecture Notes in Physics, **560**, Springer, Berlin, 2001.

[29] А. А. Абрикосов, А. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, ГИФМЛ, М., 1962.

[30] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика. Ч. 2. Теория конденсированного состояния*, Физматлит, М., 2002.

[31] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1993.

[32] A. I. Olemskoi, S. S. Borysov, I. A. Shuda, *Eur. Phys. J. B*, **77**:2 (2010), 219–231.

[33] A. I. Olemskoi, I. A. Shuda, *Phys. Lett. A*, **373**:44 (2009), 4012–4016.

[34] P. C. Martin, E. D. Siggia, H. A. Rose, *Phys. Rev. A*, **8** (1973), 423–437.

[35] E. P. Borges, *Phys. A*, **340**:1–3 (2004), 95–101, arXiv: cond-mat/0304545.

[36] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications*, Springer, Berlin, 1984.

[37] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Ч. 1, Физматлит, М., 2002.

[38] Ю. Г. Рудой, *ТМФ*, **135**:1 (2003), 3–54.

[39] H. Suyari, *q-Stirling's formula in Tsallis statistics*, arXiv: cond-mat/0401541.

[40] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.

[41] A.I. Olemskoi, A.S. Vaylenko, I.A. Shuda, *Phys. A*, **388**:9 (2009), 1929–1938, arXiv: 0810.1189.

[42] S. Umarov, C. Tsallis, S. Steinberg, *Milan. J. Math.*, **76** (2008), 307–308.

[43] M. Jauregui, C. Tsallis, *J. Math. Phys.*, **51** (2010), 063304.

Поступила в редакцию 31.08.2012

Олемской А.И. Статистическая теория поля неаддитивной системы [Текст] / А.И. Олемской, О.В. Ющенко, А.Ю. Бадалян // Теоретическая и математическая физика. — 2013. — т. 174 (№3). — с. 444-466