

## Плащ невидимости с использованием несингулярной координатной трансформации

В.И. Вьюнник\*, А.А. Звягинцев

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61022 Харьков, Украина

(Получено 07.06.2014; опубликовано online 29.11.2014)

Исследована несингулярная координатная трансформация и получены выражения для компонент диэлектрической и магнитной проницаемости. Выполнено численное моделирование соответствующего объекта невидимости. Проведено сравнение суммарной величины рассеяния от несингулярного и сингулярного объектов невидимости. Показано, что суммарная величина рассеяния от объекта невидимости в дальней зоне соответствует величине рассеяния от идеально проводящего цилиндра, являющегося "базой" координатной трансформации.

**Ключевые слова:** Несингулярный плащ невидимости, Координатная трансформация, Рассеяние, Материальные параметры.

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.25.Fx, 02.70.Dh,  
02.40. – k

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Впервые предложенные в пионерской работе Pendry [1] плащи невидимости обеспечивают сокрытие объекта, помещенного внутрь такого плаща таким образом, что световые лучи, двигаясь в плаще, огибают объект и продолжают двигаться в первоначальном направлении. Тем самым обеспечивается сокрытие объекта от внешнего наблюдателя.

В настоящее время предложены различные подходы к созданию таких плащей. Наиболее часто используется координатная трансформация Эвклидова пространства. Так, при создании цилиндрического плаща [2] осуществляется координатная (геометрическая) трансформация, при которой круг отображается в кольцевую область (для двумерной задачи). При этом точка, находящаяся в центре круга отображается (раздувается) в окружность.

Однако при таком преобразовании возникает сингулярность. Она связана с тем, что в исходной, нетрансформированной системе, свет проходит точку за бесконечно малое время. Поэтому при раздувании этой точки в окружность, скорость света, огибающего ее, стремится к бесконечности. Таким образом, представляет интерес исследовать трансформацию, при которой в исходной системе координат вместо точки используется окружность.

### 2. МЕТОДИКА КОНСТРУИРОВАНИЯ ПЛАЩА

Рассмотрим координатную трансформацию в системе координат кругового цилиндра, как изображено на рис. 1, где кольцевая область  $r \in [\Gamma, \Omega]$  отображается в кольцевую область  $r' \in [\Gamma', \Omega']$ .

Исходная кольцевая область в трансформационной оптике носит название виртуального пространства, а область в которую производится отображение — физическим пространством. Все величины в физическом пространстве обозначим буквами со штрихом, а в виртуальном пространстве — буквами без штриха.

Такую координатную трансформацию в цилиндрической системе координат можно представить как:

$$r' = \frac{c-b}{c-a} \cdot (r-a) + b; \quad \theta' = \theta; \quad z' = z. \quad (1)$$

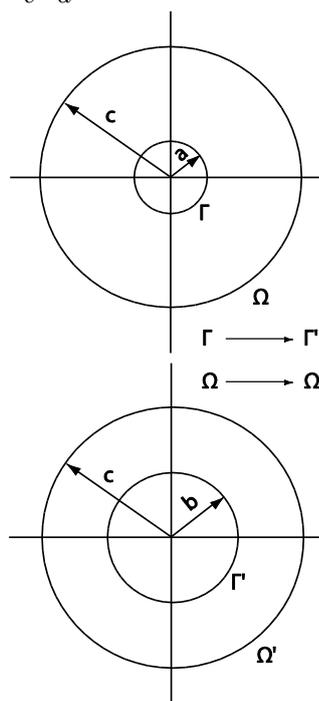


Рис. 1 – Схема координатной трансформации

Как показано в [3] при координатной трансформации цилиндрические компоненты материальных параметров в виртуальном и физическом пространстве связаны следующими соотношениями:

$$\tilde{\epsilon}' = \frac{S \tilde{\epsilon} S^T}{\det(S)}; \quad \tilde{\mu}' = \frac{S \tilde{\mu} S^T}{\det(S)}, \quad (2)$$

где

\* vladdal@gmail.com

$$S = (TT^T)^{-1/2} \lambda (TT^T)^{1/2}. \quad (3)$$

$T$  – представляет собой Якобианову матрицу цилиндрической координатной системы по декартовой в виртуальном пространстве, а  $T'$  – Якобианову матрицу цилиндрической координатной системы по декартовой в физическом пространстве и эти матрицы могут быть записаны в виде:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\frac{\sin(\theta)}{r} & \frac{\cos(\theta)}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{\partial r'}{\partial x'} & \frac{\partial r'}{\partial y'} & \frac{\partial r'}{\partial z'} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial x'} & \frac{\partial \theta'}{\partial y'} & \frac{\partial \theta'}{\partial z'} \\ \frac{\partial z'}{\partial x'} & \frac{\partial z'}{\partial y'} & \frac{\partial z'}{\partial z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\frac{\sin(\theta)}{r'} & \frac{\cos(\theta)}{r'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Матрица трансформации представляет собой Якобианову матрицу, состоящую из элементов вида

$$\lambda_j^i = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j},$$

которые представляют собой производные цилиндрических координат в физическом пространстве по цилиндрическим координатам в виртуальном пространстве. Для координатной трансформации (1) матрица трансформации  $\lambda$  имеет вид

$$\lambda = \begin{pmatrix} \frac{c-b}{c-a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Подставляя выражения (4), (5) и (6) в (3) и затем (3) в (2), и предполагая  $\tilde{\varepsilon}$  и  $\tilde{\mu}$  изотропными и равными 1, получим матрицу цилиндрических компонент материальных параметров в физическом пространстве

$$\tilde{\varepsilon}' = \tilde{\mu}' = \begin{pmatrix} \frac{KM}{r'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r'}{KM} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{Kr'} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

в которой  $K = \frac{c-b}{c-a}$ ,  $M = \frac{(r'-b)(c-a)}{c-b} + a$ .

Сравнивая выражения для компонент материальных параметров (7) с выражениями для цилиндрических компонент  $\varepsilon$  и  $\mu$ , полученных в [2] для координатной трансформации, при которой на внутрен-

ний радиус плаща отображается не окружность а точка:

$$\tilde{\varepsilon}' = \tilde{\mu}' = \begin{pmatrix} \frac{r'-b}{r'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r'}{r'-b} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{c}{c-b}\right)^2 \frac{r'-b}{r'} \end{pmatrix} \quad (8)$$

можно заметить, что в отличие от координатной трансформации, используемой в [2], величина  $\frac{r'}{KM}$  при  $r' = b$  конечна, если радиус  $a$  не равен нулю.

На рис. 2 представлена зависимость величины  $\frac{r'}{KM}$  (т.е.  $\varepsilon_\theta$  и  $\mu_\theta$ ) от  $r'$  для случая  $c=0.4$ ,  $b=0.2$  и различных  $a$ . Видно, что даже в случае, когда  $a$  меньше  $b$  в 100 раз, величина  $\frac{r'}{KM}$  равна 133.

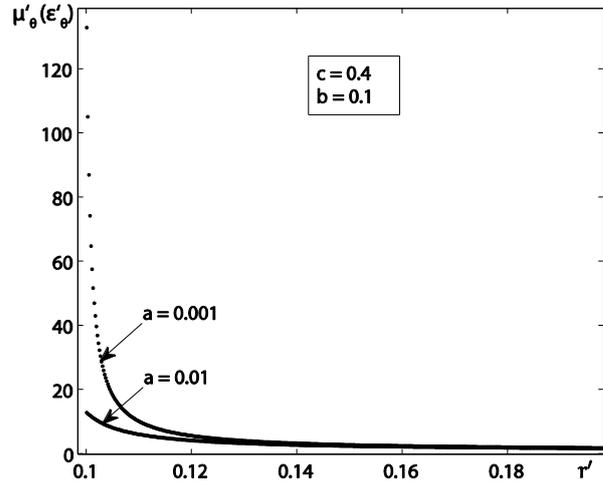


Рис. 2 – Зависимость величины  $\mu_\theta(\varepsilon_\theta)$  от  $r'$

Для численного моделирования использовались декартовы компоненты материальных параметров, которые мы получали из соотношений представленных в [3]

$$\varepsilon' = U^T \tilde{\varepsilon}' U, \quad \mu' = U^T \tilde{\mu}' U,$$

где  $U = (TT^T)^{-1/2} T$ . В результате получаем выражения для декартовых компонент:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{xx} &= \mu'_{xx} = \cos(\theta)^2 P_{rr} + \sin(\theta)^2 P_{\theta\theta}; \\ \varepsilon'_{xy} &= \mu'_{xy} = \cos(\theta) P_{rr} \sin(\theta) - \sin(\theta) P_{\theta\theta} \cos(\theta); \\ \varepsilon'_{yx} &= \mu'_{yx} = \cos(\theta) P_{rr} \sin(\theta) - \sin(\theta) P_{\theta\theta} \cos(\theta); \\ \varepsilon'_{yy} &= \mu'_{yy} = \sin(\theta)^2 P_{rr} + \cos(\theta)^2 P_{\theta\theta}; \\ \varepsilon'_{zz} &= \mu'_{zz} = P_{zz}, \end{aligned}$$

где  $P_{rr} = \frac{KM}{r'}$ ,  $P_{\theta\theta} = \frac{r'}{KM}$  и  $P_{zz} = \frac{M}{Kr'}$ .

### 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Численное моделирование проводилось с использованием метода конечных элементов [4]. Окруженное плащом тело состояло из идеально проводящего материала. В работе исследовалась двумерная задача для случая падения плоской  $E$  – поляризованной волны. При такой поляризации материал плаща характеризуется только  $\mu_{xx}$ ,  $\mu_{xy}$ ,  $\mu_{yx}$ ,  $\mu_{yy}$  и  $\varepsilon_{zz}$  компонентами материальных параметров. В принципе, выбор поляризации может быть произвольным.

На рис. 3 представлено распределение  $E_z$  компоненты полного поля при рассеянии плоской волны от объекта невидимости (идеально проводящего цилиндра, покрытого плащом), а на рис. 4 от идеально проводящего цилиндра, имеющего радиус, равный величине  $a$  соответствующего объекта невидимости.

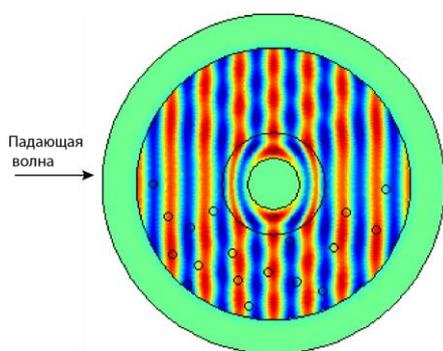


Рис. 3 – Распределение компоненты электрического поля в окрестностях устройства невидимости.  $\lambda = 0.2$  м,  $c = 0.3$  м,  $b = 0.15$  м,  $a = 0.001$  м,  $E$  – поляризованная падающая плоская волна

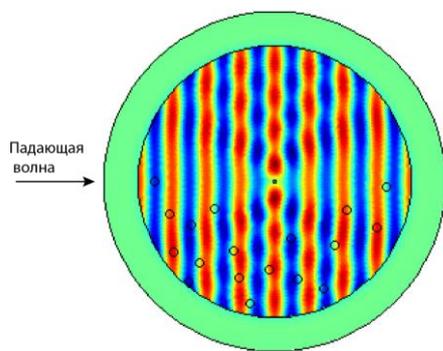


Рис. 4 – Распределение компоненты электрического поля в окрестностях идеально проводящего кругового цилиндра.  $\lambda = 0.2$  м, радиус цилиндра =  $0.001$  м,  $E$  – поляризованная падающая плоская волна

Кружочки на рисунках обозначают случайным образом выбранные точки в свободном пространстве, в которых оценивалось абсолютное значение  $E_z$  компоненты полного поля. Полученные результаты представлены в табл. 1.

На рис. 5, 6 приведены диаграммы рассеяния несингулярных объектов невидимости для различных значений  $a$  в сравнении с диаграммой рассеяния идеально проводящего цилиндра и диаграммой рассеяния сингулярного устройства невидимости.

Для оценки производительности плаща использовался подход [5] – определялась суммарная величина

Таблица 1 – Распределение  $E_z$  компоненты полного поля

№ точки	Объект невидимости	Идеально проводящий цилиндр
		$E_z$ , В/м
1	0.88597	0.88595
2	0.99786	0.99840
3	1.11796	1.11774
4	1.07637	1.07659
5	0.93539	0.93601
6	1.11919	1.11919
7	1.12993	1.12936
8	1.15112	1.15082
9	0.86931	0.86967
10	1.08557	1.08571
11	1.01835	1.01785
12	1.02190	1.02190
13	1.03954	1.03981
14	0.86164	0.86201
15	0.94631	0.94607
16	0.92008	0.92046
17	1.05420	1.05409
18	0.84425	0.84492

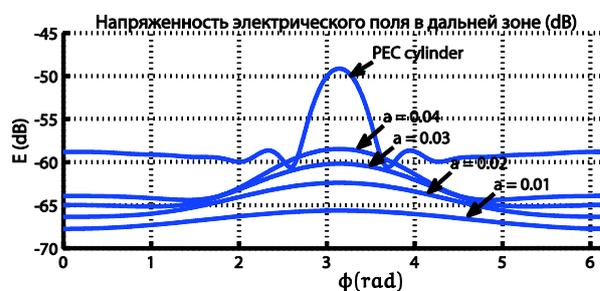


Рис. 5 – Распределение компоненты электрического поля в окрестностях объекта невидимости.  $\lambda = 0.2$  м,  $c = 0.3$  м,  $b = 0.15$  м,  $a = 0.001$  м,  $E$  – поляризованная падающая плоская волна. PEC cylinder – идеально проводящий цилиндр радиусом  $0.15$  м

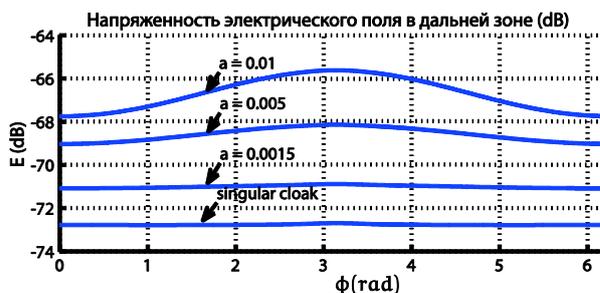


Рис. 6 – Распределение компоненты электрического поля в окрестностях объекта невидимости.  $\lambda = 0.2$  м,  $c = 0.3$  м,  $b = 0.15$  м,  $a = 0.001$  м,  $E$  – поляризованная падающая плоская волна. singular cloak – сингулярное устройство невидимости с  $c = 0.3$  м,  $b = 0.15$  м

рассеяния, как интеграл от абсолютной величины рассеянного электрического поля в дальней зоне ( $\int E_{far}$ ). Также было проведено численное исследование рассеяния от идеально проводящего цилиндра, имеющего радиус, соответствующий радиусу  $a$  отверстия в исходном пространстве. Подобно устройству невидимости, оценивалась суммарная величина рассеяния. Полученные результаты для величин рассеяния приведены в табл. 2.

**Таблица 2** – Оценка эффективности работы несингулярного плаща

Сингулярный плащ невидимости				
$\lambda$ , м	$c$ , м	$b$ , м	$a$ , м	$\int E_{far}$ , В
0.2	0.3	0.15		0.001444
Несингулярный плащ невидимости				
0.2	0.3	0.15	0.0015	0.00177
0.2	0.3	0.15	0.005	0.002337
0.2	0.3	0.15	0.01	0.002912
0.2	0.3	0.15	0.02	0.003704
0.2	0.3	0.15	0.03	0.004293
0.2	0.3	0.15	0.04	0.004782
0.2	0.3	0.15	0.05	0.005208
0.2	0.3	0.15	0.1	0.006851
0.2	0.3	0.15	0.15	0.008172
Идеально проводящий цилиндр				
0.2			0.0015	0.001641
0.2			0.005	0.002311
0.2			0.01	0.002906
0.2			0.02	0.003702
0.2			0.03	0.004292
0.2			0.04	0.004781
0.2			0.05	0.005207
0.2			0.1	0.00685
0.2			0.15	0.008172

Из анализа результатов видно, что величина интеграла поля, рассеянного идеально проводящим цилиндром, практически совпадает с величиной интеграла рассеянного поля от устройства невидимости (всегда несколько меньше), когда радиус идеально проводящего цилиндра совпадает с радиусом исходной системы координат.

Таким образом, можно сказать, что несингулярный плащ невидимости снижает суммарную величину рассеяния от идеально проводящего цилиндра радиуса  $b$  до величины рассеяния от идеально проводящего цилиндра радиуса  $a$ .

Необходимо отметить, что в случае, когда вели-

чина  $a$  несингулярного плаща соответствует радиусу идеально проводящего цилиндра, мы имеем не только совпадение величин рассеяния, но и форм диаграмм рассеяния от несингулярного объекта невидимости и от идеально проводящего цилиндра. Таким образом, для наблюдателя в дальней зоне, объект невидимости практически неотличим от соответствующего цилиндра. В предельном случае  $a = b$ , геометрическая трансформация в плаще отсутствует, и мы имеем идеально проводящий цилиндр радиуса  $b$ , окруженный свободным пространством.

#### 4. ВЫВОДЫ

В работе исследован цилиндрический несингулярный плащ невидимости, полученный путем использования координатной трансформации, при которой кольцевая область в виртуальном пространстве с меньшим внутренним радиусом отображается в кольцевую область в физическом пространстве с большим внутренним радиусом.

Проведена оценка производительности такого неидеального плаща невидимости путем определения суммарной величины рассеяния в дальней зоне. Показано, что плащ уменьшает рассеяние от проводящего цилиндра (круга в двумерной задаче) до величин, характерных для рассеяния от идеально проводящего цилиндра, имеющего размеры, соответствующие внутреннему цилиндру в виртуальном пространстве при координатной трансформации. При этом формы диаграмм объекта невидимости и цилиндра практически полностью совпадают.

Проведено сравнение эффективности работы несингулярных плащей при различных значениях величины  $a$  и сингулярного плаща. Показано, что эффективность несингулярного плаща сравнима с эффективностью сингулярного плаща (имеет один порядок величины) при условии малости радиуса  $a$ .

## Invisibility Cloak with Use of Nonsingular Coordinate Transformation

V.I. Vyunnik, A.A. Zvyagintsev

V.N. Karazin Kharkiv National University, 4, Svobody Sq., 61022 Kharkiv, Ukraine

The non-singular coordinate transformation is investigated; the expressions for the components of permittivity and permeability are obtained. Numerical modelling of the corresponding object of invisibility was performed. A comparison of the total value of the scattering from nonsingular and singular invisible object was completed. It was shown that the total amount of scattering from an invisible object in the far zone corresponds to the scattering from perfectly conducting cylinder, which is the "base" of the coordinate transformation.

**Keywords:** Nonsingular invisibility cloak, Coordinate transformation, Scattering, Material parameters.

**Плащ невидимості з використанням несингулярної координатної трансформації**

В.І. В'юник, А.О. Звягінцев

*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, 61022 Харків, Україна*

Досліджена несингулярна координатна трансформація та отримано вирази для компонент діелектричної і магнітної проникності. Проведено чисельне моделювання відповідного об'єкту невидимості. Проведено порівняння сумарної величини розсіювання від несингулярного і сингулярного об'єкту невидимості. Показано, що сумарна величина розсіювання від об'єкту невидимості в дальній зоні відповідає величині розсіювання від ідеально провідного циліндра, який є "базою" координатної трансформації.

**Ключові слова:** Несингулярний плащ невидимості, Координатна трансформація, Розсіювання, Матеріальні параметри.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. J.B. Pendry, D. Schurig, D.R. Smith, *Science* **312**, 1780 (2006).
2. S.A. Cummer, B.-I. Popa, D. Schurig, D. R. Smith, *Phys. Rev. E* **74**, 032261 (2006).
3. M. Rahm, D. Schurig, D.A. Roberts, S.A. Cummer, D.R. Smith, *Photon. Nanostruct. Fundam. Appl.* **6**, 87 (2008).
4. J.M. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics* (New York: John Wiley & Sons: 1993).
5. S. Xi, H. Chen, B. Zhang, B.-I. Wu, J. A. Kong, *Phys. Rev. B* **79**, 155122 (2009).