УДК 621.38

ОЦЕНКА ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ УНИТАРНЫХ КОДОВ

А.А. Борисенко, *д-р техн. наук, профессор;*
В.В. Петров, *аспирант*
Сумский государственный университет, г. Сумы

В статье проведена оценка помехоустойчивости унитарных кодов по критерию вероятности необнаруживаемой ошибки.

Ключевые слова: *унитарный счетный автомат, вероятность необнаруживаемой ошибки, помехоустойчивый, цифровой автомат.*

У статті проведена оцінка завадостійкості унітарних кодів за критерієм імовірності

Ключові слова*: унітарний рахунковий автомат, імовірність невиявної помилки, завадостійкий, цифровий автомат.*

Унитарные, или число-импульсные, коды нашли широкое применение на практике при построении вычислительных устройств с высокой надежностью. По своей сути они представляют последовательность единиц, сумма которых дает кодируемое число [1]. Если кодируемое число меньше максимального представляемого числа, то неиспользуемые разряды дополняются нулями. Например, при максимальном числе равном четырем, число $2_{<10>}$ = $1100_{<у>}$, $3_{<10>}$ – $1110_{<у>}$. Эти коды являются биномиальными для случая $n = k$, где n и k - параметры кода. Биномиальным кодом называется код, комбинации которого длины n не содержат более k единиц и $n - k$ нулей пред младшей единицей [2]. Например, при $n = 5$, $k = 4$ $2_{<10>}$ = $01100_{<б>}$, $4_{<10>}$ = $01111_{<б>}$. При $n = k$ биномиальный код превращается в унитарный биномиальный код (УБК). Его достоинства − повышенное быстродействие счета и способность к обнаружению ошибок. Повышенное быстродействие счета достигается за счет изменения только одного разряда числа при счете. Обнаружение ошибок возможно за счет содержания естественной избыточности, которая проявляется в непрерывности последовательности единиц. Тогда признаком ошибки будет появление 0 слева от 1, например, как это наблюдается в комбинации 1101, содержащей ошибку. Недостатком устройств, работающих в унитарном биномиальном коде является большое количество аппаратурных затрат, но во многих случаях такие затраты вполне приемлемы из-за повышения быстродействия счета и способности обнаруживать ошибки в работе. Однако для применения этого кода для решения практических задач необходима оценка помехоустойчивости унитарных кодов.

Поставленной в работе задачей является оценка помехоустойчивости унитарного кода и соответствующих цифровых устройств, построенных на его основе.

Оценка помехоустойчивости проводится в соответствии с методикой для оценки систем передачи данных на основе неразделимых кодов, предложенной в работе [3]. Любая из M разрешенных кодовых комбинаций из общего числа $N > M$ может перейти в следующие классы кодовых комбинаций:

– класс правильных комбинаций;

– класс из $N - M$ запрещенных комбинаций с обнаруживаемыми ошибками;

– класс из $M-1$ разрешенных комбинаций с необнаруживаемыми ошибками.

Соответственно вероятности переходов кодовых слов

$$Z + \mathrm{V} + \Pi = 1, \qquad (1)$$

где Z, V и Π представляют собой вероятности переходов кодовых слов в запрещенные, разрешенные, ошибочные слова и в самих себя.

Основной характеристикой кода является величина вероятности перехода разрешенной кодовой комбинации в другую разрешенную (вероятность необнаруживаемой ошибки)

$$P_{ош} = \mathrm{V} = 1\text{-}\mathrm{Z}\text{-}\Pi.$$

Поэтому для оценки помехоустойчивости унитарного кода произведем анализ вероятности необнаруживаемой ошибки. В нашем случае в роли цифрового устройства выступает любое устройство, перебирающее унитарные биномиальные числа с известными вероятностями. Входными данными анализа являются вероятности перехода нуля в нуль (p_{00}) и единицы в единицу (p_{11}). Вероятности ошибочных переходов нуля в единицу и единицы в нуль определяются по соотношениям: $p_{01} = 1 - p_{00}$, $p_{10} = 1 - p_{11}$.

Условием появления необнаруживаемой ошибки при передаче унитарного биномиального числа с количеством единиц $q = q_i$ является переход в следующие подмножества:

– переход в подмножества с числом единиц $q_w < q_i$;

– переход в подмножества с числом единиц $q_w > q_i$;

Произведем оценку необнаруживаемых переходов в описанные выше подмножества по отдельности.

2. Переход в подмножества с числом единиц $q_w < q_i$.

Кодовая комбинация с числом единиц $q_i > 0$ переходит в q_i разрешенных кодовых комбинаций с $t = \overline{1,\ 2,\ldots,q_i}$ необнаруживаемыми переходами $1 \to 0$. При $q_i = 0$ число переходов равно нулю. Соответственно количество необнаруживаемых переходов равно

$$\sum_{t=1}^{q_i,\ q_i>0} 1,$$

где q_i - количество единиц в исходной кодовой комбинации,

$t = \overline{1,\ 2,\ldots,q_i}$ - количество переходов $1 \to 0$.

Доказательство. Кодовая комбинация, содержащая $q_i > 0$ единиц, может перейти $q_i - 1$ разрешенных кодовых комбинаций с меньшим количество единиц и одну нулевую комбинацию при $t = \overline{1,\ 2,\ldots,q_i}$ переходов $1 \to 0$. Например, комбинация 1110 переходит в 1100, 1000, 0000, при количестве 1 перешедших в 0, равным 1, 2 и 3 соответственно. Общее количество необнаруживаемых переходов равно количеству единиц исходной комбинации.

Вероятность перехода кодовой комбинации с числом единиц $q_i > 0$ в подмножество других разрешенных кодовых комбинаций с числом единиц $q_w < q_i$ при $t = \overline{1,\ 2,\ldots,q_i}$ необнаруживаемых переходов $1 \to 0$ равна

$$V_{q_w < q_i} = \sum_{t=1}^{q_i,\ q_i > 0} p_{00}^{k-q_i} \cdot p_{11}^{q_i - t} \cdot p_{10}^{t} \,.$$

Доказательство. Необнаруживаемый переход комбинации с $q_i > 0$ в комбинацию с $q_w < q_i$ при $t = \overline{1,\ 2,\ldots,q_i}$ переходами $1 \to 0$ сопровождается $q_i - t$ правильными переходами $1 \to 1$ и $k - q_i$ правильными переходами $0 \to 0$. Соответственно вероятность перехода кодовой комбинации в другую с t переходами $1 \to 0$ равна $p_{00}^{k-q_i} \cdot p_{11}^{q_i - t} \cdot p_{10}^{t}$. Тогда вероятность перехода в подмножество кодовых комбинаций с меньшим количеством единиц равна сумме по всем возможным t:

$$V_{q_w < q_i} = \sum_{t=1}^{q_i,\ q_i > 0} p_{00}^{k-q_i} \cdot p_{11}^{q_i - t} \cdot p_{10}^{t} \,.$$

Вероятность необнаруживаемого перехода подмножества кодовых комбинаций с количеством единиц $q_i > 0$ в подмножество с $q_w < q_i$ равно

$$V_{q_w < q_i}^{Q_i \to Q_W} = P_{сообщ}(q_i) \cdot \sum_{t=1}^{q_i,\ q_i > 0} p_{00}^{k-q_i} \cdot p_{11}^{q_i - t} \cdot p_{10}^{t} \,, \qquad (2)$$

где $P_{сообщ}(q_i)$ - вероятность появления сообщения.

3. Переход в подмножества с числом единиц $q_w > q_i$

Кодовая комбинация с числом единиц $q_i < k$ переходит в $k - q_i$ разрешенных кодовых комбинаций с $L = \overline{1,\ 2\ldots(k - q_i)}$ необнаруживаемыми переходами $0 \to 1$ и числом единиц $q_w > q_i$. При $q_i = k$ число переходов равно нулю. Соответственно количество необнаруживаемых переходов равно

$$\sum_{L=1}^{k-q_i,\ q_i < k} 1 \,,$$

где $L = \overline{1,\ 2\ldots(k - q_i)}$ - количество необнаруживаемых переходов $0 \to 1$.

Доказательство. Кодовая комбинация с числом единиц $q_i < k$ переходит в $k - q_i$ комбинаций с большим количеством единиц, при $L = \overline{1,\ 2\ldots(k - q_i)}$ переходов $0 \to 1$. Например, комбинация 1000 перейдет в 1100, 1110, 1111. Общее количество переходов равно количеству нулей в исходной кодовой комбинации.

Вероятность перехода кодовой комбинации с числом единиц $q_i < k$ в подмножество других разрешенных кодовых комбинаций с числом единиц $q_w > q_i$ при $L = \overline{1,\ 2...(k - q_i)}$ необнаруживаемых переходов $0 \to 1$ равна

$$V_{q_w > q_i} = \sum_{L=1}^{k-q_i,\ q_i<k} p_{00}^{k-q_i-L} \cdot p_{11}^{q_i} \cdot p_{01}^{L} .$$

Доказательство. Необнаруживаемый переход комбинации с $q_i < k$ в комбинацию с $q_w > q_i$ при $L = \overline{1,\ 2...(k - q_i)}$ переходов $0 \to 1$ сопровождается $k - q_i - t$ правильными переходами $0 \to 0$ и q_i правильными переходами $1 \to 1$. Соответственно вероятность перехода кодовой комбинации в другую с L - переходами $0 \to 1$ равна $p_{00}^{k-q_i} \cdot p_{11}^{q_i - t} \cdot p_{10}^{t}$. Тогда вероятность перехода в подмножество кодовых комбинаций с большим количеством единиц равна сумме по всем возможным L:

$$V_{q_w > q_i} = \sum_{L=1}^{k-q_i,\ q_i<k} p_{00}^{k-q_i-L} \cdot p_{11}^{q_i} \cdot p_{01}^{L} .$$

Вероятность необнаруживаемого перехода подмножества кодовых комбинаций с количеством единиц $q_i < k$ в подмножество с $q_w > q_i$ равно

$$V_{q_w > q_i}^{Q_i \to Q_W} = P_{сообщ}(q_i) \cdot \sum_{L=1}^{k-q_i,\ q_i<k} p_{00}^{k-q_i-L} \cdot p_{11}^{q_i} \cdot p_{01}^{L} \qquad (3)$$

Вероятность необнаруживаемой ошибки равна сумме вероятностей (2) и (3) по всем возможным комбинациям

$$V = P_{сообщ}(q_i) \cdot \sum_{q_i=0}^{k} \left(\sum_{t=1}^{q_i,\ q_i>0} p_{00}^{k-q_i} \cdot p_{11}^{q_i-t} \cdot p_{10}^{t} + \sum_{L=1}^{k-q_i,\ q_i<k} p_{00}^{k-q_i-L} \cdot p_{11}^{q_i} \cdot p_{01}^{L} \right) \qquad (4)$$

По аналогии с (2) и (3) вероятность правильной передачи

$$П = P_{сообщ}(q_i) \cdot \sum_{q_i=0}^{k} p_{11}^{q_i} \cdot p_{00}^{\text{k-qi}} . \qquad (5)$$

Используя выражение (3), получена зависимость вероятности необнаруживаемой ошибки V унитарного биномиального кода от разрядности кода n при равновероятном появлении сообщений и следующих ограничений:

$$p_{01} = const = 6 \cdot 10^{-3}, \quad p_{10} = const = 5 \cdot 10^{-3} .$$

Полученные результаты сведены в табл. 1 и построен график (рис. 3).

Такой характер зависимости (рис. 3) объясняется тем, что при разрядности кода больше некоторого значения n', количество запрещенных слов растет значительно быстрее, чем разрешенных, что сопровождается спадом вероятности необнаруживаемой ошибки.

Таблица 1 – Зависимость вероятности необнаруживаемой ошибки от разрядности кода

p_{01}	p_{10}	n	V
$6\cdot10^{-3}$	$5\cdot10^{-3}$	3	$8{,}189\cdot10^{-3}$
		6	$9{,}214\cdot10^{-3}$
		10	$9{,}563\cdot10^{-3}$
		20	$9{,}484\cdot10^{-3}$
		50	$8{,}276\cdot10^{-3}$
		100	$6{,}346\cdot10^{-3}$
		200	$3{,}678\cdot10^{-3}$
		500	$7{,}116\cdot10^{-4}$
		1000	$4{,}662\cdot10^{-5}$

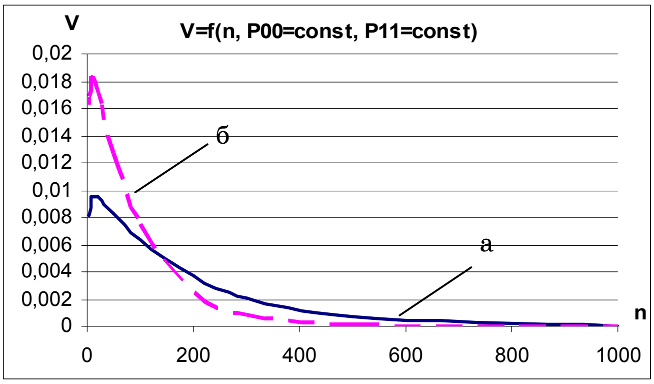

Рисунок 3 – Зависимость вероятности необнаруживаемой ошибки от разрядности кода: а) $p_{01} = const = 6\cdot10^{-3}$, $p_{10} = const = 5\cdot10^{-3}$;
б) $p_{01} = const = 1{,}2\cdot10^{-2}$, $p_{10} = const = 1\cdot10^{-2}$

Используя выражение (4), получена зависимость вероятности правильной передачи $П$ от разрядности кода n при тех же ограничениях: $p_{01} = const = 6\cdot10^{-3}$, $p_{10} = const = 5\cdot10^{-3}$. Полученные результаты сведены в табл. 2 и построен график рис. 4.

Такой характер зависимости рис. 4 объясняется тем, что при увеличении разрядности кода увеличивается количество разрядов, в которых возможна ошибка. Как следствие, вероятность правильной передачи уменьшается с ростом разрядности кода.

Для проверки аналитических соотношений (4), (5) была сделана программная модель цифрового устройства (рис. 1). и проведен статистический анализ вероятности необнаруживаемой ошибки V и вероятности правильной передачи $П$. Цифровое устройство было представлено в виде унитарного биномиального счетчика, появление чисел на выходе которого равновероятно. Входными данными анализа являются вероятности $p_{01} = 6\cdot10^{-3}$, $p_{10} = 5\cdot10^{-3}$, параметр кода $n = 9$. Аналитически рассчитанная вероятность необнаруживаемой ошибки составила $V^a = 9,5199 \cdot 10^{-3}$. Вероятность необнаруживаемой ошибки V^c, полученная статистическим методом, приведена в табл. 3.

Таблица 2 – Зависимость вероятности правильной передачи от разрядности кода

p_{01}	p_{10}	n	V
$6 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	3	0,983
		6	0,967
		10	0,946
		20	0,895
		50	0,759
		100	0,576
		200	0,332
		500	0,064
		1000	0,004

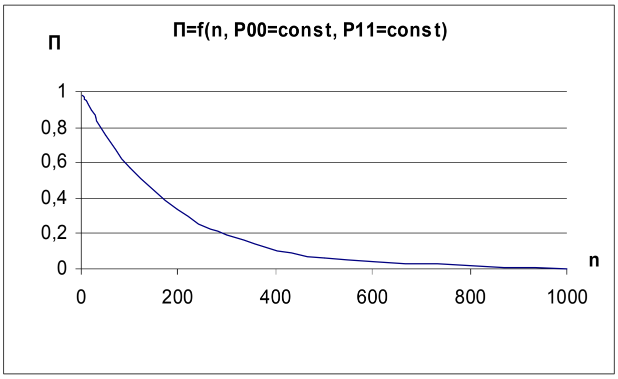

Рисунок 4 – Зависимость вероятности правильной передачи от разрядности кода при $p_{01} = const = 6 \cdot 10^{-3}$, $p_{10} = const = 5 \cdot 10^{-3}$

Таблица 3 – Вероятность необнаруживаемой ошибки, полученная статистическим методом

Количество опытов	V^c	$\Delta V = V^c - V^a$
100	$3 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$
500	$2 \cdot 10^{-3}$	$-7,52 \cdot 10^{-3}$
1000	$6 \cdot 10^{-3}$	$-3,52 \cdot 10^{-3}$
5000	$9,8 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$
10000	$9,5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$
50000	$9,4 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$
100000	$9,2 \cdot 10^{-3}$	$-2,4 \cdot 10^{-4}$
100000	$9,555 \cdot 10^{-3}$	$3,51 \cdot 10^{-5}$
1000000	$9,513 \cdot 10^{-3}$	$-7,3 \cdot 10^{-6}$

Для сравнения полученных результатов построим график (рис. 5) зависимости $f(\Delta V(N))$, где N - количество проведенных опытов.

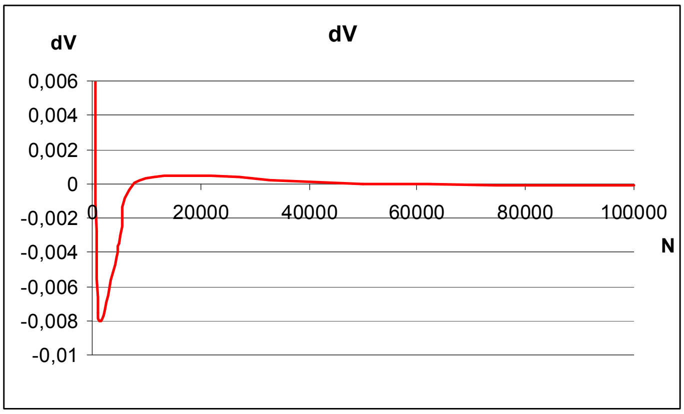

Рисунок 5 – Зависимость погрешности статистического метода оценки от количества проведенных опытов

Как видно из графика рис. 5, результаты статистического анализа при увеличении количества опытов сбегают к результату, полученному аналитически. В результате можно сделать вывод о правильности обеих методик.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в данной работе было получено аналитическое выражение, позволяющее оценить помехоустойчивость унитарных кодов по критерию вероятности необнаруживаемой ошибки. Также была построена программная модель устройства, работающего в биномиальном коде, и проведен статистический анализ помехоустойчивости. После сравнения результатов сделан вывод о правильности обеих методик.

В результате проведенной оценки подтверждено одно из достоинств унитарных кодов – их помехоустойчивость, досягаемая за счет наличия естественной избыточности. Вторым достоинством этих кодов является повышенное быстродействие счета. Такие коды целесообразно применять для построения соответствующих цифровых устройств, например, пересчетных схем в условиях высокого уровня помех и повышенного требования к быстродействию.

SUMMARY

ESTIMATION OF NOISE IMMUNITY OF UNITARY CODES

A.A. Borysenko, V.V. Petrov
Sumy State University, Sumy

In this paper estimation of noise immunity of unitary codes by the criteria of probability of undetected error is proposed.

Key words: *noise immunity of unitary codes, undetected error.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поспелов Д.А. Арифметические основы вычислительных машин дискретного действия: Учеб. пособие для вузов. - М.: Высшая школа, 1970. - 308 с.
2. Борисенко А.А. Введение в теорию биномиального счета: Монография. – Сумы: ИТД «Университетская книга», 2004. – 88 с.
3. Борисенко А.А., Онанченко Е.Л. Оценка помехоустойчивости неразделимых кодов. – Сумы: СумГУ, 1994.

Поступила в редакцию 26 июня 2009 г.