

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

Дейнека Андрій Віталійович

УДК 539.3

КОНСТРУКЦІЙНА МІЦНІСТЬ БАГАТОШАРОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ  
МАШИН З ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРИ

05.02.09 – Динаміка та міцність машин

Дисертація на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Науковий керівник –  
доктор технічних наук,  
професор Верещака С.М.

Суми – 2015

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	5
1. РОЗРАХУНКОВІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ БАГАТОШАРОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ МАШИН З УРАХУВАННЯМ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАВАНТАЖЕНЬ .....	11
1.1. Розрахункові моделі багатошарових конструкцій. ....	11
1.2. Термопружність багатошарових армованих елементів конструкцій. ....	16
1.3 Чисельне моделювання напруженого стану та експериментальні дослідження шаруватих конструкцій .....	20
1.4. Розрахунки на міцність конструкцій з композиційних матеріалів ..	25
1.5. Висновки по першому розділу .....	28
2. ДИСКРЕТНО-СТРУКТУРНА ТЕОРІЯ БАГАТОШАРОВИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ .....	29
2.1. Геометрично нелінійна деформація криволінійного шару за уточненою теорією Тимошенко.....	30
2.2. Розв'язні рівняння дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок .....	36
2.2.1. Варіаційні рівняння принципу Рейснера шаруватих анізотропних структур .....	36
2.2.2. Рівняння рівноваги пружного шару анізотропної оболонки.....	42
2.2.3. Рівняння дискретно - структурної теорії при наявності ідеального контакту шарів структури анізотропного тіла .....	50
2.3. Дискретно-структурна теорія багатошарових тонкостінних конструкцій з ослабленим контактом між шарами.....	56
2.4. Рівняння незв'язаної задачі термопружності багатошарових тонкостінних конструкцій з ослабленим контактом між шарами...60	
2.4.1. Рівняння теплопровідності для багатошарових тонкостінних конструкцій .....	60

2.4.2. Рівняння термопружності для багат шарових конструкцій .....	64
2.5. Висновки по другому розділу .....	69
3. КРАЙОВІ ЗАДАЧІ СТАТИКИ БАГАТОШАРОВИХ АРМОВАНИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРИ. ....	71
3.1. Зведені термопружні характеристики багат шарового анізотропного матеріалу .....	71
3.1.1 Зведені пружні характеристики багат шарового анізотропного матеріалу .....	71
3.1.2 Визначення коефіцієнтів теплового лінійного розширення багат шарового анізотропного матеріалу...	76
3.2. Напружено-деформований стан багат шарового плоского кривого бруса при згинанні з урахуванням ідеального і неідеального контакту між шарами .....	80
3.3. Термопружній напружений стан багат шарової циліндричної оболонки неоднорідної структури по товщині з урахуванням ідеального і неідеального контакту між шарами .....	86
3.4. Висновок по третьому розділу.....	110
4. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ БАГАТОШАРОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ НЕОДНОРІДНОЇ СТРУКТУРИ .....	112
4.1. Технологія виготовлення та технічні характеристики зразків зі склопластику.....	112
4.1.1. Матеріал і структура зразків.....	113
4.1.2. Технічні характеристики склопластику .....	114
4.2. Навантаження зразків .....	116
4.2.1. Навантаження склопластикової труби внутрішнім тиском .....	116
4.2.2. Навантаження внутрішнім тиском сталеві труби з дефектом структури зміцненої склопластиковим бандажем .....	117

	4
4.3. Вимірювання та реєстрація деформацій та напружень .....	119
4.3.1 Кільцеві зразки .....	119
4.3.2. Склопластикова труба з фланцем на одному з торців .....	122
4.3.3. Сталева труба з дефектом структури зміцнена склопластиковим бандажем .....	122
4.4. Експериментальні дослідження склопластикової труби під дією внутрішнього тиск.....	124
4.5. Експериментальні випробування сталеві труби з дефектом структури, зміцненої склопластиковим бандажем.....	126
4.6. Висновки по четвертому розділу .....	128
<b>5. МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ НА МІЦНІСТЬ БАГАТОШАРОВИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРИ.....</b>	<b>130</b>
5.1. Модифікований критерій міцності композиту шаруватої структури з концентраторами напружень на границі розділу шарів .....	130
5.2. Осесиметрична деформація тонкостінних конструкцій шаруватої структури .....	133
5.2.1. Спосіб обчислення геометричних параметрів оболонок обертання .....	133
5.2.2. Осесиметрична деформація багатошарових оболонок обертання з ослабленим контактом між шарами .....	136
5.2.3. Лінеаризація розв'язної системи звичайних диференціальних рівнянь .....	139
5.3. Міцність торових балонів високого тиску .....	140
5.4. Розрахунок на міцність склопластикової труби в зоні фланцевих з'єднань.....	143
5.5. Висновки по п'ятому розділу .....	146
<b>ВИСНОВКИ .....</b>	<b>148</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....</b>	<b>151</b>
<b>ДОДАТОК А.....</b>	<b>167</b>

## ВСТУП

Високі показники питомої міцності і жорсткості волокнистих композиційних матеріалів разом з хімічною стійкістю, порівняно малою вагою та іншими властивостями, зробили ці матеріали привабливими для виготовлення трубопроводів різного призначення. Застосування склопластикових труб взамін металевих збільшує термін служби трубопроводів майже в 4 рази, приблизно в 3 рази знижує вагу трубопроводу, а також виключає застосування антикорозійних захисних властивостей та зварювальних робіт.

Перспективним напрямком застосування конструкцій з композиційних матеріалів є заміна металевих газових балонів композитними. Європейські компанії наповнюють, зберігають і транспортують приблизно 40 млн. балонів, обслуговуючи потреби ринку технічних газів.

Ще одним прикладом доречності застосування композитів являються ущільнення робочих коліс насосів, які працюють з легкими вуглеводнями. Ці насоси наражаються на декілька загроз. По перше, легкі вуглеводні не мають властивостей, достатніх для забезпечення змащення між деталями, що обертаються, та нерухомими деталями. Також більшість виробничих процесів з легкими вуглеводнями проходять при таких умовах, які створюють ймовірність роботи насоса насухо. При цьому від тертя на поверхнях контакту ущільнень виникають значні температурні навантаження. Для усунення таких загроз пропонується використання композиційних матеріалів під час виготовлення ущільнень.

Таким чином, інтенсивне впровадження нових композиційних матеріалів у різноманітні галузі сучасної техніки викликане високими техніко-економічними показниками конструкцій, створених на їх основі.

При виготовленні й експлуатації багатошарових конструкцій на міжшарових поверхнях контакту жорстких армованих шарів утворюється тонкий клейовий прошарок, а також різного роду структурні недосконалості,

наприклад ділянки непроклею або відшарувань. Специфічними особливостями багат шарових конструкцій з композитних матеріалів є різко виражена анізотропія їх властивостей, відносно низький опір поперечним та трансверсальним деформаціям, істотна відмінність механічних і теплофізичних характеристик шарів.

З урахування наведених особливостей деформування багат шарових елементів конструкцій можна стверджувати, що традиційно використовувані в розрахункових моделях оболонки і пластин із композиційних матеріалів умови неперервності переміщень і напружень (ідеального контакту) при переході від одного сусіднього жорсткого армованого шару до іншого не виконуються.

Із-за складності чисельної реалізації розглянутих задач, отримані теоретичні результати потребують експериментальної перевірки, особливо, якщо досліджується несуча здатність багат шарових тонкостінних елементів конструкцій з урахуванням різного роду початкових дефектів структури матеріалу.

Тому розробка нових методик розрахунку напружено-деформованого стану багат шарових конструкцій з дефектами структури на основі уточненої дискретно-структурної теорії, коли враховуються адекватні кінематичні та статичні умови контактної взаємодії суміжних поверхонь сполучених шарів під час дії як статичного, так і температурного навантаження визначає актуальність проведених досліджень.

Дисертаційна робота виконана на кафедрі загальної механіки і динаміки машин Сумського державного університету при виконанні робіт відповідно до координаційного плану Міністерства освіти і науки України та реалізована при виконанні держбюджетних науково-дослідницьких робіт: «Несуча здатність комбінованого газового балона високого тиску» (0110U004017), «Дослідження робочого процесу та розробка теорії нових енергоефективних та ресурсозберігаючих конструкцій ущільнень відцентрових машин» (0113U000135).

**Мета і задачі дослідження.** Мета роботи полягає в розробці методики розрахунку термопружного напруженого стану склопластикових труб, композитних балонів високого тиску та ущільнень робочих коліс насосів з урахуванням міжшарових дефектів структури матеріалу.

Для досягнення поставленої мети в дисертації було поставлено наступні задачі:

- провести аналіз різних розрахункових моделей і методик розрахунку напружено-деформованого стану багатошарових елементів конструкцій з дефектами структури від дії статичних та температурних навантажень, визначити особливості існуючих методик експериментальних досліджень таких конструкцій;

- на основі дискретно-структурної теорії створити методику дослідження термопружного стану багатошарових оболонок обертання, коли на одній частині міжфазної поверхні контакту суміжних шарів виконуються умови ідеального контакту, а на іншій спостерігаються ділянки з неідеальним контактом (непроклеї, розшарування, проковзування);

- розробити теоретико-експериментальну методику визначення інтегральних термопружних характеристик композитів шаруватої структури, відповідно до дискретно-структурної моделі багатошарових оболонок і пластин розробити методику визначення коефіцієнту проковзування сполучених поверхонь суміжних шарів, коли порушуються умови їх ідеального кінематичного контакту, та на основі класичної теорії пружності анізотропного тіла розробити чисельно-аналітичний підхід розв'язання термопружних незв'язаних крайових задач для циліндричних товстостінних оболонок за умови як ідеального, так і неідеального контакту суміжних шарів по сполученим поверхням;

- виготовити експериментальну установку і дослідити деформований стан циліндричних оболонок зі склопластику і композиційних труб з дефектами структури методом тензометрування;

– розв’язати задачу міцності і отримати величину граничного внутрішнього тиску комбінованих газових балонів високого тиску, дослідити напружено-деформований стан склопластикових труб в зоні фланцевих з’єднань в залежності від жорсткості фланців.

**Об’єкт дослідження** – процес навантаження і деформування багатошарових оболонок обертання з міжшаровими дефектами структури.

**Предмет дослідження** – термопружний деформований стан склопластикових труб, комбінованих балонів високого тиску, силова оболонка яких виконана з композиційного матеріалу шаруватої структури, композитних ущільнень робочого колеса насоса.

**Методи дослідження.** Для розв’язання термопружної незв’язаної задачі застосовуються метод сплайн-колокацій, метод Фур’є, метод рядів Тейлора, метод ортогональної прогонки. На основі даних методів створений алгоритм і мовою програмування VISUAL FORTRAN складена програма розрахунку напружено-деформованого стану багатошарових циліндричних оболонок від дії статичного та температурного навантаження. Для розв’язання деяких із розглянутих задач також використовувався метод скінченних елементів, який реалізовано в програмному комплексі ANSYS.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає у такому:

– відповідно дискретно-структурної моделі багатошарових оболонок і пластин дістало подальший розвиток дослідження термопружного стану багатошарових оболонок обертання, коли на одній частині міжфазної поверхні контакту суміжних шарів виконуються умови ідеального контакту, а на іншій спостерігаються ділянки з неідеальним контактом (непроклеї, розшарування, проковзування);

– побудовано замкнену систему диференціальних рівнянь та відповідні крайові умови незв’язаної стаціонарної задачі термопружного деформування композитної оболонки шаруватої структури, що дозволяють врахувати деформації поперечного зсуву і трансверсального обтиснення, забезпечити



умови механічного і теплового сполучення шарів і умови термомеханічного навантаження на лицьових поверхнях такої оболонки;

– вперше отримано нові чисельно-аналітичні розв'язки термопружної крайової задачі деформації циліндричних оболонок обертання шаруватої структури від дії внутрішнього тиску і температурного навантаження з неідеальним міжшаровим контактом, виявлені основні закономірності зміни напруженого стану при врахуванні проковзування суміжних шарів по сполученим поверхням, визначено інтегральні коефіцієнти теплового лінійного розширення багат шарового анізотропного матеріалу;

– вперше встановлено вплив температурних навантажень на напружено-деформований стан ущільнення робочого колеса, виготовленого із композиційних матеріалів;

– дістало подальший розвиток дослідження впливу жорсткості фланців на напружено-деформований стан склопластикових труб в зоні їх з'єднань.

**Практичне значення отриманих результатів.** Теоретичні і числові результати дисертаційної роботи впроваджені в прикладних науково-технічних розробках щодо вдосконалення виробів із композиційних матеріалів: ТОВ «СКЛОПЛАСТИКОВІ ТРУБИ» м. Харків.

Запропоновані методи розрахунку термопружних крайових задач також використовуються в навчальному процесі Сумського державного університету, для студентів напрямку підготовки «Механіка» та магістрів спеціальності «Комп'ютерна механіка».

**Особистий внесок здобувача.** Дані до захисту положення дисертаційної роботи отримані здобувачем особисто. У публікаціях, виданих у співавторстві, здобувачу належать наступні наукові результати:

[1] – визначення розрахункової моделі багат шарового криволінійного бруса, коли має місце пружне проковзування сполучених поверхонь сусідніх шарів, та доведення адекватності такої моделі;

[2] – проведення експерименту і визначення експериментальних даних щодо впливу жорсткості фланців на напружено-деформований стан склопластикових труб в зоні їх з'єднання;

[3] – проведення розрахунку на конструкційну міцність та граничний стан торових армованих оболонок із міжшаровими дефектами структури матеріалу;

[4-7] – складення алгоритму і розв’язання крайової задачі термопружного деформованого стану циліндричної товстостінної багат шарової оболонки від дії внутрішнього тиску і температурного навантаження.

**Достовірність отриманих результатів** забезпечується використанням апробованих методів вирішення крайових задач, фізично обґрунтованих моделей конструкцій і матеріалів, гарною кореляцією теоретичних результатів як з отриманими в роботі, так і наведеними в літературних джерелах експериментальними і теоретичними даними

**Апробація результатів дисертації.** Зміст основних розділів і окремих результатів роботи доповідався на наступних конференціях: Всеукраїнській міжвузівській науково-технічній конференції “Сучасні технології в промисловому виробництві” (Суми, 2012); Міжнародній науково-технічній конференції “Динамика, надежность и долговечность механических и биомеханических систем и элементов их конструкций” (Севастополь 2012, 2013); XIV-й Міжнародній науково-технічній конференції “Герметичность, виброненадежность и экологическая безопасность насосного и компрессорного оборудования” (Суми, 2014); Міжнародній науково-практичній конференції “Технология XXI века” (Южне, 2014), Міжнародній науково-технічній конференції “Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій” (Львів, 2014).

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 11 наукових праць, із них 6 статей у фахових наукових виданнях України, 1 стаття в зарубіжному виданні і 4 – у збірниках праць науково-технічних конференцій.

**Структура і обсяг дисертації.** Робота складається зі вступу, 5 розділів, списку використаних джерел (149 найменувань), висновків і додатка (на 2 сторінках). Загальний обсяг дисертації становить 168 сторінок, 53 рисунки та 4 таблиці по тексту. Обсяг основного тексту дисертації становить 146 сторінок.

# **1. РОЗРАХУНКОВІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ БАГАТОШАРОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ МАШИН З УРАХУВАННЯМ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

Розвиток сучасної техніки характеризується інтенсивним застосуванням композиційних матеріалів.

Композити застосовуються в основному у літальних апаратах і пускових установках. Це пов'язано з тим, що діяльність багатьох конструкторських колективів, які застосовують композити, націлена на пріоритетний авіакосмічний напрямок, де досягнуті найбільш вражаючі результати.

Слід також звернути увагу на широке застосування композиційних матеріалів у нафто- і газодобувній галузях, в хімічному виробництві, в будівництві і скрізь, де застосування композиційних матеріалів більш раціональне, ніж застосування металів. При цьому, виникає необхідність знання особливостей поведінки як самих композиційних матеріалів, так і конструкцій з них не тільки в умовах нормальної експлуатації, але і в екстремальних умовах (при аваріях і катастрофах), коли діють високі температури і навантаження.

## **1.1. Розрахункові моделі багатошарових конструкцій**

Теорія тонкостінних конструкцій з композиційних матеріалів є одним з важливих розділів сучасної механіки деформованого твердого тіла. Як і раніше важливими залишаються задачі створення достовірних математичних моделей та розробка надійних і високоефективних методів розрахунку багатошарових конструкцій. Аналіз цілого ряду оглядів [12 - 17] показує, що всі дослідження з питань механіки тонкостінних армованих елементів конструкцій проводяться в таких основних напрямках. Перший напрям пов'язаний з вибором математичних моделей тонкостінних елементів конструкцій. Прийнята математична модель порівнюється з її класичним

аналогом за рівнем обліку тих чи інших внутрішніх силових факторів, щодо адекватності постановки крайових задач неоднорідній структурі композиційного матеріалу. Для другого напрямку характерне обґрунтування запропонованих моделей, встановлення зв'язку між ними і просторовими задачами теорії пружності. По третьому напрямку проводиться аналіз методів вирішення різних класів задач і дослідження впливу геометричних і механічних параметрів і навантажень на поля напружень і переміщень, пропонуються варіанти використання отриманих результатів розрахунку при проектуванні тонкостінних елементів конструкцій різного призначення.

Основи класичної теорії анізотропних оболонок отримали детальне відображення в монографіях С.А. Амбарцумяна [18, 19], Я.М. Григоренко [20], В.І. Корольова [21] і С.Г. Лехніцького [22]. Детальна бібліографія з класичної теорії анізотропних пластин і оболонок є в огляді Е. І. Гріголюка і Ф.А. Когана [23]. Підкреслюється, що ця теорія "є коректною для тонких ізотропних і слабо анізотропних оболонок, у яких жорсткості шарів одного порядку (розрахункові схеми шарів еквівалентні)".

Як відомо, втрата несучої здатності шаруватих систем при дії стискаючого навантаження через слабкий опір поперечному відриву і міжшаровому зсуву відбувається задовго до досягнення напруженнями граничних значень. Тому при розрахунках на міцність і стійкість тонкостінних елементів, що мають шари зниженої жорсткості, класична теорія виявляється неприйнятною. Зазначені невідповідності класичної моделі і реальних умов деформування матеріалу шаруватих конструкцій стали основною причиною створення уточнених теорій анізотропних пластин і оболонок, які враховують поперечні деформації зсуву та обтиснення.

Перший варіант уточненої некласичної теорії належить С.П. Тимошенко [24]. При вирішенні задачі згинальних коливань балки він вводить додатковий кут повороту поперечного перерізу, що виникає через деформації поперечного зсуву. Модель, запропонована С.П. Тимошенко, отримала широке узагальнення в теорії однорідних і анізотропних пластин і оболонок.

Некласична теорія пластин вперше побудована Е. Рейснером [25]. При її побудові в якості вихідних гіпотез взято основні розрахункові напруження – тангенціальні компоненти тензора напружень. Для них прийнятий лінійний закон, який відповідає допущенню про лінійну зміну тангенціальних переміщень – гіпотеза прямої лінії. Отримано систему з двох рівнянь. Перше рівняння четвертого порядку характеризує вигин пластини. Друге рівняння другого порядку описує напружений стан, який носить місцевий характер і швидко згасає при видаленні від краю пластини.

Розвиток некласична теорія оболонок і пластин отримала в працях: С.А. Амбарцумяна [18, 19, 26], В.В. Васильєва [27], Я.М. Григоренка [28 - 30], А.Н. Гузя, І.Ю. Бабича, Я.М. Григоренка [31], Л.Г. Донелла [32], П.М. Нагді [81], Б.Л. Пелеха [33] та інших вчених. Особливо ефективними при побудові уточнених теорій пластин і оболонок виявилися методи, в основу яких покладені узагальнені варіаційні принципи теорії пружності.

Аналізу і зіставлення моделей пластин типу Тимошенко і Рейснера присвячені роботи В.В. Васильєва [34] і В.Г. Піскунова, А.О. Рассказова [35]. Відзначається, що в розглянутих варіантах безперервно-структурних моделей теорії шаруватих пластин і оболонок видно спадкоємність некласичних теорій однорідних конструкцій. Зберігається загальне протиріччя, властиве цим теоріям: невідповідність між геометричною моделлю, яка враховує викривлення нормалі, і системою внутрішніх зусиль, яка відповідає гіпотезі прямої. Це протиріччя вносить похибку у результати розв'язків і скорочує область застосування теорії.

Узагальнення моделі Тимошенко для розрахунку багат шарових оболонок виконано Е.І. Гріголюком і Г.М. Куликовим [36]. Тут, зокрема, розроблений енергетичний критерій визначення коефіцієнта зсуву для шаруватої структури. У роботі В.В. Пікуля [37] пропонується варіант фізично коректної прикладної уточненої теорії оболонок, де на основі методу мінімізації нев'язок врахована підвищена податливість оболонки в поперечних

напрямах. Метод зважених нев'язок використовується при побудові уточненої теорії анізотропних оболонок в [38].

Некласичні теорії пластин і оболонок останнім часом активно розвиваються. Так вектор переміщень  $i$ , відповідно, тензори деформацій і напружень повинні включати складові, які враховують поперечне обтиснення від безпосереднього докладання зовнішніх навантажень.

Є класи задач механіки деформованого твердого тіла, в яких врахування поперечного обтиснення справляє визначальний вплив на результат. Це задачі контакту пластин і оболонок з жорсткими тілами (штампами), а також задачі взаємного контакту оболонок. Для таких задач облік поперечного обтиснення необхідний для того, щоб встановити реальну картину розподілу напружень по області контакту, тобто контактних напружень. Проблема обліку напружень і деформацій поперечного обтиснення проаналізована в [39].

Обґрунтування припущень некласичних моделей неоднорідних оболонок здійснюється, як правило, двома різними способами. Один з них полягає в зіставленні отриманих на їх основі значень напружень і переміщень з даними точних або досить точних рішень окремих класів задач тривимірної теорії пружності. Огляд по аналітичним методам розв'язання тривимірних задач статички анізотропних тіл представлений в роботі Ю.Н. Неміша [40]. Для другого підходу характерно, що відповідне обґрунтування проводиться асимптотичними методами.

Ці методи побудови двовимірних моделей пружного деформування тонкостінних тіл, що враховують вплив поперечних деформацій, засновані на розкладанні в ряди по системам функцій деякого малого параметра переміщень і напружень. Як правило, передбачається, що товщина оболонки значно менше інших характерних геометричних розмірів оболонки. Аналіз по асимптотичним методам приведення тривимірних задач теорії пружності до двовимірних моделей міститься в роботах [40, 41].

А.С. Сахаровим і його співавторами [42] запропонована математична модель деформування багатошарових композитних оболонкових систем, що є

узагальненням моделі Тимошенко. Переміщення мають два ступені апроксимації. Перша заснована на гіпотезі прямої лінії, а друга вводить цю гіпотезу пошарово, тобто гіпотезу ламаної для пакета шарів. Перавага моделі полягає в простоті реалізації, тому система розв'язуючих рівнянь включає тільки диференціальні оператори другого порядку.

Співвідношення пружності в розглянутих вище варіантах уточнених теорій анізотропних тонкостінних конструкцій включають інтегральні (приведені) жорсткісні характеристики, що не дозволяє в достатньо повній мірі оцінювати вплив неоднорідності механічних параметрів по товщині. Зазвичай в теорії тонких багатошарових пластин і оболонок з ідеальним зчепленням між шарами застосовуються два різні підходи до побудови уточнених двовимірних теорій: структурно-безперервний (феноменологічний) і дискретно-структурний.

При феноменологічному підході шматково-неоднорідна по товщині шарувата пластина або оболонка розглядається як квазіоднорідна з наведеними пружними характеристиками. Порядок вихідних при цьому рівнянь не залежить від числа шарів. При дискретно-структурному підході враховується неоднорідність будови оболонки введенням кінематичних або статичних (або кінематичних і статичних) гіпотез для кожного окремого шару. Порядок вихідних при цьому рівнянь залежить від числа шарів, ці рівняння дозволяють враховувати локальні ефекти на границях контакту шарів. Тому саме дискретно-структурний підхід виявився придатним, зокрема, для розрахунку багатошарових конструкцій з різного роду недосконалостями поверхонь контакту шарів.

Окремо слід виділити клас задач, пов'язаних з розрахунком тришарових пластин і оболонок [43]. Такі конструкції включають в себе два несучих шара і заповнювач, що забезпечує їхню спільну роботу. Для виведення рівнянь тришарових конструкцій кінематичні гіпотези застосовуються для кожного окремого шару. У цьому зв'язку порядок таких рівнянь буде визначатися кількістю шарів. Огляд результатів численних досліджень напружено-

деформованого стану, стійкості і коливань тришарових оболонок і пластин можна знайти в роботах Е.І. Гріголюка [23], Л. Лібреску, Т. Хаузі [44], А. Нура [45].

Рівняння багатошарових пластин з довільною кількістю шарів були побудовані В.В. Болотіним [46, 47] стосовно армованих шаруватих середовищ. Тут багатошарові пластини представлені як системи жорстких і м'яких шарів, що чергуються. М'які шари визначаються властивостями зв'язуючого і сприймають поперечні дотичні напруження. Для жорстких шарів справедлива гіпотеза прямої нормалі. Як граничний варіант загальної моделі запропонована теорія шаруватих композиційних матеріалів дрібно шаруватої структури.

Слід зазначити, що при постановці, яка враховує тривимірний характер роботи кожного шару, пошаровому задоволенні умов на торцях, дискретно-структурна теорія дозволяє з високим ступенем точності описати як загальний напружено-деформований стан, так і локальні ефекти в шарах, наприклад, місцеву втрату стійкості.

При розрахунках шаруватих оболонок часто доводиться враховувати різного роду недосконалість, тобто початкові прогини серединної поверхні несучих шарів, непроклеї і т.д. У цьому зв'язку кращою виявляється дискретно-структурна теорія багатошарових оболонок, вихідна математична модель якої враховує специфіку роботи кожного окремого шару. Трудомісткість задач значно зростає, якщо на ділянці розшарування враховується контакт шарів.

## **1.2. Термопружність багатошарових армованих елементів конструкцій**

Ефективність роботи композиційних матеріалів в сучасних виробках забезпечується поєднанням в композитах наступних властивостей: малої щільності, високої жорсткості і високої міцності при можливості управління



цими властивостями раціональним армуванням; високою теплоізоляційною і теплозахисною здатністю; об'єднанням в одному конструктивному елементі силових, теплоізоляційних і теплозахисних функцій.

Але реалізація переваг композиційних матеріалів у порівнянні з традиційними матеріалами можлива лише на основі глибокого розуміння їхньої роботи в конструктивних елементах при реальній експлуатації.

У число завдань, вирішення яких необхідне для більш широкого впровадження композиційних матеріалів в техніці, входить: експериментальне вивчення теплового деформування, в'язкопружних і міцностних властивостей композиційних матеріалів при постійних і змінних підвищених і високих температурах, так як температура є чинником, який дуже сильно впливає на фізичні і механічні властивості композитів; розробка математичних моделей фізико-механічної поведінки композитів і конструкцій з них, і створення на їх основі програм оптимізаційних розрахунків на ЕОМ параметрів багатошарових конструкцій з композиційних матеріалів, що дозволяють враховувати силові і теплові впливи; розробка чисельних методів розрахунку конструкцій з композиційних матеріалів при підвищених і високих температурах і розробка методів експериментального підтвердження міцності конструкцій з композитів.

Існують два шляхи визначення ефективних характеристик композитів. Перший напрямок є чисто феноменологічним, причому фізико-механічні сталі визначаються на основі лабораторних випробувань зразків із шаруватих матеріалів. Другий підхід базується на елементах структурного аналізу і припускає вираз фізико-механічних характеристик шаруватого середовища через фізико-механічні характеристики матеріалів шарів, через їх питомий об'ємний зміст, товщину шарів і інші макроскопічні параметри. Другий шлях являється кращим як з теоретичної, так і практичної точки зору. В силу актуальності проблеми визначення ефективних термомеханічних характеристик композитів за останні роки запропоновано безліч структурних моделей механіки шаруватих тонкостінних конструкцій [18, 22, 27, 48-53].

Білозеров і Кіреєв [48] розглядають композиційний матеріал, що складається з шарів з різними теплофізичними характеристиками. Якщо їх товщина досить мала в порівнянні з розмірами оболонки і відстанями, на яких температура і тепловий потік змінюються на помітну величину, то розрахунок теплофізичних характеристик пакету можна виконувати, приймаючи моношар анізотропним і квазіоднорідним з усередненими коефіцієнтами теплопровідності, температуропровідності та лінійного теплового розширення.

Визначенню ефективної теплопровідності в односпрямованому композиті присвячені роботи В.С. Зарубіна, Г.Н. Кувиркіна та ін. [54-60]. Односпрямований волокнистий композит по відношенню до властивості теплопровідності є анізотропним матеріалом, що характеризується тензором другого рангу ефективної теплопровідності. Компоненти цього тензора залежать від ряду параметрів, які входять в математичну модель процесу переносу теплової енергії в такому композиті.

Основна особливість всіх цих теорій полягає в тому, що вони базуються на співвідношеннях і рівняннях симетричної теорії пружності. Визначення ефективних термомеханічних характеристик шаруватих композитів в рамках несиметричної теорії пружності розглядається в роботі [61].

Існує достатня кількість гіпотез і припущень, а також і розрахункових співвідношень механіки деформованого твердого тіла, які використовують в механіці композиційних матеріалів. Так, напружено-деформований і температурний стан конструкцій з композиційних матеріалів характеризується [53, 60, 62-66] переміщеннями  $u_j(x_k, t)$ , деформаціями  $\varepsilon_{ij}(x_k, t)$ , напруженнями  $\sigma_{ij}(x_k, t)$  при  $i, j = 1, 2, 3$  і температурою  $T(x_k, t)$  в усіх точках тіла  $x_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  в кожен момент часу  $t$ .

Але, на відміну від традиційної механіки деформованого твердого тіла, розгляд конструкції з композиційних матеріалів, особливо при підвищених і високих температурах, призводить до більш складних задач.

Багато в чому це пов'язано з інтенсивною повзучістю полімерних композитів [58, 67 - 70], коли навіть при незмінних температурах, граничних умовах і зовнішніх силах поля  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  змінюються в часі.

Перший етап розв'язання задач термопружності – визначення температурних полів [71-75] за допомогою рівнянь теплопровідності. При цьому, як правило, вважається, що напружено-деформований стан не впливає на розподіл температур в конструкції, тобто розглядається незв'язана задача термопружності. Розрив зазначеного зв'язку істотно спрощує розв'язання задач термопружності. Другий етап – визначення напружено-деформованого стану конструкції з урахуванням вже відомого розподілу температурного поля в конструкції [18, 19, 27, 53, 60, 70, 76 - 89].

Системи нелінійних тривимірних динамічних рівнянь зв'язаної задачі термопружності для опису поведінки багатошарових оболонок вперше були отримані В.В. Бакуліним і І.Ф. Зразковим [90]. Також були розроблені методи їх вирішення. В.В. Бакулін розробив ефективний підхід для побудови уточнених чисельно-аналітичних моделей шаруватих, в тому числі тришарових оболонок, при адекватному моделюванні геометрії конструкцій, їх умов закріплення та навантаження, деформацій, анізотропії, змінних фізико-механічних властивостей і параметрів напружено-деформованого стану по товщині шаруватого пакету і окремих шарів, що дозволило значно розширити клас розв'язуваних задач із розрахунку оболонкових конструкцій [91, 92].

Під час оцінки граничного стану конструкцій із композиційних матеріалів значна увага має приділятися вивченню закономірностей їх теплового деформування. Це пов'язано з тим, що теплова деформація композиційних матеріалів залежить як від складу і структури матеріалу, так і характеру розподілу температурного навантаження в часі [52, 57, 93, 94].

Складна багатофакторна залежність коефіцієнта теплового деформування композиційних матеріалів ускладнює його вивчення як в експериментальному, так і в теоретичному плані. Тому на цей час ця фізична

характеристика для більшості композиційних матеріалів ще недостатньо вивчена.

Експерименти показують [57, 94], що для багатьох композиційних матеріалів при температурах нижче 150 °С процеси термодеструкції полімерного сполучного мало помітні, внаслідок чого в даному температурному діапазоні при зростанні температури матеріал розширюється. Зі збільшенням температури вище 150 °С деформація зменшується.

Досить глибокий аналіз особливостей теплового деформування вугле- і склопластиків з полімерною матрицею, представлений в роботі [94], де вивчено ряд основних закономірностей теплового деформування полімерних композиційних матеріалів. Тут наголошується, що при високотемпературному нагріві композитів в них відбуваються фізико-хімічні перетворення, при яких матеріал типу склопластиків, вугле-, вуглеметалопластиків, зв'язуючими в яких є фенольні, фенолоформальдегідні або інші смоли, перетворюються в пористу композицію, що складається з коксу, зміцненого азбестовими, кремнеземними, вугільними, металевими або іншими волокнами.

Для виявлення особливостей теплового деформування теплозахисних склопластиків в реальних виробках, експериментально вивчалася теплове деформування склопластиків в умовах максимально наближених до умов експлуатації. Отримані результати представлені в роботах [95-97].

При всьому різноманітті експериментальних і теоретичних досліджень теплового навантаження композиційних матеріалів ще рано говорити, що дана проблема повністю вирішена.

### **1.3. Чисельне моделювання напруженого стану та експериментальні дослідження шаруватих конструкцій**

Оболонки і пластини з анізотропних композиційних матеріалів, які знаходяться в неоднорідних температурних та силових полях з наявністю інтенсивних процесів повзучості, практично неможливо розрахувати

аналітичними методами. Тому для роз'язання такого класу задач широко застосовуються чисельні методи, основними з яких є метод кінцевих різниць (МКР) і метод кінцевих елементів (МКЕ). Останнім часом були опубліковані роботи, в яких використовується математичний апарат сплайн-функцій.

Історично першим чисельним методом вирішення диференціальних рівнянь був метод кінцевих різниць (МКР). Його застосування при розрахунку стержнів, пластин і оболонки описано в роботах [72, 81, 98-100]. Автори зазначених робіт наводять формули різного порядку точності для різницевого похідних з поясненнями способів їх побудови та застосування. Але, на жаль, у зазначених роботах відсутній детальний аналіз точності застосовуваних варіантів МКР при розрахунку напружено-деформованого стану стержнів, пластин і оболонки.

Такий аналіз доцільно виконувати зіставленням чисельних рішень з точними рішеннями для задач, що мають точний аналітичний розв'язок. Це дозволить сформулювати об'єктивний висновок щодо до точності МКР в тих чи інших випадках.

Відсутність на даний час достовірної інформації про можливості МКР для роз'язання задач деформування пружних конструкцій призвело до загальноприйнятого переконання, що МКР у всьому поступається МКЕ.

Найбільш ефективний і універсальний чисельний метод механіки деформованого твердого тіла – метод кінцевих елементів (МКЕ) [62, 63, 86, 101, 102, 103]. Прийнята наступна класифікація кінцевих елементів (КЕ): кусково-неоднорідної (шаруватої) структури, просторові чи тривимірні КЕ, спеціалізовані двовимірні КЕ для розрахунку тришарових конструкцій, двовимірні КЕ для розрахунку шаруватих систем з довільною кількістю шарів [104 – 107].

На жаль, до цих пір дуже мало результатів по дослідженню точності МКЕ в порівнянні з іншими чисельними методами. Це є наслідком того, що більшість користувачів МКЕ твердо переконані, що МКЕ є найкращим з усіх

існуючих чисельних методів, і тому немає необхідності аналізувати його точність.

Інший напрямок чисельно-аналітичних підходів покладено у роботах Я.М. Григоренко і його співавторів [20, 108], де за допомогою різних аналітичних прийомів співвідношення розглянутої математичної моделі оболонки або пластини зводяться до системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Крайові задачі при цьому вирішуються стійким чисельним методом, як правило, методом дискретної ортогоналізації Годунова [109].

Наявність локальних і крайових ефектів, які викликані неоднорідною структурою нових конструкційних матеріалів, високою змінністю зовнішнього навантаження, способом кріплення країв конструкції, накладає певні умови розв'язку крайових задач та обумовлює нестійкість розрахунку в процесі чисельної реалізації задачі. Останнім часом для таких задач широко використовується математичний апарат сплайн-функцій [110, 111], перевага якого полягає у високій стійкості сплайнових апроксимацій щодо різного роду локальних збурень, швидкої збіжності, простотою і зручністю реалізації алгоритмів. Огляд робіт з теорії пластин і оболонок з використанням методу сплайнової апроксимації міститься в [110]. До чисельно-аналітичних підходів також слід віднести методи, в яких на основі гібридного підходу використовується комбінація методів кінцевих різниць і граничних елементів, а також методу рядів Фур'є і методу граничних елементів.

Для наукового обґрунтування теорії шаруватих систем було виконано ряд експериментальних досліджень, мета яких полягала у виявленні особливостей деформування цих систем і обґрунтування положень теорії. Дані щодо експериментальних робіт порівняно нечисленні [112-119]. Спочатку експерименти були поставлені і проведені для тришарових конструкцій.

Дані випробувань на згинання тришарових елементів конструкцій містяться в роботах А.Я. Александрова, Л.Е. Брюккера, Л.М. Куршіна [112],

В.І. Королева [115], Е.С. Остерніка [116]. Експериментальні зразки виконувались у вигляді пластин прямокутної форми із зовнішніми алюмінієвими шарами і пінопластовим заповнювачем. Досліджувався вплив величини модуля зсуву заповнювача, умов закріплення торців, геометричних розмірів пластини і співвідношень товщини заповнювача до товщини зовнішніх шарів на напружено-деформований стан тришарових конструкцій. В [117] експериментально на прикладі згинання тришарової балки був підтверджений нелінійний закон розподілу по висоті балки тангенціальних переміщень, підтверджує обґрунтованість застосування некласичної теорії.

Експериментальні дані для пластин симетричною структури з числом шарів більше трьох наведені в роботах [94, 120].

В [94] результати отримані для шарнірно закріплених пластин розв'язанням у тригонометричних рядах, а для інших випадків закріплення чисельно – МКЕ. Дані експерименту добре узгоджуються з теоретичними результатами.

Експериментально вивчено і теоретично доведено вплив поперечних зсувів на прогин і несучу здатність при згинанні вільно опертих квадратних пластин зі склопластику в роботі [119]. Крім того, тут на прикладі згинання багатошарових вільно опертих балок, навантажених двома зосередженими силами, експериментально і теоретично досліджується викривлення поперечних перерізів.

Несуча здатність склопластикових трубчастих зразків при осьовому розтягуванні залежно від величини кута укладання шарів перехресно армованого композиту теоретично і експериментально вивчалася авторами роботи [112].

Випробування тонкостінних труб зі склопластику проводилися на розтягування і кручення, внутрішній і зовнішній тиск, також було вивчено напружено-деформований стан зразків від дії на них різного роду поєднань зазначених видів навантаження. Всі зразки труб випробовувалися до

руйнування. Експериментальна перевірка найбільш поширених критеріїв міцності для композиційних матеріалів проведена в [118].

Методика визначення масштабних коефіцієнтів подібності фізико-механічних характеристик конструкцій зі склопластику запропонована в роботі [113]. Для експериментальної перевірки цієї методики зі склопластику різних розмірів були виготовлені зразки у вигляді пластинок, призм і кілець. Результати випробувань серії великомасштабних і дрібномасштабних зразків показали, що існує проста подібність в статистичному сенсі в межах 12%.

Зразки [120], отримані методом спірального намотуванням просоченого смолою базальтового джгута на циліндричну металеве оправлення, випробовувалися на розрив і зсув армованого шару до його руйнування. Попередньо до моменту розрива армованого шару під час деформацій розтягання відбувалося руйнування на поверхні розділу метал – армований шар внаслідок поширення міжфазної тріщини.

У роботах [16, 20, 30, 46, 52, 70] вказані особливості дослідницького обладнання, методики проведення експерименту та аналіз отриманих результатів процесу деформування полімерних композиційних матеріалів при розтяганні та згинанні в умовах об'ємного і однобічного нагрівів, а також проведено моделювання теплових впливів, близьких до експлуатаційних. Дослідження з кінетики термодеструкції надані в роботі [56].

Для комплексної оцінки несучої здатності композитів при високотемпературному нестационарному односторонньому нагріві в роботі [68] запропоновано використовувати методи теорії подібності. Поряд з критеріальним підходом в роботі [68] зроблена спроба прогнозування напружено-деформованого стану стержнів з композиційних матеріалів при односторонньому нагріванні на основі механічних характеристик, отриманих в стаціонарних умовах випробувань. При цьому розраховувався напружено-деформований стан бруса при згинанні постійним по довжині моментом в умовах одностороннього високотемпературного нагріву, коли матеріал розглядається як пружний.



#### **1.4. Розрахунки на міцність конструкцій з композиційних матеріалів**

Існуючі проблеми сучасної механіки композитів відображені в монографіях [48, 53, 121]. Дослідження в області теорії шаруватих композитних систем показали, що при дії на них силових полів, змінність яких описується довжинами хвиль, які істотно перевищують розміри структурних елементів, композит можна розглядати як однорідний анізотропний матеріал. Специфіка полягає тільки в тому, що коефіцієнти рівнянь стану еквівалентного анізотропного матеріалу будуть залежати від властивостей складових компонентів композиту.

В даний час досить повно розроблені й обґрунтовані методи визначення ефективних характеристик композиту, якщо його поведінка описується узагальненим законом Гука, і значно меншою мірою, якщо він деформується нелінійно або пружно-пластично. Такий підхід дозволяє здійснювати розрахунок конструкцій з композитів методами теорії пружності анізотропного тіла [56, 59, 75, 122 - 126].

Проте слід визнати, що модель композиту як анізотропного тіла є наближеною, оскільки вона не враховує ефектів мікромеханічного характеру [48, 127]. Все ж вона виявилася достатньо обґрунтованою при визначенні таких інтегральних характеристик як переміщення, зусилля і моменти, критичні навантаження і частоти коливань оболонок.

Експериментально і теоретично показано [128, 129], що шаруваті композиційні матеріали через високу анізотропію механічних властивостей елементарних шарів, починаючи з деякого рівня навантаження, виявляють, так звану, “конструктивну нелінійність” [112]. Шари, для яких критерій міцності виконуються раніше при зростанні навантаження, перестають сприймати додаткове навантаження. Відбувається перерозподіл навантаження на ще незруйновані шари. В цілому шаруватий пакет зберігає несучу здатність, однак його жорсткість змінюється в процесі навантаження. Непружня робота волокнистих композитів на макрорівні під час

навантаженням може бути також наслідком стійкого процесу накопичення або розвитку мікротріщин в структурі матеріалу.

В роботі [130] запропоновані методи визначення ефективних характеристик матеріалу при наявності тріщин на кордоні волокно – зв'язуюче. Ці методи можна використовувати для визначення модулів матеріалу на кожному етапі навантаження, якщо відомі розміри тріщин при досягнутому рівні навантаження.

Різні критерії міцності з'єднання шарів при наявності розшарувань, види і моделі руйнування, а також експериментальні методи визначення опору композитів розшаруванню розглядаються в [53, 131].

Прогнозування міцності композиційного матеріалу методами структурного моделювання в ряді випадків призводить до невірних результатів не тільки в кількісному, але і в якісному відношенні. Це пояснюється тим, що руйнування композиту є багатофакторним фізично неоднорідним процесом [131], де фізико-механічні характеристики елементів композиції відіграють важливу, але не визначальну роль. Процесу макроруйнування композиту, який зазвичай призводить до повної втрати його функціональних якостей як конструкційного матеріалу, існує попередньо більш-менш тривалий період зародження, взаємодії та розвитку в обсязі композиту різних мікродефектів, про що свідчать дані сейсмоакустичних, рентгеноструктурних та інших методів дослідження [132].

На міцність конструкції з композиційного матеріалу істотно впливають її розміри, форма і характер навантаження (швидкість навантаження, вид прикладеного навантаження, взаємодія різних видів навантаження між собою і такі супутні фактори, як температура, вологість, радіація і т. п.) . Крім того, руйнування композиційного матеріалу є стохастичним процесом.

Структурний підхід до оцінки макроміцності композиту полягає у визначенні залежності характеристик макроруйнування композиту, так званих характерних міцностей [44, 133,134], від характеристик міцності структурних елементів і параметрів макроструктури композиту. При цьому характеристики

міцності структурного елементу визначаються експериментально або теоретично в результаті розрахунку його спільної роботи структури і вихідних елементів.

У разі якщо втрата несучої здатності конструкції з композиту зв'язується з початковими стадіями процесу руйнування конструкційного матеріалу. При цьому враховується початок процесу руйнування окремих структурних елементів, а на мікрорівні – вихідних елементів композиції. Така група критеріїв, які задають умови досягнення відповідних граничних станів композиту називається критеріями початкового руйнування. Критерії початкового руйнування, що описують умови виникнення дефектів структури композиту, запропоновані в роботі [135].

Для композитів з пластичною матрицею початок руйнування пов'язують з виникненням в зв'язуючому пластичних деформацій. В якості критерію початкового руйнування для таких матеріалів вибирається одна з умов пластичності (текучості) [44]. При цьому поверхня початкового руйнування композиту буде збігатися з поверхнею текучості матеріалу зв'язуючого.

У випадках, коли ранні стадії руйнування конструкційного матеріалу за умовами експлуатації конструкції допустимі або руйнування матеріалу розглядається на більш високих структурних рівнях, початок руйнування композиту пов'язують з руйнуванням окремих структурних елементів відповідного порядку. Так для шаруватих композитів застосовується пошаровий аналіз руйнування [34, 55].

Ідея пошарового аналізу руйнування шаруватого композиту полягає в оцінці несучої здатності кожного моношару пакета з наступним виключенням з розгляду зруйнованих і перерахунку напруженого стану незруйнованого пакету. Процедура припиняється після виконання критерію макроруйнування шаруватого пакета. Такий підхід узагальнюється на випадок довільного структурного елементу композиту, деформативні та характеристики міцності якого відомі.

### **1.5. Висновки по першому розділу**

Проведено аналіз різних розрахункових моделей і методик розрахунку напружено-деформованого стану багатошарових елементів конструкцій з дефектами структури від дії статичних та температурних навантажень. Результатом аналізу став висновок, що в даний час проводиться активна робота по створенню ефективних методик розрахунку багатошарових конструкцій на основі дискретно-структурної теорії, коли враховується анізотропія термопружних властивостей матеріалу, схеми армування, особливості спільної роботи та умови контакту шарів, температурні навантаження. Актуальними також залишаються питання експериментальної перевірки різних моделей, які враховують дефекти структури композиційного матеріалу, вплив температури.

## 2. ДИСКРЕТНО-СТРУКТУРНА ТЕОРІЯ БАГАТОШАРОВИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

Даний розділ присвячений розробці методики розрахунку багатошарових оболонок обертання при дії статичних і температурних навантажень, згідно якої реалізуються як ідеальні, так і ослаблені умови контакту сполучених поверхонь анізотропних шарів з різними напрямками армування матеріалу. Основні результати цього розділу викладені в роботі [136].

На основі запропонованого в [136] варіанта дискретно-структурної теорії розроблена одна з моделей, згідно з якою враховуються ослаблені умови контакту сполучених поверхонь анізотропних шарів з різними напрямками армування матеріалу.

Внаслідок того, що між жорсткими шарами в процесі виготовлення анізотропних оболонок утворюється міжфазний м'який клейовий шар, товщину цього шару, як правило, вважають рівною нулю. Тоді відповідно до допущень розглянутого варіанта моделі передбачається пружне проковзування жорстких шарів один щодо одного, тобто по лицьовим сполученим поверхням виконуються тільки статичні умови контакту. Вважається, що напруження поперечного зсуву та обтиснення на границі контакту рівні між собою.

Для оцінки достовірності результатів, отриманих по першій і другій моделі, розроблений варіант нелінійної теорії анізотропних оболонок з урахуванням поперечного зсуву та обтиснення із залученням варіаційного принципу Рейснера і безперервно-структурної моделі теорії пластин і оболонок.

Крім того, запропоновано варіант рівнянь теплопровідності для багатошарової оболонки, яка складається з  $n$  анізотропних криволінійних шарів з різними теплофізичними властивостями. Наведена задача теплопровідності розв'язується без урахування впливу деформування

конструкції на зміну поля температур і відноситься до класу незв'язаних задач теорії термопружності.

На основі узагальненого варіаційного рівняння принципу Рейснера і дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок складені рівняння термопружності в змішаній формі.

## 2.1. Геометрично нелінійна деформація криволінійного шару за уточненою теорією Тимошенко

Нехай багатошарова оболонка складається з анізотропних криволінійних шарів, об'єм яких  $V = \sum_{k=1}^n V^{(k)}$ . Для позначення площі нижньої і верхньої лицьових поверхонь багатошарової оболонки в цілому застосовуються символи  $S^0$  і  $S^n$ ;  $\Gamma = \sum_{k=1}^n \Gamma^{(k)}$  бокова поверхня, що є об'єднанням лінійчатих поверхонь, перпендикулярних серединним поверхням кожного  $k$ -го шару. Вважається, що  $k$ -й шар недеформованої оболонки віднесений до ортогональної криволінійної системи гаусових координат  $\alpha_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2$ ),  $z^{(k)}$ . Координата  $z^{(k)}$  спрямована по загальній нормалі  $\vec{m}^{(k)}$  до серединної поверхні  $S^{(k)}$  і еквідистантної поверхні  $S_z^{(k)}$   $k$ -го шару. Індекс “ $z$ ” при введенні інших символів означає, що відповідні величини відносяться до точки  $(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, z^{(k)})$  еквідистантної поверхні  $S_z^{(k)}$ . Положення точки недеформованої поверхні  $S_z^{(k)}$  буде визначатися радіус-вектором

$$\vec{\rho}^{(k)} = \vec{r}^{(k)} + \vec{m}^{(k)} z^{(k)}, \left( -\frac{h^{(k)}}{2} \leq z^{(k)} \leq \frac{h^{(k)}}{2} \right) \quad (2.1)$$

базисні вектори в точці  $\alpha_i^{(k)}$ ,  $z^{(k)}$  поверхні  $S_z^{(k)}$

$$\vec{\rho}_i^{(k)} = \frac{\partial \vec{\rho}^{(k)}}{\partial \alpha^i} = \vec{r}_j^{(k)} (\delta_i^j - z^{(k)} \delta_i^{j(k)}) = \vec{r}_j^{(k)} Z_i^{(k)j} = \vec{r}_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} z^{(k)}, \quad \vec{\rho}_i^{(k)} = \vec{m}^{(k)}, \quad (2.2)$$

де  $\vec{r}^{(k)}$  радіус-вектор точки серединної поверхні  $S^{(k)}$ ;  $\vec{m}^{(k)}$  – нормаль одиничної довжини до поверхні  $S^{(k)}$ ;  $\delta_i^j$  – тензорний запис символу Кронекера;

$$a_{ij}^{(k)} = \vec{r}_i^{(k)} \vec{r}_j^{(k)}, \quad b_{ij}^{(k)} = -\vec{m}_i^{(k)} \vec{r}_j^{(k)} = \vec{m}_j^{(k)} \vec{r}_i^{(k)}, \quad b_i^{(k)j} \vec{r}_j^{(k)} = -\vec{m}_i^{(k)}, \quad (i=1,2, j=1,2) \quad (2.3)$$

коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні  $S^{(k)}$ ;  $\vec{m}^{(k)} = \frac{\partial \vec{m}^{(k)}}{\partial a_i^{(k)}} -$

похідна нормалі  $\vec{m}^{(k)}$

Вектор повного переміщення  $\vec{u}_z^{(k)}$  точки  $k$ -го жорсткого шару згідно з уточненою теорією оболонок Тимошенка можна представити у вигляді

$$\vec{u}_z^{(k)} = \vec{u}^{(k)} + z^{(k)} \vec{\gamma}^{(k)} + \varphi^{(k)}(z) \vec{\Psi}^{(k)} \quad (2.4)$$

де  $\vec{u}^{(k)}$  – вектор переміщення точок серединної поверхні  $S^{(k)}$ ;  $\vec{\gamma}^{(k)}$  – вектор-функція кутів повороту і обтиснення волокон, перпендикулярних недеформованій серединній поверхні  $S^{(k)}$ ;  $\varphi^{(k)}(z)$  – нелінійна безперервна функція розподілу тангенціальних переміщень по товщині  $k$ -го шару, аналіз і апроксимація якої наведені в [18];  $\vec{\Psi}^{(k)}(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)})$  – вектор функцій зсуву.

Тут для врахування деформацій поперечних зсувів і обтиснень вводиться припущення про те, що перпендикулярний недеформованій (вихідній) координатній поверхні оболонки прямолінійний елемент після деформації виявляється вже не перпендикулярним недеформованій поверхні і змінює свою довжину. При цьому вираз (2.4) визначає нелінійний характер зміни тангенціальних переміщень по товщині  $k$ -го шару. Коваріантні компоненти векторів  $\vec{u}^{(k)}$ ,  $\vec{\gamma}^{(k)}$ ,  $\vec{\Psi}^{(k)}$  записуються за допомогою наступних виразів:

$$\bar{\mathbf{u}}^{(k)} = \bar{\mathbf{r}}^{(k)i} \mathbf{u}_i^{(k)} + \bar{\mathbf{m}}^{(k)} \mathbf{w}^{(k)}; \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{(k)} = \bar{\mathbf{r}}^{(k)i} \boldsymbol{\gamma}_i^{(k)} + \bar{\mathbf{m}}^{(k)} \boldsymbol{\gamma}^{(k)}; \bar{\boldsymbol{\Psi}}^{(k)} = \bar{\mathbf{r}}^{(k)i} \boldsymbol{\Psi}_i^{(k)} \quad (2.5)$$

Тоді радіус-вектор точки  $k$ -го шару оболонки після деформації буде мати вигляд:

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}^{(k)*} = \bar{\boldsymbol{\rho}}^{(k)} + \bar{\mathbf{u}}_z^{(k)}, \quad (2.6)$$

а відповідні йому базисні вектори:

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}_i^{(k)*} = \bar{\boldsymbol{\rho}}_i^{(k)} + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_z^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}}, \quad \bar{\boldsymbol{\rho}}_3^{(k)*} = \bar{\mathbf{m}}^{(k)} + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}}, \quad (2.7)$$

Коваріантні компоненти тензора кінцевих деформацій у точці  $(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, z^{(k)})$  визначаються як напіврізниць компонентів метричних тензорів до і після деформації

$$2\varepsilon_{ij}^{(k)z} = \mathbf{g}_{ij}^{(k)*} - \mathbf{g}_{ij}^{(k)}, \quad 2\varepsilon_{ij}^{(k)z} = \mathbf{g}_{i3}^{(k)*} - \mathbf{g}_{i3}^{(k)}, \quad 2\varepsilon_{33}^{(k)z} = \mathbf{g}_{33}^{(k)*} - 1, \quad (2.8)$$

$$\text{де} \quad \mathbf{g}_{ij}^{(k)} = \bar{\boldsymbol{\rho}}_i^{(k)} \bar{\boldsymbol{\rho}}_j^{(k)}, \quad \mathbf{g}_{ij}^{(k)*} = \bar{\boldsymbol{\rho}}_i^{(k)*} \bar{\boldsymbol{\rho}}_j^{(k)*}, \quad \mathbf{g}_{i3}^{(k)} = \bar{\boldsymbol{\rho}}_i^{(k)} \bar{\boldsymbol{\rho}}_3^{(k)}, \quad \mathbf{g}_{i3}^{(k)*} = \bar{\boldsymbol{\rho}}_i^{(k)*} \bar{\boldsymbol{\rho}}_3^{(k)*},$$

$$\mathbf{g}_{33}^{(k)} = \bar{\boldsymbol{\rho}}_3^{(k)} \bar{\boldsymbol{\rho}}_3^{(k)} = \bar{\mathbf{m}}^{(k)} \bar{\mathbf{m}}^{(k)} = 1, \quad \mathbf{g}_{33}^{(k)*} = \bar{\boldsymbol{\rho}}_3^{(k)*} \bar{\boldsymbol{\rho}}_3^{(k)*} \quad (i=1,2, j=1,2) \quad (2.9)$$

Підставляючи в (2.8), (2.9) значення базисних векторів (2.2), (2.7), неважко знайти геометричні залежності між деформаціями і переміщеннями в векторній формі

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i3}^{(k)z} &= \frac{1}{2} \left[ \bar{\boldsymbol{\rho}}_3^{(k)} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_z^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} + \bar{\boldsymbol{\rho}}_i^{(k)} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_z^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}} \right], \\ \varepsilon_{ij}^{(k)z} &= \frac{1}{2} \left[ \bar{\boldsymbol{\rho}}_j^{(k)} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_z^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} + \bar{\boldsymbol{\rho}}_i^{(k)} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_z^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_z^{(k)}}{\partial \alpha_j^{(k)}} \right], \\ \varepsilon_{33}^{(k)z} &= \bar{\boldsymbol{\rho}}_3^{(k)} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$



Використовуючи операції тензорного аналізу і теорію середнього вигину [137], співвідношення (2.10) можна привести до вигляду:

$$\varepsilon_{ij}^{(k)z} = \varepsilon_{ij}^{(k)} + z \chi_{ij}^{(k)}, \quad (2.11)$$

$$2\varepsilon_{i3}^{(k)} = \omega_i^{(k)} + \theta_i^{(k)}, \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \varepsilon_{33}^{(k)} = \gamma^{(k)}, \quad (2.13)$$

де 
$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} + e_{ji}^{(k)} + \omega_i^{(k)} \omega_j^{(k)}, \quad (2.14)$$

$$2\chi_{ij}^{(k)} = \nabla_i \beta_j^{(k)} + \nabla_j \beta_i^{(k)} - B_i^{(k)\gamma} e_{j\gamma}^{(k)} - B_j^{(k)\gamma} e_{i\gamma}^{(k)}. \quad (2.15)$$

Величини  $\beta_i^{(k)}$  і  $\theta_i^{(k)}$  визначаються залежностями:

$$\beta_i^{(k)} = \gamma_i^{(k)} + f^{(k)}(z) \Psi_i^{(k)}, \quad \theta_i^{(k)} = \gamma_i^{(k)} + \varphi^{(k)'}(z) \Psi_i^{(k)}. \quad (2.16)$$

У наведених співвідношеннях (2.11) – (2.15) нехтують впливом нелінійних членів на величини  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ ,  $\chi_{ij}^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{33}^{(k)}$ , за винятком доданків, добуток яких містять компоненти  $w^{(k)}$ . Це викликано, насамперед, тим, що тангенціальні переміщення  $u_1^{(k)}$ ,  $u_2^{(k)}$ , оболонки істотно менші переміщень  $w^{(k)}$  в напрямку нормалі до серединної поверхні. Застосовуючи правило коваріантного диференціювання і вирази символів Крістофеля 2-го роду, компоненти співвідношень (2.11) – (2.15) в ортогональних координатах, які збігаються з лініями головних кривизн, запишуться таким чином:

$$e_{11}^{(k)} = \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} - \Gamma_{11}^{(k)1} u_1^{(k)} - \Gamma_{11}^{(k)2} u_2^{(k)} - \Gamma_{11}^{(k)3} u_3^{(k)},$$

$$\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} - \frac{\partial A^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} u_1^{(k)} + \frac{A^{(k)}}{(B^{(k)})^2} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} u_2^{(k)} + k_1^{(k)} (A^{(k)})^2 w^{(k)}.$$

або з урахуванням фізичних компонент тензорів  $u_1^{(k)} = A^{(k)}u_{(1)}^{(k)}$ ,  $u_2^{(k)} = B^{(k)}u_{(2)}^{(k)}$ ,  $\omega^{(k)} = u_{(3)}^{(k)}$ ,  $e_{11}^{(k)} = (A^{(k)})^2 e_{(11)}^{(k)}$ , (після перетворень дужки у індексів були прибрані)

$$e_{11}^{(k)} = \frac{\partial u_1^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} - \frac{1}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} u_2^{(k)} + k_1^{(k)} w^{(k)}, \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}). \quad (2.17)$$

Символ  $(1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)})$  означає, що інші формули виходять з наведених перестановкою індексів 1, 2 і параметрів Ламе  $A^{(k)}, B^{(k)}$ . Аналогічно отримані інші співвідношення:

$$e_{12}^{(k)} = \frac{\partial u_2^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} - \frac{u_1^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.18)$$

$$\omega_1^{(k)} = \frac{\partial w^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} - k_1^{(k)} u_1^{(k)} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.19)$$

$$\chi_{11}^{(k)} = \frac{\partial \beta_1^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\beta_2^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} + k_1^{(k)} e_{11}^{(k)} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.20)$$

$$2\chi_{12}^{(k)} = \frac{B^{(k)}}{A^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1^{(k)}} \left( \frac{\beta_2^{(k)}}{B^{(k)}} \right) + \frac{A^{(k)}}{B^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2^{(k)}} \left( \frac{\beta_1^{(k)}}{A^{(k)}} \right) + k_1^{(k)} e_{21}^{(k)} + k_2^{(k)} e_{12}^{(k)}. \quad (2.21)$$

Співвідношення (2.20), (2.21) можна перетворити, якщо замінити в них  $\beta_1^{(k)}$  і  $\beta_2^{(k)}$  виразом –

$$\beta_i^{(k)} = \theta_i^{(k)} + g^{(k)}(z) \Psi_i^{(k)} = 2\varepsilon_{i3}^{(k)} - \omega_i^{(k)} + g^{(k)}(z) \Psi_i^{(k)}. \quad (2.22)$$

Тоді співвідношення (2.20) і (2.21) приймають вигляд:

$$\chi_{11}^{(k)} = \chi_{11}^{(k)0} + 2\beta_{11}^{(k)} + g^{(k)}(z) \Psi_{11}^{(k)} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.23)$$

$$\chi_{12}^{(k)} = \chi_{12}^{(k)0} + 2\beta_{12}^{(k)} + g^{(k)}(z)\Psi_{12}^{(k)} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.24)$$

де

$$\chi_{11}^{(k)0} = \frac{\partial \omega_1^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} - \frac{\omega_2^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} + k_1^{(k)} e_{11}^{(k)} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.25)$$

$$2\chi_{12}^{(k)0} = -\frac{B^{(k)}}{A^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1^{(k)}} \left( \frac{\omega_2^{(k)}}{B^{(k)}} \right) - \frac{A^{(k)}}{B^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2^{(k)}} \left( \frac{\omega_1^{(k)}}{A^{(k)}} \right) + k_1^{(k)} e_{21}^{(k)} + k_2^{(k)} e_{12}^{(k)}, \quad (2.26)$$

$$\beta_{11}^{(k)} = \frac{\partial \varepsilon_{13}^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} - \frac{\varepsilon_{23}^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.27)$$

$$2\beta_{12}^{(k)} = \frac{B^{(k)}}{A^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1^{(k)}} \left( \frac{\varepsilon_{23}^{(k)}}{B^{(k)}} \right) + \frac{A^{(k)}}{B^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2^{(k)}} \left( \frac{\varepsilon_{13}^{(k)}}{A^{(k)}} \right), \quad (2.28)$$

$$\Psi_{11}^{(k)} = \frac{\partial \Psi_1^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\Psi_2^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.29)$$

$$2\Psi_{12}^{(k)} = \frac{B^{(k)}}{A^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1^{(k)}} \left( \frac{\Psi_2^{(k)}}{B^{(k)}} \right) + \frac{A^{(k)}}{B^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2^{(k)}} \left( \frac{\Psi_1^{(k)}}{A^{(k)}} \right), \quad (2.30)$$

де  $\chi_{ij}^{(k)0}$  – компоненти тензора зміни кривизни серединної поверхні  $k$ -го шару згідно лінійної теорії оболонок за гіпотезою Кірхгофа-Лява.

Співвідношення (2.12), (2.20) і (2.21) можна представити в дещо іншому вигляді в порівнянні з формулами (2.23) і (2.24):

$$2\varepsilon_{i3}^{(k)} = 2\varepsilon_{i3}^{(k)\gamma} + \varphi^{(k)'}(z)\Psi_i^{(k)}, \quad (2.31)$$

$$\chi_{11}^{(k)} = \chi_{11}^{(k)\gamma} + f^{(k)}(z)\Psi_{11}^{(k)} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.32)$$

$$\chi_{12}^{(k)} = \chi_{12}^{(k)\gamma} + f^{(k)}(z)\Psi_{12}^{(k)} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.33)$$

де

$$2\varepsilon_{i3}^{(k)} = \omega_i^{(k)} + \gamma_i^{(k)},$$

$$\chi_{11}^{(k)} = \frac{\partial \gamma_1^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\gamma_2^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} + k_1^{(k)} e_{11}^{(k)} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.34)$$

$$2\chi_{12}^{(k)\gamma} = \frac{B^{(k)}}{A^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1^{(k)}} \left( \frac{\gamma_2^{(k)}}{B^{(k)}} \right) + \frac{A^{(k)}}{B^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2^{(k)}} \left( \frac{\gamma_1^{(k)}}{A^{(k)}} \right) + k_1^{(k)} e_{21}^{(k)} + k_2^{(k)} e_{12}^{(k)}. \quad (2.35)$$

Компоненти  $\Psi_{ij}^{(k)}$  визначаються залежностями (2.29) і (2.30).

## 2.2. Розв'язні рівняння дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок

Теорія багатошарових оболонок і пластин займає проміжне місце між теорією анізотропних оболонок і точними підходами, заснованими на тривимірних рівняннях теорії пружності. Слід зазначити, що існує загальна методологія побудови теорій тришарових і багатошарових оболонок. Остання з них узагальнюється таким чином, що дозволяє вирішувати задачі з урахуванням дискретного характеру роботи кожного окремо взятого анізотропного шару оболонки, тому порядок розв'язувальних рівнянь тут буде визначатися кількістю розглянутих шарів.

**2.2.1. Варіаційні рівняння принципу Рейснера шаруватих анізотропних структур.** В якості розглянутої тут математичної моделі приймається модель багатошарової оболонки, яка складається з  $n$  тонких анізотропних шарів (рис.2.1). Тонкою вважається оболонка (шар), якщо відносною товщиною  $h/R_{min}$  ( $R_{min}$  – мінімальне значення одного з головних радіусів кривизни) такої оболонки можна знехтувати в порівнянні з одиницею.

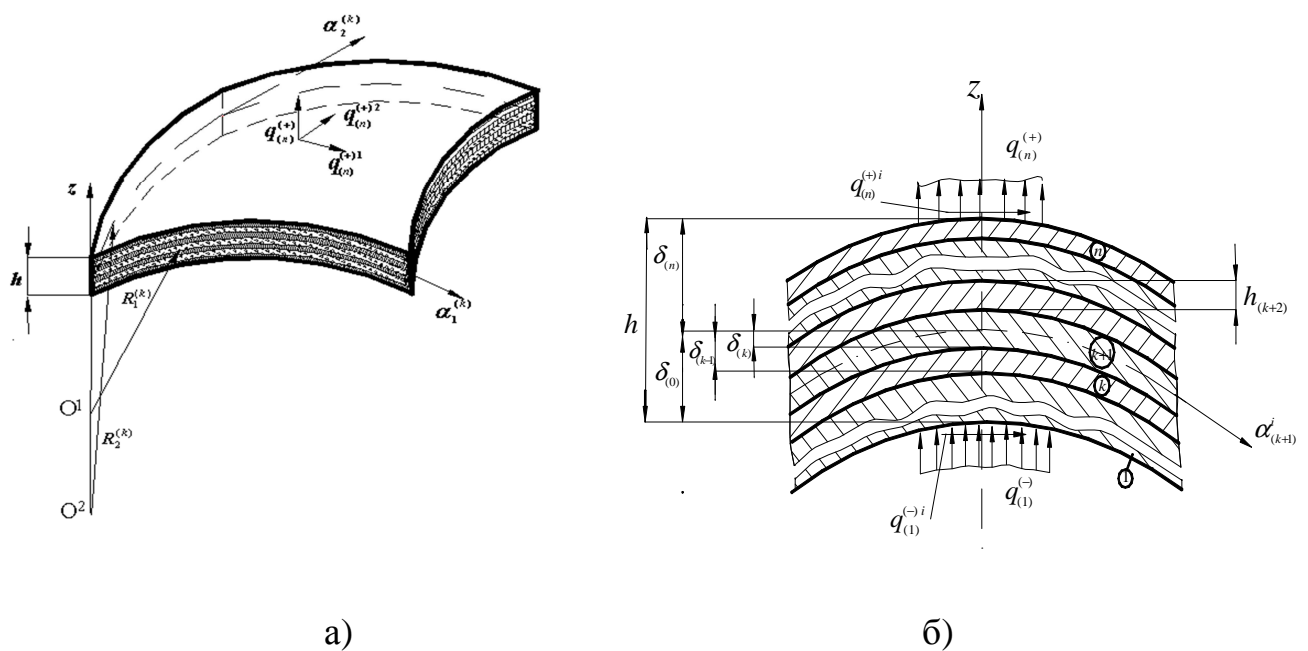


Рисунок 2.1 – Розрахункова модель багатошарової оболонки.

Нехай анізотропна оболонка розбита на  $n$  тонких дискретних шарів. При цьому прийнятті позначення і допущення підрозділу 2.1 про розподіл поперечних деформацій по товщині кожного дискретного шару, що розглядається як окремо взята оболонка із заданою локальною системою координат. Задавши напрямок поверхневого навантаження (рис.2.1), слід визначити властивості локальних систем координат  $\alpha_1^{(k)}$ ,  $\alpha_2^{(k)}$ ,  $z^{(k)}$  кожного  $k$ -го шару і загальної системи гаусових координат  $(\alpha_1, \alpha_2, z)$ . Вважається, що поперечні координатні лінії загальної і локальних систем суміщені, крім того, локальні координатні поверхні поєднані з серединними поверхнями шарів. Нумерація шарів починається з боку негативних значень координати  $z$  від одиниці до  $n$ .

Варіаційне рівняння принципу Рейснера для багат шарової оболонки запишеться таким чином:

$$\delta \mathcal{R} = \sum_{k=1}^n \delta \mathcal{R}^{(k)} = \sum_{k=1}^n \delta A_R^{(k)} - \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \delta (\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{(k)} - F^{(k)}) dV = 0, \quad (2.36)$$

де  $\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}$  – контраваріантні компоненти тензора напружень (перший індекс " $\alpha$ " вказує на те, що ці напруження віднесені до одиниці площі недеформованої координатної поверхні  $X^\alpha = \text{const}$  і діють на площадку на деформованій поверхні  $X^\alpha = \text{const}$ , в яку переходить первісна координатна поверхня; другий індекс " $\beta$ " вказує на базисні вектори недеформованого тіла, щодо яких обчислюються компоненти тензора напружень);  $\eta_{\alpha\beta}^{(k)}$  – тензор деформацій Гріна;  $F^{(k)}$  – функція додаткової енергії деформації.

Якщо для  $k$ -го шару оболонки використовуються наступні умови ідеального контакту між шарами (рис.2.1):

$$\mathbf{u}_\beta^{(k,k-1)} = \mathbf{u}_\beta^{(k-1,k)}, \quad X_{(k,k-1)}^\beta = X_{(k-1,k)}^\beta, \quad (2.84)$$

або у векторному вигляді –

$$\begin{aligned}\bar{u}_z^{(k)}\left(\alpha_i^{(k)}, -\frac{h^{(k)}}{2}\right) &= \bar{u}_z^{(k-1)}\left(\alpha_i^{(k-1)}, \frac{h^{(k-1)}}{2}\right), \\ \bar{X}_{(k)}\left(\alpha_i^{(k)}, -\frac{h^{(k)}}{2}\right) &= \bar{X}_{(k-1)}\left(\alpha_i^{(k-1)}, \frac{h^{(k-1)}}{2}\right) \quad (i=1,2), \quad (2.38)\end{aligned}$$

тоді варіація елементарної роботи зовнішніх сил  $\delta A_R$  запишеться в такому вигляді:

$$\begin{aligned}\delta A_R &= \sum_{k=1}^n \delta A_R^{(k)} = \iint_{S_{(n)}} (\bar{X}_{(n)} \delta \bar{u}^{(n)} + M_{(n)}^i \bar{r}_{i*}^{(n)} \cdot \delta \bar{\gamma}^{(n)} + B_{(n)}^i \bar{r}_{i*}^{(n)} \cdot \delta \bar{\psi}^{(n)} + M_{(n)}^3 \delta \varepsilon_{33}^{(n)z}) dS + \\ &+ \iint_{S_{(-)}} (\bar{X}_{(1)} \delta \bar{u}^{(1)} + M_{(1)}^i \bar{r}_{i*}^{(1)} \cdot \delta \bar{\gamma}^{(1)} + B_{(1)}^i \bar{r}_{i*}^{(1)} \delta \bar{\psi}^{(1)} + M_{(1)}^3 \delta \varepsilon_{33}^{(1)z}) dS + \sum_{k=2}^{n-1} \iint_{S_{(k)}} (\bar{X}_{(k)} \delta \bar{u}^{(k)} + \\ &+ M_{(k)}^i \bar{r}_{i*}^{(k)} \delta \bar{\gamma}^{(k)} + B_{(k)}^i \bar{r}_{i*}^{(k)} \delta \bar{\psi}^{(k)} + M_{(k)}^3 \delta \varepsilon_{33}^{(k)z}) dS + \sum_{k=1}^n \int_{1_1^{(k)}} (\bar{\Phi}_{(k)}^S \delta \bar{u}^{(k)} + \bar{G}_{(k)}^S \delta \bar{\gamma}^{(k)} + \\ &+ \bar{L}_{(k)}^S \delta \bar{\psi}^{(k)}) dl + \sum_{k=1}^n \int_{1_2^{(k)}} (\bar{\Phi}_{(k)} \delta \bar{u}^{(k)} + \bar{G}_{(k)} \delta \bar{\gamma}^{(k)} + \bar{L}_{(k)} \delta \bar{\psi}^{(k)} + (\bar{u}^{(k)} - \bar{u}_S^{(k)}) \delta \bar{\Phi}_{(k)} + \\ &+ (\bar{\gamma}^{(k)} - \bar{\gamma}_S^{(k)}) \delta \bar{G}_{(k)} + (\bar{\psi}^{(k)} - \bar{\psi}_S^{(k)}) \delta \bar{L}_{(k)}) dl, \quad (2.39)\end{aligned}$$

де  $S_{(n)}, S_{(1)}$  – серединні поверхні обмежуючих шарів оболонки,  $S_{(k)}$  – серединна поверхня  $k$ -го шару;  $1_1^{(k)}, 1_2^{(k)}$  – частини контуру  $1^{(k)}$   $k$ -го шару, де виконуються статичні та геометричні граничні умови відповідно. Елемент площі бічної лінійчатої поверхні  $d\Gamma_{(k)}$   $k$ -го шару з контуром  $\ell_{(k)}$  дорівнює

$$d\Gamma_{(k)} = d\ell_{(k)} dz^{(k)}, \quad (2.40)$$

а елемент об'єму –

$$dV^{(k)} = t^{(k)} dS_{(k)} dz^{(k)}. \quad (2.41)$$

Вектори зовнішніх зусиль  $\vec{X}_{(k)}$ , моментів  $\vec{M}_{(k)}$  і додаткових моментів  $\vec{B}_{(k)}$ , які діють в точках деформованої серединної поверхні k-го шару, будуть визначатися рівностями:

$$\vec{X}_{(1)} = t_{(1)}^{(+)} \vec{X}_{(1)}^{(+)} + t_{(1)}^{(-)} \vec{q}_{(1)}^{(-)} + \int_{-h^{(1)}/2}^{h^{(1)}/2} t^{(1)} \vec{P}^{(1)} dz, \quad \vec{M}_{(1)} = \frac{h^{(1)}}{2} (t_{(1)}^{(+)} \vec{X}_{(1)}^{(+)} - t_{(1)}^{(-)} \vec{q}_{(1)}^{(-)}) + \int_{-h^{(1)}/2}^{h^{(1)}/2} t^{(1)} \vec{P}^{(1)} z^{(1)} dz, \\ \vec{B}_{(1)} = \frac{h^{(1)}}{2} f^{(1)} \left( \frac{h^{(1)}}{2} \right) (t_{(1)}^{(+)} \vec{X}_{(1)}^{(+)} - t_{(1)}^{(-)} \vec{q}_{(1)}^{(-)}) + \int_{-h^{(1)}/2}^{h^{(1)}/2} t^{(1)} \vec{P}^{(1)} \varphi^{(1)}(z) dz, \quad (2.42)$$

$$\vec{X}_{(k)} = t_{(k)}^{(+)} \vec{X}_{(k)}^{(+)} - t_{(k)}^{(-)} \vec{X}_{(k)}^{(-)} + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} t^{(k)} \vec{P}^{(k)} dz, \\ \vec{M}_{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2} (t_{(k)}^{(+)} \vec{X}_{(k)}^{(+)} - t_{(k)}^{(-)} \vec{X}_{(k)}^{(-)}) + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} t^{(k)} \vec{P}^{(k)} z^{(k)} dz, \\ \vec{B}_{(k)} = \varphi^{(k)} \left( \frac{h^{(k)}}{2} \right) (t_{(k)}^{(+)} \vec{X}_{(k)}^{(+)} - t_{(k)}^{(-)} \vec{X}_{(k)}^{(-)}) + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} t^{(k)} \vec{P}^{(k)} \varphi^{(k)}(z) dz, \quad (2.43)$$

$$\vec{X}_{(n)} = t_{(n)}^{(+)} \vec{q}_{(n)}^{(+)} - t_{(n)}^{(-)} \vec{X}_{(n)}^{(-)} + \int_{-h^{(n)}/2}^{h^{(n)}/2} t^{(n)} \vec{P}^{(n)} dz, \\ \vec{M}_{(n)} = \frac{h^{(n)}}{2} (t_{(n)}^{(+)} \vec{q}_{(n)}^{(+)} - t_{(n)}^{(-)} \vec{X}_{(n)}^{(-)}) + \int_{-h^{(n)}/2}^{h^{(n)}/2} t^{(n)} \vec{P}^{(n)} z^{(n)} dz, \\ \vec{B}_{(n)} = \varphi^{(n)} \left( \frac{h^{(n)}}{2} \right) (t_{(n)}^{(+)} \vec{q}_{(n)}^{(+)} - t_{(n)}^{(-)} \vec{X}_{(n)}^{(-)}) + \int_{-h^{(n)}/2}^{h^{(n)}/2} t^{(n)} \vec{P}^{(n)} \varphi^{(n)}(z) dz, \quad (2.44)$$

де вектори  $\vec{X}_{(k)}^{(+)}$ ,  $\vec{X}_{(k)}^{(-)}$  визначають контактні напруження відповідно на верхній (індекс «+») і нижній (індекс «-») обмежуючих лицьових поверхнях k-го шару.

Контраваріантні компоненти вектора контактних напружень  $\vec{X}_{(k)}$  і векторів зовнішнього навантаження  $\vec{q}_{(n)}^{(+)}$ ,  $\vec{q}_{(1)}^{(-)}$  будуть визначатися рівностями

$$\begin{aligned}\bar{X}_{(k)}^{(+)} &= \sigma_{(+)}^{(k)i3} \bar{\rho}_i^{(k)*} + \sigma_{(+)}^{(k)33} \bar{m}^{(k)*}, \quad \bar{X}_{(k)}^{(-)} = \sigma_{(-)}^{(k)i3} \bar{\rho}_i^{(k)*} + \sigma_{(-)}^{(k)33} \bar{m}^{(k)*}, \\ \bar{q}_{(n)}^{(+)} &= q_{(+)}^{(n)i3} \bar{\rho}_i^{(n)*} + q_{(+)}^{(n)33} \bar{m}^{(n)*}, \quad \bar{q}_{(1)}^{(-)} = q_{(-)}^{(1)i3} \bar{\rho}_i^{(1)*} + q_{(-)}^{(1)33} \bar{m}^{(1)*} \quad (i=1,2). \quad (2.45)\end{aligned}$$

Першу варіацію другого доданка рівняння (2.36) можна представити таким чином:

$$\delta\Pi_R = \sum_{k=1}^n (\delta\Pi_{1R}^{(k)} + \delta\Pi_{2R}^{(k)}) = \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta\eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV - \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \left( \frac{\partial F^{(k)}}{\partial \sigma_{(k)}^{\alpha\beta}} - \eta_{\alpha\beta}^{(k)} \right) \delta\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} dV, \quad (2.46)$$

$$\text{де} \quad \delta\Pi_{1R}^{(k)} = \iiint_{V^{(k)}} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta\eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV = \iiint_{V^{(k)}} \left( \sigma_{(k)}^{ij} \delta\varepsilon_{ij}^{(k)z} + 2\sigma_{(k)}^{i3} \delta\varepsilon_{i3}^{(k)z} + \sigma_{(k)}^{33} \delta\varepsilon_{33}^{(k)z} \right) dV; \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{2R}^{(k)} &= -\iiint_{V^{(k)}} \delta W_{(k)}^f dV = -\iiint_{V^{(k)}} \left\{ \left( \frac{\partial F^{(k)}}{\partial \sigma_{(k)}^{ij}} - \varepsilon_{ij}^{(k)z} \right) \delta\sigma_{(k)}^{ij} + \left( \frac{\partial F^{(k)}}{\partial \sigma_{(k)}^{i3}} - 2\varepsilon_{i3}^{(k)z} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \delta\sigma_{(k)}^{i3} + \left( \frac{\partial F^{(k)}}{\partial \sigma_{(k)}^{33}} - \varepsilon_{33}^{(k)z} \right) \delta\sigma_{(k)}^{33} \right\} dV \quad (2.48)\end{aligned}$$

Підставляючи співвідношення (2.11) – (2.13) в (2.47) і враховуючи, що елемент недеформованого об'єму  $dV^{(k)}$  дорівнює

$$dV^{(k)} = \sqrt{g^{(k)}} d\alpha_1 d\alpha_2 dz^{(k)} \approx \sqrt{a^{(k)}} d\alpha_1 d\alpha_2 dz^{(k)} = dS_{(k)} dz^{(k)}, \quad (2.49)$$

можна отримати наступний вираз:

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{1R}^{(k)} &= \iint_{S_{(k)}} \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \left\{ \sigma_{(k)}^{ij} \left[ \delta\varepsilon_{ij}^{(k)} + z \delta\chi_{ij}^{(k)\gamma} + \varphi^{(k)}(z) \nabla_i \delta\psi_i^{(k)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{(k)}^{i3} \left( 2\delta\varepsilon_{i3}^{(k)} + z \nabla_i \delta\varepsilon_{33}^{(k)z} \right) + \sigma_{(k)}^{33} \delta\varepsilon_{33}^{(k)z} \right\} dS dz \quad (2.50)\end{aligned}$$

При виведенні рівняння (2.50) розглядався випадок середнього вигину тонкого  $k$ -го шару оболонки. Якщо в (2.50) ввести віднесені до одиниці довжини координатних ліній недеформованої середньої поверхні  $k$ -го шару



контраваріантні компоненти тензорів тангенціальних зусиль  $T_{(k)}^{ij}$ , згинаючих і крутильних моментів  $M_{(k)}^{ij}$ , додаткового згинального і крутильного моменту  $L_{(k)}^{ij}$ , а також контраваріантні компоненти вектора поперечних сил і додаткових поперечних сил деформацій зсуву і обтиснення  $Q_{(k)}^i$ ,  $Q_{(k)}^3$ ,  $L_{(k)}^i$ ,  $M_{(k)}^{i3}$  щодо базисних векторів  $\bar{r}^{(k)*}$ ,  $\bar{\rho}_3^{(k)*}$ :

$$\begin{aligned} T_{(k)}^{ij} &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{ij} dz, & M_{(k)}^{ij} &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{ij} z dz, \\ L_{(k)}^{ij} &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{ij} \varphi^{(k)}(z) dz, & Q_{(k)}^i &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i3} dz, & L_{(k)}^{i3} &= \frac{1}{2} \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i3} \varphi^{(k)'}(z) dz, \\ Q_{(k)}^3 &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{33} dz, & M_{(k)}^{i3} &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i3} z dz, \end{aligned} \quad (2.51)$$

то рівність (2.50) переписеться так:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{1R}^{(k)} &= \iint_{S(k)} (T_{(k)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{(k)} + M_{(k)}^{ij} \delta \chi_{ij}^{(k)\gamma} + L_{(k)}^{ij} \nabla_i \delta \psi_i^{(k)} + 2Q_{(k)}^i \delta \varepsilon_{i3}^{(k)\gamma} + L_{(k)}^{i3} \delta \psi_i^{(k)} + \\ &+ M_{(k)}^{i3} \nabla_i \delta \varepsilon_{33}^{(k)z} + Q_{(k)}^3 \delta \varepsilon_{33}^{(k)z}) dS. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ввівши інтеграл для додаткової роботи деформації  $k$ -го шару

$$\int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \mathbf{F}^{(k)} dz^{(k)} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} (\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{(k)} - W_{(k)}) dz = F_p^{(k)}(T_{(k)}^{ij}, M_{(k)}^{ij}, L_{(k)}^{ij}, M_{(k)}^{i3}, Q_{(k)}^i, L_{(k)}^{i3}, Q_{(k)}^3), \quad (2.53)$$

який у разі малих деформацій можна вважати квадратичною функцією від напружень

$$F_p^{(k)} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \left( \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{(k)} - \frac{1}{2} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{(k)} \right) dz = \frac{1}{2} \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{(k)} dz,$$

вираз (2.48) переписеться так:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{2R}^{(k)} = & - \iint_{S^{(k)}} \left\{ \left( \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial T_{(k)}^{ij}} - \varepsilon_{ij}^{(k)} \right) \delta T_{(k)}^{ij} + \left( \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial M_{(k)}^{ij}} - \chi_{ij}^{(k)\gamma} \right) \delta M_{(k)}^{ij} + \left( \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial L_{(k)}^{ij}} - \nabla_i \psi_i^{(k)} \right) \delta L_{(k)}^{ij} + \right. \\ & + \left( \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial Q_{(k)}^i} - 2\varepsilon_{i3}^{(k)\gamma} \right) \delta Q_{(k)}^i + \left( \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial L_{(k)}^{i3}} - \psi_i^{(k)} \right) \delta L_{(k)}^{i3} + \left( \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial M_{(k)}^{i3}} - \nabla_i \varepsilon_{33}^{(k)z} \right) \delta M_{(k)}^{i3} + \\ & \left. + \left( \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial Q_{(k)}^3} - \varepsilon_{33}^{(k)z} \right) \delta Q_{(k)}^3 \right\} dS. \end{aligned} \quad (2.54)$$

### 2.2.2. Рівняння рівноваги пружного шару анізотропної оболонки.

Опускаючи цілий ряд громіздких перетворень варіаційних рівнянь підрозділу 2.2.1, представлених в [136], для випадку середнього згинання фізичні компоненти тензора тангенціальних зусиль і зусиль поперечного зсуву щодо недеформованої ортогональної системи координат запишуться в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} R_{11}^{(k)0} &= T_{11}^{(k)} + M_{11}^{(k)} \gamma_{11}^{(k)} + M_{12}^{(k)} \gamma_{12}^{(k)} + M_{11}^{(k)} k_1^{(k)} + L_{11}^{(k)} \psi_{11}^{(k)} + L_{12}^{(k)} \psi_{12}^{(k)} + Q_1^{(k)} \gamma_1^{(k)} + L_{13}^{(k)} \psi_1^{(k)}, \\ R_{22}^{(k)0} &= T_{22}^{(k)} + M_{22}^{(k)} \gamma_{22}^{(k)} + M_{21}^{(k)} \gamma_{21}^{(k)} + M_{22}^{(k)} k_2^{(k)} + L_{22}^{(k)} \psi_{22}^{(k)} + L_{21}^{(k)} \psi_{12}^{(k)} + Q_2^{(k)} \gamma_2^{(k)} + L_{23}^{(k)} \psi_2^{(k)}, \\ R_{12}^{(k)0} &= T_{12}^{(k)} + M_{11}^{(k)} \gamma_{12}^{(k)} + M_{12}^{(k)} \gamma_{22}^{(k)} + M_{12}^{(k)} k_2^{(k)} + L_{11}^{(k)} \psi_{12}^{(k)} + L_{12}^{(k)} \psi_{22}^{(k)} + Q_1^{(k)} \gamma_2^{(k)} + L_{13}^{(k)} \psi_2^{(k)}, \\ R_{21}^{(k)0} &= T_{21}^{(k)} + M_{21}^{(k)} \gamma_{11}^{(k)} + M_{22}^{(k)} \gamma_{21}^{(k)} + M_{21}^{(k)} k_1^{(k)} + L_{21}^{(k)} \psi_{11}^{(k)} + L_{22}^{(k)} \psi_{21}^{(k)} + Q_2^{(k)} \gamma_1^{(k)} + L_{23}^{(k)} \psi_1^{(k)}, \\ R_{13}^{(k)0} &= T_{11}^{(k)} \omega_1^{(k)} + T_{12}^{(k)} \omega_2^{(k)} + Q_1^{(k)} - M_{11}^{(k)} k_1^{(k)} \gamma_1^{(k)} - M_{12}^{(k)} k_2^{(k)} \gamma_2^{(k)} - L_{11}^{(k)} k_1^{(k)} \psi_1^{(k)} - L_{12}^{(k)} k_2^{(k)} \psi_2^{(k)}, \\ R_{23}^{(k)0} &= T_{21}^{(k)} \omega_1^{(k)} + T_{22}^{(k)} \omega_2^{(k)} + Q_2^{(k)} - M_{21}^{(k)} k_1^{(k)} \gamma_1^{(k)} - M_{22}^{(k)} k_2^{(k)} \gamma_2^{(k)} - L_{21}^{(k)} k_1^{(k)} \psi_1^{(k)} - L_{22}^{(k)} k_2^{(k)} \psi_2^{(k)}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

де 
$$\gamma_{11}^{(k)} = \frac{\partial \gamma_1^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\gamma_2^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)}} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} + k_1^{(k)} \gamma_{(k)} \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}),$$

$$2\gamma_{12}^{(k)} = \frac{B^{(k)}}{A^{(k)}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1^{(k)}} \left( \frac{\gamma_2^{(k)}}{B^{(k)}} \right) + \frac{A^{(k)}}{B^{(k)}} \frac{\partial}{\partial \alpha_2^{(k)}} \left( \frac{\gamma_1^{(k)}}{A^{(k)}} \right) + (k_1^{(k)} + k_2^{(k)}) \gamma_{(k)}, \quad (2.56)$$

$$\gamma_i^{(k)} = 2\varepsilon_{i3}^{(k)\gamma} - \omega_i^{(k)}. \quad (2.57)$$

Переходячи до фізичних компонент рівняння рівноваги, віднесені до недеформованого стану  $k$ -го шару оболонки, з урахуванням незначного впливу мембранних деформацій на компоненти деформації згинання, запишуться

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(B^{(k)}R_{11}^{(k)0})}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)}R_{21}^{(k)0})}{\partial\alpha_2^{(k)}} + R_{12}^{(k)0} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}} - R_{22}^{(k)0} \frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \\
& + A^{(k)}B^{(k)}(k_1^{(k)}R_{13}^{(k)0} + X_1^{(k)0}) = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}), \\
& \frac{\partial(B^{(k)}R_{13}^{(k)0})}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)}R_{23}^{(k)0})}{\partial\alpha_2^{(k)}} - A^{(k)}B^{(k)}(k_1^{(k)}R_{11}^{(k)0} + k_2^{(k)}R_{22}^{(k)0} - X_3^{(k)0}) = 0, \\
& \frac{\partial(B^{(k)}M_{11}^{(k)})}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)}M_{21}^{(k)})}{\partial\alpha_2^{(k)}} + M_{12}^{(k)} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}} - M_{22}^{(k)} \frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \\
& + A^{(k)}B^{(k)}(M_1^{(k)} - Q_1^{(k)}) = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}), \\
& \frac{\partial(B^{(k)}L_{11}^{(k)})}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)}L_{21}^{(k)})}{\partial\alpha_2^{(k)}} + L_{12}^{(k)} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}} - L_{22}^{(k)} \frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \\
& + A^{(k)}B^{(k)}(B_1^{(k)} - L_{13}^{(k)}) = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}). \tag{2.58}
\end{aligned}$$

При врахуванні обтиснення  $k$ -го шару до системи (2.58) необхідно додати восьме рівняння рівноваги

$$H_3^{(k)} = \frac{\partial(B^{(k)}M_{13}^{(k)})}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)}M_{23}^{(k)})}{\partial\alpha_2^{(k)}} - A^{(k)}B^{(k)}(k_1^{(k)}M_{11}^{(k)} + k_2^{(k)}M_{22}^{(k)} + k_1^{(k)}L_{11}^{(k)} + k_2^{(k)}L_{22}^{(k)} + Q_3^{(k)} - M_3^{(k)}) = 0. \tag{2.59}$$

**Граничні умови для пружного анізотропного шару.** На контурі  $\ell_{(k)}$   $k$ -го шару оболонки мають місце вісім рівнянь рівноваги (2.58), (2.59) і статичні граничні умови:

$$\begin{aligned}
\Phi_{(k)0}^{nS} &= R_{(k)0}^n, \quad \Phi_{(k)0}^{\tau S} = R_{(k)0}^\tau, \quad \Phi_{(k)0}^{mS} = R_{(k)0}^m, \quad G_{(k)0}^{nS} = G_{(k)0}^n, \quad H_{(k)0}^{\tau S} = H_{(k)0}^\tau, \\
L_{(k)0}^{nS} &= L_{(k)0}^n, \quad L_{(k)0}^{\tau S} = L_{(k)0}^\tau, \quad M_{(k)S}^{3n} + L_{(k)S}^{3n} = M_{(k)0}^{i3} n_i^{(k)}. \tag{2.60}
\end{aligned}$$

Крім граничних умов (2.60), з варіаційних рівнянь слідує геометричні граничні умови і граничні умови змішаного типу:

а) жорстко закріплений контур

$$\mathbf{u}_n^{(k)} = \mathbf{u}_\tau^{(k)} = \mathbf{w}^{(k)} = \gamma_n^{(k)} = \gamma_\tau^{(k)} = \psi_n^{(k)} = \psi_\tau^{(k)} = \varepsilon_{33}^{(k)z} = 0, \quad (2.61)$$

б) шарнірний, нерухомий в тангенціальному і нормальному напрямках контур

$$\mathbf{u}_n^{(k)} = \mathbf{u}_\tau^{(k)} = \mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{G}_{(k)0}^n = \gamma_\tau^{(k)} = \mathbf{L}_{(k)0}^n = \psi_\tau^{(k)} = \varepsilon_{33}^{(k)z} = 0, \quad (2.62)$$

в) шарнірний, нерухомий в тангенціальному напрямку контур

$$\mathbf{u}_n^{(k)} = \mathbf{u}_\tau^{(k)} = \mathbf{R}_{(k)0}^m = \mathbf{G}_{(k)0}^n = \gamma_\tau^{(k)} = \mathbf{L}_{(k)0}^n = \psi_\tau^{(k)} = \mathbf{M}_{(k)0}^{i3} \mathbf{n}_i^{(k)} = 0, \quad (2.63)$$

г) шарнірний, вільний в тангенціальній площині контур

$$\mathbf{R}_{(k)0}^n = \mathbf{R}_{(k)0}^\tau = \mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{G}_{(k)0}^n = \gamma_\tau^{(k)} = \mathbf{L}_{(k)0}^n = \psi_\tau^{(k)} = \varepsilon_{33}^{(k)z} = 0. \quad (2.64)$$

Для випадку середнього вигину при переході до фізичних величин переміщення і контурні зусилля (2.61) – (2.64) визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n^{(k)} &= \mathbf{u}_i^{(k)} \mathbf{n}_i^{(k)}, \quad \mathbf{u}_\tau^{(k)} = \mathbf{u}_i^{(k)} \boldsymbol{\tau}_i^{(k)}, \quad \gamma_n^{(k)} = \gamma_i^{(k)} \mathbf{n}_i^{(k)}, \quad \gamma_\tau^{(k)} = \gamma_i^{(k)} \boldsymbol{\tau}_i^{(k)}, \\ \psi_n^{(k)} &= \psi_i^{(k)} \mathbf{n}_i^{(k)}, \quad \psi_\tau^{(k)} = \psi_i^{(k)} \boldsymbol{\tau}_i^{(k)}, \quad \mathbf{R}_{(k)0}^n = \mathbf{R}_{ij}^{(k)0} \mathbf{n}_i^{(k)} \mathbf{n}_j^{(k)}, \quad \mathbf{R}_{(k)0}^\tau = \mathbf{R}_{ij}^{(k)0} \mathbf{n}_i^{(k)} \boldsymbol{\tau}_j^{(k)}, \\ \mathbf{R}_{(k)0}^m &= \mathbf{R}_{i3}^{(k)0} \mathbf{n}_i, \quad \mathbf{G}_{(k)0}^n = \mathbf{M}_{ij}^{(k)} \mathbf{n}_i^{(k)} \mathbf{n}_j^{(k)}, \quad \mathbf{H}_{(k)0}^\tau = -\mathbf{M}_{ij}^{(k)} \mathbf{n}_i^{(k)} \boldsymbol{\tau}_j^{(k)}, \quad \mathbf{L}_{(k)0}^n = \mathbf{L}_{ij}^{(k)} \mathbf{n}_i^{(k)} \mathbf{n}_j^{(k)}, \\ \mathbf{L}_{(k)0}^\tau &= \mathbf{L}_{ij}^{(k)} \mathbf{n}_i^{(k)} \boldsymbol{\tau}_j^{(k)}, \quad \mathbf{M}_{(k)0}^{i3} \mathbf{n}_i^{(k)} = \mathbf{M}_{i3}^{(k)} \mathbf{n}_i^{(k)}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

Де

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1^{(k)} &= \cos(\mathbf{n}^{(k)}, \boldsymbol{\alpha}_1^{(k)}), \quad \mathbf{n}_2^{(k)} = \cos(\mathbf{n}^{(k)}, \boldsymbol{\alpha}_2^{(k)}), \\ \boldsymbol{\tau}_1^{(k)} &= -\sin(\mathbf{n}^{(k)}, \boldsymbol{\alpha}_1^{(k)}), \quad \boldsymbol{\tau}_2^{(k)} = \sin(\mathbf{n}^{(k)}, \boldsymbol{\alpha}_2^{(k)}). \end{aligned} \quad (2.66)$$

**Співвідношення пружності для анізотропного шару.** Нехай розглянутий анізотропний шар має одну площину пружної симетрії, дотичну до координатної поверхні, і напрямок осі  $z^{(k)}$  перпендикулярний до цієї площини. Тоді число пружних сталих відповідно зводиться до 13, тобто вісім з 21 пружних сталих узагальненого закону Гука повинні бути рівні нулю:

$$\begin{aligned} a_{(k)}^{14} = a_{(k)}^{24} = a_{(k)}^{34} = a_{(k)}^{46} = a_{(k)}^{15} = a_{(k)}^{25} = a_{(k)}^{35} = a_{(k)}^{56} = 0, \\ B_{14}^{(k)} = B_{24}^{(k)} = B_{34}^{(k)} = B_{46}^{(k)} = B_{15}^{(k)} = B_{25}^{(k)} = B_{35}^{(k)} = B_{56}^{(k)} = 0. \end{aligned}$$

Рівняння узагальненого закону Гука для анізотропного шару з однією площиною пружної симетрії, приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{(k)}^{11} &= a_{(k)}^{11} \varepsilon_{11}^{(k)z} + a_{(k)}^{12} \varepsilon_{22}^{(k)z} + a_{(k)}^{13} \varepsilon_{33}^{(k)z} + a_{(k)}^{16} \varepsilon_{12}^{(k)z}, \\ \sigma_{(k)}^{22} &= a_{(k)}^{21} \varepsilon_{11}^{(k)z} + a_{(k)}^{22} \varepsilon_{22}^{(k)z} + a_{(k)}^{23} \varepsilon_{33}^{(k)z} + a_{(k)}^{26} \varepsilon_{12}^{(k)z}, \\ \sigma_{(k)}^{33} &= a_{(k)}^{31} \varepsilon_{11}^{(k)z} + a_{(k)}^{32} \varepsilon_{22}^{(k)z} + a_{(k)}^{33} \varepsilon_{33}^{(k)z} + a_{(k)}^{36} \varepsilon_{12}^{(k)z}, \quad \sigma_{(k)}^{23} = a_{(k)}^{44} \varepsilon_{23}^{(k)z} + a_{(k)}^{45} \varepsilon_{13}^{(k)z}, \\ \sigma_{(k)}^{13} &= a_{(k)}^{54} \varepsilon_{23}^{(k)z} + a_{(k)}^{55} \varepsilon_{13}^{(k)z}, \quad \sigma_{(k)}^{12} = a_{(k)}^{61} \varepsilon_{11}^{(k)z} + a_{(k)}^{62} \varepsilon_{22}^{(k)z} + a_{(k)}^{63} \varepsilon_{33}^{(k)z} + a_{(k)}^{66} \varepsilon_{12}^{(k)z}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

або

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(k)z} &= B_{11}^{(k)} \sigma_{(k)}^{11} + B_{12}^{(k)} \sigma_{(k)}^{22} + B_{13}^{(k)} \sigma_{(k)}^{33} + B_{16}^{(k)} \sigma_{(k)}^{12}, \quad \varepsilon_{22}^{(k)z} = B_{21}^{(k)} \sigma_{(k)}^{11} + B_{22}^{(k)} \sigma_{(k)}^{22} + B_{23}^{(k)} \sigma_{(k)}^{33} + B_{26}^{(k)} \sigma_{(k)}^{12}, \\ \varepsilon_{33}^{(k)z} &= B_{31}^{(k)} \sigma_{(k)}^{11} + B_{32}^{(k)} \sigma_{(k)}^{22} + B_{33}^{(k)} \sigma_{(k)}^{33} + B_{36}^{(k)} \sigma_{(k)}^{12}, \quad \varepsilon_{23}^{(k)z} = B_{44}^{(k)} \sigma_{(k)}^{23} + B_{45}^{(k)} \sigma_{(k)}^{13}, \\ \varepsilon_{13}^{(k)z} &= B_{54}^{(k)} \sigma_{(k)}^{23} + B_{55}^{(k)} \sigma_{(k)}^{13}, \quad \varepsilon_{12}^{(k)z} = B_{61}^{(k)} \sigma_{(k)}^{11} + B_{62}^{(k)} \sigma_{(k)}^{22} + B_{63}^{(k)} \sigma_{(k)}^{33} + B_{66}^{(k)} \sigma_{(k)}^{12}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Підставляючи співвідношення (2.67) з урахуванням формул (2.31) – (2.33) в (2.51), нескладно отримати залежності між компонентами тензорів внутрішніх зусиль і моментів  $k$ -го шару анізотропної оболонки з площиною пружної симетрії, дотичною до координатної поверхні, і компонентами тензора деформацій в матричній формі:

$$\mathbf{T}_{(k)} = \mathbf{A}_{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{M}_{(k)} = \mathbf{D}_{(k)} \boldsymbol{\chi}_{(k)} + \mathbf{K}_{(k)} \boldsymbol{\psi}_{(k)}, \quad \mathbf{L}_{(k)} = \mathbf{K}_{(k)} \boldsymbol{\chi}_{(k)} + \mathbf{F}_{(k)} \boldsymbol{\psi}_{(k)}, \quad (2.70)$$

$$\mathbf{Q}_{(k)}^\gamma = \mathbf{C}_{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^\gamma + \mathbf{R}_{(k)} \boldsymbol{\psi}_{(k)}^\gamma, \quad \mathbf{L}_{(k)}^\gamma = \mathbf{R}_{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^\gamma + \mathbf{G}_{(k)} \boldsymbol{\psi}_{(k)}^\gamma. \quad (2.71)$$

Тут прийняті позначення матриць стовпців зусиль і деформацій:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{(k)} &= [\mathbf{T}_{(k)}^{11}, \mathbf{T}_{(k)}^{22}, \mathbf{Q}_{(k)}^3, \mathbf{T}_{(k)}^{12}]^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)} = [\boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{(k)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{(k)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{(k)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{12}^{(k)}]^T, \\ \mathbf{M}_{(k)} &= [\mathbf{M}_{(k)}^{11}, \mathbf{M}_{(k)}^{22}, \mathbf{M}_{(k)}^{12}]^T, \quad \boldsymbol{\chi}_{(k)} = [\boldsymbol{\chi}_{11}^{(k)\gamma}, \boldsymbol{\chi}_{22}^{(k)\gamma}, \boldsymbol{\chi}_{12}^{(k)\gamma}]^T, \quad \mathbf{L}_{(k)} = [\mathbf{L}_{(k)}^{11}, \mathbf{L}_{(k)}^{22}, \mathbf{L}_{(k)}^{12}]^T, \\ \boldsymbol{\psi}_{(k)} &= [\boldsymbol{\psi}_{11}^{(k)}, \boldsymbol{\psi}_{22}^{(k)}, \boldsymbol{\psi}_{12}^{(k)}]^T, \quad \mathbf{Q}_{(k)}^\gamma = [\mathbf{Q}_{(k)}^2, \mathbf{Q}_{(k)}^1]^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^\gamma = [\boldsymbol{\varepsilon}_{23}^{(k)\gamma}, \boldsymbol{\varepsilon}_{13}^{(k)\gamma}]^T, \\ \mathbf{L}_{(k)}^\gamma &= [\mathbf{L}_{(k)}^{23}, \mathbf{L}_{(k)}^{13}]^T, \quad \boldsymbol{\psi}_{(k)}^\gamma = [\boldsymbol{\psi}_2^{(k)}, \boldsymbol{\psi}_1^{(k)}]^T \end{aligned} \quad (2.72)$$

і матриць жорсткості  $k$ -го шару оболонки:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(k)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{(k)} & \mathbf{A}_{12}^{(k)} & \mathbf{A}_{13}^{(k)} & \mathbf{A}_{16}^{(k)} \\ \mathbf{A}_{21}^{(k)} & \mathbf{A}_{21}^{(k)} & \mathbf{A}_{23}^{(k)} & \mathbf{A}_{26}^{(k)} \\ \mathbf{A}_{31}^{(k)} & \mathbf{A}_{32}^{(k)} & \mathbf{A}_{33}^{(k)} & \mathbf{A}_{36}^{(k)} \\ \mathbf{A}_{61}^{(k)} & \mathbf{A}_{62}^{(k)} & \mathbf{A}_{63}^{(k)} & \mathbf{A}_{66}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}^{(k)} & \mathbf{D}_{12}^{(k)} & \mathbf{D}_{16}^{(k)} \\ \mathbf{D}_{21}^{(k)} & \mathbf{D}_{22}^{(k)} & \mathbf{D}_{26}^{(k)} \\ \mathbf{D}_{61}^{(k)} & \mathbf{D}_{62}^{(k)} & \mathbf{D}_{66}^{(k)} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{(k)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(k)} & \mathbf{K}_{12}^{(k)} & \mathbf{K}_{16}^{(k)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(k)} & \mathbf{K}_{22}^{(k)} & \mathbf{K}_{26}^{(k)} \\ \mathbf{K}_{61}^{(k)} & \mathbf{K}_{62}^{(k)} & \mathbf{K}_{66}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11}^{(k)} & \mathbf{F}_{12}^{(k)} & \mathbf{F}_{16}^{(k)} \\ \mathbf{F}_{21}^{(k)} & \mathbf{F}_{22}^{(k)} & \mathbf{F}_{26}^{(k)} \\ \mathbf{F}_{61}^{(k)} & \mathbf{F}_{62}^{(k)} & \mathbf{F}_{66}^{(k)} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{(k)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{44}^{(k)} & \mathbf{C}_{45}^{(k)} \\ \mathbf{C}_{54}^{(k)} & \mathbf{C}_{55}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{44}^{(k)} & \mathbf{R}_{45}^{(k)} \\ \mathbf{R}_{54}^{(k)} & \mathbf{R}_{55}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{44}^{(k)} & \mathbf{G}_{45}^{(k)} \\ \mathbf{G}_{54}^{(k)} & \mathbf{G}_{55}^{(k)} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij}^{(k)} &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \mathbf{a}_{(k)}^{ij} dz, \quad \mathbf{D}_{ij}^{(k)} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} z^2 \mathbf{a}_{(k)}^{ij} dz, \quad \mathbf{K}_{ij}^{(k)} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} z \boldsymbol{\varphi}^{(k)}(z) \mathbf{a}_{(k)}^{ij} dz, \quad \mathbf{F}_{ij}^{(k)} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \boldsymbol{\varphi}_{(k)}^2(z) \mathbf{a}_{(k)}^{ij} dz, \\ \mathbf{C}_{ij}^{(k)} &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \mathbf{a}_{(k)}^{ij} dz, \quad \mathbf{R}_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \boldsymbol{\varphi}'_{(k)}(z) \mathbf{a}_{(k)}^{ij} dz, \quad \mathbf{G}_{ij}^{(k)} = \frac{1}{4} \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} [\boldsymbol{\varphi}'_{(k)}(z)]^2 \mathbf{a}_{(k)}^{ij} dz. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Вважається, що функція  $\varphi_{(k)}(z)$ , яка визначає нелінійний характер розподілу тангенціальних переміщень (2.4) по товщині  $k$ -го шару оболонки, має вигляд

$$\varphi_{(k)}(z) = zf_{(k)}(z). \quad (2.75)$$

При цьому функція  $f_{(k)}(z)$  задовольняє умовам

$$\frac{1}{h^{(k)}} \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} f_{(k)}(z) dz = 1, \quad \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} zf_{(k)}(z) dz = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \varphi_{(k)}(z) dz = 0, \quad f_{(k)}(-z) = f_{(k)}(z). \quad (2.76)$$

Вибір  $\varphi_{(k)}(z)$  у вигляді функції (2.76) істотно спрощує виведення залежностей (2.69) – (2.71), тому частина коефіцієнтів з інтегралами

$$\int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} z dz = 0, \quad \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \varphi_{(k)}(z) dz = 0, \quad \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} z \varphi_{(k)}(z) dz = 0$$

дорівнюватиме нулю. Крім цього, момент  $M_{(k)}^{i3}$  також обертається в нуль:

$$M_{(k)}^{i3} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i3} z dz = 0. \quad (2.77)$$

Розв'язуючи лінійні системи рівнянь (2.69) – (2.71), нескладно знайти наступні залежності:

$$\varepsilon_{(k)} = A_{(k)}^{-1} T_{(k)}, \quad (2.78)$$

$$\begin{bmatrix} \chi_{(k)} \\ \psi_{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{(k)} & \mathbf{K}_{(k)} \\ \mathbf{K}_{(k)} & \mathbf{F}_{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{(k)} \\ \mathbf{L}_{(k)} \end{bmatrix}, \quad (2.79)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{(k)}^\gamma \\ \psi_{(k)}^\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{(k)} & \mathbf{R}_{(k)} \\ \mathbf{R}_{(k)} & \mathbf{G}_{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{(k)}^\gamma \\ \mathbf{L}_{(k)}^\gamma \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

Виведення співвідношень (2.78) – (2.80) у формі аналітичних залежностей досить проблематичне, тому значно простіше отримати такий розв'язок одним з чисельних методів на ЕОМ.

Таким чином, в розгорнутій формі рівняння (2.78) – (2.80) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(k)} &= \mathbf{B}_{11}^{(k)} \mathbf{T}_{(k)}^{11} + \mathbf{B}_{12}^{(k)} \mathbf{T}_{(k)}^{22} + \mathbf{B}_{13}^{(k)} \mathbf{Q}_{(k)}^3 + \mathbf{B}_{16}^{(k)} \mathbf{T}_{(k)}^{12}, \\ \varepsilon_{22}^{(k)} &= \mathbf{B}_{21}^{(k)} \mathbf{T}_{(k)}^{11} + \mathbf{B}_{22}^{(k)} \mathbf{T}_{(k)}^{22} + \mathbf{B}_{23}^{(k)} \mathbf{Q}_{(k)}^3 + \mathbf{B}_{26}^{(k)} \mathbf{T}_{(k)}^{12}, \\ \varepsilon_{33}^{(k)} &= \mathbf{B}_{31}^{(k)} \mathbf{T}_{(k)}^{11} + \mathbf{B}_{32}^{(k)} \mathbf{T}_{(k)}^{22} + \mathbf{B}_{33}^{(k)} \mathbf{Q}_{(k)}^3 + \mathbf{B}_{36}^{(k)} \mathbf{T}_{(k)}^{12}, \\ \varepsilon_{12}^{(k)} &= \mathbf{B}_{61}^{(k)} \mathbf{T}_{(k)}^{11} + \mathbf{B}_{62}^{(k)} \mathbf{T}_{(k)}^{22} + \mathbf{B}_{63}^{(k)} \mathbf{Q}_{(k)}^3 + \mathbf{B}_{66}^{(k)} \mathbf{T}_{(k)}^{12}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \chi_{11}^{(k)\gamma} &= \mathbf{d}_{11}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{11} + \mathbf{d}_{12}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{22} + \mathbf{d}_{13}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{12} + \mathbf{d}_{14}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{11} + \mathbf{d}_{15}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{22} + \mathbf{d}_{16}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{12}, \\ \chi_{22}^{(k)\gamma} &= \mathbf{d}_{21}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{11} + \mathbf{d}_{22}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{22} + \mathbf{d}_{23}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{12} + \mathbf{d}_{24}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{11} + \mathbf{d}_{25}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{22} + \mathbf{d}_{26}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{12}, \\ \chi_{12}^{(k)\gamma} &= \mathbf{d}_{31}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{11} + \mathbf{d}_{32}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{22} + \mathbf{d}_{33}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{12} + \mathbf{d}_{34}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{11} + \mathbf{d}_{35}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{22} + \mathbf{d}_{36}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{12}, \\ \psi_{11}^{(k)} &= \mathbf{d}_{41}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{11} + \mathbf{d}_{42}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{22} + \mathbf{d}_{43}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{12} + \mathbf{d}_{44}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{11} + \mathbf{d}_{45}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{22} + \mathbf{d}_{46}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{12}, \\ \psi_{22}^{(k)} &= \mathbf{d}_{51}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{11} + \mathbf{d}_{52}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{22} + \mathbf{d}_{53}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{12} + \mathbf{d}_{54}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{11} + \mathbf{d}_{55}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{22} + \mathbf{d}_{56}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{12}, \\ \psi_{12}^{(k)} &= \mathbf{d}_{61}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{11} + \mathbf{d}_{62}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{22} + \mathbf{d}_{63}^{(k)} \mathbf{M}_{(k)}^{12} + \mathbf{d}_{64}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{11} + \mathbf{d}_{65}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{22} + \mathbf{d}_{66}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{12}, \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{23}^{(k)\gamma} &= \mathbf{g}_{11}^{(k)} \mathbf{Q}_{(k)}^2 + \mathbf{g}_{12}^{(k)} \mathbf{Q}_{(k)}^1 + \mathbf{g}_{13}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{23} + \mathbf{g}_{14}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{13}, \\ \varepsilon_{13}^{(k)\gamma} &= \mathbf{g}_{21}^{(k)} \mathbf{Q}_{(k)}^2 + \mathbf{g}_{22}^{(k)} \mathbf{Q}_{(k)}^1 + \mathbf{g}_{23}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{23} + \mathbf{g}_{24}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{13}, \\ \psi_2^{(k)} &= \mathbf{g}_{31}^{(k)} \mathbf{Q}_{(k)}^2 + \mathbf{g}_{32}^{(k)} \mathbf{Q}_{(k)}^1 + \mathbf{g}_{33}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{23} + \mathbf{g}_{34}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{13}, \\ \psi_1^{(k)} &= \mathbf{g}_{41}^{(k)} \mathbf{Q}_{(k)}^2 + \mathbf{g}_{42}^{(k)} \mathbf{Q}_{(k)}^1 + \mathbf{g}_{43}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{23} + \mathbf{g}_{44}^{(k)} \mathbf{L}_{(k)}^{13}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

де  $(\mathbf{B}_{ij}^{(k)}) = (\mathbf{A}_{ij}^{(k)})^{-1}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 4$ ),  $(\mathbf{d}_{ij}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{(k)} & \mathbf{K}_{(k)} \\ \mathbf{K}_{(k)} & \mathbf{F}_{(k)} \end{bmatrix}^{-1}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ),



$$\left( \mathbf{g}_{ij}^{(k)} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{(k)} & \mathbf{R}^{(k)} \\ \mathbf{R}^{(k)} & \mathbf{G}^{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 4). \quad (2.84)$$

Приймаючи позначення (2.72), інтеграл додаткової роботи деформації  $F_p^{(k)}$  (2.53) запишеться так:

$$\begin{aligned} F_p^{(k)} = & \frac{1}{2} [\mathbf{T}_{(k)}^{11} \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{(k)} + \mathbf{T}_{(k)}^{12} \boldsymbol{\varepsilon}_{12}^{(k)} + \mathbf{T}_{(k)}^{22} \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{(k)} + \mathbf{M}_{(k)}^{11} \boldsymbol{\chi}_{11}^{(k)} + \\ & + 2\mathbf{M}_{(k)}^{12} \boldsymbol{\chi}_{12}^{(k)} + \mathbf{M}_{(k)}^{22} \boldsymbol{\chi}_{22}^{(k)} + \mathbf{L}_{(k)}^{11} \boldsymbol{\psi}_{11}^{(k)} + 2\mathbf{L}_{(k)}^{12} \boldsymbol{\psi}_{12}^{(k)} + \\ & + \mathbf{L}_{(k)}^{22} \boldsymbol{\psi}_{22}^{(k)} + 2\mathbf{Q}_{(k)}^1 \boldsymbol{\varepsilon}_{13}^{(k)\gamma} + 2\mathbf{Q}_{(k)}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{23}^{(k)\gamma} + \mathbf{L}_{(k)}^{13} \boldsymbol{\psi}_1^{(k)} + \\ & + \mathbf{L}_{(k)}^{23} \boldsymbol{\psi}_2^{(k)} + \mathbf{M}_{(k)}^{i3} \nabla_i \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{(k)z} + \mathbf{Q}_{(k)}^3 \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{(k)z} ]. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Функція  $F_p^{(k)}$  помітно спрощується, якщо врахувати тотожності

$$\mathbf{T}_{(k)}^{12} = \mathbf{T}_{(k)}^{21}, \quad \mathbf{M}_{(k)}^{12} = \mathbf{M}_{(k)}^{21}, \quad \mathbf{L}_{(k)}^{12} = \mathbf{L}_{(k)}^{21}.$$

Опускаючи ряд громіздких перетворень, з (2.54), (2.81) – (2.83), (2.85) слідує співвідношення пружності для  $k$ -го шару, які записуються за допомогою фізичних компонент тензорів зусиль і деформацій:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{(k)} &= \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial \mathbf{T}_{11}^{(k)}} = \mathbf{B}_{11}^{(k)} \mathbf{T}_{11}^{(k)} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{12}^{(k)} + \mathbf{B}_{21}^{(k)}) \mathbf{T}_{22}^{(k)} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{13}^{(k)} + \mathbf{B}_{31}^{(k)}) \mathbf{Q}_3^{(k)} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{16}^{(k)} + \mathbf{B}_{61}^{(k)}) \mathbf{T}_{12}^{(k)}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{(k)} &= \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial \mathbf{T}_{22}^{(k)}} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{12}^{(k)} + \mathbf{B}_{21}^{(k)}) \mathbf{T}_{11}^{(k)} + \mathbf{B}_{22}^{(k)} \mathbf{T}_{22}^{(k)} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{23}^{(k)} + \mathbf{B}_{32}^{(k)}) \mathbf{Q}_3^{(k)} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{26}^{(k)} + \mathbf{B}_{62}^{(k)}) \mathbf{T}_{12}^{(k)}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{(k)} &= \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial \mathbf{Q}_3^{(k)}} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{13}^{(k)} + \mathbf{B}_{31}^{(k)}) \mathbf{T}_{11}^{(k)} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{23}^{(k)} + \mathbf{B}_{32}^{(k)}) \mathbf{T}_{22}^{(k)} + \mathbf{B}_{33}^{(k)} \mathbf{Q}_3^{(k)} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{36}^{(k)} + \mathbf{B}_{63}^{(k)}) \mathbf{T}_{12}^{(k)}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{12}^{(k)} &= \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial \mathbf{T}_{12}^{(k)}} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{16}^{(k)} + \mathbf{B}_{61}^{(k)}) \mathbf{T}_{11}^{(k)} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{26}^{(k)} + \mathbf{B}_{62}^{(k)}) \mathbf{T}_{22}^{(k)} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{36}^{(k)} + \mathbf{B}_{63}^{(k)}) \mathbf{Q}_3^{(k)} + \mathbf{B}_{66}^{(k)} \mathbf{T}_{12}^{(k)}, \quad (2.86) \\ \boldsymbol{\chi}_{11}^{(k)\gamma} &= \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial \mathbf{M}_{11}^{(k)}} = \mathbf{d}_{11}^{(k)} \mathbf{M}_{11}^{(k)} + \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{12}^{(k)} + \mathbf{d}_{21}^{(k)}) \mathbf{M}_{22}^{(k)} + \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{13}^{(k)} + 2\mathbf{d}_{31}^{(k)}) \mathbf{M}_{12}^{(k)} + \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{14}^{(k)} + \mathbf{d}_{41}^{(k)}) \mathbf{L}_{11}^{(k)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} (d_{15}^{(k)} + d_{51}^{(k)}) \mathcal{L}_{22}^{(k)} + \frac{1}{2} (d_{16}^{(k)} + 2d_{61}^{(k)}) \mathcal{L}_{12}^{(k)}, \\
\mathcal{X}_{22}^{(k)\gamma} &= \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial M_{22}^{(k)}} = \frac{1}{2} (d_{12}^{(k)} + d_{21}^{(k)}) M_{11}^{(k)} + d_{22}^{(k)} M_{22}^{(k)} + \frac{1}{2} (d_{23}^{(k)} + 2d_{32}^{(k)}) M_{12}^{(k)} + \frac{1}{2} (d_{24}^{(k)} + d_{42}^{(k)}) \mathcal{L}_{11}^{(k)} + \\
& + \frac{1}{2} (d_{25}^{(k)} + d_{52}^{(k)}) \mathcal{L}_{22}^{(k)} + \frac{1}{2} (d_{26}^{(k)} + 2d_{62}^{(k)}) \mathcal{L}_{12}^{(k)}, \\
2\mathcal{X}_{12}^{(k)\gamma} &= \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial M_{12}^{(k)}} = \frac{1}{2} (d_{13}^{(k)} + 2d_{31}^{(k)}) M_{11}^{(k)} + \frac{1}{2} (d_{23}^{(k)} + 2d_{32}^{(k)}) M_{22}^{(k)} + 2d_{33}^{(k)} M_{12}^{(k)} + \\
& + \frac{1}{2} (d_{43}^{(k)} + 2d_{34}^{(k)}) \mathcal{L}_{11}^{(k)} + \frac{1}{2} (d_{53}^{(k)} + 2d_{35}^{(k)}) \mathcal{L}_{22}^{(k)} + (d_{36}^{(k)} + d_{63}^{(k)}) \mathcal{L}_{12}^{(k)}, \quad (2.87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{11}^{(k)} &= \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial L_{11}^{(k)}} = \frac{1}{2} (d_{14}^{(k)} + d_{41}^{(k)}) M_{11}^{(k)} + \frac{1}{2} (d_{24}^{(k)} + d_{42}^{(k)}) M_{22}^{(k)} + \frac{1}{2} (d_{43}^{(k)} + 2d_{34}^{(k)}) M_{12}^{(k)} + \\
& + d_{44}^{(k)} L_{11}^{(k)} + \frac{1}{2} (d_{45}^{(k)} + d_{54}^{(k)}) \mathcal{L}_{22}^{(k)} + \frac{1}{2} (d_{46}^{(k)} + 2d_{64}^{(k)}) \mathcal{L}_{12}^{(k)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{22}^{(k)} &= \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial L_{22}^{(k)}} = \frac{1}{2} (d_{15}^{(k)} + d_{51}^{(k)}) M_{11}^{(k)} + \frac{1}{2} (d_{25}^{(k)} + d_{52}^{(k)}) M_{22}^{(k)} + \frac{1}{2} (d_{53}^{(k)} + 2d_{35}^{(k)}) M_{12}^{(k)} + \\
& + \frac{1}{2} (d_{45}^{(k)} + d_{54}^{(k)}) \mathcal{L}_{11}^{(k)} + d_{55}^{(k)} L_{22}^{(k)} + \frac{1}{2} (d_{56}^{(k)} + 2d_{65}^{(k)}) \mathcal{L}_{12}^{(k)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\psi_{12}^{(k)} &= \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial L_{12}^{(k)}} = \frac{1}{2} (d_{16}^{(k)} + 2d_{61}^{(k)}) M_{11}^{(k)} + \frac{1}{2} (d_{26}^{(k)} + 2d_{62}^{(k)}) M_{22}^{(k)} + (d_{36}^{(k)} + d_{63}^{(k)}) M_{12}^{(k)} + \\
& + \frac{1}{2} (d_{46}^{(k)} + 2d_{64}^{(k)}) \mathcal{L}_{11}^{(k)} + \frac{1}{2} (d_{56}^{(k)} + 2d_{65}^{(k)}) \mathcal{L}_{22}^{(k)} + 2d_{66}^{(k)} L_{12}^{(k)}, \quad (2.88)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\mathcal{E}_{23}^{(k)\gamma} &= \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial Q_2^{(k)}} = 2g_{11}^{(k)} Q_2^{(k)} + (g_{12}^{(k)} + g_{21}^{(k)}) Q_1^{(k)} + \frac{1}{2} (g_{31}^{(k)} + 2g_{13}^{(k)}) \mathcal{L}_{23}^{(k)} + \frac{1}{2} (g_{41}^{(k)} + 2g_{14}^{(k)}) \mathcal{L}_{13}^{(k)}, \\
2\mathcal{E}_{13}^{(k)\gamma} &= \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial Q_1^{(k)}} = (g_{12}^{(k)} + g_{21}^{(k)}) Q_2^{(k)} + 2g_{22}^{(k)} Q_1^{(k)} + \frac{1}{2} (g_{32}^{(k)} + 2g_{23}^{(k)}) \mathcal{L}_{23}^{(k)} + \frac{1}{2} (g_{42}^{(k)} + 2g_{24}^{(k)}) \mathcal{L}_{13}^{(k)}, \quad (2.89)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2^{(k)} &= \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial L_{23}^{(k)}} = \frac{1}{2} (g_{31}^{(k)} + 2g_{13}^{(k)}) Q_2^{(k)} + \frac{1}{2} (g_{32}^{(k)} + 2g_{23}^{(k)}) Q_1^{(k)} + g_{33}^{(k)} L_{23}^{(k)} + \frac{1}{2} (g_{34}^{(k)} + g_{43}^{(k)}) \mathcal{L}_{13}^{(k)}, \\
\psi_1^{(k)} &= \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial L_{13}^{(k)}} = \frac{1}{2} (g_{41}^{(k)} + 2g_{14}^{(k)}) Q_2^{(k)} + \frac{1}{2} (g_{42}^{(k)} + 2g_{24}^{(k)}) Q_1^{(k)} + \frac{1}{2} (g_{43}^{(k)} + g_{34}^{(k)}) \mathcal{L}_{23}^{(k)} + g_{44}^{(k)} L_{13}^{(k)}. \quad (2.90)
\end{aligned}$$

**2.2.3. Рівняння дискретно - структурної теорії при наявності ідеального контакту шарів структури анізотропного тіла.** Відповідно до загальної та місцевої систем координат, які були введені в підрозділі 2.1 для розглянутої багатшарової оболонки (рис.2.1), кінематичні умови ідеального

контакту  $k$ -го шару оболонки з  $k+1$  і  $k-1$ -им шарами в тензорній формі запишуться таким чином:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{(k)} = \frac{\mathbf{h}^{(k)}}{2} : \mathbf{u}_i^{(k)} + \frac{\mathbf{h}^{(k)}}{2} \gamma_i^{(k)} + \varphi^{(k)} \left( \frac{\mathbf{h}^{(k)}}{2} \right) \psi_i^{(k)} &= \mathbf{u}_i^{(k+1)} - \frac{\mathbf{h}^{(k+1)}}{2} \gamma_i^{(k+1)} - \varphi^{(k+1)} \left( \frac{\mathbf{h}^{(k+1)}}{2} \right) \psi_i^{(k+1)} \\ \mathbf{w}^{(k)} + \frac{\mathbf{h}^{(k)}}{2} \gamma^{(k)} &= \mathbf{w}^{(k+1)} - \frac{\mathbf{h}^{(k+1)}}{2} \gamma^{(k+1)}; \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{(k)} = -\frac{\mathbf{h}^{(k)}}{2} : \mathbf{u}_i^{(k)} - \frac{\mathbf{h}^{(k)}}{2} \gamma_i^{(k)} - \varphi^{(k)} \left( \frac{\mathbf{h}^{(k)}}{2} \right) \psi_i^{(k)} &= \mathbf{u}_i^{(k-1)} + \frac{\mathbf{h}^{(k-1)}}{2} \gamma_i^{(k-1)} + \varphi^{(k-1)} \left( \frac{\mathbf{h}^{(k-1)}}{2} \right) \psi_i^{(k-1)} \\ \mathbf{w}^{(k)} - \frac{\mathbf{h}^{(k)}}{2} \gamma^{(k)} &= \mathbf{w}^{(k-1)} + \frac{\mathbf{h}^{(k-1)}}{2} \gamma^{(k-1)}, \end{aligned} \quad (i = 1, 2), \quad (2.92)$$

Тут функція  $\varphi^{(k)}(\mathbf{z})$ , як зазначалося раніше (2.76), буде непарною, тобто  $\varphi^{(k)}(-\mathbf{z}) = -\varphi^{(k)}(\mathbf{z})$ . Розв'язуючи спільно рівняння (2.91) – (2.92), переміщення серединної поверхні  $k$ -го шару можна виразити через переміщення серединних поверхонь  $k+1$ ,  $k-1$ -го шарів оболонки:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{u}_i^{(k)} &= \mathbf{u}_i^{(k+1)} + \mathbf{u}_i^{(k-1)} - \frac{\mathbf{h}^{(k+1)}}{2} \gamma_i^{(k+1)} + \frac{\mathbf{h}^{(k-1)}}{2} \gamma_i^{(k-1)} - \varphi^{(k+1)} \left( \frac{\mathbf{h}^{(k+1)}}{2} \right) \psi_i^{(k+1)} + \varphi^{(k-1)} \left( \frac{\mathbf{h}^{(k-1)}}{2} \right) \psi_i^{(k-1)}, \\ 2\mathbf{w}^{(k)} &= \mathbf{w}^{(k+1)} + \mathbf{w}^{(k-1)} - \frac{\mathbf{h}^{(k+1)}}{2} \gamma^{(k+1)} + \frac{\mathbf{h}^{(k-1)}}{2} \gamma^{(k-1)}. \end{aligned} \quad (i = 1, 2), \quad (2.93)$$

Вирази (2.91) – (2.92) дещо видозмінюються для першого і  $n$ -го шарів:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^{(1)} &= \mathbf{u}_i^{(2)} - \frac{\mathbf{h}^{(2)}}{2} \gamma_i^{(2)} - \frac{\mathbf{h}^{(1)}}{2} \gamma_i^{(1)} - \varphi^{(2)} \left( \frac{\mathbf{h}^{(2)}}{2} \right) \psi_i^{(2)} - \varphi^{(1)} \left( \frac{\mathbf{h}^{(1)}}{2} \right) \psi_i^{(1)} \quad (i = 1, 2), \\ \mathbf{w}^{(1)} &= \mathbf{w}^{(2)} - \frac{\mathbf{h}^{(1)}}{2} \gamma^{(1)} - \frac{\mathbf{h}^{(2)}}{2} \gamma^{(2)}, \\ \mathbf{u}_i^{(n)} &= \mathbf{u}_i^{(n-1)} + \frac{\mathbf{h}^{(n-1)}}{2} \gamma_i^{(n-1)} + \frac{\mathbf{h}^{(n)}}{2} \gamma_i^{(n)} + \varphi^{(n-1)} \left( \frac{\mathbf{h}^{(n-1)}}{2} \right) \psi_i^{(n-1)} + \varphi^{(n)} \left( \frac{\mathbf{h}^{(n)}}{2} \right) \psi_i^{(n)} \quad (i = 1, 2), \\ \mathbf{w}^{(n)} &= \mathbf{w}^{(n-1)} + \frac{\mathbf{h}^{(n-1)}}{2} \gamma^{(n-1)} + \frac{\mathbf{h}^{(n)}}{2} \gamma^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Статичні крайові умови ідеального контакту на лицьових поверхнях  $k$ -го шару приймають вигляд

$$\sigma_{i3}^{(k)+} = \sigma_{i3}^{(k+1)-}, \quad \sigma_{i3}^{(k)-} = \sigma_{i3}^{(k-1)+} \quad (i=1,2), \quad \sigma_{33}^{(k)+} = \sigma_{33}^{(k+1)-}, \quad \sigma_{33}^{(k)-} = \sigma_{33}^{(k-1)+}. \quad (2.95)$$

Для першого і  $n$ -го шарів оболонки вирази (2.95) відповідно перепишуть так:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^{(1)+} &= \sigma_{i3}^{(2)-}, & \sigma_{i3}^{(1)-} &= q_{(1)}^{(-)i} \quad (i=1,2), & \sigma_{33}^{(1)+} &= \sigma_{33}^{(2)-}, & \sigma_{33}^{(1)-} &= q_{(1)}^{(-)}, \\ \sigma_{i3}^{(n)+} &= -q_{(n)}^{(+)i}, & \sigma_{i3}^{(n)-} &= \sigma_{i3}^{(n-1)+} \quad (i=1,2), & \sigma_{33}^{(n)+} &= -q_{(n)}^{(+)}, & \sigma_{33}^{(n)-} &= \sigma_{33}^{(n-1)+}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

При цьому напруження  $\sigma_{i3}^{(k)}$  ( $i=1,2,3$ ) на лицьових поверхнях  $k$ -го шару, згідно статичним умовам (2.95) і співвідношенням пружності (2.67), приймають вигляд

$$\begin{aligned} z^{(k)} = -\frac{h^{(k)}}{2}: \quad \sigma_{i3}^{(k)-} &= a_{(k)}^{54} \varepsilon_{23}^{(k)\gamma} + a_{(k)}^{55} \varepsilon_{13}^{(k)\gamma} + \varphi^{(k)} \left( \frac{h^{(k)}}{2} \right) \left( a_{(k)}^{54} \psi_2^{(k)} + a_{(k)}^{55} \psi_1^{(k)} \right) \quad (1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5), \\ \sigma_{33}^{(k)-} &= a_{(k)}^{31} \varepsilon_{11}^{(k)} + a_{(k)}^{32} \varepsilon_{22}^{(k)} + a_{(k)}^{33} \varepsilon_{33}^{(k)} + a_{(k)}^{36} \varepsilon_{12}^{(k)} - \frac{h^{(k)}}{2} \left( a_{(k)}^{31} \chi_{11}^{(k)\gamma} + a_{(k)}^{32} \chi_{22}^{(k)\gamma} + a_{(k)}^{36} \chi_{12}^{(k)\gamma} \right) - \\ &\quad - \varphi^{(k)} \left( \frac{h^{(k)}}{2} \right) \left( a_{(k)}^{31} \psi_{11}^{(k)} + a_{(k)}^{32} \psi_{22}^{(k)} + a_{(k)}^{36} \psi_{12}^{(k)} \right), \\ z^{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2}: \quad \sigma_{i3}^{(k)+} &= a_{(k)}^{54} \varepsilon_{23}^{(k)\gamma} + a_{(k)}^{55} \varepsilon_{13}^{(k)\gamma} + \varphi^{(k)} \left( \frac{h^{(k)}}{2} \right) \left( a_{(k)}^{54} \psi_2^{(k)} + a_{(k)}^{55} \psi_1^{(k)} \right) \quad (1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5), \\ \sigma_{33}^{(k)+} &= a_{(k)}^{31} \varepsilon_{11}^{(k)} + a_{(k)}^{32} \varepsilon_{22}^{(k)} + a_{(k)}^{33} \varepsilon_{33}^{(k)} + a_{(k)}^{36} \varepsilon_{12}^{(k)} + \frac{h^{(k)}}{2} \left( a_{(k)}^{31} \chi_{11}^{(k)\gamma} + a_{(k)}^{32} \chi_{22}^{(k)\gamma} + a_{(k)}^{36} \chi_{12}^{(k)\gamma} \right) + \\ &\quad + \varphi^{(k)} \left( \frac{h^{(k)}}{2} \right) \left( a_{(k)}^{31} \psi_{11}^{(k)} + a_{(k)}^{32} \psi_{22}^{(k)} + a_{(k)}^{36} \psi_{12}^{(k)} \right). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Таким чином, кінематичні умови ідеального контакту лицьових поверхонь  $k$ -го шару і зв'язаних з ними лицьових поверхонь  $k+1$  і  $k-1$  шарів

(2.91), (2.92) накладають певні обмеження (2.93) на тангенціальні і нормальні переміщення  $k$ -го шару. Аналогічно статичні умови ідеального контакту (2.95) вносять деякі зміни в характер розподілу напружень зсуву та обтиснення (2.67) в зонах контакту  $k$ -го шару (2.97).

Вносячи співвідношення (2.95) у формули (2.42) – (2.44) і вважаючи, що  $g^{(k)} \approx a^{(k)}$ , компоненти векторів  $\vec{X}_{(k)}$ ,  $\vec{M}_{(k)}$ ,  $\vec{B}_{(k)}$   $k$ -го шару оболонки приймають вигляд

$$\begin{aligned} X_i^{(k)} &= \sigma_{i3}^{(k)+} - \sigma_{i3}^{(k)-}, \quad X_3^{(k)} = \sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-}, \\ M_i^{(k)} &= \frac{h^{(k)}}{2} (\sigma_{i3}^{(k)+} - \sigma_{i3}^{(k)-}), \quad M_3^{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2} (\sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-}), \\ B_i^{(k)} &= \varphi^{(k)} \left( \frac{h^{(k)}}{2} \right) (\sigma_{i3}^{(k)+} - \sigma_{i3}^{(k)-}) \quad (i=1,2). \end{aligned} \quad (2.98)$$

Тут не враховується вплив власної ваги  $k$ -го шару  $\vec{p}^{(k)}$  на компоненти тензорів напружень і деформацій.

Маючи геометричні співвідношення (2.11) – (2.35) для випадку середнього вигину  $k$ -го шару, фізичні співвідношення (2.86) – (2.90), рівняння рівноваги (2.58), (2.59), нескладно для оболонки обертання, яка включає в себе  $n$  шарів з співвісними поверхнями обертання, скласти  $n$  розв'язуючих систем рівнянь для кожного шару. При цьому умови ідеального контакту по зв'язаних лицьових поверхнях шарів виконуються за допомогою співвідношень (2.93) – (2.94), (2.97) – (2.98). В якості основних невідомих приймаються функції, які входять в граничні умови на бічному контурі  $k$ -го шару оболонки. Таким чином, розв'язуюча система диференціальних рівнянь в частинних похідних для  $k$ -го шару оболонки має вигляд

$$\frac{\partial \vec{R}^{(k)}}{A_{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} = D_0^{(k)} \vec{R}^{(k)} + D_1^{(k)} \frac{\partial \vec{R}^{(k)}}{B_{(k)} \partial \alpha_2^{(k)}} + \vec{f}^{(k)} \quad k=1,2,\dots,n, \quad (2.99)$$

де

$$\vec{\mathbf{R}}^{(k)} = \{ \mathbf{R}_{11}^{(k)}, \mathbf{R}_{12}^{(k)}, \mathbf{R}_{13}^{(k)}, \mathbf{M}_{11}^{(k)}, \mathbf{M}_{12}^{(k)}, \mathbf{L}_{11}^{(k)}, \mathbf{L}_{12}^{(k)}, \mathbf{u}_1^{(k)}, \mathbf{u}_2^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)} \}^T,$$

$$\vec{\mathbf{f}}^{(k)} = \{ f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_{14}^{(k)} \}^T,$$

$\mathbf{D}_0^{(k)}, \mathbf{D}_1^{(k)}$  – квадратні матриці 14-го порядку.

Окрім 14 диференціальних рівнянь система рівнянь (2.99) доповнюється двома недиференціальними рівняннями (2.59) і (2.13) при врахуванні поперечного обтиснення  $k$ -го шару. На торцях кожного шару оболонки мають місце статичні (2.60), геометричні та змішаного типу граничні умови (2.61) – (2.64).

Після відкидання нелінійних доданків більш високого порядку малості фізичні компоненти тензора тангенціальних зусиль  $\mathbf{R}_{ij}^{(k)}$  і зусиль поперечного зсуву  $\mathbf{R}_{i3}^{(k)}$  (2.55) запишуться таким чином:

$$\mathbf{R}_{11}^{(k)} \approx \mathbf{T}_{11}^{(k)}, \quad \mathbf{R}_{22}^{(k)} \approx \mathbf{T}_{22}^{(k)}, \quad \mathbf{R}_{12}^{(k)} \approx \mathbf{R}_{21}^{(k)} \approx \mathbf{T}_{12}^{(k)} \approx \mathbf{T}_{21}^{(k)},$$

$$\mathbf{R}_{13}^{(k)} \approx \mathbf{T}_{11}^{(k)} \boldsymbol{\omega}_1^{(k)} + \mathbf{T}_{12}^{(k)} \boldsymbol{\omega}_2^{(k)} + \mathbf{Q}_1^{(k)}, \quad \mathbf{R}_{23}^{(k)} \approx \mathbf{T}_{21}^{(k)} \boldsymbol{\omega}_1^{(k)} + \mathbf{T}_{22}^{(k)} \boldsymbol{\omega}_2^{(k)} + \mathbf{Q}_2^{(k)}, \quad (2.100)$$

де

$$\gamma_1^{(k)} = 2\boldsymbol{\varepsilon}_{13}^{(k)\gamma} - \boldsymbol{\omega}_1^{(k)}, \quad \boldsymbol{\omega}_1^{(k)} = \frac{\partial \mathbf{w}^{(k)}}{\mathbf{A}^{(k)} \partial \alpha_1} - \mathbf{k}_1^{(k)} \mathbf{u}_1^{(k)} \quad (1 \leftrightarrow 2, \mathbf{A}^{(k)} \leftrightarrow \mathbf{B}^{(k)}). \quad (2.101)$$

При цьому система рівнянь (2.99) переписеться

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{Y}}^{(k)}}{\mathbf{A}_{(k)} \partial \alpha_1} = \mathbf{F} \left( \alpha_1, \alpha_2, \vec{\mathbf{Y}}^{(k)}, \frac{\partial \vec{\mathbf{Y}}^{(k)}}{\mathbf{B}_{(k)} \partial \alpha_2}, \vec{\mathbf{f}}^{(k)} \right) \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.102)$$

де вектор розв'язків

$$\vec{\mathbf{Y}}^{(k)} = \{ \vec{\mathbf{Y}}_1^{(k)}, \vec{\mathbf{Y}}_2^{(k)}, \dots, \vec{\mathbf{Y}}_{14}^{(k)} \}^T =$$

$$= \{ \mathbf{T}_{11}^{(k)}, \mathbf{T}_{12}^{(k)}, \mathbf{R}_{13}^{(k)}, \mathbf{M}_{11}^{(k)}, \mathbf{M}_{12}^{(k)}, \mathbf{L}_{11}^{(k)}, \mathbf{L}_{12}^{(k)}, \mathbf{u}_1^{(k)}, \mathbf{u}_2^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)} \}^T$$

і компоненти вектора правих частин  $\mathbf{F}$  в розгорнутій формі:

$$\begin{aligned}
F_1^{(k)} &= \rho_1^{(k)} Y_1^{(k)} + 2\rho_2^{(k)} Y_2^{(k)} - \rho_1^{(k)} T_{22}^{(k)} - k_1^{(k)} Y_3^{(k)} - \frac{\partial Y_2^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} - X_1^{(k)}, \\
F_2^{(k)} &= -\rho_2^{(k)} Y_1^{(k)} + 2\rho_1^{(k)} Y_2^{(k)} + \rho_2^{(k)} T_{22}^{(k)} - k_2^{(k)} R_{23}^{(k)} - \frac{\partial T_{22}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} - X_2^{(k)}, \\
F_3^{(k)} &= k_1^{(k)} Y_1^{(k)} + \rho_1^{(k)} Y_3^{(k)} + k_2^{(k)} T_{22}^{(k)} + \rho_2^{(k)} R_{23}^{(k)} - \frac{\partial R_{23}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} - X_3^{(k)}, \\
F_4^{(k)} &= \rho_1^{(k)} Y_4^{(k)} + 2\rho_2^{(k)} Y_5^{(k)} - \rho_1^{(k)} M_{22}^{(k)} + Q_1^{(k)} - \frac{\partial Y_5^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} - \frac{h^{(k)}}{2} X_1^{(k)}, \\
F_5^{(k)} &= -\rho_2^{(k)} Y_4^{(k)} + 2\rho_1^{(k)} Y_5^{(k)} + \rho_2^{(k)} M_{22}^{(k)} + Q_2^{(k)} - \frac{\partial M_{22}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} - \frac{h^{(k)}}{2} X_2^{(k)}, \\
F_6^{(k)} &= \rho_1^{(k)} Y_6^{(k)} + 2\rho_2^{(k)} Y_7^{(k)} - \rho_1^{(k)} L_{22}^{(k)} + L_{13}^{(k)} - \frac{\partial Y_7^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} - \varphi^{(k)} \left( \frac{h^{(k)}}{2} \right) X_1^{(k)}, \\
F_7^{(k)} &= -\rho_2^{(k)} Y_6^{(k)} + 2\rho_1^{(k)} Y_7^{(k)} + \rho_2^{(k)} L_{22}^{(k)} + L_{23}^{(k)} - \frac{\partial L_{22}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} - \varphi^{(k)} \left( \frac{h^{(k)}}{2} \right) X_2^{(k)}, \\
F_8^{(k)} &= \varepsilon_{11}^{(k)} + \rho_2^{(k)} Y_9^{(k)} - k_1^{(k)} Y_{10}^{(k)} - \frac{1}{2} (2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)})^2, \\
F_9^{(k)} &= \varepsilon_{12}^{(k)} - \rho_2^{(k)} Y_8^{(k)} - \rho_1^{(k)} Y_9^{(k)} - (2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)}) \left( \frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2} - k_2^{(k)} Y_9^{(k)} \right) - \frac{\partial Y_8^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2}, \\
F_{10}^{(k)} &= 2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)} + k_1^{(k)} Y_8^{(k)}, \quad F_{11}^{(k)} = \chi_{11}^{(k)\gamma} + \rho_2^{(k)} Y_{12}^{(k)}, \\
F_{12}^{(k)} &= 2\chi_{12}^{(k)\gamma} - \rho_2^{(k)} Y_{11}^{(k)} - \rho_1^{(k)} Y_{12}^{(k)} - \frac{\partial Y_{11}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2}, \quad F_{13}^{(k)} = \psi_{11}^{(k)} + \rho_2^{(k)} Y_{14}^{(k)}, \\
F_{14}^{(k)} &= 2\psi_{12}^{(k)} - \rho_2^{(k)} Y_{13}^{(k)} - \rho_1^{(k)} Y_{14}^{(k)} - \frac{\partial Y_{13}^{(k)}}{B^{(k)} \partial \alpha_2}, \tag{2.103}
\end{aligned}$$

$$\text{де } \rho_1 = -\frac{\partial B^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)} \partial \alpha_1}, \quad \rho_2 = -\frac{\partial A^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)} \partial \alpha_2}.$$

При врахуванні поперечного обтиснення  $k$ -го шару система рівнянь (2.102) доповнюється двома недиференціальними рівняннями:

$$Q_3^{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2} (\sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-}) - k_1^{(k)} (Y_4^{(k)} + Y_6^{(k)}) - k_2^{(k)} (M_{22}^{(k)} + L_{22}^{(k)}),$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \gamma_{(k)}. \quad (2.104)$$

Враховуючи, що, як правило, тангенціальні компоненти деформацій  $k$ -го шару не чинять істотного впливу на величину напружень поперечного обтиснення, третє рівняння фізичних співвідношень (2.69) можна переписати у такому вигляді:

$$Q_3^{(k)} \approx A_{33}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)z}. \quad (2.105)$$

Розв'язуючи спільно рівняння (2.104) і (2.105), можна скласти вирази для визначення деформації поперечного обтиснення  $k$ -го шару

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \frac{Q_3^{(k)}}{A_{33}^{(k)}} = \left( A_{33}^{(k)} \right)^{-1} \left[ \frac{h^{(k)}}{2} \left( \sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-} \right) - k_1^{(k)} \left( Y_4^{(k)} + Y_6^{(k)} \right) - k_2^{(k)} \left( M_{22}^{(k)} + L_{22}^{(k)} \right) \right]. \quad (2.106)$$

У рівнянні (2.106) не враховується доданок, рівний половині добутку товщини  $k$ -го шару на різницю напружень поперечного обтиснення, які виникають на лицьових поверхнях, так як відомо, що ці напруження значно менші інших компонент напруженого стану оболонки.

Всі невідомі, які входять в праву частину системи рівнянь (2.102), необхідно виразити через компоненти вектора розв'язків. Ці залежності нескладно отримати за допомогою геометричних і фізичних співвідношень.

### **2.3. Дискретно-структурна теорія багат шарових тонкостінних конструкцій з ослабленим контактом між шарами**

У даному підрозділі на основі запропонованого варіанту дискретно-структурної теорії розроблена модель багат шарової конструкції, в якій враховуються ослаблені умови контакту сполучених поверхонь анізотропних шарів з різними напрямками армування матеріалу.



Внаслідок того, що між жорсткими шарами в процесі виготовлення анізотропних оболонок утворюється міжфазний м'який клейовий шар, товщину цього шару, як правило, вважають рівною нулю. Тоді відповідно до прийнятих допущень передбачається пружне проковзування жорстких шарів один щодо одного, тобто по лицьовим сполученим поверхням виконуються тільки статичні умови контакту. Вважається, що напруження поперечного зсуву та обтиснення на границі контакту рівні між собою.

Статичні умови ідеального контакту по сполученим лицьовим поверхням  $k$ -го шару (2.95) можна врахувати, якщо скористатися методом штрафних функцій [138] і в варіацію роботи  $\delta A_R$  (2.39) додатково ввести

$$\bar{P}_{(k)} = K(\bar{X}_{(k-1)}^+ - \bar{X}_{(k)}^-)^2, \quad (2.107)$$

де  $K$  – коефіцієнт штрафу.

Після нескладних перетворень в праву частину (2.103) системи рівнянь (2.102), складених для шару  $2 \leq k \leq n - 1$ , увійдуть відповідні штрафні функції:

$$\begin{aligned} \text{в перше рівняння -} & \quad P_{(k)}^1 = 2K(\sigma_{13}^{(k-1)+} - \sigma_{13}^{(k)-}) , \\ \text{в друге рівняння -} & \quad P_{(k)}^2 = 2K(\sigma_{23}^{(k-1)+} - \sigma_{23}^{(k)-}) , \\ \text{в третє рівняння -} & \quad P_{(k)}^3 = 2K(\sigma_{33}^{(k-1)+} - \sigma_{33}^{(k)-}) . \end{aligned} \quad (2.108)$$

Слід зазначити, що розподіли напружень поперечного зсуву та обтиснення  $\sigma_{i3}^{(k)}$ ,  $\sigma_{33}^{(k)}$  ( $i=1,2$ ) по товщині  $k$ -го шару відповідають припущенням (2.31) про зміну деформацій  $\varepsilon_{i3}^{(k)z}$ ,  $\varepsilon_{33}^{(k)z}$  залежно від координати  $z$ , а також фізичним співвідношенням узагальненого закону Гука (2.67)

$$\sigma_{13}^{(k)} = a_{(k)}^{45} \varepsilon_{23}^{(k)\gamma} + a_{(k)}^{55} \varepsilon_{13}^{(k)\gamma} + \frac{1}{2} \varphi_{(z)}^{(k)} \left( a_{(k)}^{45} \psi_2^{(k)} + a_{(k)}^{55} \psi_1^{(k)} \right) \quad (1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5), \quad (2.109)$$

$$\sigma_{33}^{(k)} = a_{(k)}^{31} \varepsilon_{11}^{(k)} + a_{(k)}^{32} \varepsilon_{22}^{(k)} + a_{(k)}^{33} \varepsilon_{33}^{(k)z}, \quad (2.110)$$

$$\text{де} \quad -\frac{h^{(k)}}{2} \leq z \leq \frac{h^{(k)}}{2}.$$

Вирази (2.109) – (2.110) дозволяють за допомогою методу штрафних функцій виконати статичні умови міжшарового контакту (2.95). Тим не менше, коли в статичних умовах контакту першого і n-го шарів (2.96) анізотропної оболонки мають місце нульові значення горизонтальних або вертикальних складових зовнішнього навантаження  $q_{(1)}^{(-)i}$ ,  $q_{(n)}^{(+)i}$ ,  $q_{(1)}^{(-)}$ ,  $q_n^{(+)}$  ( $i = 1, 2$ ), наявність в (2.109) – (2.110) постійних величин, які не залежать від координати  $z$ , не дозволяє точно задовольнити граничні умови на поверхнях оболонки  $z = \delta_{(0)}$ ,  $z = \delta_{(n)}$  (рис. 2.1 б).

Таким чином, поряд з припущеннями (2.31) додатково можна вважати, що напруження  $\sigma_{i3}^{(k)}$ ,  $\sigma_{33}^{(k)}$  змінюються по товщині шару, згідно наступного закону:

$$\sigma_{i3}^{(k)} = \left(0,5 + \frac{z}{h_{(k)}}\right)\sigma_{i3}^{(k)+} + \left(0,5 - \frac{z}{h_{(k)}}\right)\sigma_{i3}^{(k)-} + f_{(k)}^*(z)\eta_i^{(k)} \quad (i = 1, 2), \quad (2.111)$$

$$\sigma_{33}^{(k)} = \left(0,5 + z/h_{(k)}\right)\sigma_{33}^{(k)+} + \left(0,5 - z/h_{(k)}\right)\sigma_{33}^{(k)-}, \quad (2.112)$$

де  $\sigma_{i3}^{(k)-}$ ,  $\sigma_{33}^{(k)-}$ ,  $\sigma_{i3}^{(k)+}$ ,  $\sigma_{33}^{(k)+}$  – значення напружень поперечного зсуву та обтиснення на нижній  $z = -h_{(k)}/2$  і верхній  $z = h_{(k)}/2$  поверхнях шару; функція  $f_{(k)}^*(z)$  неперервна і задовольняє умовам

$$\int_{-\frac{h_{(k)}}{2}}^{\frac{h_{(k)}}{2}} f_{(k)}^*(z) dz = 1, \quad f_{(k)}^*\left(-\frac{h_{(k)}}{2}\right) = f_{(k)}^*\left(\frac{h_{(k)}}{2}\right) = 0; \quad (2.113)$$

функція  $\eta_i^{(k)} = \eta_i^{(k)}(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)})$  дозволяє зв'язати і встановити несуперечливий закон зміни по товщині k-го шару деформацій  $\varepsilon_{i3}^{(k)z}$  і напружень  $\sigma_{i3}^{(k)}$ ; залежність (2.112) відповідає апроксимації функції  $\sigma_{33}^{(k)}$  поліномами Лежандра

в першому наближенні, що якісно вірно відображає прийняті допущення про деформації  $\varepsilon_{33}^{(k)z}$ .

Як впливає з (2.48), співвідношення пружності для напружень поперечного зсуву та обтиснення виконуються інтегрально по товщині k-го шару. Ці вирази з урахуванням залежностей (2.111) – (2.112) приймають вигляд

$$\int_{-\frac{h^{(k)}}{2}}^{\frac{h^{(k)}}{2}} \left( 2\varepsilon_{13}^{(k)z} - \mathbf{B}_{45}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} - \mathbf{B}_{55}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)} \right) f_{(k)}^*(z) dz = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5), \quad (2.114)$$

$$\int_{-\frac{h^{(k)}}{2}}^{\frac{h^{(k)}}{2}} \left( \varepsilon_{33}^{(k)z} - \mathbf{B}_{31}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} - \mathbf{B}_{32}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} - \mathbf{B}_{33}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} \right) dz = 0. \quad (2.115)$$

Підставивши в (2.116) співвідношення (2.31), (2.113), а також задавши вираз ортонормованій функції (2.113) у вигляді  $f_{(k)}^*(z) = \varphi'_{(k)}(z)$ , неважко знайти залежність напружень  $\sigma_{i3}^{(k)}$  від координати  $z$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(k)} = & \sigma_1^{(k)+} + \frac{2z}{h^{(k)}} \sigma_1^{(k)-} + \frac{1}{d_{(k)}^*} \varphi'_{(k)}(z) \left\{ a_{(k)}^{45} \left[ \varepsilon_{23}^{(k)\gamma} + \frac{1}{2} d_{(k)}^* \psi_2^{(k)} - d_{45}^{(k)*} \sigma_1^{(k)+} - d_{44}^{(k)*} \sigma_2^{(k)+} \right] + \right. \\ & \left. + a_{(k)}^{55} \left[ \varepsilon_{13}^{(k)\gamma} + \frac{1}{2} d_{(k)}^* \psi_1 - d_{55}^{(k)*} \sigma_1^{(k)+} - d_{45}^{(k)*} \sigma_2^{(k)+} \right] \right\} \quad (1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5), \quad (2.116) \end{aligned}$$

де

$$d_{(k)}^* = \int_{-\frac{h^{(k)}}{2}}^{\frac{h^{(k)}}{2}} (\varphi'_{(k)}(z))^2 dz, \quad d_{mn}^{(k)*} = \int_{-\frac{h^{(k)}}{2}}^{\frac{h^{(k)}}{2}} \mathbf{B}_{mn}^{(k)} \varphi'_{(k)}(z) dz \quad (m, n = 4, 5),$$

$$\sigma_i^{(k)+} = \frac{\sigma_{i3}^{(k)+} + \sigma_{i3}^{(k)-}}{2}, \quad \sigma_i^{(k)-} = \frac{\sigma_{i3}^{(k)+} - \sigma_{i3}^{(k)-}}{2} \quad (i = 1, 2).$$

Окрім інтегральної тотожності (2.114), в результаті проведених перетворень можна додатково отримати статичні умови ідеального контакту на лицьових поверхнях k-го шару (2.95).

Аналогічно, з рівнянь (2.115) для напружень  $\sigma_{33}^{(k)}$   $k$ -го шару мають місце співвідношення

$$\sigma_3^{(k)+} = \frac{\sigma_{33}^{(k)+} + \sigma_{33}^{(k)-}}{2} = a_{(k)}^{31} \epsilon_{11}^{(k)} + a_{(k)}^{32} \epsilon_{22}^{(k)} + a_{(k)}^{33} \epsilon_{33}^{(k)}, \quad (2.117)$$

З урахуванням введених позначень (2.117), вираз (2.112) запишеться так:

$$\sigma_{33}^{(k)} = \sigma_3^{(k)+} + \frac{2z}{h^{(k)}} \sigma_3^{(k)-}, \quad (2.118)$$

де 
$$\sigma_3^{(k)+} = \frac{\sigma_{33}^{(k)+} + \sigma_{33}^{(k)-}}{2}, \quad \sigma_3^{(k)-} = \frac{\sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-}}{2}.$$

## 2.4. Рівняння незв'язаної задачі термопружності багат шарових тонкостінних конструкцій з ослабленим контактом між шарами

**2.4.1. Рівняння теплопровідності для багат шарових тонкостінних конструкцій.** Нехай багат шарова оболонка складається з  $n$  анізотропних криволінійних шарів з різними теплофізичними властивостями. Розподіл температур по товщині кожного шару представимо у вигляді розкладання за поліномами Лежандра

$$t_{(k)} = \sum_{j=0}^m t_j^{(k)}(\tau, \alpha_i) P_j(z). \quad (2.119)$$

При малій товщині шарів і повільній зміні температури в часі може бути використана лінійна апроксимація

$$t_{(k)} = t_0^{(k)}(\tau, \alpha_i) + z_{(k)} \theta^{(k)}(\tau, \alpha_i). \quad (2.120)$$

Тут  $t_0^{(k)}$  – температура серединних поверхонь  $k$ -го анізотропного шару;  $\theta^{(k)}$  – температурний градієнт в цьому шарі.

Вважається, що по сполученим лицьовим поверхням сусідніх шарів виконуються умови ідеального теплового контакту:

$$t^{(k+1)} \Big|_{z^{(k+1)}=-\frac{h}{2}} = t^{(k)} \Big|_{z^{(k)}=\frac{h}{2}}; \quad \frac{\lambda^{(k+1)} \partial t^{(k+1)}}{\partial z_{(k+1)}} \Big|_{z^{(k+1)}=-\frac{h}{2}} = \frac{\lambda^{(k)} \partial t^{(k)}}{\partial z_{(k)}} \Big|_{z^{(k)}=\frac{h}{2}}. \quad (2.121)$$

Тут  $\lambda^{(k)}$  і  $\lambda^{(k+1)}$  – коефіцієнти теплопровідності  $k$ -го і  $k+1$ -го жорстких шарів у напрямку загальної нормалі до поверхні контакту цих шарів.

Відповідно до роботи [139], рівняння теплопровідності можуть бути отримані з варіаційного принципу, згідно з яким потрібна стаціонарність деякого функціоналу, до якого поряд з температурою розглянутого процесу  $t(\tau, \alpha_i)$  входить температура фіктивного процесу  $t^*(\tau, \alpha_i)$ , який є тимчасовим відображенням дійсного процесу. Введення цього фіктивного процесу є необхідним, щоб явище в цілому було консервативним.

Варіаційний принцип теплопровідності для багат шарових конструкцій записується таким чином:

$$\delta I = 0, \quad (2.122)$$

де функціонал  $I$  за лінійної апроксимації зміни температури у всіх шарах має вигляд

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{k=1}^n \iint_{S^{(k)}} I^{(k)} dS + \iint_{S^{(1)}} I^- dS + \iint_{S^{(n)}} I^+ dS + \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma} I_{\Gamma}^{(k)} d\Gamma \right\} dt. \quad (2.123)$$

Підінтегральні вирази визначаються при цьому за формулами

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}^{(k)} &= \frac{c_{(k)} \rho_{(k)} \mathbf{h}_{(k)}}{2} \left( \mathbf{t}_0^{(k)*} \frac{\partial \mathbf{t}_0^{(k)}}{\partial \tau} - \mathbf{t}_0^{(k)} \frac{\partial \mathbf{t}_0^{(k)*}}{\partial \tau} \right) + \lambda_{(k)}^{\alpha\beta} \mathbf{h}_{(k)} \nabla_{\alpha}^{(k)} \mathbf{t}_0^{(k)*} \nabla_{\beta}^{(k)} \mathbf{t}_0^{(k)} + \\
&+ \lambda_{(k)} \mathbf{h}_{(k)} \boldsymbol{\theta}_{(k)}^* \boldsymbol{\theta}_{(k)} + \frac{c_{(k)} \rho_{(k)} \mathbf{h}_{(k)}^3}{24} \left( \boldsymbol{\theta}_{(k)}^* \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{(k)}}{\partial \tau} - \boldsymbol{\theta}_{(k)} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{(k)}^*}{\partial \tau} \right) + \lambda_{(k)}^{\alpha\beta} \frac{\mathbf{h}_{(k)}^3}{12} \nabla_{\alpha}^{(k)} \boldsymbol{\theta}_{(k)}^* \nabla_{\beta}^{(k)} \boldsymbol{\theta}_{(k)} ; \\
\mathbf{I}^- &= \chi_- \left[ \begin{aligned} &\left( \mathbf{t}_0^{(l)} - \frac{\mathbf{h}_{(l)}}{2} \boldsymbol{\theta}_{(l)} \right) \left( \mathbf{t}_0^{(l)*} - \frac{\mathbf{h}_{(l)}}{2} \boldsymbol{\theta}_{(l)}^* \right) - t^- \left( \mathbf{t}_0^{(l)} - \frac{\mathbf{h}_{(l)}}{2} \boldsymbol{\theta}_{(l)} \right) - \\ &- t^- \left( \mathbf{t}_0^{(l)*} - \frac{\mathbf{h}_{(l)}}{2} \boldsymbol{\theta}_{(l)}^* \right) \end{aligned} \right] ; \\
\mathbf{I}^+ &= \chi_+ \left[ \begin{aligned} &\left( \mathbf{t}_0^{(n)} + \frac{\mathbf{h}_{(n)}}{2} \boldsymbol{\theta}_{(n)} \right) \left( \mathbf{t}_0^{(n)*} + \frac{\mathbf{h}_{(n)}}{2} \boldsymbol{\theta}_{(n)}^* \right) - t^+ \left( \mathbf{t}_0^{(n)} + \frac{\mathbf{h}_{(n)}}{2} \boldsymbol{\theta}_{(n)} \right) - \\ &- t^+ \left( \mathbf{t}_0^{(n)*} + \frac{\mathbf{h}_{(n)}}{2} \boldsymbol{\theta}_{(n)}^* \right) \end{aligned} \right] ; \\
\mathbf{I}_r^{(k)} &= \chi_{(k)} \mathbf{h}_{(k)} \left( \mathbf{t}_0^{(k)} \mathbf{t}_0^{(k)*} - \left( \mathbf{t}_0^{(k)} + \mathbf{t}_0^{(k)*} \right) \mathbf{t}_{0r}^{(k)} \right) + \frac{\chi_{(k)} \mathbf{h}_{(k)}^3}{12} \left[ \boldsymbol{\theta}_{(k)} \boldsymbol{\theta}_{(k)}^* - \left( \boldsymbol{\theta}_{(k)} + \boldsymbol{\theta}_{(k)}^* \right) \boldsymbol{\theta}_r^{(k)} \right].
\end{aligned}$$

У виразах (2.123) введені такі позначення:  $c_{(k)}$  – питома теплоємність  $k$ -го жорсткого шару;  $\rho_{(k)}$  – щільність анізотропного матеріалу  $k$ -го жорсткого шару;  $\lambda_{(k)}^{\alpha\beta}$  – контраваріантні компоненти тензора коефіцієнтів теплопровідності для  $k$ -го жорсткого шару;  $\lambda_{(k)}$  – коефіцієнт теплопровідності матеріалу  $k$ -го жорсткого шару в трансверсальному напрямку;  $\nabla_{\alpha}^{(k)}$  – символи коваріантного диференціювання на серединних поверхнях відповідних шарів;  $\chi_{\pm}$  – коефіцієнти тепловіддачі поверхні жорсткого шару в навколишнє середовище на лицьових і  $\chi_{(k)}$  – торцевих поверхнях;  $t^+$ ,  $t^-$  – температури навколишнього середовища відповідно для  $n$ -го і  $l$ -го шару. Параметри  $\mathbf{t}_{0r}^{(k)}$ ,  $\boldsymbol{\theta}_r^{(k)}$  характеризують розподіл температури зовнішнього середовища  $\tau_B$  на торцевих поверхнях

$$\mathbf{t}_{0r}^{(k)} = \frac{1}{\mathbf{h}_{(k)}} \int_{-\mathbf{h}_{(k)}/2}^{\mathbf{h}_{(k)}/2} \mathbf{t}_B^{(k)} d\mathbf{z}_{(k)} ; \quad \boldsymbol{\theta}_r^{(k)} = \frac{12}{\mathbf{h}_{(k)}^3} \int_{-\mathbf{h}_{(k)}/2}^{\mathbf{h}_{(k)}/2} \mathbf{t}_B^{(k)} \mathbf{z}_{(k)} d\mathbf{z}_{(k)} . \quad (2.124)$$

При отриманні виразів (2.123) передбачалося, що на лицьових і торцевих сторонах багатшарової конструкції із зовнішнім середовищем виконуються умови теплообміну Ньютона, а внутрішні теплові джерела в шарах відсутні.

Рівняння теплопровідності отримуються як рівняння Остроградського-Ейлера для варіаційної задачі (2.122). Для  $k$ -го шару вони мають вигляд

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha}^{(k)} (\lambda_{(k)}^{\alpha\beta} \nabla_{\beta}^{(k)} t_0^{(k)}) &= c_{(k)} \rho_{(k)} \frac{\partial t_0^{(k)}}{\partial \tau}, \\ \nabla_{\alpha}^{(k)} (\lambda_{(k)}^{\alpha\beta} \nabla_{\beta}^{(k)} \theta_{(k)}) + \frac{12\lambda_{(k)}}{h_{(k)}^2} \theta_{(k)} &= c_{(k)} \rho_{(k)} \frac{\partial \theta_{(k)}}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Варіаційний принцип (2.122) доставляє також природні граничні умови:

– на торцевих поверхнях

$$\begin{aligned} \lambda_{(k)}^{\alpha\beta} \nabla_{\beta} t_0^{(k)} &= \chi_{(k)} (t_0^{(k)} - t_{0\Gamma}^{(k)}), \\ \lambda_{(k)}^{\alpha\beta} \nabla_{\beta} \theta_{(k)} &= \chi_{(k)} (\theta_{(k)} - \theta_{\Gamma}^{(k)}), \end{aligned} \quad (2.126)$$

– на лицьових поверхнях

$$\begin{aligned} t_0^{(n)} + \frac{h_{(n)}}{2} \theta_{(n)} &= t^+, & \lambda_{(n)} \theta_{(n)} &= \chi_+ (t^+ - t_0^{(n)} - \frac{h_{(n)}}{2} \theta_{(n)}); \\ t_0^{(1)} + \frac{h_{(1)}}{2} \theta_{(1)} &= t^-, & \lambda_{(1)} \theta_{(1)} &= \chi_- (t^- - t_0^{(1)} - \frac{h_{(1)}}{2} \theta_{(1)}). \end{aligned} \quad (2.127)$$

При розв'язанні нестационарної задачі теплопровідності (2.125) – (2.127) необхідне формулювання початкових умов. Для цього в початковий момент часу  $\tau=0$  можна задати значення функцій  $t_0^{(k)}$  и  $\theta_{(k)}^0$ , які характеризують розподіл температури в шаруватій оболонці.

Наведена задача теплопровідності розв'язується без урахування впливу деформування конструкції на зміну поля температур і відноситься до класу незв'язаних задач теорії термопружності.

Стаціонарна задача теплопровідності може бути вирішена на основі рівнянь (2.125) – (2.127), якщо в них не враховувати похідні за часом і початкові умови.

#### 2.4.2. Рівняння термопружності для багат шарових конструкцій.

Завдання незв'язаної теорії термопружності складаються з двох послідовно розв'язуваних задач: задачі теплопровідності і безпосередньо задачі термопружності. Задача термопружності розв'язується без урахування впливу зміни температурного поля, викликаного деформаціями. При врахуванні інерційних доданків задача термопружності називається динамічною. Оскільки характерні часи зміни температурного поля і динамічних процесів деформування оболонки значно відрізняються, то при дослідженні задач термопружності можна нехтувати інерційними членами. У тих випадках, коли можна нехтувати інерційними членами, має місце квазістатична задача термопружності. Нарешті, якщо температурне поле не залежить від часу, то нескладно перейти до вирішення стаціонарної задачі теорії термопружності.

На основі фізичних рівнянь Дюамеля-Неймана [140] рівняння узагальненого закону Гука для анізотропного шару з однією площиною пружної симетрії (2.67), (2.68), приймають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^{(k)} &= a_{11}^{(k)} \varepsilon_{11}^{(k)z} + a_{12}^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)z} + a_{13}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)z} + a_{16}^{(k)} \varepsilon_{12}^{(k)z} - \beta_{11}^{(k)} t_{(k)}, \\
 \sigma_{22}^{(k)} &= a_{21}^{(k)} \varepsilon_{11}^{(k)z} + a_{22}^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)z} + a_{23}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)z} + a_{26}^{(k)} \varepsilon_{12}^{(k)z} - \beta_{22}^{(k)} t_{(k)}, \\
 \sigma_{33}^{(k)} &= a_{31}^{(k)} \varepsilon_{11}^{(k)z} + a_{32}^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)z} + a_{33}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)z} + a_{36}^{(k)} \varepsilon_{12}^{(k)z} - \beta_{33}^{(k)} t_{(k)}, \\
 \sigma_{12}^{(k)} &= a_{61}^{(k)} \varepsilon_{11}^{(k)z} + a_{62}^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)z} + a_{63}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)z} + a_{66}^{(k)} \varepsilon_{12}^{(k)z} - \beta_{66}^{(k)} t_{(k)}, \\
 \sigma_{23}^{(k)} &= a_{44}^{(k)} \varepsilon_{23}^{(k)z} + a_{45}^{(k)} \varepsilon_{13}^{(k)z} - \beta_{23}^{(k)} t_{(k)}, \\
 \sigma_{13}^{(k)} &= a_{54}^{(k)} \varepsilon_{23}^{(k)z} + a_{55}^{(k)} \varepsilon_{13}^{(k)z} - \beta_{13}^{(k)} t_{(k)}
 \end{aligned} \tag{2.128}$$

або

$$\varepsilon_{11}^{(k)z} = B_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + B_{12}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + B_{13}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} + B_{16}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} + \alpha_{11}^{(k)} t_{(k)},$$



$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22}^{(k)z} &= B_{21}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + B_{22}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + B_{23}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} + B_{26}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} + \alpha_{22}^{t(k)} t_{(k)}, \\
\varepsilon_{33}^{(k)z} &= B_{31}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + B_{32}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + B_{33}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} + B_{36}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} + \alpha_{33}^{t(k)} t_{(k)}, \\
\varepsilon_{12}^{(k)z} &= B_{61}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + B_{62}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + B_{63}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} + B_{66}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} + \alpha_{66}^{t(k)} t_{(k)}, \\
\varepsilon_{23}^{(k)z} &= B_{44}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} + B_{45}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)} + \alpha_{23}^{t(k)} t_{(k)}, \\
\varepsilon_{13}^{(k)z} &= B_{54}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} + B_{55}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)} + \alpha_{13}^{t(k)} t_{(k)}.
\end{aligned} \tag{2.129}$$

Тут  $\alpha_{ij}^{t(k)}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 6$ ) – коефіцієнти теплового розширення  $k$ -го шару. Коефіцієнти  $\beta_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 6$ ) визначаються як розв'язки системи рівнянь (2.129).

Для подальшого викладання системи рівнянь (2.128), (2.129) зручно представити у вигляді

$$\sigma_{(k)} = a_{(k)} \varepsilon_{(k)} - \beta_{(k)} t_{(k)}, \quad \sigma_{(k)}^{\alpha^3} = a_{(k)}^{\alpha^3} \varepsilon_{(k)}^{\alpha^3} - \beta_{(k)}^{\alpha^3} t_{(k)} \tag{2.130}$$

або

$$\varepsilon_{(k)} = b_{(k)} \sigma_{(k)} + \alpha_{(k)}^t t_{(k)}, \quad \varepsilon_{(k)}^{\alpha^3} = b_{(k)}^{\alpha^3} \sigma_{(k)}^{\alpha^3} + \alpha_{(k)}^{t\alpha^3} t_{(k)}. \tag{2.131}$$

В (2.128), (2.129) введені позначення:

$$\begin{aligned}
\sigma_{(k)} &= [\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}]^T, & \sigma_{(k)}^{\alpha^3} &= [\sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}]^T, \\
\beta_{(k)} &= [\beta_{11}^{(k)}, \beta_{22}^{(k)}, \beta_{33}^{(k)}, \beta_{66}^{(k)}]^T, & \beta_{(k)}^{\alpha^3} &= [\beta_{23}^{(k)}, \beta_{13}^{(k)}]^T, \\
\varepsilon_{(k)} &= [\varepsilon_{11}^{(k)z}, \varepsilon_{22}^{(k)z}, \varepsilon_{33}^{(k)z}, \varepsilon_{12}^{(k)z}]^T, & \varepsilon_{(k)}^{\alpha^3} &= [\varepsilon_{23}^{(k)z}, \varepsilon_{13}^{(k)z}]^T, \\
\alpha_{(k)}^t &= [\alpha_{11}^{t(k)}, \alpha_{22}^{t(k)}, \alpha_{33}^{t(k)}, \alpha_{66}^{t(k)}]^T, & \alpha_{(k)}^{t\alpha^3} &= [\alpha_{23}^{t(k)}, \alpha_{13}^{t(k)}]^T, \\
a_{(k)} &= \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & a_{16}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & a_{26}^{(k)} \\ a_{31}^{(k)} & a_{32}^{(k)} & a_{33}^{(k)} & a_{36}^{(k)} \\ a_{61}^{(k)\beta} & a_{62}^{(k)\beta} & a_{63}^{(k)\beta} & a_{66}^{(k)\beta} \end{bmatrix}, & a_{(k)}^{\alpha^3} &= \begin{bmatrix} a_{44}^{(k)} & a_{45}^{(k)} \\ a_{54}^{(k)} & a_{55}^{(k)} \end{bmatrix}, \\
b_{(k)} &= \begin{bmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & b_{13}^{(k)} & b_{16}^{(k)} \\ b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & b_{23}^{(k)} & b_{26}^{(k)} \\ b_{31}^{(k)} & b_{32}^{(k)} & b_{33}^{(k)} & b_{36}^{(k)} \\ b_{61}^{(k)\beta} & b_{62}^{(k)\beta} & b_{63}^{(k)\beta} & b_{66}^{(k)\beta} \end{bmatrix}, & b_{(k)}^{\alpha^3} &= \begin{bmatrix} b_{44}^{(k)} & b_{45}^{(k)} \\ b_{54}^{(k)} & b_{55}^{(k)} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.132}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (2.130), нескладно знайти напруження  $\sigma_{(k)}$ ,  $\sigma_{(k)}^{\alpha 3}$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{(k)} &= [\mathbf{b}_{(k)}]^{-1} (\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)} - \boldsymbol{\alpha}_{(k)}^t \mathbf{t}_{(k)}) = [\mathbf{b}_{(k)}]^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)} - [\mathbf{b}_{(k)}]^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{(k)}^t \mathbf{t}_{(k)}, \\ \sigma_{(k)}^{\alpha 3} &= [\mathbf{b}_{(k)}^{\alpha 3}]^{-1} (\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^{\alpha 3} - \boldsymbol{\alpha}_{(k)}^{t \alpha 3} \mathbf{t}_{(k)}) = [\mathbf{b}_{(k)}^{\alpha 3}]^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^{\alpha 3} - [\mathbf{b}_{(k)}^{\alpha 3}]^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{(k)}^{t \alpha 3} \mathbf{t}_{(k)}.\end{aligned}\quad (2.133)$$

Порівнюючи рівняння (2.130), (2.133) можна записати наступні тотожності

$$\mathbf{a}_{(k)} = [\mathbf{b}_{(k)}]^{-1}, \quad \mathbf{a}_{(k)}^{\alpha 3} = [\mathbf{b}_{(k)}^{\alpha 3}]^{-1}, \quad (2.134)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{(k)} = [\mathbf{b}_{(k)}]^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{(k)}^t, \quad \boldsymbol{\beta}_{(k)}^{\alpha 3} = [\mathbf{b}_{(k)}^{\alpha 3}]^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{(k)}^{t \alpha 3}. \quad (2.135)$$

Таким чином, матриці жорсткості  $\mathbf{a}_{(k)}$ ,  $\mathbf{a}_{(k)}^{\alpha 3}$  рівні оберненим матрицям піддатливості  $\mathbf{b}_{(k)}$ ,  $\mathbf{b}_{(k)}^{\alpha 3}$  відповідно, а коефіцієнти  $\beta_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 6$ ) визначаються з виразів (2.135). При цьому система рівнянь (2.130) з урахуванням виразів (2.133) – (2.135) переписеться:

$$\begin{aligned}\sigma_{(k)}^t &= \mathbf{a}_{(k)} (\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)} - \boldsymbol{\alpha}_{(k)}^t \mathbf{t}_{(k)}) = \mathbf{a}_{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^t, \\ \sigma_{(k)}^{t \alpha 3} &= \mathbf{a}_{(k)}^{\alpha 3} (\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^{\alpha 3} - \boldsymbol{\alpha}_{(k)}^{t \alpha 3} \mathbf{t}_{(k)}) = \mathbf{a}_{(k)}^{\alpha 3} \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^{t \alpha 3},\end{aligned}\quad (2.136)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^t &= [\boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{(k)z} - \boldsymbol{\alpha}_{11}^{t(k)} \mathbf{t}_{(k)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{(k)z} - \boldsymbol{\alpha}_{22}^{t(k)} \mathbf{t}_{(k)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{(k)z} - \boldsymbol{\alpha}_{33}^{t(k)} \mathbf{t}_{(k)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{12}^{(k)z} - \boldsymbol{\alpha}_{12}^{t(k)} \mathbf{t}_{(k)}]^T, \\ \text{де } \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^{t \alpha 3} &= [\boldsymbol{\varepsilon}_{23}^{(k)z} - \boldsymbol{\alpha}_{23}^{t(k)} \mathbf{t}_{(k)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{13}^{(k)z} - \boldsymbol{\alpha}_{13}^{t(k)} \mathbf{t}_{(k)}]^T.\end{aligned}\quad (2.137)$$

Якщо прийняти, що зміна температури по товщині шару апроксимується лінійною залежністю (2.120), то підставляючи співвідношення (2.136) з урахуванням формул (2.11) – (2.13), (2.31) – (2.33) в (2.51), нескладно отримати фізичні співвідношення між компонентами тензорів внутрішніх зусиль і моментів  $k$ -го шару анізотропної оболонки з площиною пружної симетрії, дотичної до координатної поверхні, і компонентами тензора деформацій, які також включають і температурні деформації, в матричній формі:

$$\mathbf{T}_{(k)}^t = \mathbf{A}_{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^t, \quad (2.138)$$

$$\mathbf{M}_{(k)}^t = \mathbf{D}_{(k)} \boldsymbol{\chi}_{(k)}^t + \mathbf{K}_{(k)} \boldsymbol{\psi}_{(k)}^t, \quad \mathbf{L}_{(k)}^t = \mathbf{K}_{(k)} \boldsymbol{\chi}_{(k)}^t + \mathbf{F}_{(k)} \boldsymbol{\psi}_{(k)}^t, \quad (2.139)$$

$$\mathbf{Q}_{(k)}^{t\gamma} = \mathbf{C}_{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^{t\gamma} + \mathbf{R}_{(k)} \boldsymbol{\psi}_{(k)}^{t\gamma}, \quad \mathbf{L}_{(k)}^{t\gamma} = \mathbf{R}_{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^{t\gamma} + \mathbf{G}_{(k)} \boldsymbol{\psi}_{(k)}^{t\gamma}. \quad (2.140)$$

Тут прийняті наступні позначення матриць стовпців зусиль і деформацій:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{(k)}^t &= [\mathbf{T}_{(k)}^{t11}, \mathbf{T}_{(k)}^{t22}, \mathbf{Q}_{(k)}^{t3}, \mathbf{T}_{(k)}^{t12}]^T, \quad \mathbf{M}_{(k)}^t = [\mathbf{M}_{(k)}^{t11}, \mathbf{M}_{(k)}^{t22}, \mathbf{M}_{(k)}^{t12}]^T, \\ \mathbf{L}_{(k)}^t &= [\mathbf{L}_{(k)}^{t11}, \mathbf{L}_{(k)}^{t22}, \mathbf{L}_{(k)}^{t12}]^T, \quad \mathbf{Q}_{(k)}^{t\gamma} = [\mathbf{Q}_{(k)}^{t2}, \mathbf{Q}_{(k)}^{t1}]^T, \quad \mathbf{L}_{(k)}^{t\gamma} = [\mathbf{L}_{(k)}^{t23}, \mathbf{L}_{(k)}^{t13}]^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^t &= [\boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{(k)} - \alpha_{11}^{t(k)} t_0^{(k)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{(k)} - \alpha_{22}^{t(k)} t_0^{(k)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{(k)} - \alpha_{33}^{t(k)} t_0^{(k)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{12}^{(k)} - \alpha_{12}^{t(k)} t_0^{(k)}]^T, \\ \boldsymbol{\chi}_{(k)}^t &= [\boldsymbol{\chi}_{11}^{(k)\gamma} - \alpha_{11}^{t(k)} \boldsymbol{\theta}^{(k)}, \boldsymbol{\chi}_{22}^{(k)\gamma} - \alpha_{22}^{t(k)} \boldsymbol{\theta}^{(k)}, \boldsymbol{\chi}_{12}^{(k)\gamma} - \alpha_{12}^{t(k)} \boldsymbol{\theta}^{(k)}]^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^{t\gamma} &= [\boldsymbol{\varepsilon}_{23}^{(k)\gamma} - \alpha_{23}^{t(k)} t_0^{(k)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{13}^{(k)\gamma} - \alpha_{13}^{t(k)} t_0^{(k)}]^T, \\ \boldsymbol{\psi}_{(k)}^t &= [\boldsymbol{\psi}_{11}^{(k)} - \alpha_{11}^{t(k)} \boldsymbol{\theta}^{(k)}, \boldsymbol{\psi}_{22}^{(k)} - \alpha_{22}^{t(k)} \boldsymbol{\theta}^{(k)}, \boldsymbol{\psi}_{12}^{(k)} - \alpha_{12}^{t(k)} \boldsymbol{\theta}^{(k)}]^T, \\ \boldsymbol{\psi}_{(k)}^{t\gamma} &= [\boldsymbol{\psi}_2^{(k)} - \alpha_{23}^{t(k)} t_0^{(k)}, \boldsymbol{\psi}_1^{(k)} - \alpha_{13}^{t(k)} t_0^{(k)}]^T. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Матриці жорсткості  $k$ -го шару оболонки  $\mathbf{A}_{(k)}$ ,  $\mathbf{D}_{(k)}$ ,  $\mathbf{K}_{(k)}$ ,  $\mathbf{F}_{(k)}$ ,  $\mathbf{C}_{(k)}$ ,  $\mathbf{R}_{(k)}$  визначаються згідно виразів (2.73) – (2.77).

Використовуючи алгоритм підрозділу 2.2, який визначається формулами (2.78) – (2.89), нескладно отримати фізичні співвідношення, що зв'язують деформації  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^t$ ,  $\boldsymbol{\chi}_{(k)}^t$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}^{t\gamma}$ ,  $\boldsymbol{\psi}_{(k)}^t$ ,  $\boldsymbol{\psi}_{(k)}^{t\gamma}$  і внутрішні зусилля  $\mathbf{T}_{(k)}^t$ ,  $\mathbf{M}_{(k)}^t$ ,  $\mathbf{L}_{(k)}^{t\gamma}$ ,  $\mathbf{Q}_{(k)}^t$ ,  $\mathbf{L}_{(k)}^{t\gamma}$   $k$ -го шару оболонки.

Узагальнюючи варіаційне рівняння принципу Рейснера для багатошарової оболонки на випадок задачі термопружності, першу варіацію другого доданка рівняння (2.36) з урахуванням виразів (2.138) – (2.141) можна подати так:

$$\delta \Pi_R^t = \sum_{k=1}^n (\delta \Pi_{1R}^{t(k)} + \delta \Pi_{2R}^{t(k)}), \quad (2.142)$$

де

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{1R}^{t(k)} = \iint_{S(k)} & (T_{(k)}^{tij} \delta \varepsilon_{ij}^{t(k)} + M_{(k)}^{tij} \delta \chi_{ij}^{t(k)\gamma} + L_{(k)}^{tij} \nabla_i \delta \psi_i^{t(k)} + 2Q_{(k)}^{ti} \delta \varepsilon_{i3}^{t(k)\gamma} + L_{(k)}^{ti3} \delta \psi_i^{t(k)} + \\ & + M_{(k)}^{ti3} \nabla_i \delta \varepsilon_{33}^{t(k)z} + Q_{(k)}^{t3} \delta \varepsilon_{33}^{t(k)z}) dS, \end{aligned} \quad (2.143)$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{2R}^{t(k)} = - \iint_{S(k)} & \left\{ \left( \frac{\partial G_t^{(k)}}{\partial T_{(k)}^{tij}} - \varepsilon_{ij}^{t(k)} \right) \delta T_{(k)}^{tij} + \left( \frac{\partial G_t^{(k)}}{\partial M_{(k)}^{tij}} - \chi_{ij}^{t(k)\gamma} \right) \delta M_{(k)}^{tij} + \left( \frac{\partial G_t^{(k)}}{\partial L_{(k)}^{tij}} - \nabla_i \psi_i^{t(k)} \right) \delta L_{(k)}^{tij} + \right. \\ & + \left( \frac{\partial G_t^{(k)}}{\partial Q_{(k)}^{ti}} - 2\varepsilon_{i3}^{t(k)\gamma} \right) \delta Q_{(k)}^{ti} + \left( \frac{\partial G_t^{(k)}}{\partial L_{(k)}^{ti3}} - \psi_i^{t(k)} \right) \delta L_{(k)}^{ti3} + \\ & \left. + \left( \frac{\partial G_t^{(k)}}{\partial M_{(k)}^{ti3}} - \nabla_i \varepsilon_{33}^{t(k)z} \right) \delta M_{(k)}^{ti3} + \left( \frac{\partial G_t^{(k)}}{\partial Q_{(k)}^{t3}} - \varepsilon_{33}^{t(k)z} \right) \delta Q_{(k)}^{t3} \right\} dS. \end{aligned} \quad (2.144)$$

В (2.144) для  $k$ -го шару оболонки введений термодинамічний потенціал Гіббса [140], який, будучи функцією стану, виражається формулою

$$G_t^{(k)} = f_t^{(k)} - \sigma_{ij}^{t(k)} \varepsilon_{ij}^{t(k)}. \quad (2.145)$$

У разі ізометричного процесу потенціал Гіббса дорівнює з протилежним знаком додатковій роботі деформації  $k$ -го шару  $F_p^{(k)}$ ,  $f_t^{(k)}$  – функція вільної енергії Гельмгольца.

Опускаючи цілий ряд громіздких перетворень варіаційних рівнянь, представлених в [136] і переходячи до фізичних компонент, рівняння незв'язаної стаціонарної задачі термопружності в змішаній формі, складені на основі дискретно-структурної теорії багат шарових оболонок, приймають вигляд рівнянь (2.102) – (2.106). В силу громіздкості зазначених рівнянь тут представлений їх запис тільки в матричній формі:

$$\frac{\partial \bar{Y}_t^{(k)}}{A_{(k)} \partial \alpha_1} = F \left( \alpha_1, \alpha_2, \bar{Y}_t^{(k)}, \frac{\partial \bar{Y}_t^{(k)}}{B_{(k)} \partial \alpha_2}, g_t^{(k)} \right) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.146)$$

де вектор розв'язків

$$\begin{aligned} \vec{Y}_t^{(k)} &= \{\vec{Y}_1^{t(k)}, \vec{Y}_2^{t(k)}, \dots, \vec{Y}_{14}^{t(k)}\}^T = \\ &= \{\Gamma_{11}^{t(k)}, \Gamma_{12}^{t(k)}, \mathbf{R}_{13}^{t(k)}, \mathbf{M}_{11}^{t(k)}, \mathbf{M}_{12}^{t(k)}, \mathbf{L}_{11}^{t(k)}, \mathbf{L}_{12}^{t(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{t(k)}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}\}^T \end{aligned}$$

При врахуванні поперечного обтиснення  $k$ -го шару система рівнянь (2.146) доповнюється двома недиференціальними рівняннями:

$$\begin{aligned} Q_3^{t(k)} &= \frac{h^{(k)}}{2} (\sigma_{33}^{t(k)+} - \sigma_{33}^{t(k)-}) - k_1^{(k)} (Y_4^{t(k)} + Y_6^{t(k)}) - k_2^{(k)} (M_{22}^{t(k)} + L_{22}^{t(k)}), \\ \varepsilon_{33}^{t(k)z} &= \gamma_{(k)}. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Для розв'язання поставленої задачі систему рівнянь (2.146), (2.147) необхідно доповнити статичними і кінематичними умовами контакту сполучених лицьових поверхонь сусідніх шарів, наведених у підрозділах 2.2.3 і 2.3.

Таким чином, незв'язана стаціонарна задача термопружності включає розв'язання двох задач. Спочатку вирішується задача теплопровідності на основі рівнянь (2.125), (2.126). При цьому в цих рівняннях виключаються похідні за часом і початкові умови (2.127). Отримана функція розподілу температури по товщині багатошарової оболонки, підставляється в праву частину рівнянь (2.146), (2.147).

## 2.5. Висновки по другому розділу

У другому розділі були структуровані і узагальнені рівняння дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок і пластин з дефектами структури матеріалу по товщині. Виведення рівнянь рівноваги, геометричних і фізичних співвідношень, коли враховуються геометрична нелінійність деформацій, деформації поперечного зсуву та трансверсального обтиснення, здійснювався за допомогою принципу Рейснера.

Показана фізична коректність розрахункової моделі багатошарових тонкостінних конструкцій, згідно якої реалізуються як ідеальні умови контакту сполучених поверхонь анізотропних шарів з різними напрямками армування матеріалу, так і умови контакту з міжфазним ослабленим шаром.

Міжфазний ослаблений шар – непростий або розшарування, моделюється поверхнею нульової товщини, на якій зазнають розрив компоненти вектора переміщень. Можливий контактний тиск між шарами приймається пропорційним різниці нормальних зміщень суміжних шарів.

Для розв'язання контактної крайової задачі в змішаній формі складена повна система розв'язувальних рівнянь дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок. Статичні умови контакту по лицьовим сполученим поверхням сусідніх шарів виконуються за допомогою методу штрафних функцій. Для оболонок обертання, які включають в себе  $n$  шарів зі співвісними поверхнями, отримана система з  $14*n$  диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Складені рівняння теплопровідності для багатошарової оболонки, яка складається з  $n$  анізотропних криволінійних шарів з різними теплофізичними властивостями. Наведена задача теплопровідності розв'язується без урахування впливу деформування конструкції на зміну поля температур і відноситься до класу незв'язаних задач теорії термопружності.

На основі узагальненого варіаційного принципу Рейснера і дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок отримані розв'язувальні рівняння термопружності в змішаній формі. Для випадку, коли температурне поле не залежить від часу, запропонований алгоритм рішення стаціонарної незв'язаної задачі теорії термопружності багатошарових оболонок.

### **3. КРАЙОВІ ЗАДАЧІ СТАТИКИ БАГАТОШАРОВИХ АРМОВАНИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРИ**

В даному розділі на основі класичної теорії пружності анізотропного тіла досліджується напружено-деформований стан багатошарового порожнистого циліндру кінцевої довжини від дії внутрішнього тиску і температурного навантаження. При розрахунку враховуються реальні умови взаємодії шарів і величина зміни контактних напружень на міжшарових границях. Задача розглядається в осесиметричній постановці.

#### **3.1. Зведені термопружні характеристики багатошарового анізотропного матеріалу**

Існують два шляхи визначення ефективних характеристик композитів. Перший напрям являється чисто феноменологічним, при чому фізико-механічні сталі визначаються на основі лабораторних випробувань зразків із багатошарового анізотропного матеріалу. Інший напрям базується на елементах структурного аналізу і передбачає вираження термопружних характеристик багатошарового середовища через термопружні характеристики матеріалів шарів, через їх питомий об'ємний вміст, товщину шарів та інші макроскопічні параметри. Другий шлях має переваги як з теоретичної, так і з практичної точки зору. Таким чином побудова ефективної моделі механіки багатошарових тонкостінних конструкцій для визначення термомеханічних характеристик композитів є актуальною задачею.

**3.1.1. Зведені пружні характеристики багатошарового анізотропного матеріалу.** Експериментальні дані [141] добре співпадають зі значенням пружних характеристик композиційних матеріалів, обчислених на основі методів [113, 142]. Для ортотропного матеріалу розрахункові залежності пружних характеристик армованого високомодульними волокнами шару мають вигляд:

$$\begin{aligned}
E_1^{(k)} &= \psi_1^{(k)} E_B + \frac{(1 + \psi_1^{(k)})(1 + \psi_3^{(k)})}{1 - \psi_1^{(k)}} E_M, \quad E_2^{(k)} = \frac{(1 + \psi_1^{(k)})(1 + \psi_3^{(k)})}{(1 - \psi_1^{(k)})(1 - \psi_3^{(k)})(1 - \nu_B^2)} E_M, \\
E_3^{(k)} &= \psi_3^{(k)} E_B + \frac{(1 + \psi_1^{(k)})(1 + \psi_3^{(k)})}{(1 - \psi_1^{(k)})(1 - \nu_B^2)} E_M, \quad \nu_{12}^{(k)} = \frac{\nu_B (1 + \psi_3^{(k)})(1 + \psi_1^{(k)})}{\psi_1^{(k)} (1 - \psi_3^{(k)})(1 - \psi_1^{(k)})(1 - \nu_B^2)} \frac{E_M}{E_B}, \\
\nu_{13}^{(k)} &= \nu_B \psi_3^{(k)} + (1 - \psi_3^{(k)}) \nu_M, \quad \nu_{23}^{(k)} = \nu_B \psi_3^{(k)} + (1 - \psi_3^{(k)}) \nu_M, \quad G_{12}^{(k)} = \frac{1 + \psi_1^{(k)}}{(1 - \psi_1^{(k)})(1 + \psi_3^{(k)})} G_M, \\
G_{23}^{(k)} &= \frac{1 + \psi_3^{(k)}}{(1 - \psi_3^{(k)})(1 - \psi_1^{(k)})} G_M, \quad G_{13}^{(k)} = \frac{(1 + \psi_1^{(k)})(1 + \psi_3^{(k)})}{(1 - \psi_1^{(k)})(1 - \psi_3^{(k)})} G_M \quad (3.1)
\end{aligned}$$

індекс “в” відноситься до арматури, “м” – до зв’язуючого;  $\psi_1^{(k)}, \psi_3^{(k)}$  – відносний об’ємний вміст арматури шару в напрямках осей 1 і 3 (рис. 3.1 а);

$$g = E_B / E_M, \quad G_B = \frac{E_B}{2(1 + \nu_B)}, \quad G_M = \frac{E_M}{2(1 + \nu_M)}, \quad (3.2)$$

де  $\nu_B, \nu_M$  – коефіцієнти Пуассона.

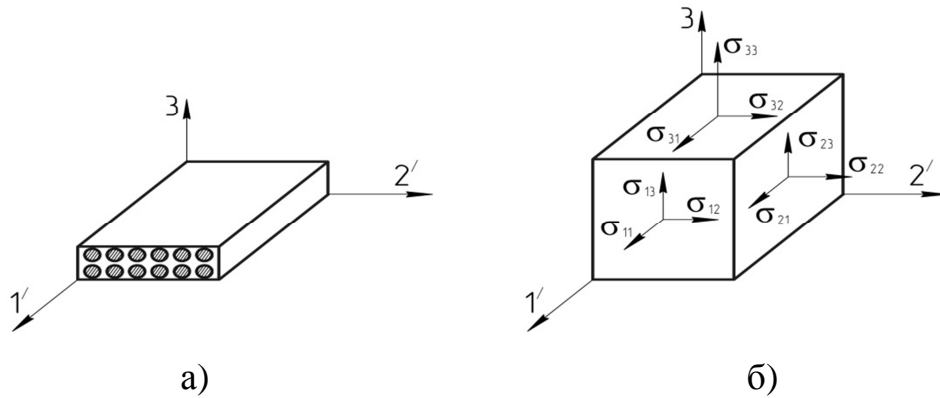


Рисунок 3.1 – Схема армування односпрямованого шару

Коефіцієнт армування  $\psi_1^{(k)}$ , що характеризує відносний об’ємний вміст волокон, можна визначити за формулою:

$$\psi_1^{(k)} = \frac{\pi (d_B^{(k)})^2}{4h^{(k)}} i_B^{(k)} \quad (3.3)$$



де  $h^{(k)}$  – товщина армованого шару;  $d_B^{(k)}$  – діаметр волокон;  $i_B^{(k)}$  – частота армування. Геометрія односпрямованого армованого шару показана на рис. 3.1, а. Усі величини з індексом  $k$  відносимо до  $k$ -го шару оболонки.

Співвідношення пружності для ортотропного односпрямованого армованого шару в його осях симетрії  $1'$ ,  $2'$  з урахуванням фізико-механічних сталих (3.1) – (3.3) в матричній формі мають вигляд:

$$\sigma_{(k)}' = a_{(k)}' \varepsilon_{(k)}', \quad \varepsilon_{(k)}' = b_{(k)}' \sigma_{(k)}', \quad (3.4)$$

$$\text{де } \sigma_{(k)}' = [\sigma_{1'1'}^{(k)}, \sigma_{2'2'}^{(k)}, \sigma_{3'3'}^{(k)}, \sigma_{2'3'}^{(k)}, \sigma_{1'3'}^{(k)}, \sigma_{1'2'}^{(k)}]^\Gamma, \quad \varepsilon_{(k)}' = [\varepsilon_{1'1'}^{(k)z}, \varepsilon_{2'2'}^{(k)z}, \varepsilon_{3'3'}^{(k)z}, \varepsilon_{2'3'}^{(k)z}, \varepsilon_{1'3'}^{(k)z}, \varepsilon_{1'2'}^{(k)z}]^\Gamma$$

– матриці-стовпці напружень і деформацій шару в напрямі осей симетрії  $1'$ ,  $2'$  (рис. 3.1 б);

$$a_{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}^{(k)} & a_{32}^{(k)} & a_{33}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$b_{(k)} = \begin{bmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & b_{13}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & b_{23}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31}^{(k)} & b_{32}^{(k)} & b_{33}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Матриці жорсткості і податливості  $k$ -го ортотропного шару в напрямі осей симетрії  $1'$ ,  $2'$  відповідно.

Якщо тонкостінний елемент складається із односпрямованих армованих шарів, осі локальних систем координат яких не співпадають з осями

глобальної системи координат, що має місце, наприклад, в перехресно армованих оболонках, тоді з'являється можливість варіювати властивостями матеріалу за рахунок кута намотування односпрямованого армованого шару.

Нехай  $\beta$  – кут між осями симетрії  $k$ -го шару оболонки  $\alpha_1^{(k)\beta}$ ,  $\alpha_2^{(k)\beta}$  і координатними лініями  $\alpha_1^{(k)}$ ,  $\alpha_2^{(k)}$ . В подальшому кут  $\beta$  буде мати назву – кут армування. В повернутих осях  $\alpha_1^{(k)\beta}$ ,  $\alpha_2^{(k)\beta}$ ,  $z$  армований шар має анізотропні властивості і має одну площину пружної симетрії. Тоді стає справедливим співвідношення пружності:

$$\sigma_{(k)} = a_{(k)}^{\beta} \varepsilon_{(k)} \quad (3.7)$$

де

$$a_{(k)}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)\beta} & a_{12}^{(k)\beta} & a_{13}^{(k)\beta} & 0 & 0 & a_{16}^{(k)\beta} \\ a_{21}^{(k)\beta} & a_{22}^{(k)\beta} & a_{23}^{(k)\beta} & 0 & 0 & a_{26}^{(k)\beta} \\ a_{31}^{(k)\beta} & a_{32}^{(k)\beta} & a_{33}^{(k)\beta} & 0 & 0 & a_{36}^{(k)\beta} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(k)\beta} & a_{45}^{(k)\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54}^{(k)\beta} & a_{55}^{(k)\beta} & 0 \\ a_{61}^{(k)\beta} & a_{62}^{(k)\beta} & a_{63}^{(k)\beta} & 0 & 0 & a_{66}^{(k)\beta} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

матриця коефіцієнтів жорсткості  $k$ -го анізотропного шару в напрямі головних координат ліній  $\alpha_1, \alpha_2$ ;  $\sigma_{(k)} = [\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}]^T$ ,

$\varepsilon_{(k)} = [\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, \varepsilon_{23}^{(k)}, \varepsilon_{13}^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)}]^T$  – матриці-стовпці напружень і деформацій

шару в напрямі головних координатних ліній  $\alpha_1, \alpha_2$ . Співвідношення, за допомогою яких відбувається перетворення коефіцієнтів матриці (3.5) у коефіцієнти матриці жорсткості (3.8), наведені в роботі [136].

Для подальшого викладення матеріалу систему рівнянь (3.7) зручно подати у вигляді

$$\sigma_{(k)}^{\alpha} = a_{(k)\alpha}^{\beta} \varepsilon_{(k)}^{\alpha}, \quad \sigma_{(k)}^{\alpha 3} = a_{(k)\alpha 3}^{\beta} \varepsilon_{(k)}^{\alpha 3} \quad (3.9)$$

де введені наступні позначення:

$$\sigma_{(k)}^\alpha = [\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}]^\Gamma, \quad \sigma_{(k)}^{\alpha 3} = [\sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}]^\Gamma, \quad \varepsilon_{(k)}^\alpha = [\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)}]^\Gamma,$$

$$\varepsilon_{(k)}^{\alpha 3} = [\varepsilon_{23}^{(k)}, \varepsilon_{13}^{(k)}]^\Gamma, \quad a_{(k)\alpha}^\beta = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)\beta} & a_{12}^{(k)\beta} & a_{13}^{(k)\beta} & a_{16}^{(k)\beta} \\ a_{21}^{(k)\beta} & a_{22}^{(k)\beta} & a_{23}^{(k)\beta} & a_{26}^{(k)\beta} \\ a_{31}^{(k)\beta} & a_{32}^{(k)\beta} & a_{33}^{(k)\beta} & a_{36}^{(k)\beta} \\ a_{61}^{(k)\beta} & a_{62}^{(k)\beta} & a_{63}^{(k)\beta} & a_{66}^{(k)\beta} \end{bmatrix}, \quad a_{(k)\alpha 3}^\beta = \begin{bmatrix} a_{44}^{(k)\beta} & a_{45}^{(k)\beta} \\ a_{54}^{(k)\beta} & a_{55}^{(k)\beta} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

У випадку, коли композит являє собою набір  $n$  різноорієнтованих шарів односпрямованого матеріалу, приведені пружні характеристики пакету шарів знаходять із співвідношень:

$$\sigma^\alpha = a_\alpha^\beta \varepsilon^\alpha, \quad \sigma^{\alpha 3} = a_{\alpha 3}^\beta \varepsilon^{\alpha 3}, \quad (3.11)$$

де  $a_{ij}^\beta = \sum_{k=1}^n a_{ij}^{(k)\beta} h_{(k)}'$ ,  $h_{(k)}' = h_{(k)}/h$  – відносна товщина  $k$ -го шару.

Технічні сталі багат шарового композиту при розтяганні можна отримати, перетворивши систему рівнянь (3.11) до вигляду

$$\sigma_{11} = a_{11}^\beta \varepsilon_{11} + a_{12}^\beta \varepsilon_{22} + a_{13}^\beta \varepsilon_{33} + a_{16}^\beta \varepsilon_{12}, \quad 0 = a_{21}^\beta \varepsilon_{11} + a_{22}^\beta \varepsilon_{22} + a_{23}^\beta \varepsilon_{33} + a_{26}^\beta \varepsilon_{12},$$

$$0 = a_{31}^\beta \varepsilon_{11} + a_{32}^\beta \varepsilon_{22} + a_{33}^\beta \varepsilon_{33} + a_{36}^\beta \varepsilon_{12}, \quad 0 = a_{61}^\beta \varepsilon_{11} + a_{62}^\beta \varepsilon_{22} + a_{63}^\beta \varepsilon_{33} + a_{66}^\beta \varepsilon_{12}. \quad (3.12)$$

Підставивши вираз  $E_1 = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}$  в перше рівняння системи рівнянь (3.12) і

попередньо визначив деформації  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$ ,  $\varepsilon_{12}$  через  $\varepsilon_{11}$ , за допомогою 3-х рівнянь (3.12), що залишилися, нескладно знайти значення  $E_1$ :

$$E_1 = \frac{\det a_\alpha^\beta}{M_{11}}. \quad (3.13)$$

У формулі (3.13)  $M_{11}$  – мінор елемента  $a_{11}^\beta$  матриці  $a_\alpha^\beta$ . Аналогічно знаходять решту значень технічних сталих:

$$E_2 = \frac{\det a_\alpha^\beta}{M_{22}}, \quad E_3 = \frac{\det a_\alpha^\beta}{M_{33}}, \quad (3.14)$$

де  $E_2, E_3$  – модулі пружності першого роду;

$$G_{12} = \frac{\det a_\alpha^\beta}{M_{44}}, \quad G_{13} = a_{55}^\beta - \frac{(a_{45}^\beta)^2}{a_{44}^\beta}, \quad G_{23} = a_{44}^\beta - \frac{(a_{45}^\beta)^2}{a_{55}^\beta}, \quad (3.15)$$

де  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  – модулі зсуву;

$$\nu_{12} = \frac{M_{12}}{M_{11}}, \quad \nu_{13} = \frac{M_{13}}{M_{11}}, \quad \nu_{23} = \frac{M_{23}}{M_{22}}. \quad (3.16)$$

Тут  $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$  – коефіцієнти Пуассона. Решту три значення коефіцієнтів Пуассона  $\nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{32}$  знаходяться за допомогою співвідношень

$$\nu_{ij} E_j = \nu_{ji} E_i \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Перший індекс коефіцієнта Пуассона вказує на напрям прикладання навантаження, а другий – напрям поперечної деформації, що викликана цією силою.

**3.1.2 Визначення коефіцієнтів теплового лінійного розширення багат шарового анізотропного матеріалу.** Коефіцієнти теплового лінійного розширення  $\alpha_{ij}^{t(k)}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 6$ )  $k$ -го шару (2.129) при розрахунках температурних напружень поруч з перепадом температур є одним з основних параметрів, який впливає на напружений стан конструкції і, відповідно, точність розрахунків знаходиться в прямій залежності від достовірності величини зведеного коефіцієнта для всього пакету різноорієнтованих шарів композиційного матеріалу.

Коефіцієнти  $\alpha_{ij}^{t(k)}$  визначають зміну розмірів односпрямованого шару оболонки як за рахунок підвищення температури, так і за рахунок внутрішніх температурних напружень, які виникають в композиційному матеріалі внаслідок різниці між коефіцієнтами теплового розширення арматури і зв'язуючого.

$$\begin{aligned}\alpha_{11}^{t(k)} &= \alpha_M - \frac{\alpha_M - \alpha_B}{1 + E_M(1 - \psi_1^{(k)})/E_B \psi_1^{(k)}}, \\ \alpha_{22}^{t(k)} &= \alpha_B \psi_1^{(k)} + \alpha_M(1 - \psi_1^{(k)}) + v_M \frac{E_B(\alpha_M - \alpha_B)(1 - \psi_1^{(k)})}{E_B(1 - \psi_1^{(k)}) + E_M \psi_1^{(k)}}, \\ \alpha_{33}^{t(k)} &= \alpha_M - \frac{\alpha_M - \alpha_B}{1 + E_M(1 - \psi_1^{(k)})/E_B \psi_3^{(k)}},\end{aligned}\quad (3.17)$$

де  $\alpha_B$  і  $E_B$ ,  $\alpha_M$  і  $E_M$  – коефіцієнти лінійного теплового розширення і модулі пружності матеріалу арматури і зв'язуючого відповідно;  $v_M$  – коефіцієнт Пуассона зв'язуючого.

Вважаючи структуру армованих шарів симетричною відносно середньої поверхні, можна стверджувати, що коефіцієнти лінійного теплового розширення  $\alpha_{23}^{t(k)}$ ,  $\alpha_{13}^{t(k)}$ ,  $\alpha_{66}^{t(k)}$  дорівнюють нулю, тобто виконується умова

$$\alpha_{23}^{t(k)} = \alpha_{13}^{t(k)} = \alpha_{66}^{t(k)} = 0.$$

Таким чином, температурна складова нормальних напружень  $k$ -го шару відповідно до рівнянь (2.136) – (2.137) запишеться у вигляді:

$$\sigma_{(k)}^t = a_{(k)}^t \varepsilon_{(k)}^t, \quad (3.18)$$

де  $\varepsilon_{(k)}^t = [-\alpha_{11}^{t(k)} t_{(k)}, -\alpha_{22}^{t(k)} t_{(k)}, -\alpha_{33}^{t(k)} t_{(k)}]^T$ ,  $\sigma_{(k)}^t = [\sigma_{11}^{t(k)}, \sigma_{22}^{t(k)}, \sigma_{33}^{t(k)}]^T$ ,

$$a_{(k)}^t = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} \\ a_{31}^{(k)} & a_{32}^{(k)} & a_{33}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

В повернутих осях  $\alpha_1^{(k)\beta}$ ,  $\alpha_2^{(k)\beta}$ ,  $z$  армований шар з кутом армування  $\beta$  має анізотропні властивості і має одну площину пружної симетрії (3.7) – (3.8). Тоді стає справедливим співвідношення пружності:

$$\sigma_{(k)}^t = a_{(k)}^{t\beta} \varepsilon_{(k)}^{t\beta},$$

$$\text{де } \varepsilon_{(k)}^{t\beta} = [-\alpha_{11}^{t\beta(k)} t_{(k)}, -\alpha_{22}^{t\beta(k)} t_{(k)}, -\alpha_{33}^{t\beta(k)} t_{(k)}]^T, \quad a_{(k)}^{t\beta} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)\beta} & a_{12}^{(k)\beta} & a_{13}^{(k)\beta} \\ a_{21}^{(k)\beta} & a_{22}^{(k)\beta} & a_{23}^{(k)\beta} \\ a_{31}^{(k)\beta} & a_{32}^{(k)\beta} & a_{33}^{(k)\beta} \end{bmatrix}.$$

У випадку, коли композит являє собою набір  $n$  різноорієнтованих шарів односпрямованого матеріалу, зведені коефіцієнти теплового лінійного розширення всього пакету шарів неважко знайти відповідно до алгоритму (3.11) – (3.12). Тоді

$$\sigma^t = a^{t\beta} \varepsilon^t, \quad (3.19)$$

$$\text{де } \sigma^t = [\sigma_{11}^t, \sigma_{22}^t, \sigma_{33}^t]^T, \quad \varepsilon^t = [-\alpha_{11}^t t, -\alpha_{22}^t t, -\alpha_{33}^t t]^T, \quad a_{ij}^\beta = \sum_{k=1}^n a_{ij}^{(k)\beta} h_{(k)}',$$

$$\alpha_{ij}^t = \sum_{k=1}^n \alpha_{ij}^{t\beta(k)} h_{(k)}', \quad t = \sum_{k=1}^n t_{(k)} h_{(k)}', \quad h_{(k)}' = h_{(k)}/h - \text{відносна товщина } k\text{-го шару.}$$

Таким чином, встановлено, коефіцієнти теплового лінійного розширення багат шарового композиту у напрямі координатної ліній  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  та осі  $z$  з наступних рівнянь

$$\alpha_{ij}^t = \sum_{k=1}^n \alpha_{ij}^{t\beta(k)} h_{(k)}' \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3.20)$$

$$\text{де } h_{(k)}' = h_{(k)}/h.$$

**Приклад розрахунку.** В якості прикладу розрахунку термопружних характеристик було взято склопластик та вуглепластик з кодами відповідно  $[0_4^\circ / -75^\circ / 0_2^\circ / -75^\circ / 75^\circ / 0_2^\circ / -75^\circ / 0_4^\circ]$ ,  $[0_2^\circ / 90^\circ / 0_2^\circ / \pm 45^\circ / (0_2^\circ / 90)_2 / \pm 45^\circ / 0^\circ]$ .

Склопластик. Модулі пружності  $E_B$ , зсуву  $G_B$  і коефіцієнт Пуассона  $\nu_B$  стрічок для намотки, що набрані з алюмоборосилікатних ниток, відповідно дорівнюють  $E_B = 55000 \text{ МПа}$ ,  $G_B = 22000 \text{ МПа}$ ,  $\nu_B = 0,25$ . В якості матриці склопластику використовувався епоксидний полімер з наступними параметрами:  $E_M = 3550 \text{ МПа}$ ,  $G_M = 1270 \text{ МПа}$ ,  $\nu_M = 0,4$ . В кожному моношарі товщиною 0,25 мм об'єм, що займають стрічки, складає 70% загального об'єму.

Вуглепластик. Згідно до паспортних даних модулі пружності  $E_B$ , зсуву  $G_B$  і коефіцієнт Пуассона  $\nu_B$  вуглецевого волокна ЛУ-03 відповідно дорівнюють  $235000 \text{ МПа}$ ,  $90400 \text{ МПа}$  і 0,3. Механічні характеристики зв'язуючого вуглепластику –  $E_M = 3500 \text{ МПа}$ ,  $G_M = 1320 \text{ МПа}$ ,  $\nu_M = 0,32$ . В кожному моношарі товщиною 0,171 мм об'єм, що займають стрічки, складає 55% загального об'єму.

За результатами розрахунків отримані механічні характеристики наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1. Пружні характеристики вугле і склопластиків.

Матеріал	$E_{ii}$ , МПа	$G_{ij}$ , МПа	$\nu_{ij}$	$\nu_{ji}$
Вуглепластик	$E_\theta = 84457$	$G_{\theta z} = 12410$	$\nu_{\theta z} = 0,21$	$\nu_{\theta z} = 0,11$
	$E_z = 42026$	$G_{r\theta} = 4287$	$\nu_{r\theta} = 0,28$	$\nu_{r\theta} = 0,049$
	$E_r = 14703$	$G_{rz} = 3677$	$\nu_{rz} = 0,3$	$\nu_{rz} = 0,1$
Склопластик	$E_z = 23800$	$G_{\theta z} = 7490$	$\nu_{z\theta} = 0,077$	$\nu_{\theta z} = 0,11$
	$E_\theta = 33500$	$G_{rz} = 5014$	$\nu_{zr} = 0,397$	$\nu_{rz} = 0,4$
	$E_r = 23870$	$G_{r\theta} = 6620$	$\nu_{\theta r} = 0,405$	$\nu_{r\theta} = 0,284$

### 3.2 Напружено-деформований стан багат шарового плоского кривого бруса при згинанні з урахуванням ідеального і неідеального контакту між шарами

В основі метода розрахунку розглянутого багат шарового кривого бруса закладений дискретний підхід. Система розв'язуючих рівнянь побудована для всього пакету шарів з урахуванням як ідеального, так і неідеального контакту суміжних поверхонь сусідніх шарів.

**Дискретно-структурна теорія багат шарового бруса при ідеальному контакті шарів.** Багат шаровий плоский криволінійний брус із  $N$  шарів (рис.3.2), який в плані обмежений двома концентричними колами радіусів  $a$  і  $b$ , і двома радіальними площинами, що утворюють кут  $\theta = \pi/2$ . На кожен з торців бруса діє зосереджена поперечна сила  $P$ . Прийнято, що матеріал бруса ортотропний і площина пружної симетрії співпадає з серединною поверхнею бруса. Вісь анізотропії проходить нормально до площини пружної симетрії через загальний центр концентричних кіл і співпадає з віссю  $z$  циліндричної системи координат. Вісь  $x$ , від якої відраховуються полярні кути  $\theta$ , співпадає з віссю  $y$  декартової системи координат  $xu$ . Вважається, що криволінійні поверхні  $r = a$  і  $r = b$  не навантажені.

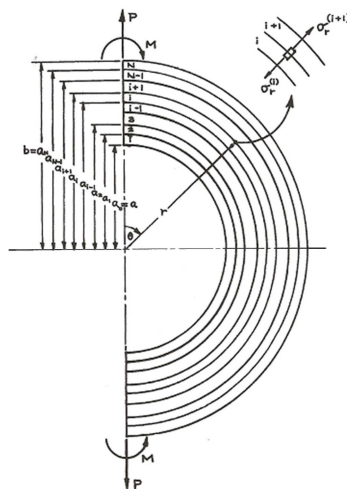


Рисунок 3.2 – Структура багат шарового кривого плоского бруса



Загальний розв'язок поставленої задачі згину криволінійного бруса із матеріалу з циліндричною анізотропією наведено в роботі [1]. При цьому функції, що визначають його напружено-деформований стан в циліндричній системі координат, мають наступний вигляд:

$$\sigma_r^P(r, \theta) = [A\beta r^{\beta-1} - B\beta r^{-\beta-1} + \frac{D}{r}] \sin \theta ,$$

$$\sigma_\theta^P(r, \theta) = [A\beta(1 + \beta)r^{\beta-1} - B\beta(1 - \beta)r^{-\beta-1} + \frac{D}{r}] \sin \theta ,$$

$$\tau_{r\theta}^P(r, \theta) = -[A\beta r^{\beta-1} - B\beta r^{-\beta-1} + \frac{D}{r}] \cos \theta , \quad (3.21)$$

$$u_r^P(r, \theta) = \left\{ Ar^\beta \left[ \frac{1}{E_r} - (1 + \beta) \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} \right] + Br^{-\beta} \left[ \frac{1}{E_r} - (1 - \beta) \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} \right] + D(\ln r) \left( \frac{1}{E_r} - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} \right) \right\} \sin \theta + C_1,$$

$$u_\theta^P(r, \theta) = \left\{ Ar^\beta \left[ \frac{1}{E_r} - \beta(1 + \beta) \frac{1}{E_\theta} - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} \right] + Br^{-\beta} \left[ \frac{1}{E_r} + (1 - \beta) \frac{1}{E_\theta} - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} \right] + D \left[ (\ln r) \left( \frac{1}{E_r} - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} \right) - \left( \frac{1}{E_\theta} - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} \right) \right] \right\} \cos \theta + C_1 \theta + C_2, \quad (3.22)$$

Тут  $A, B, C_1, C_2, D$  константи, які визначаються із граничних умов на криволінійних поверхнях бруса та з інтегральних співвідношень на торцях. Параметри анізотропії  $\beta$  і  $k$  відповідно дорівнюють

$$\beta \equiv \sqrt{1 + \frac{E_\theta}{E_r} (1 - 2\nu_{r\theta}) + \frac{E_\theta}{E_r}}, \quad k \equiv \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}},$$

$E_\theta, E_r$  – модулі пружності 1-го роду матеріалу бруса в кільцевому та радіальному напрямках,  $\nu_{\theta r}$  – коефіцієнт Пуассона. Слід зазначити, що для ізотропних матеріалів  $\beta = 2$  і  $k = 1$ .

Маючи по сполученим поверхням  $i$  та  $i+1$  ( $i=1, 2, \dots, N-1$ ) шару, коли  $r=a_i$ , статичні і кінематичні умови ідеального контакту:

$$\sigma_r^{P(i)}(a_i, \theta) = \sigma_r^{P(i+1)}(a_i, \theta), \quad (3.23)$$

$$\tau_{r\theta}^{P(i)}(a_i, \theta) = \tau_{r\theta}^{P(i+1)}(a_i, \theta), \quad (3.24)$$

$$u_r^{P(i)}(a_i, \theta) = u_r^{P(i+1)}(a_i, \theta), \quad (3.25)$$

$$u_\theta^{P(i)}(a_i, \theta) = u_\theta^{P(i+1)}(a_i, \theta). \quad (3.26)$$

Окрім того, на лицьових поверхнях бруса додатково мають місце статичні граничні умови:

$$\sigma_r^{P(1)}(a, \theta) = 0, \quad (3.27)$$

$$\tau_{r\theta}^{P(1)}(a, \theta) = 0, \quad (3.28)$$

$$\sigma_r^{P(N)}(b, \theta) = 0, \quad (3.29)$$

$$\tau_{r\theta}^{P(N)}(b, \theta) = 0. \quad (3.30)$$

На прямолінійних торцях бруса мають виконуватися наступні граничні умови рівноваги:

$$-P = h \sum_{i=1}^N \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tau_{r\theta}^{P(i)}(r, 0) dr. \quad (3.31)$$

Для розв'язання поставленої задачі згідно дискретно-структурній теорії потрібно підставити функції напружень (3.21) і переміщень (3.22) в граничні умови (3.23), (3.25) – (3.27), (3.29), (3.31). При цьому має місце система з  $3 \times N$  лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язуючи дану систему, можна знайти значення  $3 \times N$  невідомих сталих  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Після підстановки невідомих сталих у функції напружень і переміщень (3.21), (3.22) нескладно отримати повну картину напружено-деформованого стану кожного шару бруса.

**Дискретно структурна теорія багат шарового бруса при ідеальному контактi шарів.** Нехай між шарами плоского зігнутого бруса (рис. 3.2) при визначених значеннях зовнішнього навантаження із-за руйнування клейового

прошарку можливе виникнення пружного проковзування двох сусідніх шарів один відносно одного. При цьому має місце залежність

$$u_{\theta}^{(i)}(a_i, \theta) - u_{\theta}^{(i+1)}(a_i, \theta) = K^{(i)} \tau_{r\theta}^{(i)}. \quad (3.32)$$

В якості граничних із рівняння (3.32) має місце два варіанта: при  $1/K^{(i)} = 0$  – має місце ідеальне проковзування, при  $K^{(i)} = 0$  – ідеальний контакт. Вважаючи, що радіальні напруження  $\sigma_r^{(i)}(a_i, \theta)$  і  $u_r^{(i)}(a_i, \theta)$  при переході через поверхню розділу шарів скачка не мають, статичні і кінематичні умови неідеального контакту мають вигляд:

$$\sigma_r^{P(i)}(a_i, \theta) = \sigma_r^{P(i+1)}(a_i, \theta), \quad (3.33)$$

$$u_r^{P(i)}(a_i, \theta) = u_r^{P(i+1)}(a_i, \theta), \quad (3.34)$$

$$u_{\theta}^{P(i)}(a_i, \theta) - u_{\theta}^{P(i+1)}(a_i, \theta) = K^{(i)} \tau_{r\theta}^{P(i)}. \quad (3.35)$$

Аналогічно як і для випадку ідеального контакту шарів на лицьових поверхнях бруса, коли  $r = a$  і  $r = b$  (рис. 3.2), додатково мають місце статичні граничні умови (3.27) – (3.30) і статичні умови рівноваги на торцях бруса (3.31).

**Приклад розрахунку.** Розглянемо варіант із симетричною структурою армування склопластику відносно серединної поверхні бруса. При цьому всі три шари мають приблизно однакові фізико-механічні характеристики. Перший і третій шари з кодом  $[0^\circ_4 / -75^\circ]$  і  $[-75^\circ / 0^\circ_4]$  мають такі параметри –  $E_{\theta}^{(1)} = E_{\theta}^{(3)} = 35500 \text{ МПа}$ ,  $E_r^{(1)} = E_r^{(3)} = 23800 \text{ МПа}$ ,  $E_z^{(1)} = E_z^{(3)} = 22900 \text{ МПа}$ .  $\nu_{\theta r}^{(1)} = \nu_{\theta r}^{(3)} = 0,402$ ,  $\beta^{(1)} = \beta^{(3)} = 2,63$ ,  $k^{(1)} = k^{(3)} = 1,22$ ; другий шар з кодом  $[0^\circ_2 / -75^\circ / 75^\circ / 0^\circ_2]$  –  $E_{\theta}^{(2)} = 33600 \text{ МПа}$ ,  $E_r^{(2)} = 23900 \text{ МПа}$ ,  $E_z^{(2)} = 24800 \text{ МПа}$ ,  $\nu_{\theta r}^{(2)} = 0,403$ ,  $\beta^{(2)} = 2,59$ ,  $k^{(2)} = 1,17$ .

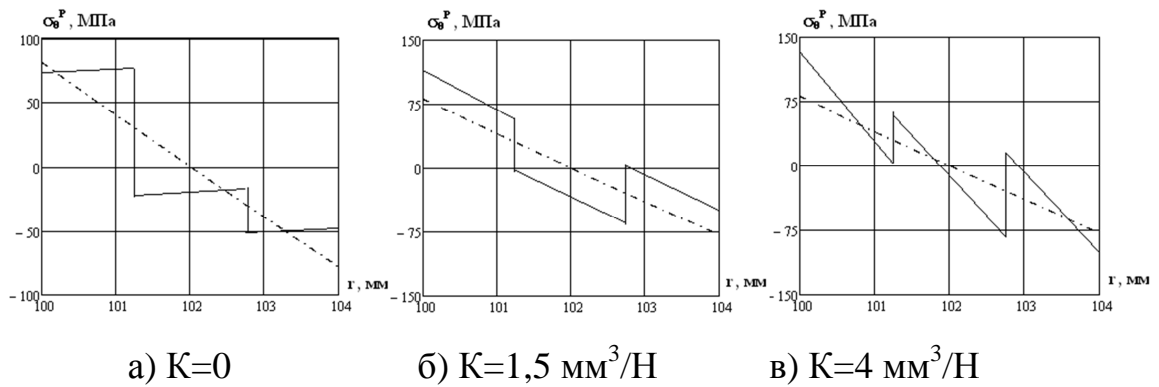


Рисунок 3.3 – Графік зміни тангенціальних напружень  $\sigma_{\theta}^P$  по товщині бруса в перерізі з координатою  $\theta = \pi/2$

Аналіз теоретичних результатів, показаних на рис. 3.3-3.6, дозволяє відзначити наступне. При врахуванні контакту між шарами (рис. 3.3 а) розподіл напружень  $\sigma_{\theta}^P$  суттєво відрізняється від результатів, отриманих по класичній анізотропній теорії. Так, наприклад, тангенціальні напруження стискання на зовнішній поверхні бруса відповідно теорії з врахуванням ідеального контакту шарів рівні  $\sigma_{\theta}^P = -48,6$  МПа, що в 1,5 рази менше відповідних напружень, отриманих за класичною теорією. Як видно з рис. 3.3 б і 3.4 б врахування неідеального контакту дозволяє отримати реальну картину напружено-деформованого стану бруса при дії зосередженої сили, так напруження і деформації, отримані як по дискретно-структурній так і по структурно-неперервній теоріям, практично співпадають при  $K=1,5 \text{ мм}^3/\text{Н}$ .

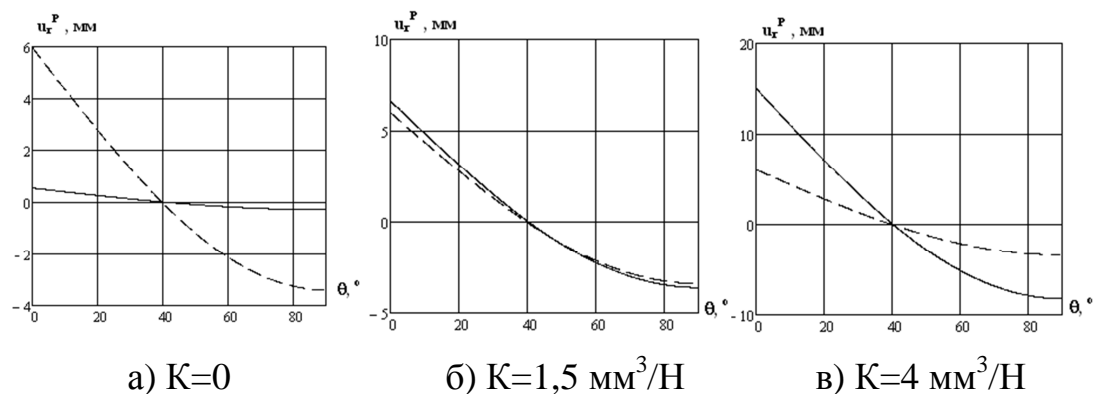


Рисунок 3.4 – Графік зміни радіальних  $u_r^P$  по зовнішньому контуру бруса

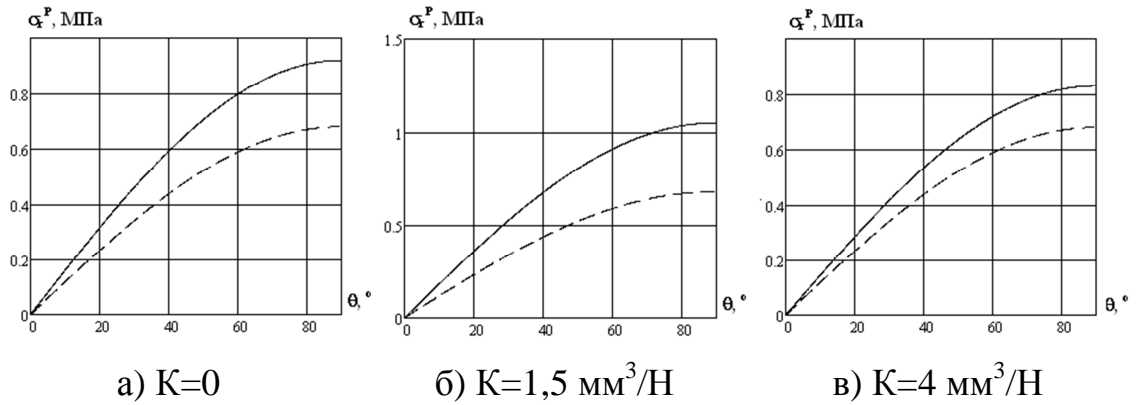


Рисунок 3.5 – Графік зміни напружень  $\sigma_r^P$  по контуру бруса на границі першого та другого шарів

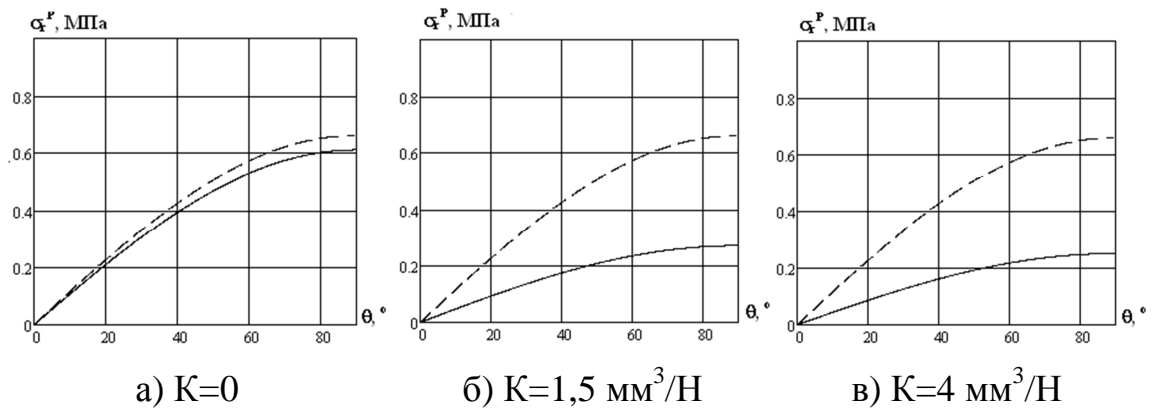


Рисунок 3.6 – Графік зміни напружень  $\sigma_r^P$  по контуру бруса на границі другого та третього шарів

При збільшенні коефіцієнта  $K=4 \text{ мм}^3/\text{Н}$  (рис. 3.3 в і 3.4 в) спостерігається суттєве зростання тангенціальних напружень  $\sigma_\theta^P$  (на внутрішній поверхні  $\sigma_\theta^P$  з урахуванням неідеального контакту між шарами в 1,8 раз більше ніж по класичній анізотропній теорії) і радіальних переміщень  $u_r^P$ , які більше ніж в два рази перевищують значення, отримані по класичній теорії. Врахування тільки кінематичних (рис. 3.4 а) умов ідеального жорсткого контакту між шарами суттєво знижує радіальні переміщення  $u_r^P$  в порівнянні з класичною анізотропною теорією. При аналізі зміни напружень  $\sigma_r^P$  на границях між шарами (рис. 3.5, 3.6) можна помітити, що при врахуванні ідеального контакту графіки зміни цих напружень практично співпадають з аналогічними результатами, отриманими по анізотропній теорії, а при

врахуванні неідеального контакту відмічається зростання напружень в 1,5-2 рази між першим і другим шаром а також зменшення значень  $\sigma_r^P$  практично в 3 рази між другим і третім шарами.

Таблиця 3.2 – Напруження і переміщення в криволінійному брусі

Напруження і переміщення	$\sigma_r^{1-2}$	$\sigma_r^{2-3}$	$\sigma_\theta^e$	$\sigma_\theta^H$	$u_r,$ $\theta = \pi/2$	$u_r,$ $\theta = 0$
Класична теорія	0,68	0,66	81,3	- 78,1	-3,55	5,93
Дискретно-структурна теорія (ідеальний контакт)	0,92	0,61	72,5	- 47,8	- 0,31	0,52
Дискретно-структурна теорія (K=1,5 мм <sup>3</sup> /Н)	1,05	0,27	114,7	- 49,0	- 3,62	6,62
Дискретно-структурна теорія (K=4,0 мм <sup>3</sup> /Н)	0,83	0,25	133,4	- 81,2	- 8,23	14,99
Результати експерименту	–	–	89,4	- 62,1	- 8,6	13,4

Порівняння отриманих теоретичних розрахунків з експериментальними результатами [1], наведене в таблиці 3.2, показує, що найбільш адекватно реальну картину напружено-деформованого стану розглянутого криволінійного бруса відображає дискретно-структурна теорія з урахуванням неідеального контакту шарів.

### 3.3. Термопружний напружений стан багат шарової циліндричної оболонки неоднорідної структури по товщині з урахуванням ідеального і неідеального контакту між шарами

**Основні рівняння.** Нехай круговий порожнистий циліндр навантажений по циліндричним поверхням  $r = r_a$  і  $r = r_b$  стаціонарними температурними навантаженнями  $t_a(z)$  і  $t_b(z)$  і рівномірно розподіленими по

окружній координаті зусиллями  $q_a(z)$  і  $q_b(z)$ . Напрямок осей циліндричної системи координат вказано на рис. 3.7 а. Напруження, які виникають в точці циліндра при дії зовнішнього навантаження, показані на рис. 3.7 б.

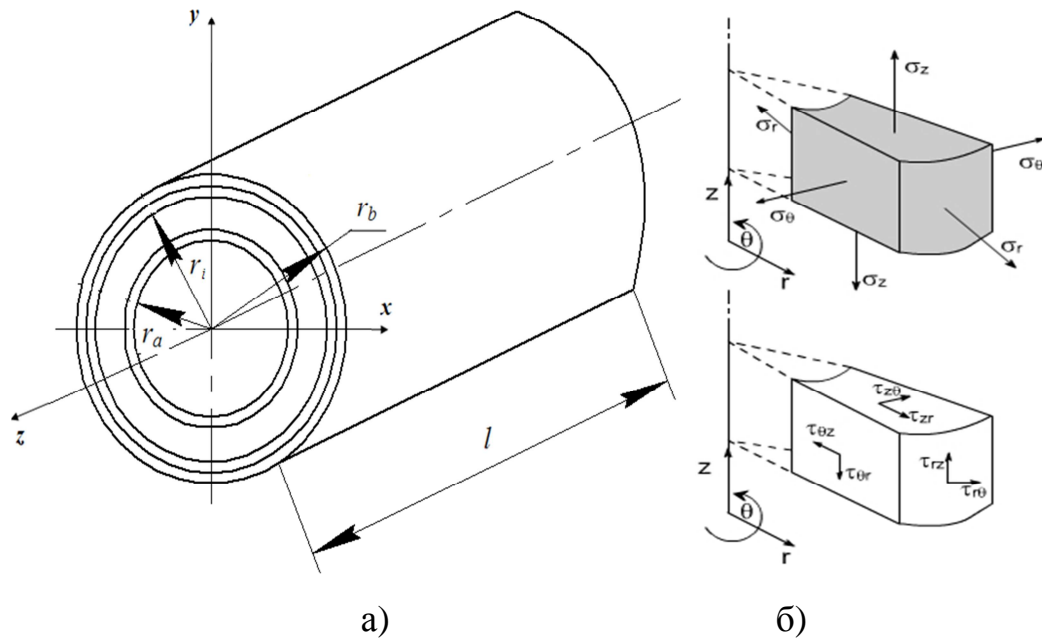


Рисунок 3.7 – Багатошаровий круговий порожнистий циліндр кінцевої довжини.

Вважається, що температурні навантаження і задані по лицьовим поверхням циліндра тиск являються осесиметричними щодо поздовжньої осі циліндра. Але при цьому їх величина змінюється вздовж меридіана і залежить від координати  $z$ . Крім цього, циліндр має кінцеву довжину  $l$ . Також при розв'язанні задачі може враховуватися ефект прослизання шарів циліндра один щодо одного в поздовжньому напрямку.

На основі класичної теорії анізотропного пружного тіла для вирішення поставленої задачі були складені рівняння рівноваги, фізичні та геометричні співвідношення.

**Фізичні співвідношення.** Приймаючи циліндричну систему координат  $r, \theta, z$  і задавши напрям осі  $x$ , від якої відраховується кут  $\theta$  (рис. 3.7, а), фізичні співвідношення для  $i$ -го ортотропного шару з циліндричною анізотропією запишуться у вигляді

$$\{\varepsilon_r^i\} = [B_r^i] \{\sigma_r^i\} + \{\alpha_r^i \Delta t\} \quad (i=1,2,\dots,N), \quad (3.36)$$

де

$$\{\sigma_r^i\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r^i \\ \sigma_\theta^i \\ \sigma_z^i \\ \tau_{\theta z}^i \\ \tau_{rz}^i \\ \tau_{r\theta}^i \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon_r^i\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^i \\ \varepsilon_\theta^i \\ \varepsilon_z^i \\ \gamma_{\theta z}^i \\ \gamma_{rz}^i \\ \gamma_{r\theta}^i \end{Bmatrix}, \quad \{\alpha_r^i \Delta t\} = \begin{Bmatrix} \alpha_r^i \Delta t \\ \alpha_\theta^i \Delta t \\ \alpha_z^i \Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$[B_r^i] = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & b_{13}^i & 0 & 0 & 0 \\ & b_{22}^i & b_{23}^i & 0 & 0 & 0 \\ & & b_{33}^i & 0 & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & & b_{44}^i & 0 & 0 \\ & & & & b_{55}^i & 0 \\ & & & & & b_{66}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_r^i} & -\frac{\nu_{\theta r}^i}{E_\theta^i} & -\frac{\nu_{zr}^i}{E_z^i} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{r\theta}^i}{E_r^i} & \frac{1}{E_\theta^i} & -\frac{\nu_{z\theta}^i}{E_z^i} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{rz}^i}{E_r^i} & -\frac{\nu_{\theta z}^i}{E_\theta^i} & \frac{1}{E_z^i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\theta z}^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{rz}^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{r\theta}^i} \end{bmatrix} -$$

матриці-стовпці напружено-деформованого стану та температурних деформацій, а також матриця коефіцієнтів податливості  $[B_r^i]$  відповідно. Тут  $E_r^i, E_\theta^i, E_z^i$  – модулі пружності відповідно в радіальному, круговому і поздовжньому напрямках;  $G_{\theta z}^i, G_{rz}^i, G_{r\theta}^i$  – модулі зсуву в площинах  $\theta 0z, r0z, r\theta$  відповідно;  $\nu_{kj}^i$  ( $k, j = r, \theta, z$ ) – коефіцієнти Пуассона;  $\alpha_j^i$  ( $j = r, \theta, z$ ) – температурний коефіцієнт лінійного розширення в напрямках осей циліндричної системи;  $\Delta t$  – зміна температури на лицьових поверхнях циліндра;  $N$  – кількість шарів циліндра. Вирішуючи систему рівнянь (3.36) щодо напружень, нескладно знайти такі фізичні співвідношення



$$\{\sigma_r^i\} = [A_r^i] \{\varepsilon_r^i\} - \{\alpha_r^i \Delta t\}, \quad (3.37)$$

де

$$[A_r^i] = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & a_{13}^i & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22}^i & a_{23}^i & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33}^i & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & a_{44}^i & 0 & 0 \\ & & & & a_{55}^i & 0 \\ & & & & & a_{66}^i \end{bmatrix},$$

$$\{\alpha_r^i \Delta t\} = \begin{cases} (a_{11}^i + a_{12}^i + a_{13}^i) \alpha_r^i \Delta t \\ (a_{12}^i + a_{22}^i + a_{23}^i) \alpha_\theta^i \Delta t \\ (a_{13}^i + a_{23}^i + a_{33}^i) \alpha_z^i \Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}.$$

Тут коефіцієнти матриці жорсткості  $[A_r^i]$  визначаються виразами

$$\begin{aligned} a_{11}^i &= [b_{22}^i b_{33}^i - (b_{23}^i)^2] \Delta^{-1}, & a_{22}^i &= [b_{11}^i b_{33}^i - (b_{13}^i)^2] \Delta^{-1}, \\ a_{33}^i &= [b_{11}^i b_{22}^i - (b_{12}^i)^2] \Delta^{-1}, & a_{12}^i &= [b_{13}^i b_{23}^i - b_{12}^i b_{33}^i] \Delta^{-1}, \\ a_{13}^i &= [b_{12}^i b_{23}^i - b_{22}^i b_{13}^i] \Delta^{-1}, & a_{23}^i &= [b_{12}^i b_{13}^i - b_{11}^i b_{23}^i] \Delta^{-1}, \\ \Delta &= b_{11}^i b_{22}^i b_{33}^i + b_{12}^i b_{23}^i b_{31}^i + b_{21}^i b_{32}^i b_{13}^i - b_{13}^i b_{22}^i b_{31}^i - b_{21}^i b_{12}^i b_{33}^i - b_{11}^i b_{32}^i b_{23}^i, \\ a_{44}^i &= \frac{1}{b_{44}^i}, & a_{55}^i &= \frac{1}{b_{55}^i}, & a_{66}^i &= \frac{1}{b_{66}^i}. \end{aligned}$$

**Геометричні співвідношення.**

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial r}, & \varepsilon_\theta^i &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{u_r^i}{r}, & \varepsilon_z^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial z}, & \gamma_{\theta z}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta}, \\ \gamma_{rz}^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial r} + \frac{\partial u_r^i}{\partial z}, & \gamma_{r\theta}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{u_\theta^i}{r} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (3.38)$$

де  $u_r^i, u_\theta^i, u_z^i$  – переміщення в радіальному, коловому і поздовжньому напрямку  $i$ -го ортотропного шару циліндра ( $r_i < r < r_{i+1}$ ) відповідно. У зв'язку з тим, що розглянута задача в осесиметричній постановці щодо осі  $z$ , переміщення  $u_\theta^i$  не змінюється в коловому напрямку. Тому виразу (3.38) можна переписати в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta^i = \frac{u_r^i}{r}, \quad \varepsilon_z^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z}, \quad \gamma_{\theta z}^i = 0, \\ \gamma_{rz}^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial r} + \frac{\partial u_r^i}{\partial z}, \quad \gamma_{r\theta}^i = -\frac{u_\theta^i}{r} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (3.39)$$

**Рівняння рівноваги.** В осесиметричній двовимірній постановці задачі рівняння рівноваги класичної анізотропної теорії пружності приймають вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_r^i}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} + \frac{\sigma_r^i - \sigma_\theta^i}{r} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z^i}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}^i}{r} = 0 \quad (3.40)$$

Система з двох рівнянь рівноваги доповнюється третім рівнянням теплопровідності

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) t^i = 0 \quad (3.41)$$

Для вирішення поставленої задачі, складено систему з трьох диференціальних рівнянь в частинних похідних (3.40) - (3.41), необхідно задати граничні умови на торцях і лицьових поверхнях циліндра, а також умови контакту по зв'язаних поверхнях сусідніх шарів.

**Граничні умови:**

- на торцях і лицьових поверхнях циліндра

$$\begin{aligned} u_r^i(r,0) = 0, \sigma_z^i(r,0) = \tau_{rz}^i(r,0) = 0, u_r^i(r,1) = 0, \sigma_z^i(r,1) = \tau_{rz}^i(r,1) = 0, \\ \sigma_r^1(r_a, z) = q_a(z), \tau_{rz}^1(r_a, z) = 0, \sigma_r^N(r_b, z) = q_b(z), \tau_{rz}^N(r_b, z) = 0, \\ t^i(r,0) = t^i(r,1) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), t^1(r_a, z) = t_a(z), t^N(r_b, z) = t_b(z). \end{aligned} \quad (3.42)$$

- по зв'язаних поверхнях сусідніх шарів

$$\begin{aligned} \sigma_r^{i-1}(r_i, z) = \sigma_r^i(r_i, z), \tau_{rz}^{i-1}(r_i, z) = \tau_{rz}^i(r_i, z) \\ u_r^{i-1}(r_i, z) = u_r^i(r_i, z), u_z^{i-1}(r_i, z) - u_z^i(r_i, z) = K \cdot \tau_{rz}^i(r_i, z) \\ t^{i-1}(r_i, z) = t^i(r_i, z), \lambda^{i-1} \frac{\partial t^{i-1}(r_i, z)}{\partial r} = \lambda^i \frac{\partial t^i(r_i, z)}{\partial r} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (3.43)$$

В останній умові (3.43) параметр  $\lambda_i$  відповідає коефіцієнту теплопровідності  $i$ -го шару.

**Безрозмірні параметри.** Для спрощення введення вихідних даних та узагальнення отриманих чисельних результатів, дотримуючись роботи [143], вводяться наступні безрозмірні величини:

$$\begin{aligned} R = \frac{r}{r_b}, R_a = \frac{r_a}{r_b}, R_b = \frac{r_b}{r_b} = 1, Z = \frac{z}{r_b}, L = \frac{1}{r_b}, A_{kl}^i = \frac{a_{kl}^i}{E_0}, \Gamma_k^i = \frac{\gamma_k^i}{\alpha_0 E_0}, \\ T^i = \frac{t^i}{t_0}, A^i = \frac{\lambda^i}{\lambda_0}, U_r^i = \frac{u_r^i}{\alpha_0 E_0 r_b}, U_z^i = \frac{u_z^i}{\alpha_0 E_0 r_b}, \\ S_r^i = \frac{\sigma_r^i}{\alpha_0 E_0 t_0}, S_z^i = \frac{\sigma_z^i}{\alpha_0 E_0 t_0}, S_\theta^i = \frac{\sigma_\theta^i}{\alpha_0 E_0 t_0}, \\ TU_{rz}^i = \frac{\tau_{rz}^i}{\alpha_0 E_0 t_0}, Q_a(z) = \frac{q_a(z)}{\alpha_0 E_0 t_0}, Q_b(z) = \frac{q_b(z)}{\alpha_0 E_0 t_0}, T_a(z) = \frac{t_a(z)}{t_0}, T_b(z) = \frac{t_b(z)}{t_0}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

де  $E_0$ ,  $\lambda_0$ , і  $\alpha_0$  – значення модуля Юнга, теплопровідності і коефіцієнта теплового лінійного розширення еталонного матеріалу  $t_0$  – еталонна температура циліндра.

**Постановка крайової задачі.** Підставляючи геометричні співвідношення (3.39) в рівняння (3.40), а також з урахуванням безрозмірних параметрів введених вище, можна отримати

$$\begin{aligned} & \left[ A_{11}^i \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) - \frac{A_{22}^i}{R^2} + A_{55}^i \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right] U_r^i + \\ & \left[ (A_{13}^i + A_{55}^i) \frac{\partial^2}{\partial R \partial Z} + (A_{13}^i - A_{23}^i) \frac{\partial}{\partial Z} \right] U_z^i = \Gamma_r^i \frac{\partial T^i}{\partial R} + \frac{\Gamma_r^i - \Gamma_\theta^i}{R} T^i, \\ & \left[ (A_{13}^i + A_{55}^i) \frac{\partial^2}{\partial R \partial Z} + (A_{23}^i + A_{55}^i) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial Z} \right] U_r^i + \left[ A_{55}^i \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + A_{33}^i \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right] U_z^i = \Gamma_r^i \frac{\partial T^i}{\partial Z}, \\ & \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) T^i + \frac{\partial^2 T^i}{\partial Z^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Граничні умови (3.42), (3.43), які записані за допомогою безрозмірних параметрів (3.44), приймають вигляд:

– на торцях і лицьових поверхнях циліндру

$$\begin{aligned} U_r^i(R, 0) = 0, S_z^i(R, 0) = T U_{rz}^i(R, 0) = 0, U_r^i(R, 1) = 0, S_z^i(R, 1) = T U_{rz}^i(R, 1) = 0, \\ S_r^i(R_a, z) = Q_a(z), T U_{rz}^i(R_a, z) = 0, S_r^N(R_b, z) = Q_b(z), T U_{rz}^N(R_b, z) = 0, \\ T^i(R, 0) = T^i(R, 1) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), T^i(R_a, z) = T_a(z), T^N(R_b, z) = T_b(z). \end{aligned} \quad (3.46)$$

– по сполучених поверхнях сусідніх шарів

$$\begin{aligned} S_r^{i-1}(R_i, z) = S_r^i(R_i, z), T U_{rz}^{i-1}(R_i, z) = T U_{rz}^i(R_i, z) \\ U_r^{i-1}(R_i, z) = U_r^i(R_i, z), U_z^{i-1}(R_i, z) - U_z^i(R_i, z) = K \cdot T U_{rz}^i(R_i, z) \\ T^{i-1}(R_i, z) = T^i(R_i, z), A^{i-1} \frac{\partial T^{i-1}(R_i, z)}{\partial R} = A^i \frac{\partial T^i(R_i, z)}{\partial R} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (3.47)$$

**Вільне опирання торців циліндра.** Розв'язки крайової задачі (3.45) – (3.47) в напрямку повздожньої осі знаходиться у вигляді тригонометричних рядів

$$U_r^i(R, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^i(R) \sin(\beta Z), \quad U_z^i(R, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^i(R) \cos(\beta Z), \quad T_r^i(R, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^i(R) \sin(\beta Z). \quad (3.48)$$

де  $\beta = \frac{n\pi\chi_b}{L}$ .

Підставляючи (3.48) в систему рівнянь (3.45), нескладно отримати її у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} & \left[ A_{11}^i \left( \frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) - \frac{A_{22}^i}{R^2} + A_{55}^i \beta^2 \right] \Phi_n^i(R) + \\ & \left[ (A_{13}^i + A_{55}^i) \beta \frac{d}{dR} + (A_{13}^i - A_{23}^i) \frac{\beta}{R} \right] \Psi_n^i(R) = \Gamma_r^i \frac{dF_n^i(R)}{dR} + \frac{\Gamma_r^i - \Gamma_\theta^i}{R} F_n^i(R), \\ & \left[ (A_{13}^i + A_{55}^i) \beta \frac{d}{dR} + (A_{23}^i + A_{55}^i) \frac{\beta}{R} \right] \Phi_n^i(R) + \left[ A_{55}^i \left( \frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) + A_{33}^i \beta^2 \right] \Psi_n^i(R) = \Gamma_r^i F_n^i(R), \\ & \left[ \left( \frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) - \beta^2 \right] F_n^i(R) = 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

За аналогічною схемою перетворюються і граничні умови (3.46), (3.47):

– на лицьових поверхнях циліндру

$$\begin{aligned} & A_{11}^1 \frac{d\Phi_n^1(R_a)}{dR} + A_{12}^1 \frac{\Phi_n^1(R_a)}{R} - \beta A_{13}^1 \Psi_n^1(R_a) = Q_{an}, \quad \beta \Phi_n^1(R_a) + \frac{d\Psi_n^1(R_a)}{dR} = 0, \\ & A_{11}^N \frac{d\Phi_n^N(R_b)}{dR} + A_{12}^N \frac{\Phi_n^N(R_b)}{R} - \beta A_{13}^N \Psi_n^N(R_b) = Q_{bn}, \quad \beta \Phi_n^N(R_b) + \frac{d\Psi_n^N(R_b)}{dR} = 0, \\ & F_n^1(R_a) = T_{an}, \quad F_n^N(R_b) = T_{bn}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

– на сполучених поверхнях сусідніх шарів

$$\begin{aligned}
& A_{11}^{i-1} \frac{d\Phi_n^{i-1}(R^i)}{dR} + A_{12}^{i-1} \frac{\Phi_n^{i-1}(R^i)}{R} - \beta A_{13}^{i-1} \Psi_n^{i-1}(R^i) = \\
& = A_{11}^i \frac{d\Phi_n^{i-1}(R^i)}{dR} + A_{12}^i \frac{\Phi_n^{i-1}(R^i)}{R} - \beta A_{13}^i \Psi_n^i(R^i), \\
& \beta \Phi_n^{i-1}(R^i) + \frac{d\Psi_n^{i-1}(R^i)}{dR} = \beta \Phi_n^i(R^i) + \frac{d\Psi_n^i(R^i)}{dR}, \quad \Phi_n^{i-1}(R^i) = \Phi_n^i(R^i), \\
& \Psi_n^{i-1}(R^i) - \Psi_n^i(R^i) = K \left( \beta \Phi_n^i(R^i) + \frac{d\Psi_n^i(R^i)}{dR} \right), \quad F_n^{i-1}(R^i) = F_n^i(R^i), \\
& A^{i-1} \frac{dF_n^{i-1}(R^i)}{dR} = A^i \frac{dF_n^i(R^i)}{dR}. \tag{3.51}
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
Q_{an} &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} Q_a(Z) \sin(\beta Z) dZ, \quad Q_{bn} = \frac{1}{L} \int_0^{2L} Q_b(Z) \sin(\beta Z) dZ, \\
T_{an} &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} T_a(Z) \sin(\beta Z) dZ, \quad T_{bn} = \frac{1}{L} \int_0^{2L} T_b(Z) \sin(\beta Z) dZ
\end{aligned}$$

Вважається, що в радіальному напрямі функції  $\Phi_n^i(R^i)$ ,  $\Psi_n^i(R^i)$ ,  $F_n^i(R^i)$  неперервні по товщині  $i$ -го шару, тоді за допомогою рядів Тейлора їх можна буде записати у вигляді:

$$\Phi_n^i(R) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^i (R-1)^k, \quad \Psi_n^i(R) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^i (R-1)^k, \quad F_n^i(R) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k^i (R-1)^k, \tag{3.52}$$

Підставивши (3.52) в рівняння (3.50) і прийнявши коефіцієнти при  $(R-1)^k$  до нуля, нескладно отримати наступні рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned}
C_{k+2}^i &= \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[ \begin{aligned} &-(k+1)C_{k+1}^i + \frac{A_{22}^i + \beta^2 A_{55}^i}{A_{11}^i} C_k^i - \\ &(k+1)\beta \frac{A_{13}^i + A_{55}^i}{A_{11}^i} B_{k+1}^i - \beta \frac{A_{13}^i - A_{23}^i}{A_{11}^i} B_k^i + \frac{\Gamma_r^i(k+1)}{A_{11}^i} D_{k+1}^i \end{aligned} \right] \\
B_{k+2}^i &= \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[ \begin{aligned} &-(k+1)B_{k+1}^i + \frac{\beta^2 A_{33}^i}{A_{55}^i} B_k^i - \\ &(k+1)\beta \frac{A_{13}^i + A_{55}^i}{A_{55}^i} C_{k+1}^i - \beta \frac{A_{55}^i + A_{23}^i}{A_{55}^i} C_k^i + \frac{\Gamma_z^i}{A_{55}^i} D_k^i \end{aligned} \right] \\
D_{k+2}^i &= \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[ -(k+1)D_{k+1}^i + \beta^2 B_k^i \right] \tag{3.53}
\end{aligned}$$

Із рекурентних співвідношень (3.53) виходить, що всі коефіцієнти  $C_k^i$ ,  $B_k^i$  і  $D_k^i$  можуть бути визначені через  $C_0^i$ ,  $C_1^i$ ,  $B_0^i$ ,  $B_1^i$ ,  $D_0^i$ ,  $D_1^i$ , коли  $k > 1$ . Тоді розв'язки системи рівнянь (15) можуть бути записані в компактній формі

$$\begin{aligned}
\Phi_n^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \begin{aligned} &g_c^i(k,1)C_0^i + g_c^i(k,2)C_1^i + g_c^i(k,3)B_0^i \\ &+ g_c^i(k,4)B_1^i + g_c^i(k,5)D_0^i + g_c^i(k,6)D_1^i \end{aligned} \right] (R-1)^k, \\
\Psi_n^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \begin{aligned} &g_b^i(k,1)C_0^i + g_b^i(k,2)C_1^i + g_b^i(k,3)B_0^i \\ &+ g_b^i(k,4)B_1^i + g_b^i(k,5)D_0^i + g_b^i(k,6)D_1^i \end{aligned} \right] (R-1)^k, \\
F_n^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \begin{aligned} &g_d^i(k,1)C_0^i + g_d^i(k,2)C_1^i + g_d^i(k,3)B_0^i \\ &+ g_d^i(k,4)B_1^i + g_d^i(k,5)D_0^i + g_d^i(k,6)D_1^i \end{aligned} \right] (R-1)^k, \tag{3.54}
\end{aligned}$$

де  $g_b^i(k, o)$ ,  $g_c^i(k, j)$ ,  $g_d^i(k, j)$  константи, які визначаються за допомогою рекурентних співвідношень (3.54). Невідомі константи  $C_0^i$ ,  $C_1^i$ ,  $B_0^i$ ,  $B_1^i$ ,  $D_0^i$ ,  $D_1^i$ , число яких визначається кількістю дискретних шарів циліндру  $N$ , знаходяться шляхом підстановки виразів (3.54) в граничні умови (3.50), (3.51). Отримана при цьому лінійна алгебраїчна система рівнянь включає  $6N$  невідомих констант.

Визначивши значення виразів (3.54) і підставивши їх до заданих розв'язків (3.48), неважко за допомогою геометричних і фізичних співвідношень, що наведені вище, отримати розв'язок розглянутої термопружної крайової задачі.

Як приклад розглянемо задачу, коли геометричні параметри багатошарового кругового порожистого циліндра  $r_a = 0,148$  м,  $r_b = 0,18$  м і  $l = 1$  м. Еталонні значення температури, модуль Юнга, і коефіцієнт теплового розширення:  $T_0 = 50$  К,  $E_0 = 40$  ГПа,  $\alpha_0 = 7 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>. Температурні навантаження на внутрішній і зовнішній поверхнях, а також внутрішній і зовнішній тиск, задані в наступному вигляді:

$$T_a(z) = 0, T_b(z) = \Delta T \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \quad q_a(z) = q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), q_b(z) = 0.$$

Циліндр складається з 4 шарів:

- 1) твердий поліетилен високого тиску ( $h=4$ мм)  $E=260$ МПа,  $\nu=0,4$ ,  $\lambda=0,44$  Вт/м·К,  $\alpha = 20 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>;
- 2) склопластик ( $h=20$ мм)  $\lambda=0,4$  Вт/м·К,  $\alpha=4 - 7 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>;
- 3) пеновінілпласт ( $h=4$ мм)  $E=83$ МПа,  $\nu=0,33$ ,  $\lambda=0,4$ Вт/м·К,  $\alpha = 15 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>;
- 4) дюралюміній ( $h=4$ мм)  $E=71$ ГПа,  $\nu=0,31$ ,  $\lambda=160$ Вт/м·К,  $\alpha=2,3 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>.

Для першого, третього і четвертого шарів, виготовлених з пружного ізотропного матеріалу, справедливі наступні співвідношення:

$$E_z = E_\theta = E_r = E, G_{\theta z} = G_{r\theta} = G_{rz} = G, \nu_{z\theta} = \nu_{zr} = \nu_{\theta r} = \nu_{\theta z} = \nu_{rz} = \nu_{r\theta} = \nu, G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Термопружні характеристики склопластику визначалися за методикою, запропонованою в підрозділі 3.1. Сема армування і значення механічних характеристик склопластику наведені в таблиці 3.1.

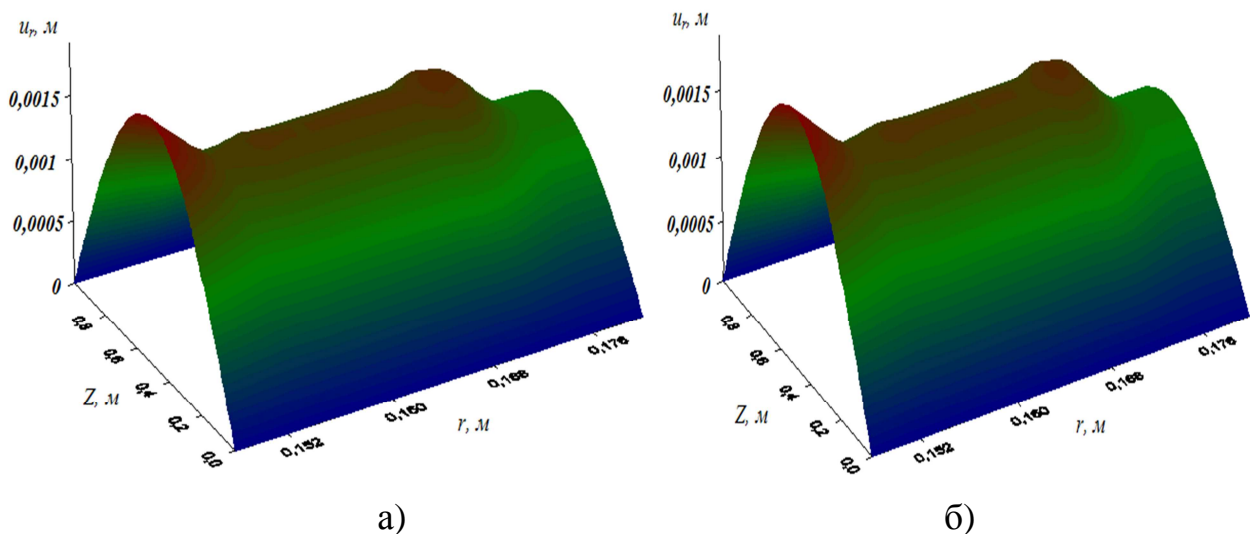


Рисунок 3.8 – Розподіл радіальних переміщень в циліндрі ( $q_0=50$ МПа):  
а)  $\Delta T=80$ К; б)  $\Delta T=50$ К



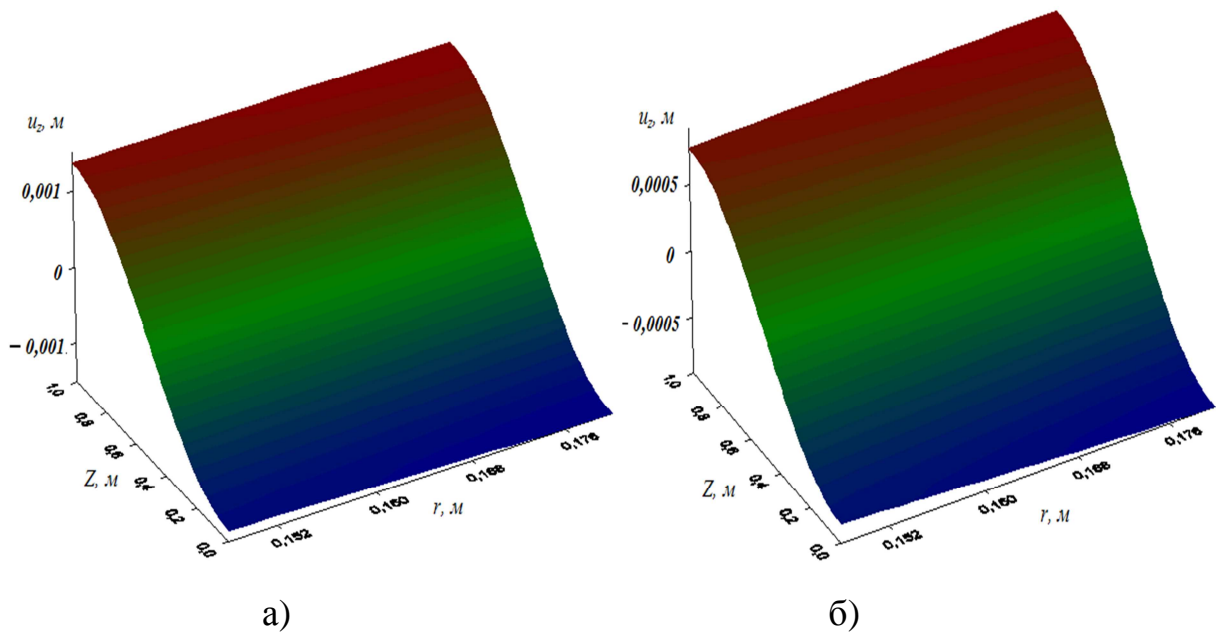


Рисунок 3.9 – Розподіл поздовжніх переміщень в циліндрі  
( $q_0=50\text{МПа}$ ): а)  $\Delta T=80\text{К}$ ; б)  $\Delta T=50\text{К}$

Аналіз результатів, показаних на рис. 3.8-3.17, дозволяє відзначити наступне. Максимальні нормальні напруження в поздовжньому напрямку (рис. 3.13) у зовнішньому з дюралюмінію шарі зростають на 61% при збільшенні температури всього на 30К, і на 54% в несучому шарі зі склопластику.

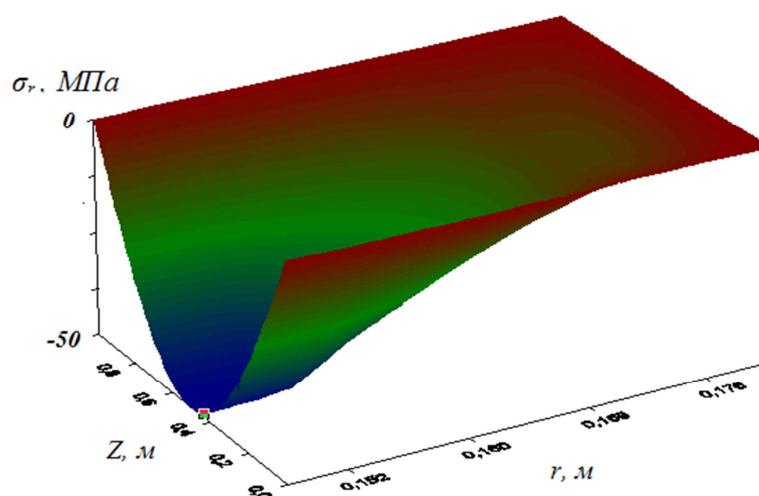


Рисунок 3.10 – Розподіл радіальних напружень в циліндрі  
( $q_0=50\text{МПа}$ ,  $\Delta T=80\text{К}$ )

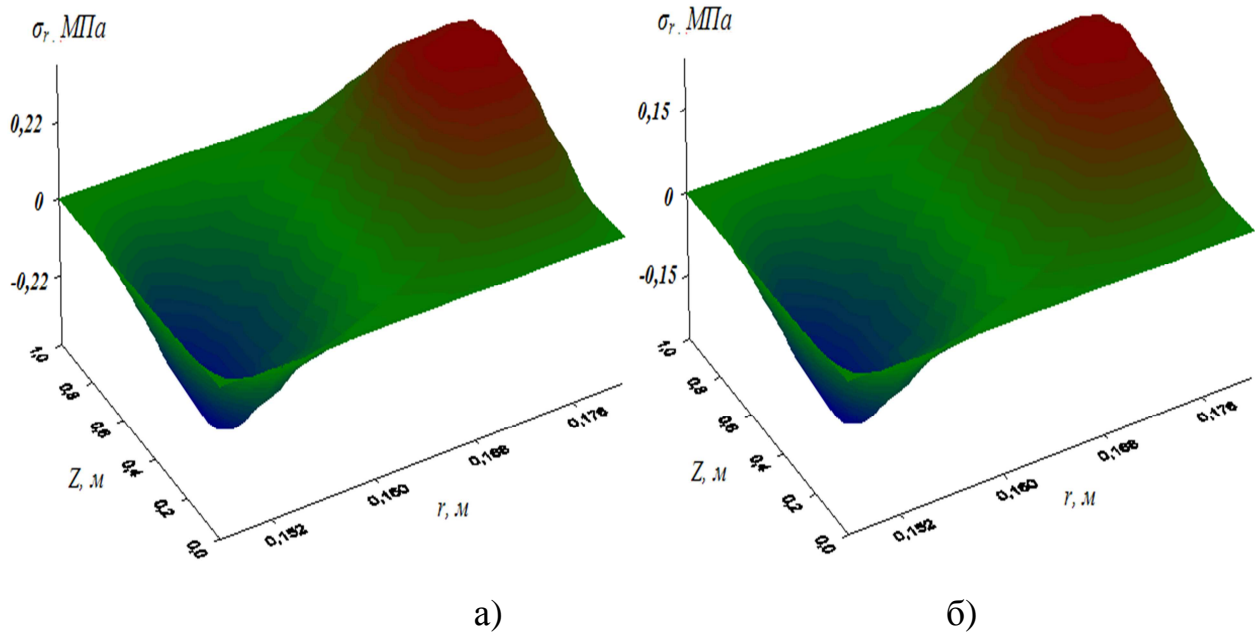


Рисунок 3.11 – Розподіл радіальних напружень в циліндрі ( $q_0=0\text{МПа}$ ):  
а)  $\Delta T=80K$ ; б)  $\Delta T=50K$

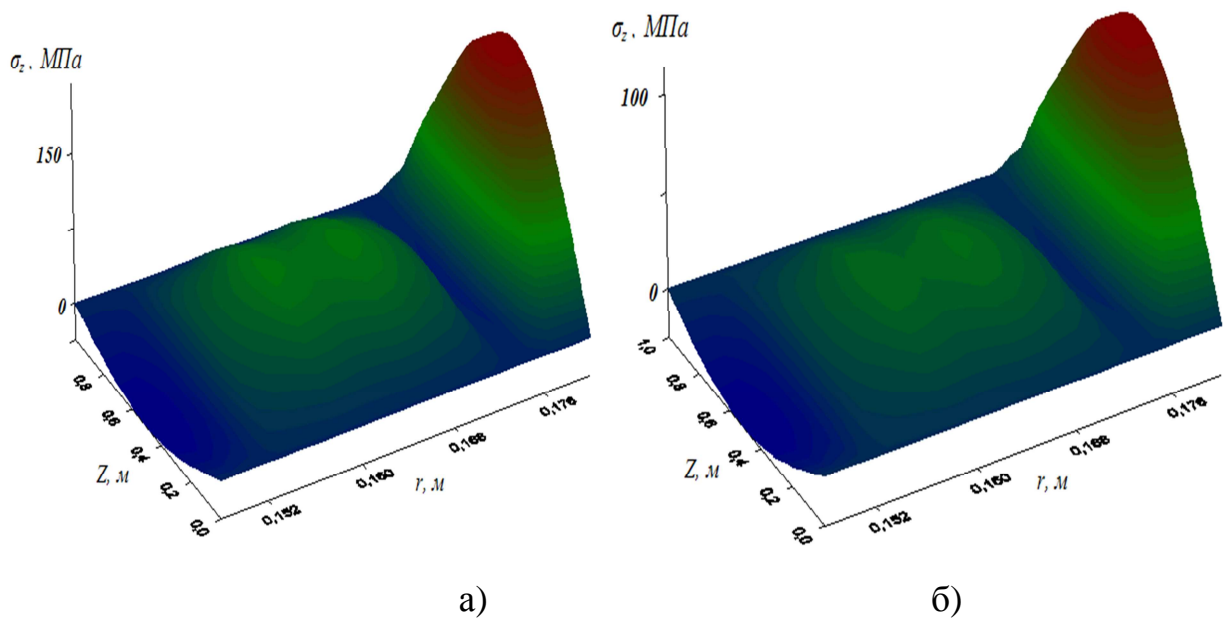


Рисунок 3.12 – Розподіл осьових напружень в циліндрі ( $q_0=50\text{МПа}$ ):  
а)  $\Delta T=80K$ ; б)  $\Delta T=50K$

При аналізі зміни нормальних напружень в коловому напрямку циліндра (рис. 3.13) при збільшенні температури на 30K відзначається зменшення зазначених напружень на 7% у зовнішньому шарі і на 3% в несучому шарі.

Таким чином, слід зазначити, що температурні навантаження мають незначний вплив на величину максимальних значень колових напружень.

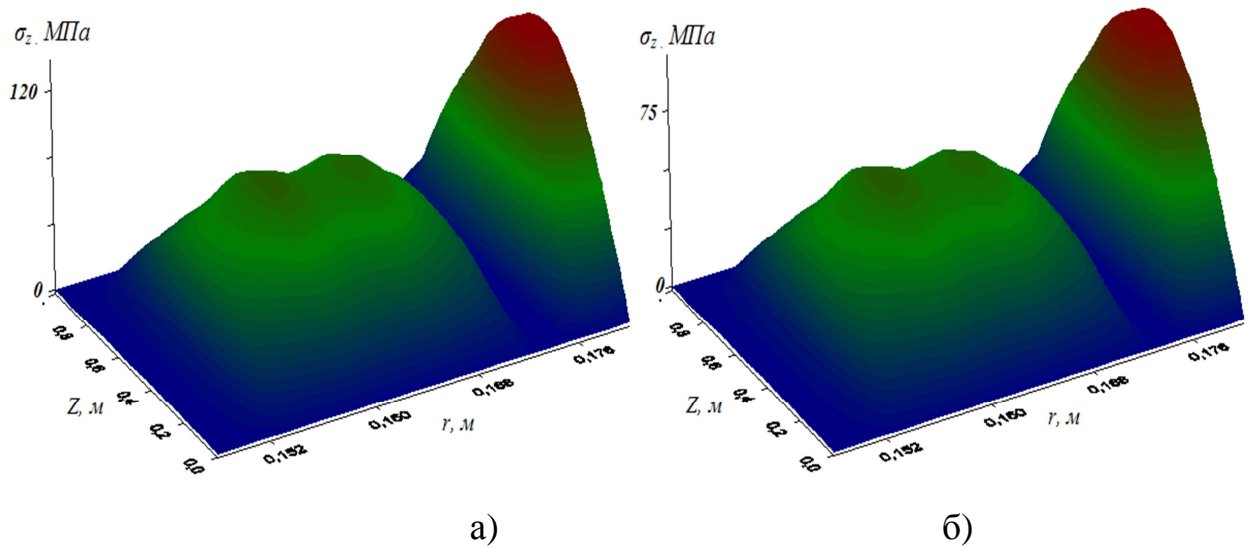


Рисунок 3.13 – Розподіл осевих напружень в циліндрі ( $q_0=0MPa$ ):

а)  $\Delta T=80K$ ; б)  $\Delta T=50K$

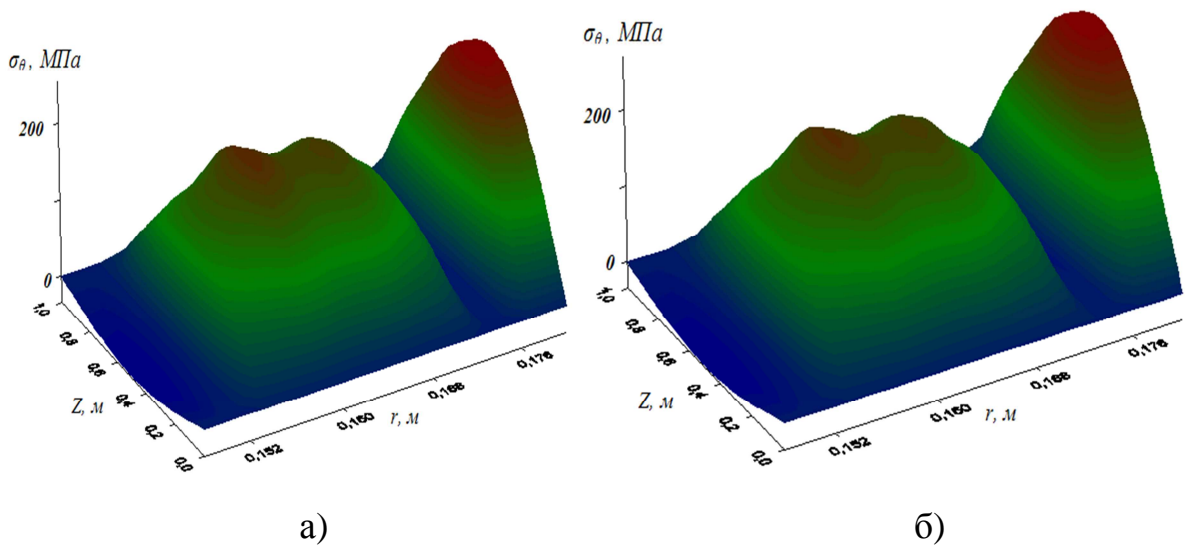


Рисунок 3.14 – Розподіл колових напружень в циліндрі ( $q_0=50MPa$ ):

а)  $\Delta T=80K$ ; б)  $\Delta T=50K$

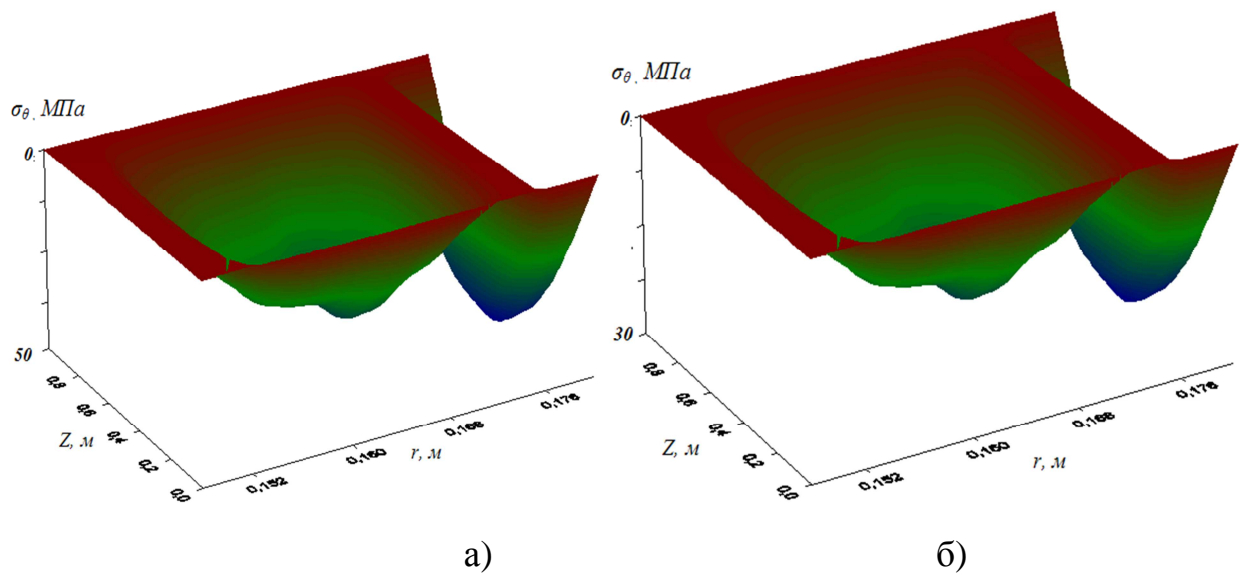


Рисунок 3.15 – Розподіл колових напружень в циліндрі ( $q_0=0\text{МПа}$ ):  
а)  $\Delta T=80\text{K}$ ; б)  $\Delta T=50\text{K}$

З рис. 3.16 – 3.17 видно, що напруження поперечного зсуву мало залежать від температури, але, як відомо, навіть невеликі напруження поперечного зсуву при наявності стискаючих або розтягувальних трансверсальних напружень (рис. 3.10) можуть привести до розшарування розглянутого багат шарового циліндру.

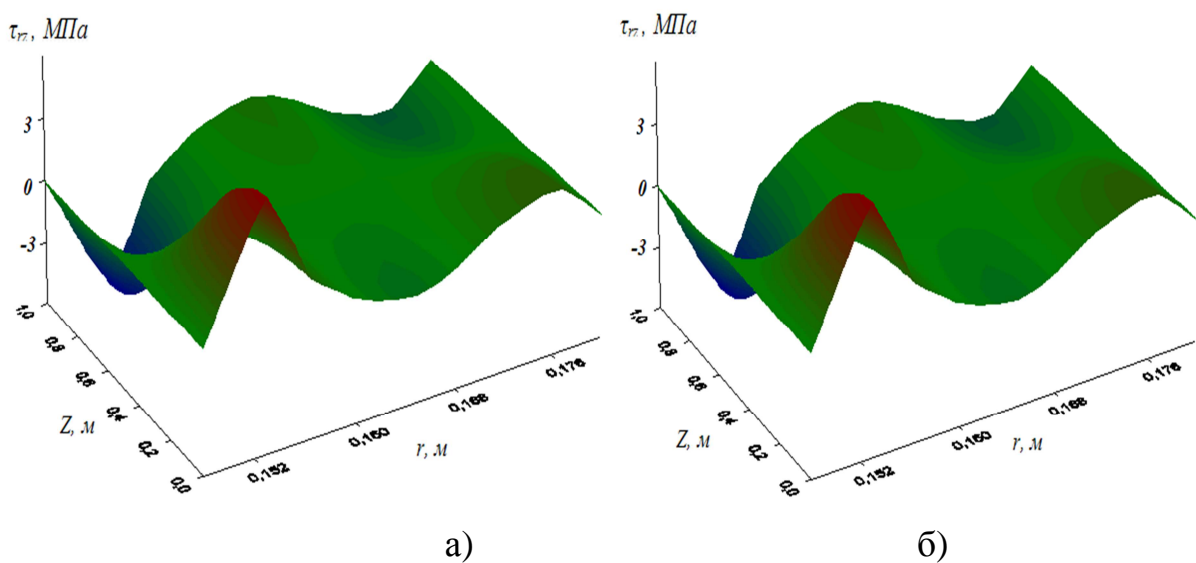


Рисунок 3.16 – Розподіл напружень поперечного зсуву в циліндрі  
( $q_0=50\text{МПа}$ ): а)  $\Delta T=80\text{K}$ ; б)  $\Delta T=50\text{K}$

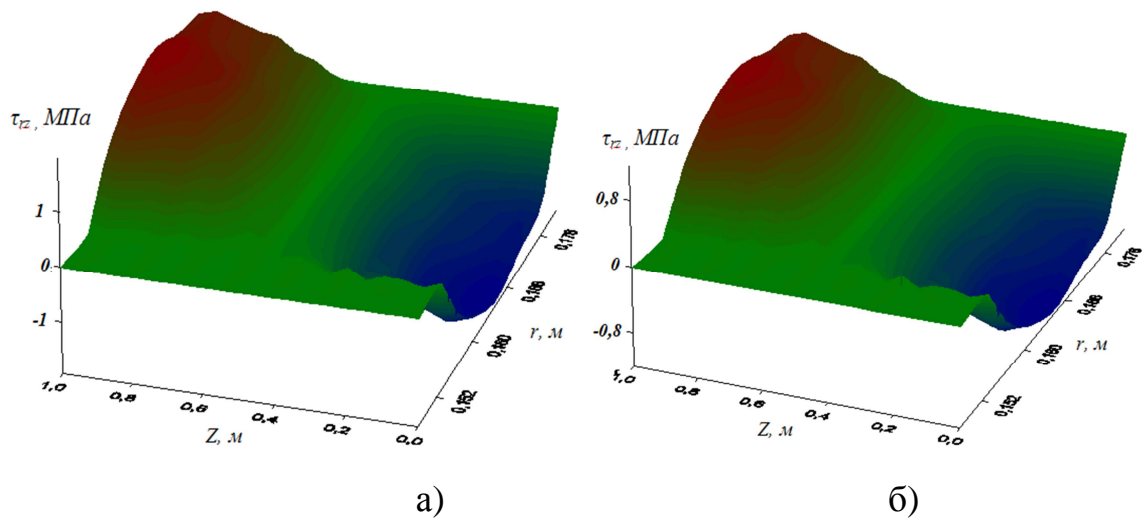


Рисунок 3.17 – Розподіл напружень поперечного зсуву в циліндрі ( $q_0=0$ МПа): а)  $\Delta T=80$ К; б)  $\Delta T=50$ К

Запропонований алгоритм вирішення, розглянутого тут класу задач, дозволяє отримувати розрахункові дані для оцінки впливу фізико-механічних характеристик окремих шарів на термопружний деформований стан неоднорідних по товщині циліндрів. Даний метод дозволяє розв'язувати такого роду задачі тільки за умови вільного опирання торців циліндрів.

**Метод сплайн-колокації.** Для розв'язання крайової задачі (3.45) – (3.47) у напрямку поздовжньої осі циліндра застосовуємо метод сплайн-колокації в одному координатному напрямі, що дозволяє звести двовимірну крайову задачу до одновимірної.

Розв'язки крайової задачі (26) шукаємо у вигляді:

$$U_r^i(R, Z) = \sum_{n=0}^N \Phi_n^i(R) \phi_{rn}(Z), \quad U_z^i(R, Z) = \sum_{n=0}^N \Psi_n^i(R) \phi_{zn}(Z), \quad T_r^i(R, Z) = \sum_{n=0}^N F_n^i(R) \phi_{rn}(Z). \quad (3.55)$$

Вирази для B-сплайнів третього ступеня на розширеній сітці  $\Delta$ :

$$z_{-m} < z_{-m+1} < \dots < z_{-1} < z_0 < z_1 < \dots < z_n < \dots < z_{N+m} \quad (z_{k+1} - z_k) = h = \text{const}$$

мають вигляд

$$B_3^i(z) = \frac{1}{6} \begin{cases} 0, & z \leq z_{i-2} \\ t^3, & z_{i-2} \leq z \leq z_{i-1} \\ 1 + 3t + 3t^2(1-t), & z_{i-1} \leq z \leq z_i \\ 3t^2 - 6t^2 + 4, & z_i \leq z \leq z_{i+1} \\ (1-t)^3, & z_{i+1} \leq z \leq z_{i+2} \\ 0, & z \geq z_{i+2} \end{cases}$$

де  $t = (z - z_k) / h$  на інтервалі  $[z_k, z_{k+1}]$ ,  $k = \overline{i-2, i+1}$ ,  $i = \overline{-1, N+1}$ .

Апроксимуючі функції задаємо у вигляді:

– на торцях, якщо  $u = 0$ ,

$$\begin{aligned} \phi_0(z) &= -4B_3^{-1}(z) + B_3^0(z), \phi_1(z) = B_3^{-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^0(z) + B_3^1(z), \\ \phi_i(z) &= B_3^i(z), (i = \overline{2, N-2}), \\ \phi_{n-1}(z) &= B_3^{N+1}(z) - \frac{1}{2}B_3^N(z) + B_3^{N-1}(z), \phi_N(z) = -4B_3^{N+1}(z) + B_3^N(z); \end{aligned}$$

– на торцях, якщо  $\partial u / \partial z = 0$ ,

$$\begin{aligned} \phi_0(z) &= B_3^0(z), \phi_1(z) = B_3^{-1} + \frac{1}{2}B_3^0(z) + B_3^1(z), \\ \phi_i(z) &= B_3^i(z) (i = \overline{2, N-2}), \\ \phi_{N-1}(z) &= B_3^{N+1}(z) - \frac{1}{2}B_3^N(z) + B_3^{N-1}(z), \phi_N(z) = B_3^N(z). \end{aligned}$$

При цьому можна задати на одному торці умови  $u = 0$ , а на іншому  $\partial u / \partial z = 0$ . Вибравши на відрізку інтегрування  $[z_0, z_N]$   $N+1$  точку колокації  $z = \xi_j, (j = \overline{1, N+1})$  проведемо  $N+1$  лінію  $z = \xi_j$  і після підстановки в (3.45) отримаємо систему із  $3(N+1)$  диференціальних рівнянь другого порядку для кожного шару:

$$\begin{aligned}
\bar{E} \frac{d^2 \bar{\Phi}^i}{dR^2} &= -\frac{\bar{E}}{R} \frac{d\bar{\Phi}^i}{dR} + \left( \frac{A_{22}^i}{A_{11}^i} \frac{\bar{E}}{R^2} - \frac{A_{55}^i}{A_{11}^i} \frac{d^2 \bar{\phi}_r}{dZ^2} \bar{\phi}_r^{-1} \right) \bar{\Phi}^i - \frac{(A_{13}^i + A_{55}^i)}{A_{11}^i} \frac{d\bar{\phi}_z}{dZ} \bar{\phi}_r^{-1} \frac{d\bar{\Psi}^i}{dR} - \\
&\quad - \frac{(A_{13}^i - A_{23}^i)}{A_{11}^i} \frac{d\bar{\phi}_z}{dZ} \bar{\phi}_r^{-1} \bar{\Psi}^i + \frac{\Gamma_r^i}{A_{11}^i} \bar{\phi}_t \bar{\phi}_r^{-1} \frac{d\bar{F}^i}{dR} + \frac{\Gamma_r^i - \Gamma_\theta^i}{A_{11}^i R} \bar{\phi}_t \bar{\phi}_r^{-1} \bar{F}^i \\
\bar{E} \frac{d^2 \bar{\Psi}^i}{dR^2} &= -\frac{\bar{E}}{R} \frac{d\bar{\Psi}^i}{dR} - \frac{A_{33}^i}{A_{55}^i} \frac{d^2 \bar{\phi}_z}{dZ^2} \bar{\phi}_z^{-1} \bar{\Psi}^i - \frac{(A_{13}^i + A_{55}^i)}{A_{55}^i} \frac{d\bar{\phi}_r}{dZ} \bar{\phi}_z^{-1} \frac{d\bar{\Phi}^i}{dR} - \\
&\quad - \frac{(A_{23}^i + A_{55}^i)}{A_{55}^i R} \frac{d\bar{\phi}_r}{dZ} \bar{\phi}_z^{-1} \bar{\Phi}^i + \frac{\Gamma_z^i}{A_{55}^i} \frac{d\bar{\phi}_t}{dZ} \bar{\phi}_z^{-1} \bar{F}^i \\
\bar{E} \frac{d^2 \bar{F}^i}{dR^2} &= -\frac{\bar{E}}{R} \frac{d\bar{F}^i}{dR} - \frac{d^2 \bar{\phi}_t}{dZ^2} \bar{\phi}_t^{-1} \bar{F}^i
\end{aligned} \tag{3.56}$$

де  $\bar{\Phi}^i = (\Phi_0^i, \Phi_1^i, \dots, \Phi_N^i)^T$ ,  $\bar{\Psi}^i = (\Psi_0^i, \Psi_1^i, \dots, \Psi_N^i)^T$ ,  $\bar{F}^i = (F_0^i, F_1^i, \dots, F_N^i)^T$ ,

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_0(z_0) & \phi_1(z_0) & \dots & \phi_N(z_0) \\ \phi_0(z_1) & \phi_1(z_1) & \dots & \phi_N(z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_0(z_N) & \phi_1(z_N) & \dots & \phi_N(z_N) \end{pmatrix}.$$

Граничні умови (3.46), (3.47) перепишуться у вигляді:

– на лицьових поверхнях циліндра

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^N (A_{11}^1 \phi_m^1(Z) \frac{d\Phi_n^1(R_a)}{dR} + A_{12}^1 \phi_m^1(Z) \frac{\Phi_n^1(R_a)}{R} - A_{13}^1 \frac{d\phi_{zn}^1(Z)}{dZ} \Psi_n^1(R_a)) &= Q_a, \\
\sum_{n=0}^N (\frac{d\phi_m^1(Z)}{dZ} \Phi_n^1(R_a) + \phi_{zn}^1(Z) \frac{d\Psi_n^1(R_a)}{dR}) &= 0, \\
\sum_{n=0}^N (A_{11}^N \frac{d\Phi_n^N(R_b)}{dR} + A_{12}^N \frac{\Phi_n^N(R_b)}{R} - A_{13}^N \frac{d\phi_{zn}^N(Z)}{dZ} \Psi_n^N(R_b)) &= Q_b, \\
\sum_{n=0}^N (\frac{d\phi_m^N(Z)}{dZ} \Phi_n^N(R_b) + \phi_{zn}^N(Z) \frac{d\Psi_n^N(R_b)}{dR}) &= 0, \\
\sum_{n=0}^N (\phi_{tn}^1(Z) F_n^1(R_a)) &= T_a, \quad \sum_{n=0}^N (\phi_{tn}^N F_n^N(R_b)) = T_b
\end{aligned} \tag{3.57}$$

– на сполучених поверхнях сусідніх шарів

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^N (A_{11}^i \phi_m^i(Z) \frac{d\Phi_n^i(R^i)}{dR} + A_{12}^i \phi_m^i(Z) \frac{\Phi_n^i(R^i)}{R} - A_{13}^i \frac{d\phi_{zn}^i(Z)}{dZ} \Psi_n^i(R^i)) = \\
& = \sum_{n=0}^N (A_{11}^{i-1} \phi_m^{i-1}(Z) \frac{d\Phi_n^{i-1}(R^i)}{dR} + A_{12}^{i-1} \phi_m^{i-1}(Z) \frac{\Phi_n^{i-1}(R^i)}{R} - A_{13}^{i-1} \frac{d\phi_{zn}^{i-1}(Z)}{dZ} \Psi_n^{i-1}(R^i)), \\
& \sum_{n=0}^N (\frac{d\phi_m^i(Z)}{dZ} \Phi_n^i(R^i) + \phi_{zn}^i(Z) \frac{d\Psi_n^i(R^i)}{dR}) = \sum_{n=0}^N (\frac{d\phi_m^{i-1}(Z)}{dZ} \Phi_n^{i-1}(R^i) + \phi_{zn}^{i-1}(Z) \frac{d\Psi_n^{i-1}(R^i)}{dR}), \\
& \sum_{n=0}^N (\phi_m^i(Z) \Phi_n^i(R^i) - \phi_m^{i-1}(Z) \Phi_n^{i-1}(R^i)) = 0, \\
& \sum_{n=0}^N (\phi_{zn}^{i-1}(Z) \Psi_n^{i-1}(R^i) - \phi_{zn}^i(Z) \Psi_n^i(R^i)) = K \sum_{n=0}^N (\frac{d\phi_m^i(Z)}{dZ} \Phi_n^i(R^i) + \phi_{zn}^i(Z) \frac{d\Psi_n^i(R^i)}{dR}), \\
& \sum_{n=0}^N (\phi_{tn}^{i-1}(Z) F_n^{i-1}(R^i) - \phi_{tn}^i(Z) F_n^i(R^i)) = 0, \\
& \sum_{n=0}^N (\phi_{tn}^{i-1} A^{i-1} \frac{dF_n^{i-1}(R^i)}{dR} - \phi_{tn}^i(Z) A^i \frac{dF_n^i(R^i)}{dR}) = 0. \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Вважається, що в радіальному напрямку функції  $\overline{\Phi}^i(R^i), \overline{\Psi}^i(R^i), \overline{F}^i(R^i)$  неперервні по товщині  $i$ -го шару, тоді за допомогою рядів Тейлора їх можна буде записати у вигляді:

$$\overline{\Phi}^i(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{C}_k^i (R-1)^k, \quad \overline{\Psi}^i(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{B}_k^i (R-1)^k, \quad \overline{F}^i(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{D}_k^i (R-1)^k, \tag{3.59}$$

де

$$\overline{C}_k^i = (C_{k,1}^i, \dots, C_{k,N+1}^i)^T, \quad \overline{B}_k^i = (B_{k,1}^i, \dots, B_{k,N+1}^i)^T, \quad \overline{D}_k^i = (D_{k,1}^i, \dots, D_{k,N+1}^i)^T$$

Підставивши (3.59) у рівняння (3.56) і прирівнявши коефіцієнти при  $(R-1)^k$  до нуля, нескладно отримати наступні рекурентні співвідношення



$$\begin{aligned}
\overline{C}_{k+2}^i &= \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[ - (k+1) \overline{C}_{k+1}^i + \left( \frac{A_{22}^i}{A_{11}^i} \overline{E} - \frac{A_{55}^i}{A_{11}^i} \frac{d^2 \overline{\phi}_r}{dZ^2} \overline{\phi}_r^{-1} \right) \overline{C}_k^i - (k+1) \frac{(A_{13}^i + A_{55}^i)}{A_{11}^i} \frac{d \overline{\phi}_z}{dZ} \overline{\phi}_r^{-1} \overline{B}_{k+1}^i \right. \\
&\quad \left. - \frac{(A_{13}^i - A_{23}^i)}{A_{11}^i} \frac{d \overline{\phi}_z}{dZ} \overline{\phi}_r^{-1} \overline{B}_k^i + (k+1) \frac{\Gamma_r^i}{A_{11}^i} \overline{\phi}_t \overline{\phi}_r^{-1} \overline{D}_{k+1}^i + \frac{\Gamma_r^i - \Gamma_\theta^i}{A_{11}^i R} \overline{\phi}_t \overline{\phi}_r^{-1} \overline{D}_k^i \right] \\
\overline{B}_{k+2}^i &= \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[ - (k+1) \overline{B}_{k+1}^i - \frac{A_{33}^i}{A_{55}^i} \frac{d^2 \overline{\phi}_z}{dZ^2} \overline{\phi}_z^{-1} \overline{B}_k^i - (k+1) \frac{(A_{13}^i + A_{55}^i)}{A_{55}^i} \frac{d \overline{\phi}_r}{dZ} \overline{\phi}_z^{-1} \overline{C}_{k+1}^i \right. \\
&\quad \left. - \frac{(A_{23}^i + A_{55}^i)}{A_{55}^i} \frac{d \overline{\phi}_r}{dZ} \overline{\phi}_z^{-1} \overline{C}_k^i + \frac{\Gamma_z^i}{A_{55}^i} \frac{d \overline{\phi}_t}{dZ} \overline{\phi}_z^{-1} \overline{D}_k^i \right] \\
\overline{D}_{k+2}^i &= \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[ - (k+1) \overline{D}_{k+1}^i - \frac{d^2 \overline{\phi}_t}{dZ^2} \overline{\phi}_t^{-1} \overline{D}_k^i \right] \tag{3.60}
\end{aligned}$$

З рекурентних співвідношень (3.60) випливає, що всі коефіцієнти  $\overline{C}_k^i, \overline{B}_k^i, \overline{D}_k^i$  можуть бути виражені через  $\overline{C}_0^i, \overline{C}_1^i, \overline{B}_0^i, \overline{B}_1^i, \overline{D}_0^i, \overline{D}_1^i$ , коли  $k > 1$ . Тоді рішення системи рівнянь (3.56) можуть бути записані в компактній формі

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \overline{g}_c^i(k,1) \overline{C}_0^i + \overline{g}_c^i(k,2) \overline{C}_1^i + \overline{g}_c^i(k,3) \overline{B}_0^i + \overline{g}_c^i(k,4) \overline{B}_1^i + \overline{g}_c^i(k,5) \overline{D}_0^i + \overline{g}_c^i(k,6) \overline{D}_1^i \right] (R-1)^k, \\
\overline{\Psi}^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \overline{g}_b^i(k,1) \overline{C}_0^i + \overline{g}_b^i(k,2) \overline{C}_1^i + \overline{g}_b^i(k,3) \overline{B}_0^i + \overline{g}_b^i(k,4) \overline{B}_1^i + \overline{g}_b^i(k,5) \overline{D}_0^i + \overline{g}_b^i(k,6) \overline{D}_1^i \right] (R-1)^k, \\
\overline{F}^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \overline{g}_d^i(k,5) \overline{D}_0^i + \overline{g}_d^i(k,6) \overline{D}_1^i \right] (R-1)^k, \tag{3.61}
\end{aligned}$$

Невідомі константи  $\overline{C}_0^i, \overline{C}_1^i, \overline{B}_0^i, \overline{B}_1^i, \overline{D}_0^i, \overline{D}_1^i$ , число яких визначається кількістю дискретних слоїв циліндра  $K$  та кількістю точок колокації  $N+1$ , знаходяться шляхом підстановки виразів (3.61) у граничні умови (3.57), (3.58). Отримана при цьому лінійна алгебраїчна система рівнянь включає  $6 \cdot (N+1) \cdot K$  невідомих констант.

Визначивши значення виразів (3.61) і підставивши їх в задані рішення (3.55), нескладно за допомогою геометричних і фізичних співвідношень, представлених вище, отримати рішення розглянутої термопружності крайової задачі.

Розглянемо приклад, коли для товстостінного циліндру довжиною  $l=2\text{м}$ , з внутрішнім радіусом  $r_a=0,156\text{м}$  і зовнішнім радіусом  $r_b=0,188\text{м}$ , на торцях має місце шарнірне закріплення. Циліндр навантажений внутрішнім тиском і температурою на зовнішній лицьовій поверхні:

$$q_a(z) = q_0 = 20\text{МПа}, q_b(z) = 0, T_a(z) = 0, T_b(z) = \Delta T.$$

Циліндр складався з 2 шарів склопластику, термопружні характеристики якого визначалися за методикою, запропонованою в підрозділі 3.1. Схема армування і значення механічних характеристик склопластику наведені в таблиці 3.1.

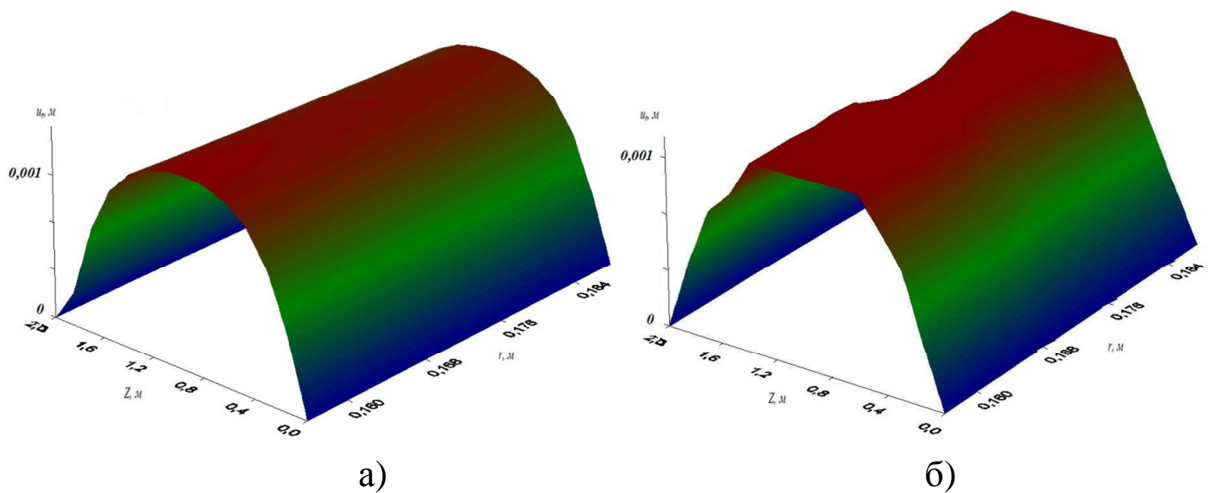


Рисунок 3.18 – Розподіл радіальних переміщень в циліндрі:  
а)  $\Delta T=0\text{K}$ ; б)  $\Delta T=50\text{K}$

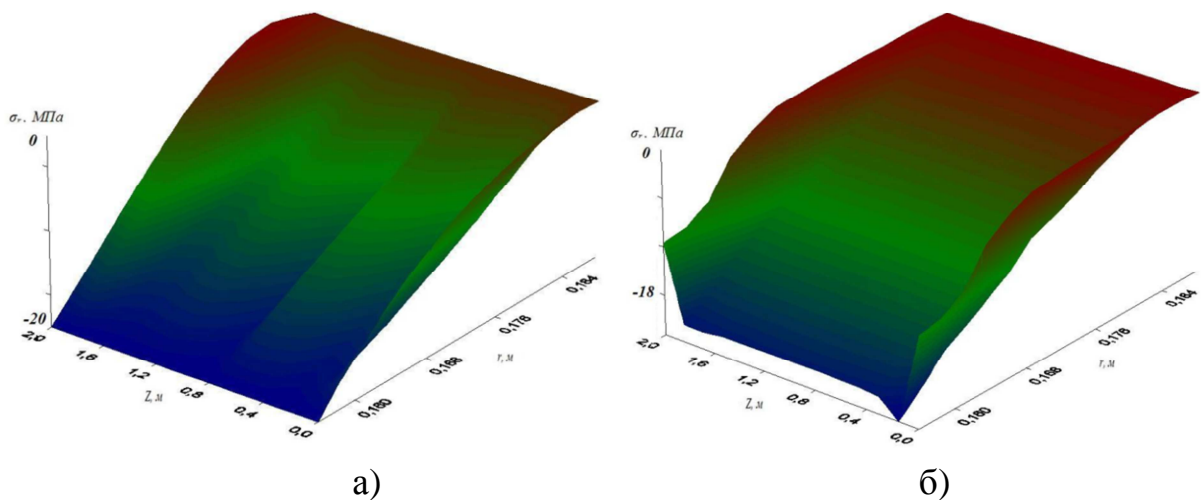


Рисунок 3.18 – Розподіл радіальних напружень в циліндрі:  
 $\Delta T=0\text{K}$ ; б)  $\Delta T=50\text{K}$

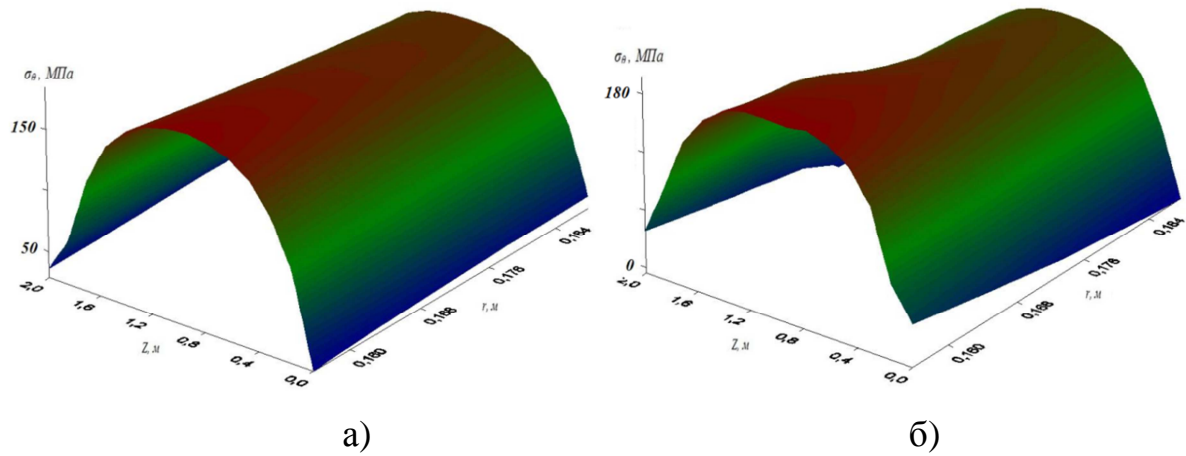


Рисунок 3.20 – Розподіл колових напружень в циліндрі:  
а)  $\Delta T=0K$ ; б)  $\Delta T=50K$

Аналіз результатів, наведених на рис. 3.18 – 3.21, дозволяє відзначити наступне. Максимальні нормальні напруження в радіальному напрямку (рис.3.19) зростають приблизно на 10% при збільшенні температури на 50K, також можна відмітити, що врахування температурного навантаження має вплив на характер розподілу радіальних напружень тільки біля торців шарнірно закріпленого циліндру, з наближенням до середини вплив температурного навантаження практично не змінює картину розподілу даного типу напружень. З рис. 3.18 видно, що врахування температурних навантажень мало впливає на величину максимальних радіальних переміщень в шарнірно закріпленому циліндрі.

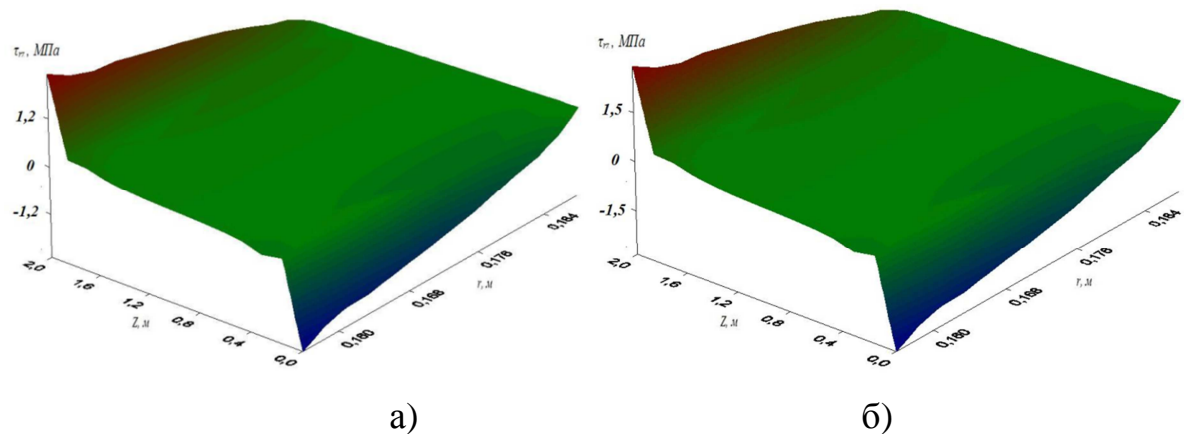


Рисунок 3.21 – Розподіл напружень поперечного зсуву в циліндрі:  
а)  $\Delta T=0K$ ; б)  $\Delta T=50K$

Також можна відмітити перерозподіл нормальних колових напружень (рис. 3.20), так при збільшенні температури до 50К напруження на внутрішній лицьовій поверхні збільшуються на 4-5% і зменшуються приблизно на таку ж величину на зовнішній поверхні.

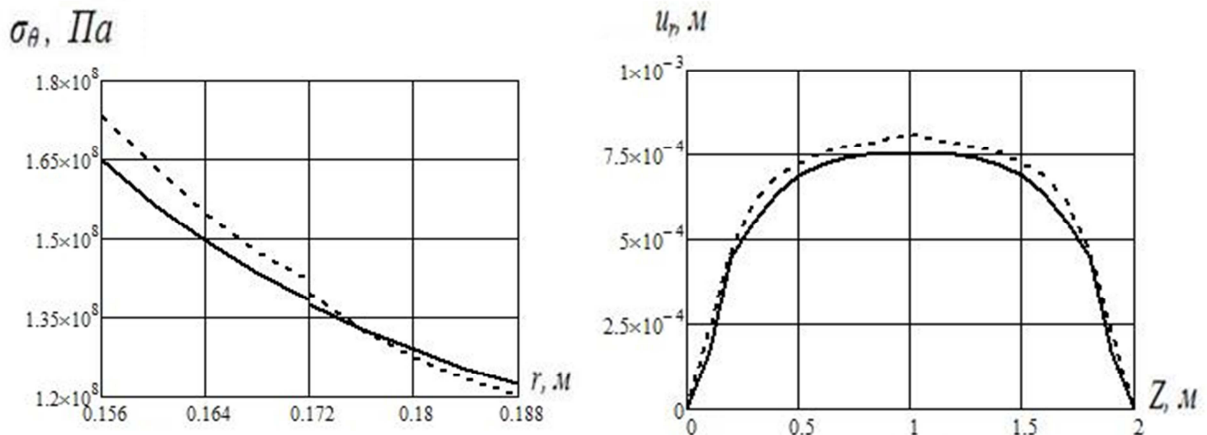


Рисунок 3.22 – Розподіл нормальних колових напружень та радіальних переміщень в циліндрі

З рис. 3.21 видно, що напруження поперечного зсуву значно залежать від температури і на торцях шарнірно закріпленого циліндру може привести до розшарування розглянутого багат шарового циліндру.

На рис. 3.22 зображений розподіл нормальних колових напружень в центрі циліндру ( $z=1\text{м}$ ) та радіальних переміщень в зоні контакту пакетів склопластикових шарів циліндру при врахуванні як внутрішнього тиску  $p=20\text{ МПа}$ , так і температурного навантаження  $\Delta T=50\text{ К}$ . Суцільною лінією позначений випадок ідеального контакту шарів, штриховою – неідеального ( $K=1,5$ ).

Аналіз отриманих результатів дозволяє відзначити, що при врахуванні неідеального контакту між шарами, величина нормальних колових напружень на внутрішній лицьовій поверхні циліндру на 10-12% більша ніж при ідеальному контакті. Також на 6-7% збільшується величина радіальних переміщень в зоні контакту.

Ще одним прикладом циліндричної багатошарової оболонки є ущільнення робочого колеса насоса. Ущільнююче кільце складається з 3 шарів. Розглядалося два варіанти ущільнення: в першому кільце виготовлене зі склопластику, в другому – з вуглепластику. Термопружні характеристики матеріалів визначалися за методикою наведеною в підрозділі 3.1. В результаті роботи насоса в нерозрахунковому режимі, на внутрішній поверхні кільця з'являється теплове навантаження:  $T_a(z) = \Delta T \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right)$ ,  $T_b(z) = 0$ .

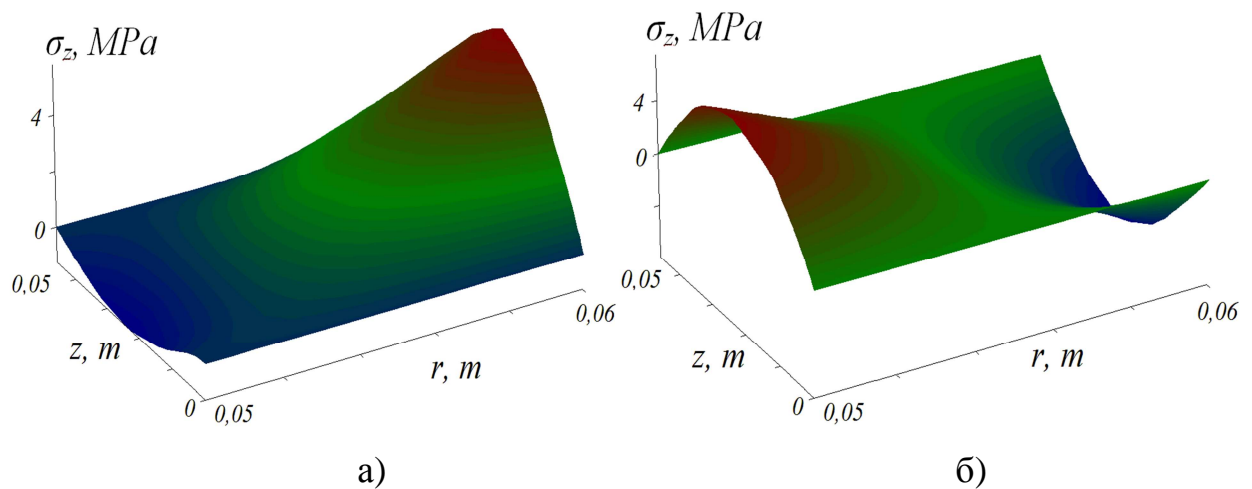


Рисунок 3.23 – Розподіл осьових напружень:

а) склопластик; б) вуглепластик

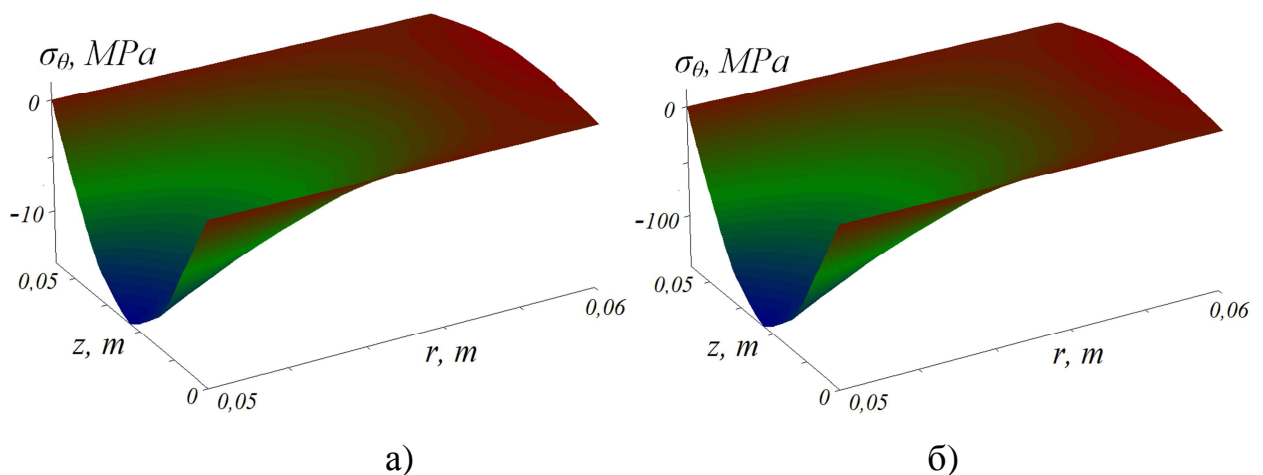


Рисунок 3.24 – Розподіл колових напружень:

а) склопластик; б) вуглепластик

Аналіз теоретичних результатів при  $\Delta T=100\text{K}$ , наведених на рис. 3.24 – 3.26, дозволяє відмітити наступне. Максимальні колові напруження в кільці зі склопластику в 10 разів менші, ніж в ущільненні з вуглепластику. Прослідковується зміна характеру розподілу осьових напружень та напружень поперечного зсуву при заміні склопластику на вуглепластик, а також зменшення величини максимальних значень цих напружень приблизно на 30%.

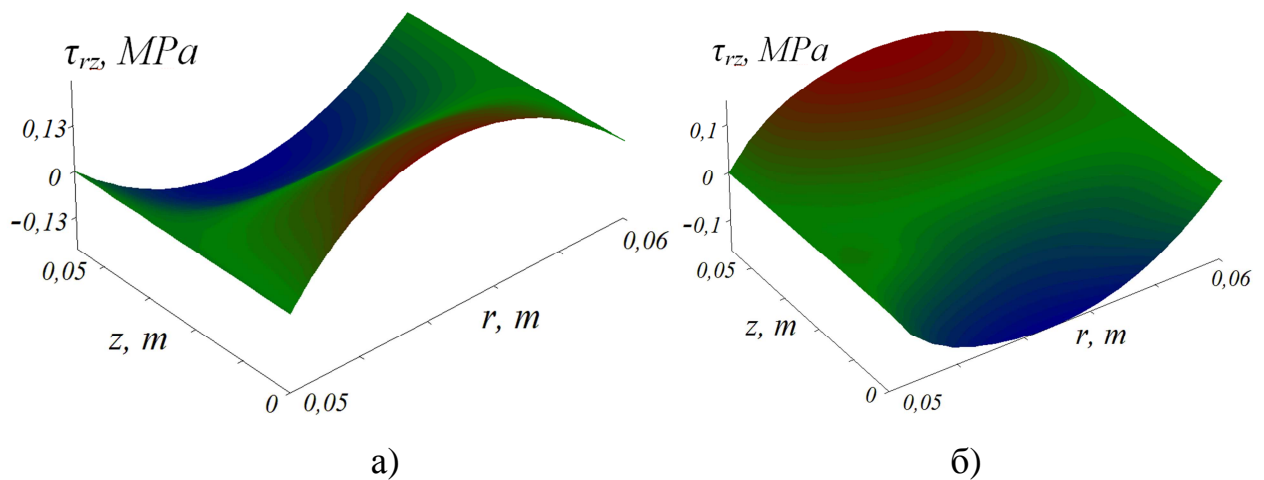


Рисунок 3.25 – Розподіл напружень поперечного зсуву:

а) склопластик; б) вуглепластик

Таким чином, даний підхід вирішення термопружної задачі для товстостінних багат шарових циліндричних оболонок дозволяє проводити дослідження їх напружено деформованого стану при дії як статичного, так і теплового навантаження, коли враховується реальні умови взаємодії шарів і величина зміни контактних напружень на міжшарових границях.

### 3.4. Висновки по третьому розділу

В даному розділі запропонована методика визначення термопружних сталей анізотропного матеріалу, котрий складається з набору армованих шарів.

Проведені на основі класичної теорії пружності анізотропного тіла і дискретно-структурної теорії дослідження напружено-деформованого стану плоского криволінійного бруса, дозволяють довести, що найбільш адекватно реальну картину напружено-деформованого стану відображає дискретно-структурна теорія з урахуванням неідеального контакту шарів, коли припускається пружне проковзування суміжних поверхонь сусідніх шарів один відносно одного.

Запропоновано два алгоритми дослідження напружено-деформованого стану багатошарового товстостінного циліндру кінцевої довжини від дії внутрішнього тиску і температурного навантаження. Розв'язання крайової задачі за допомогою розкладання в ряди Фур'є дозволяє отримати розподіл напружень і переміщень в циліндрі, тільки коли виконуються умови вільного обпирання. Дослідження двох моделей такого циліндру показали, що при врахуванні температурного навантаження на зовнішній лицьовій поверхні перевагу має захисний шар, зроблений з вуглепластику, в порівнянні з аналогічним дюралюмінієвим. Застосування методу сплайн-колокації дозволяє розглядати різні варіанти закріплення торців циліндру, а також проводити дослідження напружено-деформованого стану циліндру, коли враховується умови контактної взаємодії шарів і величини зміни контактних напружень на між шарових суміжних поверхнях.

#### 4. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ БАГАТОШАРОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ НЕОДНОРІДНОЇ СТРУКТУРИ

Конструкційні переваги орієнтованих склопластиків загальновідомі. В першу чергу – це висока питома міцність в напрямку армування. Однак реалізація цієї основної переваги натрапила на ряд труднощів, пов'язаних з порівняно низькою жорсткістю склопластиків при поперечному зсуві і трансверсальному відриві. Опір міжшаровому зсуву і поперечному відриву склопластиків відповідно дорівнює  $\tau_{xz}^{\pm} = 25 \div 50$  МПа,  $G_{xz} = 2000 \div 2500$  МПа і  $\sigma_z^{\pm} = 20 \div 55$  МПа.

Втрата несучої здатності склопластикових пластин і оболонок при дії стискаючого навантаження через слабкий опір поперечному відриву і міжшаровому зсуву відбувається задовго до досягнення напруженнями граничних значень. Зазначені недоліки особливо помітні, якщо композиційний матеріал має різного роду дефекти структури.

##### 4.1. Технологія виготовлення та технічні характеристики зразків зі склопластику

В якості арматури при виготовленні конструкцій зі склопластику використовуються високомодульні скловолокно або алюмоборосілікатне волокно. Міцність моноволокна знаходиться в межах від 3,4 ГПа до 4,5 ГПа. Стандартне відхилення становить приблизно + 10%. Основною причиною такого широкого розкиду є наявність дефектів у волокнах і вплив на них атмосферної вологи.

В якості зв'язуючого широко застосовуються епоксидні смоли марки ЕД-20, а також поліефірні смоли. Знаходять застосування й інші типи епоксидних смол: бромовані – з підвищеним опором до займання; еластичні епоксидні смоли – з підвищеним коефіцієнтом ударної в'язкості і



пластичності. У складі композицій з епоксидною смолою додатково застосовуються різного роду отверджувачі, прискорювачі і пластифікатори. Найбільш широко застосовуваний затверджувач – метілнадікангідрид і триетаноламін. В якості пластифікатора можна застосовувати дибутилфталат. Міцність на розрив зразків з епоксидної смоли знаходиться в межах 55 – 130МПа, модуль пружності при розтяганні – 2,8 - 4,2ГПа, границя міцності при згинанні – 120 МПа.

**4.1.1. Матеріал і структура зразків.** Результати досліджень, викладені в даному розділі, отримані для трьох типів зразків (рис. 4.1), які були виготовлені на основі склопластикових труб, що випускаються ТОВ «СКЛОПЛАСТИКОВІ ТРУБИ» м. Харків: кільцеві зразки (рис. 4.1 а); частина склопластикової труби зі сталевим фланцем на одному з її торців (рис. 4.1 б); сталева труба з дефектами структури посилена склопластиковим бандажем (рис. 4.1 в).

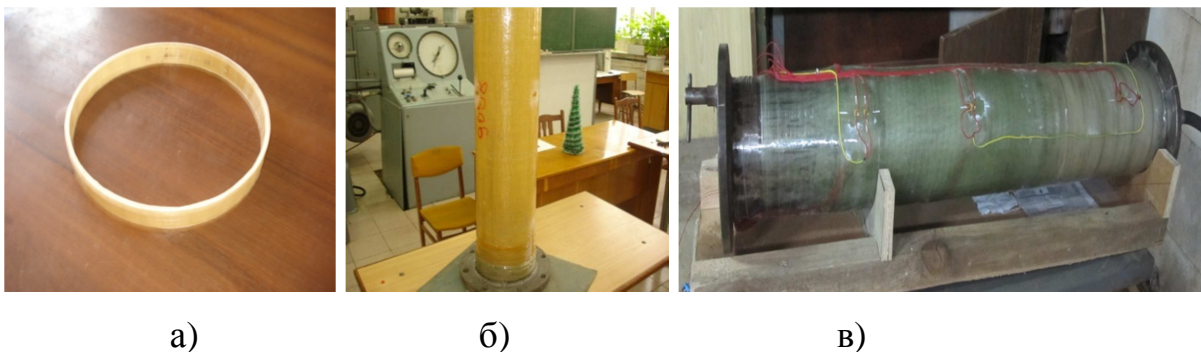


Рисунок 4.1 – Типи зразків для експериментальних досліджень

Склопластикова труба включає 16 односпрямованих армованих шарів із заданою схемою укладки  $[0_4^{\circ}/-75^{\circ}/0_2^{\circ}/-75^{\circ}/75^{\circ}/0_2^{\circ}/-75^{\circ}/0_4^{\circ}]$ . Модулі пружності, зсуву і коефіцієнт Пуассона намотуваних алюмоборосилікатних стрічок, набраних з ровінгу Е-600, відповідно рівні  $E_B = 55000\text{МПа}$ ,  $G_B = 22000\text{МПа}$ ,  $\nu_B = 0,25$ . Матриця склопластику – епоксидний полімер з наступними параметрами пружності:  $E_M = 3550\text{МПа}$ ,  $G_M = 1270\text{МПа}$ ,  $\nu_M = 0,4$ . У кожному моношарі товщиною

0,25мм об'єм, займаний стрічками, становить 70% загального об'єму.

Склопластикова труба виготовлялася методом намотування на розбірну циліндричну оправку. Єднальна композиція включала 100 масових частин (мас.ч.) епоксидної смоли Epicot 828, попередньо прогрітої до температури 70<sup>0</sup>С. У приготівлений об'єм епоксидної смоли додавали 2 мас.ч. прискорювача УП-606/2 і 80 мас. ч. затверджувача МТНРА.

В якості експериментальних зразків 1-го типу для визначення модуля пружності і границі міцності в коловому напрямку при розтяганні зі склопластикової труби згідно ГОСТ 25.603-82 були вирізані п'ять кілець.

**4.1.2. Технічні характеристики склопластику.** Для визначення технічних сталих склопластику пропонується наступна теоретико-експериментальна методика. Спочатку, згідно з ГОСТ 25.603 - 82 і ГОСТ 25.601-80, визначається модуль пружності і коефіцієнт Пуассона при розтяганні зразків зі склопластику. Проведені механічні випробування дозволяють стверджувати, що матеріал розглянутих пластинок можна класифікувати як анізотропний матеріал з однією площиною пружної симетрії.

Визначення деформацій двох партій зразків проводилось методом тензометрування за допомогою розривної машини Р-20 у сертифікованій лабораторії Сумського державного університету.

Зразок навантажують за допомогою спеціального пристрою (рис. 4.2). Різниця між внутрішнім діаметром кільцевого зразка і діаметром напівдиска в зборі не повинна перевищувати 0,4 мм; шорсткість опорних поверхонь напівдиска повинна бути не більше 0,63 мкм. Кріплення пристосування у випробувальній машині повинно забезпечувати самоцентрування, тобто напрямок прикладеного розтягувального навантаження має бути перпендикулярним до площини роз'єму напівдиска і проходити через центр випробуваного кільця. Конструктивне оформлення пристрою може бути різним. Конструкція пристрою для випробування на розтягання кільцевих зразків наведена на рис 4.2 і складається з двох тяг 4 з двома сталевими

напівдисками 2, що фіксуються сталевими пальцями 7, і кільцевого зразка 3.

За результатами вимірювань були отримані усереднені значення напружень і деформацій, а також довірчі інтервали на основі критерію Стьюдента із заданою вірогідністю  $1 - \alpha = 0,95$ . При цьому похибка апроксимації  $s$  експериментальної прямої:  $\varepsilon = \sigma/E$  при розтягуванні склопластику і значення модулів пружності кожного типу зразків наведені в таблиці 4.1.

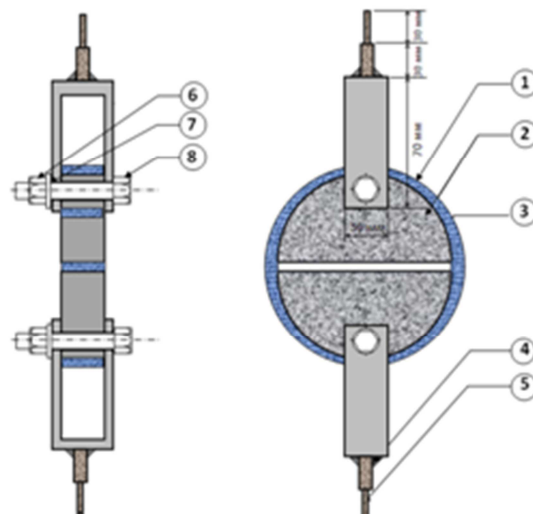


Рисунок 4.2 – Спеціальний пристрій для випробування кільцевих зразків

Таблиця 4.1 - Експериментально - теоретичні значення пружних характеристик склопластиків

№ типо-розміру	Результати експерименту		Експериментально - теоретичні значення			
	$E_i^{\ominus}$ , МПа	S, %	$E_{ii}$ , МПа	$G_{ij}$ , МПа	$\nu_{ij}$	$\nu_{ji}$
1	$E_{\theta}^{\ominus} = 36050$	0,91	$E_z = 23800$	$G_{\theta z} = 7340$	$\nu_{z\theta} = 0,069$	$\nu_{\theta z} = 0,107$
			$E_{\theta} = 35500$	$G_{rz} = 4870$	$\nu_{zr} = 0,399$	$\nu_{rz} = 0,415$
2	$E_z^{\ominus} = 24100$	0,92	$E_r = 22900$	$G_{r\theta} = 6760$	$\nu_{\theta r} = 0,406$	$\nu_{r\theta} = 0,272$

Решта експериментально-теоретичних значень механічних характеристик склопластику (таблиця 4.1) визначалися інтегрально для всього

пакету шарів за методикою, яка викладена в розділі 3, за допомогою залежностей (3.1) - (3.16).

## 4.2 Навантаження зразків

### 4.2.1 Навантаження склопластикової труби внутрішнім тиском.

Схема установки для випробування зразків 2-го типу під дією внутрішнього тиску показана на рис. 4.3. Загальний вигляд установки наведено на рис. 4.4.

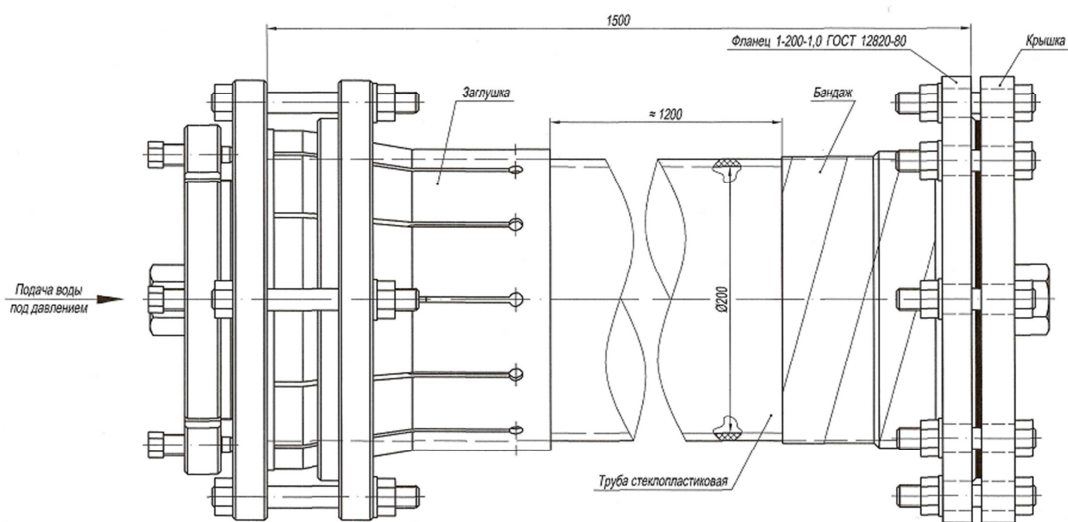


Рисунок 4.3 – Схема установки для проведення гідростатичних випробувань



Рисунок 4.4 – Загальний вигляд установки для проведення гідростатичних випробувань

Випробувальна установка, створена на заводі ТОВ «СКЛОПЛАСТИКОВІ ТРУБИ» м. Харків, включає насосну станцію з можливістю створювати будь-який заданий тиск в діапазоні (0 - 25,0 МПа).

Вода подається через спеціальний штуцер, розміщений в одній з заглушок, всередину склопластикової труби. Для захисту від бризок води під час можливого руйнування зразка в процесі випробування, об'єкт поміщений в спеціальний похилий короб. Нахил короба забезпечує швидкий злив води при позаштатних ситуаціях і в кінці випробувань.

Заглушка складається з 3-х сталевих циліндрів з канавками, в які поміщені 2 торові гумові прокладки. Ці циліндри жорстко прикріплені до круглого сталевому диску діаметром 300мм і товщиною 20мм. Диск має 4 прохідні отвори, через які проходять болти, які притискають торові прокладки до повної герметизації випробуваного об'єкта.

Крім того, по периметру диска є 16 отворів діаметром 16 мм для болтових з'єднань розрізного багатопелюсткового конуса, який накладається зовні випробуваного циліндра. Таким чином, зусилля передається від диска на спеціальне кільце, яке стискає розрізний багатопелюстковий конус, обтискуючи випробовуваний циліндр зовні і тим самим створює необхідне зусилля.

З іншого торця зразок кріпиться до випробувальної установки за допомогою сталевого фланця.

Об'єкт випробувань: склопластикові труби діаметром 200мм, товщиною стінки 4 мм і довжиною – 1200мм.

**4.2.2. Навантаження внутрішнім тиском сталевих труб з дефектом структури, зміцненої склопластиковим бандажем.** Експериментальні дослідження проводилися в 2 етапи: навантаження внутрішнім тиском сталевих труб з дефектом структури до її руйнування в районі дефекту; посилення цієї труби склопластиковим бандажем і подальше її навантаження внутрішнім тиском.

Для проведення першого етапу випробувань в сталевій трубі були виконані 6 сегментів виточок шириною 30 мм і товщиною труби 1,6-3,1 мм та кільцева виточка шириною 50 мм і товщиною 3 мм (рис. 4.5).

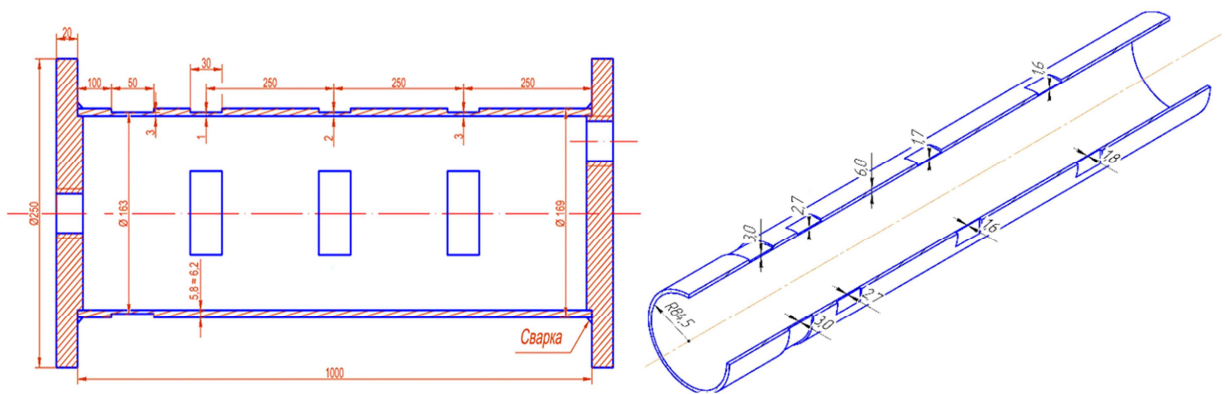


Рисунок 4.5 – Схема труби для проведення випробувань

Загальний вигляд установки наведено на рис. 4.6. Вона включає насосну станцію з можливістю створювати будь-який заданий тиск в діапазоні (0 - 20МПа) і вимірювальну систему СІТ-3. Вода подається через спеціальний штуцер, розміщений в одній з заглушок, всередину труби.

Об'єкт випробувань: сталева труба діаметром 160мм, товщиною стінки 8мм і довжиною – 1000 мм.



Рисунок 4.6 – Загальний вигляд експериментальної установки для проведення гідростатичних випробувань

Для проведення другого етапу на сталеву трубу, яка дала течу в районі одного з сегментів виточки, наклали склопластиковий бандаж товщиною 10мм. Загальний вигляд установки наведено на рис. 4.7. Вона включає насосну станцію з можливістю створювати будь-який заданий тиск в діапазоні (0 - 20,0 МПа) і вимірювальну систему СІТ-3.



Рисунок 4.7 – Загальний вигляд експериментальної установки для проведення гідростатичних випробувань труби з бандажем

### 4.3 Вимірювання та реєстрація деформацій та напружень

Для вимірювання деформацій використовувалися тензорезистори КФ4П1-3-200 з базою 3мм, 5мм і 10мм. Розетки склалися з двох тензодатчиків. Середнє значення коефіцієнта тензочутливості –  $K = 2 \cdot 10^{-6}$ .

**4.3.1. Кільцеві зразки.** На рис. 4.9 наведено загальний вигляд випробувальної установки, за допомогою якої кільце розтягується двома

зосередженими і протилежно спрямованими зовнішніми силами. Випробовуване кільце являє собою три рази статично невизначену систему.

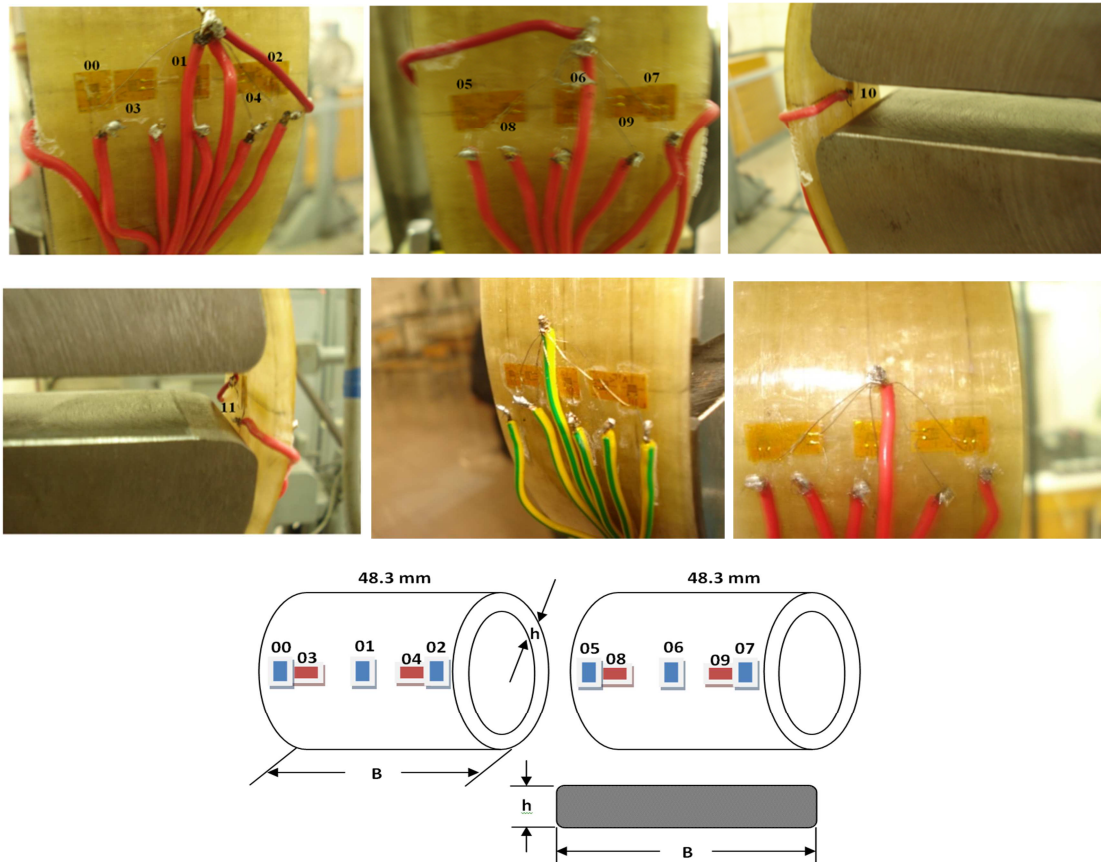


Рисунок 4.8 – Точки наклейки тензорезисторів на кільцеві зразки

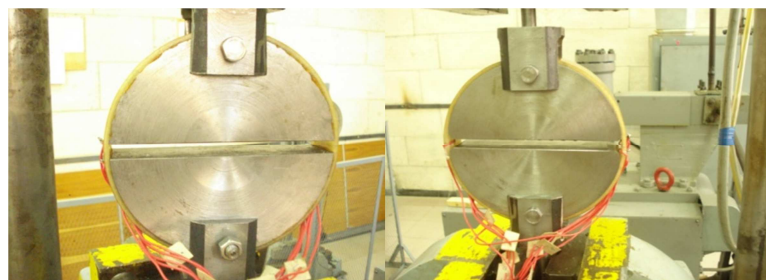


Рисунок 4.9 – Схема навантаження кільцевого зразка

Розрахункова схема розглянутого кільця дана на рис. 4.10. Подано аналіз сил і моментів в моделі 1 і моделі 2. Для розрахунків будемо використовувати наступне рівняння:

$$\sigma_{\theta} = \frac{P}{2A} \pm \frac{M \cdot C}{I}$$

Як видно, в розглянутих поперечних перетинах кільця виникають



поздовжні зусилля рівні половині зовнішньої розтягувальної сили і невідомі згинальні моменти. Визначення невідомих моментів  $M$  в анізотропному криволінійному брусі являє собою досить складну математичну задачу. Тому пропонується простий алгоритм визначення модуля пружності кільця в коловому напрямку.

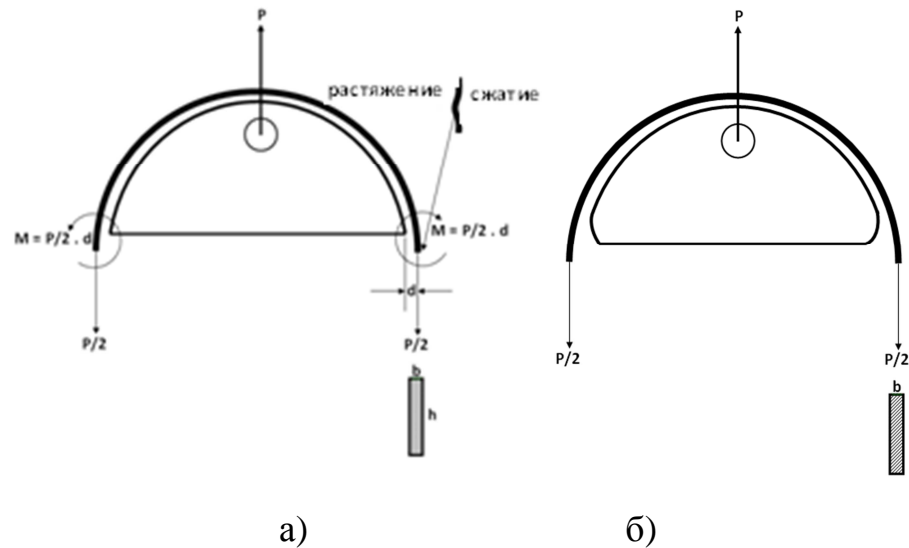


Рисунок 4.10 – Еквівалентна система

У точках внутрішньої та зовнішньої поверхні кільця (рис. 4.8) приклеєні тензорезистори для вимірювання деформацій в коловому напрямку. Величину напружень, які виникають в точках наклейки тензорезисторів, можна знайти за допомогою таких рівнянь:

$$\sigma_{\theta}^{+} = E_{\theta} \varepsilon^{+} = \frac{P}{2A} + \frac{M}{W} \quad \sigma_{\theta}^{-} = E_{\theta} \varepsilon^{-} = \frac{P}{2A} - \frac{M}{W}$$

де  $E_{\theta}$  – невідомий модуль пружності,  $W = \frac{bh^2}{6}$  – момент опору поперечного перерізу розглянутого кільця,  $\varepsilon^{+}$ ,  $\varepsilon^{-}$  – величини деформацій у точках внутрішньої і зовнішньої поверхонь кільця.

Додаючи праві і ліві частини цих рівнянь, отримаємо вираз для визначення модуля пружності:

$$E_{\theta} = \frac{P}{A(\epsilon^{+} + \epsilon^{-})}$$

#### 4.3.2 Склопластикова труба з фланцем на одному з торців.

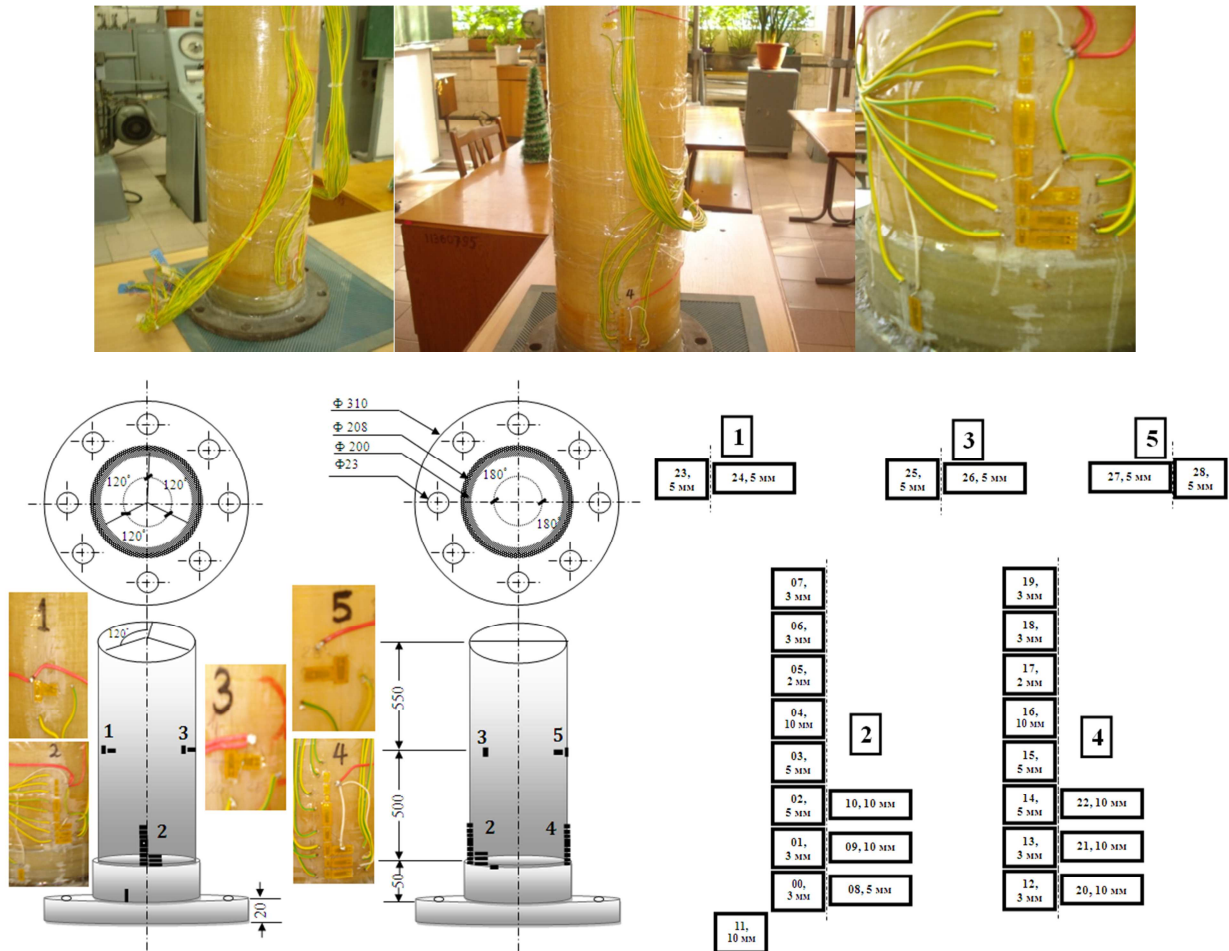


Рисунок 4.11 – Точки наклейки тензорезисторів на склопластикову трубу

**4.3.3. Сталева труба з дефектом структури, зміцнена склопластиковим бандажем.** Схема розміщення тензорезисторів була визначена на етапі планування експерименту з орієнтуванням на виточки в сталевій трубі (рис. 4.12). Тензорезистори розміщувалися після видалення нерівностей і знежирення ацетоном у два етапи: на сталевій трубі в районі виточок; на склопластиковому бандажі. Знежирені тензорезистори, що мають опір 200 Ом, закріплювали шаром клею. В якості вимірювача опорів застосовувався СІТ-3 в режимі 1/4 моста.

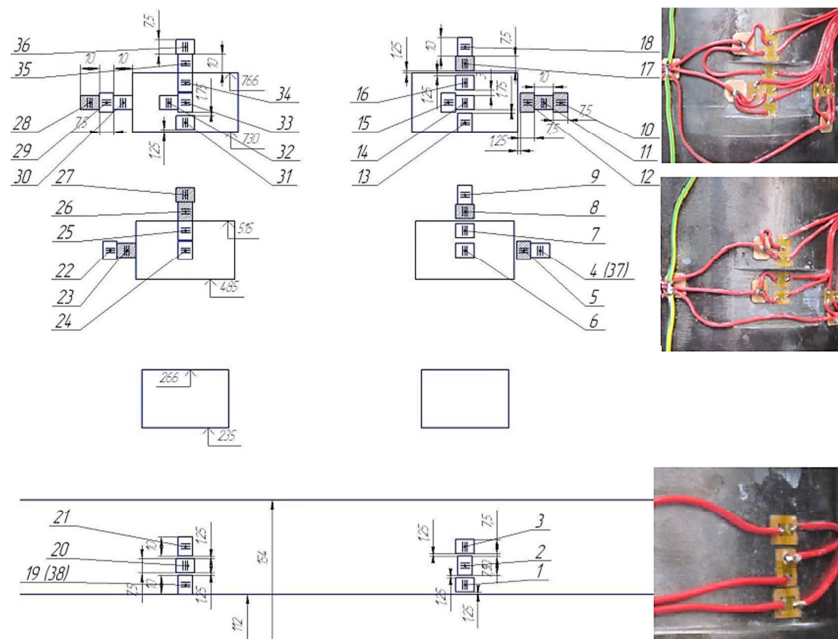


Рисунок 4.12 – Схема розташування тензорезисторів на сталевій трубі

Після першого етапу навантаження велика кількість тензорезисторів вийшла з ладу. Схема розташування справних тензорезисторів показана на рис. 4.13. Розташування тензорезисторів на склопластиковому бандажі було визначено з орієнтуванням головним чином на виточку, де сталася теча. Ще кілька тензорезисторів розмістили в районах інших виточок. Схема розташування тензорезисторів на склопластиковому бандажі показана на рис. 4.14.

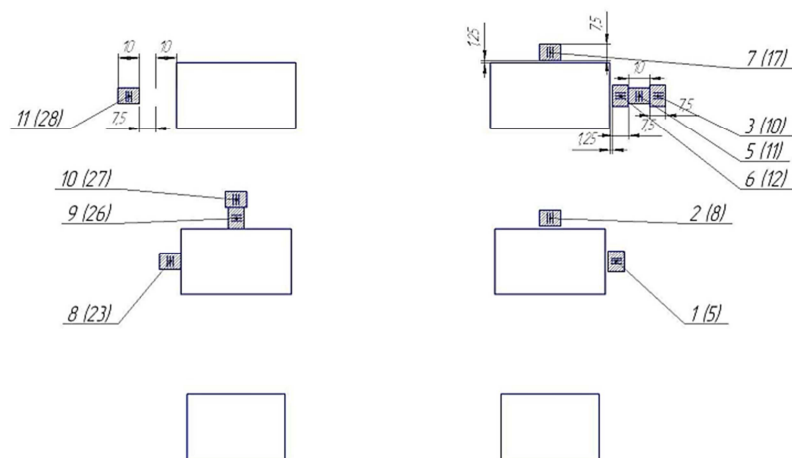


Рисунок 4.13 – Схема розташування справних тензорезисторів на сталевій трубі

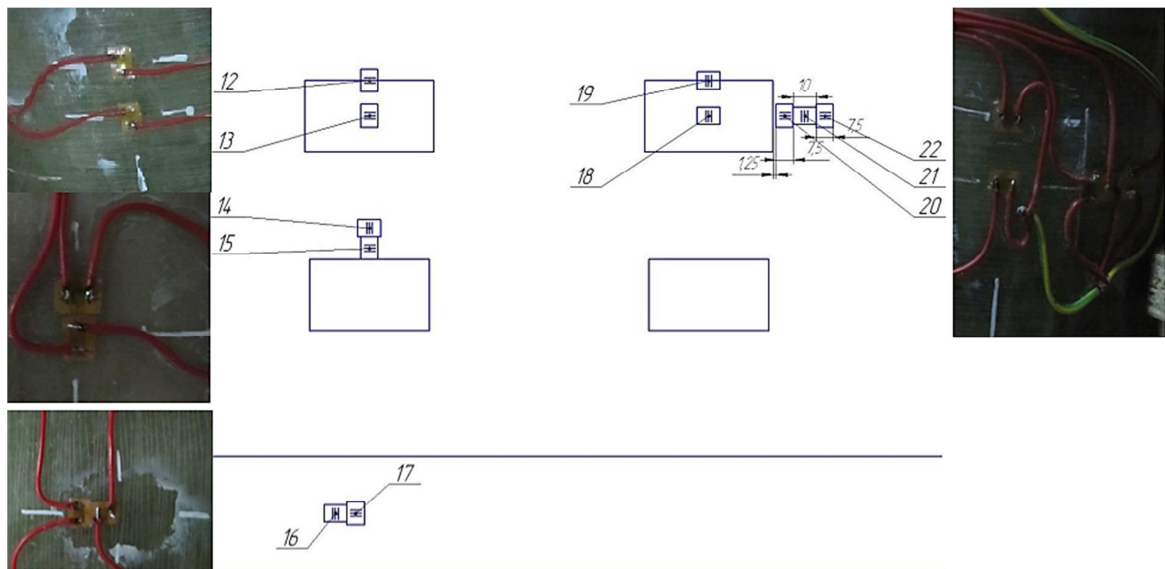


Рисунок 4.14 – Схема розташування тензорезисторів на склопластиковому бандажі

#### 4.4. Експериментальні дослідження склопластикової труби під дією внутрішнього тиску

Об'єкт випробувань: композитний циліндр діаметром 200мм, товщина стінки 4мм, довжина – 1200мм. Крок навантаження – 0,5 МПа.

Під дією тиску  $p_{19}^* = 3,5\text{МПа}$  сталося руйнування склопластику в зоні контакту склопластикової оболонки і сталевого фланця. Після руйнування фланцевого з'єднання було прийнято рішення: зрізати фланець і продовжити випробування до руйнування циліндра (рис. 4.15).

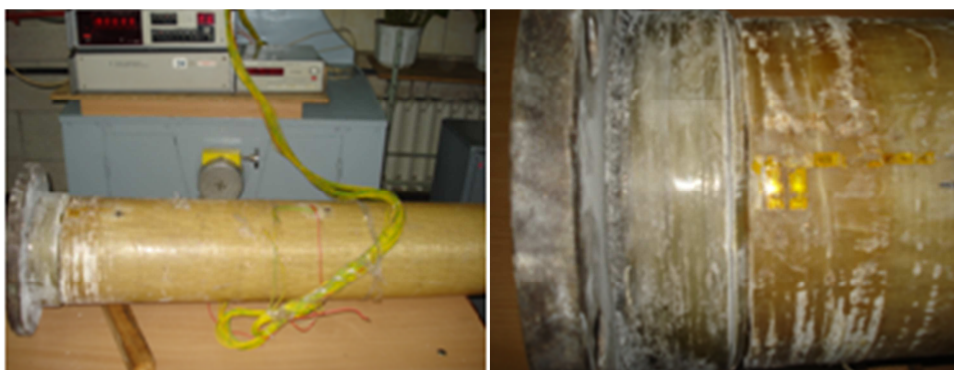


Рисунок 4.15 – Картина руйнування склопластику в зоні фланця

Замість зрізаного фланця встановили ще одну заглушку, описану вище. Навантаження, як і раніше, проводили з кроком  $\Delta p = 0,5 \text{ МПа}$ .

Починаючи з тиску  $p = 4,0 \text{ МПа}$ , на кожному етапі навантаження було чути характерний тріск, яким супроводжується утворення мікротріщин в зв'язуючому матриці. При дії тиску  $p_{\text{поз}}^* = 14,9 \text{ МПа}$  сталося руйнування склопластикової труби. Величина прогину  $w$  в точці 3 циліндра відрізняється від теоретичних значень, знайдених за методикою підрозділу 5.4, не більше ніж на 12%.

Окремо слід зазначити, що у разі безмоментного плоского напруженого стану перша модель багатошарової трансверсально-ізотропної оболонки дає результат, який досить точно збігається з величиною колових  $\sigma_{\theta} = \frac{pr}{h}$  і поздовжніх  $\sigma_z = \frac{pr}{2h}$  напружень. Знаючи ці напруження і деформації в точках 1, 3, 5 (рис. 4.11) наклейки тензорезисторів, нескладно експериментально знайти середнє значення модулів пружності  $E_{\theta}^{\text{э}}$ ,  $E_z^{\text{э}}$ , остаточні значення яких наведені в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 – Експериментальне визначення пружних властивостей

Кількість експериментів	Навантаження (МПа)	Максимальне навантаження (МПа)	Кількість тензодатчиків	Модуль пружності, $E$ (МПа)	Середній модуль пружності, $E$ (МПа)
1	0,5	3	6	$3,984 \cdot 10^4$	$3,632 \cdot 10^4$
2	0,5	3	6	$4,034 \cdot 10^4$	
3	0,5	3	6	$3,539 \cdot 10^4$	
4	0,5	6,5	6	$3,333 \cdot 10^4$	
5	1	13	6	$3,269 \cdot 10^4$	

На рис. 4.16 показані експериментальні результати напруженого стану склопластикової труби в районі фланцевого з'єднання. Ці результати відрізняються від теоретичних, наведених у вигляді графіків в підрозділі 5.4,

менш ніж на 10%.

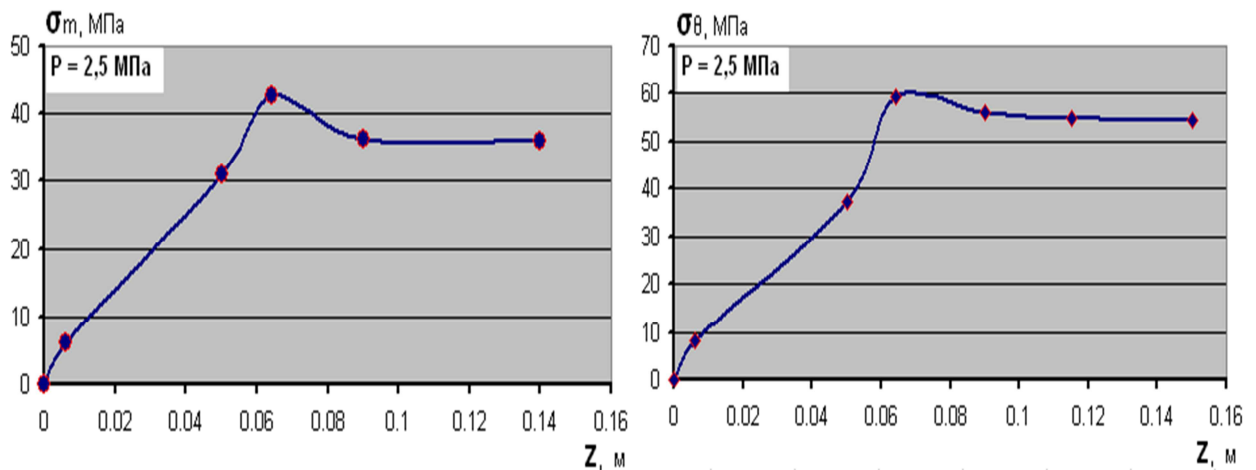


Рисунок 4.16 – Напружений стан склопластикової труби в зоні фланцевого з'єднання

#### 4.5 Експериментальні випробування сталевій труби з дефектом структури, зміцненої склопластиковим бандажем

Об'єкт випробувань: сталеві труба діаметром 160мм, товщиною стінки 6мм і довжиною – 1000мм зміцнена склопластиковим бандажем товщиною 10мм. Крок навантаження – 0,2 МПа, після 10 МПа – 0,5 МПа.

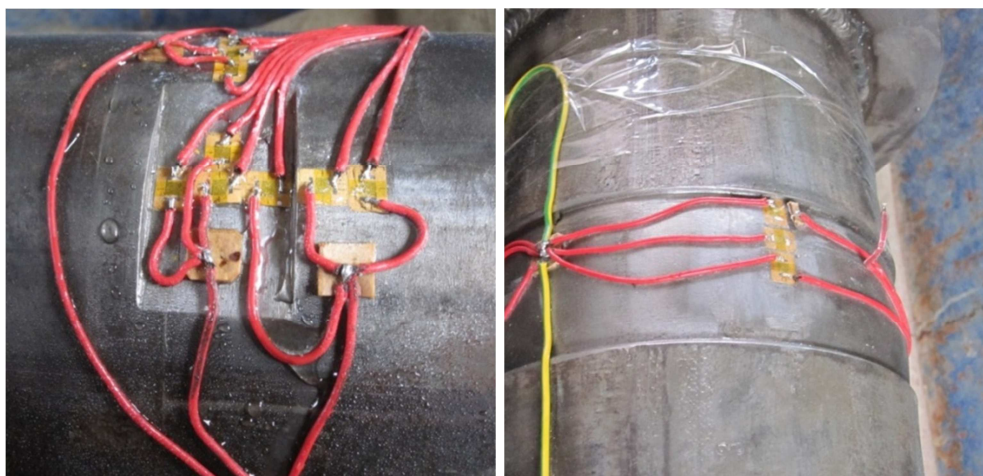


Рисунок 4.17 – Картина деформування і руйнування сталевій труби

При досягненні тиску  $p = 15,5$  МПа в одному із сегментів виточки з найменшою товщиною  $h = 1,6$  мм була виявлена теча, тобто сталося руйнування труби (рис. 4.17).

При випробуванні зміцненої труби крок навантаження становив  $0,5$  МПа. При досягненні максимального тиску  $20,0$  МПа, що може створювати насосна станція, в районі виходу проводів з-під склопластикового бандажа був виявлений крапельний витік води. В цілому ж в представленому діапазоні тисків бандаж впорався зі своїм завданням, забезпечивши необхідну міцність і герметичність.

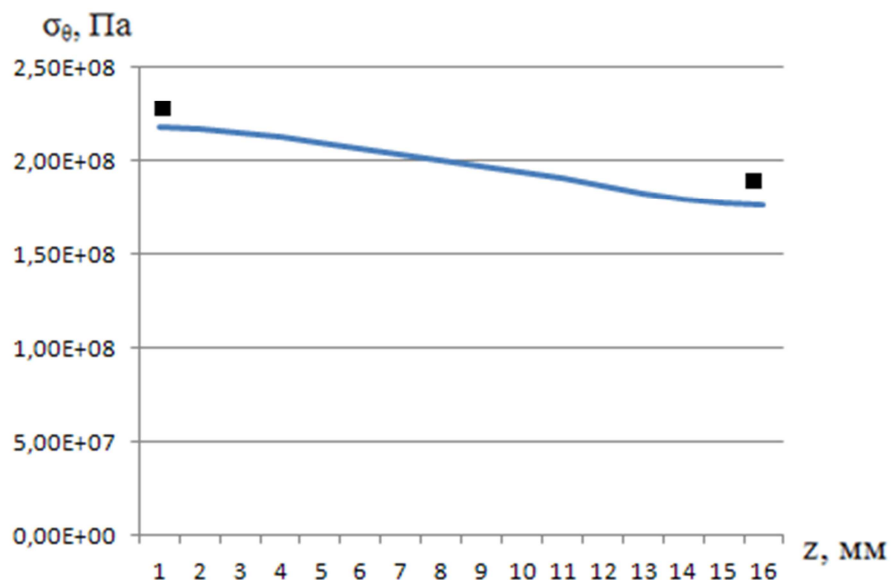


Рисунок 4.18 – Розподіл нормальних колових напружень на склопластиковому бандажі в районі виточки

На рис. 4.18 - 4.19 показано розподіл нормальних колових і поздовжніх напружень на склопластиковому бандажі в районі виточки, отримані за допомогою методики, наведеної в підрозділі 3.3. Точками показані експериментальні значення даних напружень. Аналіз отриманих результатів показує відміну теоретичних і експериментальних результатів нблизько 3-8%.

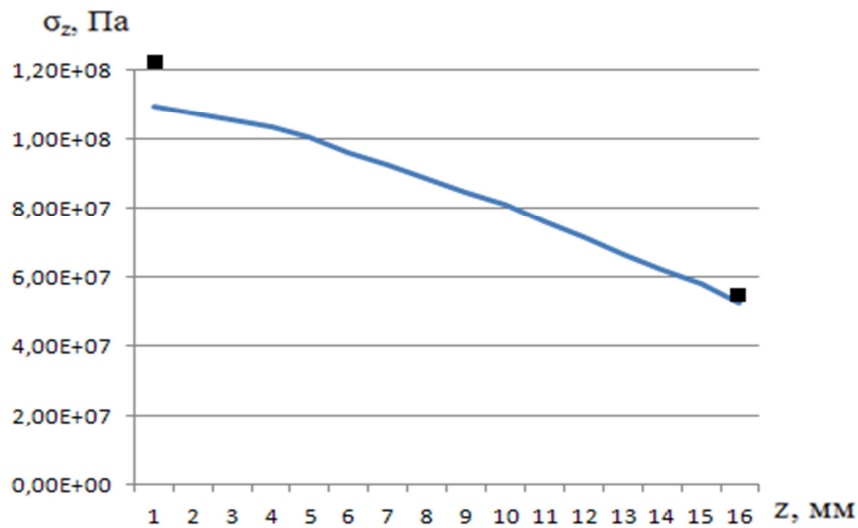


Рисунок 4.19 – Розподіл нормальних поздовжніх напружень на склопластиковому бандажі в районі виточки

#### 4.6. Висновки по четвертому розділі

У четвертому розділі розроблена експериментальна методика для перевірки достовірності теоретичних результатів і оцінки похибок, які вносять різного роду допущення в розрахунки на міцність елементів з міжшаровими дефектами. Наведено фізико-механічні характеристики основних компонент склопластику – скловолокна і зв'язуючих матеріалів, надано стислий опис технології виготовлення зразків.

Створено експериментальні установки, які були розроблені і виготовлені для проведення випробувань: кільцевих зразків, труб зі склопластику, і сталеві труби з дефектам, посиленої склопластиковим бандажем. Розроблено методику проведення експериментальних досліджень. Конструкції експериментальних установок дозволяють проводити виміри прогинів зразків за допомогою індикаторів годинникового типу з точністю вимірювань до  $0,5 \cdot 10^{-5}$  м. Вимірювання відносних деформацій проводиться методом тензометрування.

Для оцінки достовірності результатів, отриманих на основі запропонованої експериментально-теоретичної методики, додатково були проведені гідростатичні випробування склопластикових труб. При цьому



досліджувалися несуча здатність експериментальних зразків та вплив жорсткості сталевих фланців на напружено-деформований стан склопластикових труб у зоні їх з'єднань.

Порівняння експериментальних даних із теоретичними результатами дозволило зробити висновок, що в результаті порівняно низької жорсткості склопластиків на згинання і слабкого опору деформаціям поперечного зсуву, застосування традиційної структурно-безперервної теорії моделі розрахунку тонкостінних армованих елементів конструкцій навіть на початковій стадії навантаження призводить до значних похибок.

Порівняння теоретичних та експериментальних результатів доводять адекватність обраної моделі вирішення термопружної задачі.

## 5. МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ НА МІЦНІСТЬ БАГАТОШАРОВИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРИ

### 5.1. Модифікований критерій міцності композиту шаруватої структури з концентраторами напружень на границі розділу шарів

Найбільш загальне формулювання критерію міцності анізотропних тіл має вигляд

$$\left(R_{ij}\sigma_{ij}\right)^\alpha + \left(R_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\right)^\beta + \left(R_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}\right)^\gamma + \dots = 1, \quad (i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3), \quad (5.1)$$

де  $R_{ij}, R_{ijkl}, R_{ijklmn}$  – матричні позначення тензорів поверхні міцності другого, четвертого, шостого та наступних парних рангів.

В інженерній практиці більш зручним у плані практичного застосування виявився критерій міцності наступної тензорно-поліноміальної форми:

$$R_{ij}\sigma_{ij} + R_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + R_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} + \dots = 1, \quad (i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3), \quad (5.2)$$

який легко отримати з (5.1), приймаючи  $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1$ . Більшість відомих поліноміальних критеріїв міцності є, як правило, окремим випадком критерію (5.2).

Використовуючи критерій міцності (5.2) у формі

$$R_{ij}\sigma_{ij} + R_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + R_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} = 1, \quad (i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3), \quad (5.3)$$

можна розглянути умови руйнування шаруватого композиту в цілому. Припущення про незалежність шляху навантаження, про лінійно-пружну поведінку матеріалу і про відсутність міжшарових взаємодій дозволили зменшити число тензорів міцності в рівнянні (5.3) для ортотропного композиту при плоскому напруженому стані до десяти. Критерій міцності

шаруватого композиту (5.3) для практичного застосування виявився досить складним, оскільки передбачає проведення складних експериментів для знаходження коефіцієнтів тензорів поверхні міцності.

У більшості випадків руйнування шаруватого композиту починається з руйнування одного шару або зв'язків між ними. Тому під час побудови граничних поверхонь вважається, що руйнування локалізоване в одному шарі і критерій міцності слід складати саме для цього шару.

Апроксимація граничної поверхні міцності ортотропного шару поліномом другого ступеня розглянута в [143]. Рівняння (5.3) приводиться до вигляду

$$R_{ij}\sigma_{ij} + R_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 1, \quad (i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3), \quad (5.4)$$

де  $R_{ij}, R_{ijkl}$  – тензори поверхні міцності шару другого і четвертого порядків.

У випадку плоского напруженого стану рівняння (5.4) зображує граничну поверхню (еліпсоїд) в тривимірному просторі напружень

$$R_{11}\sigma_{11} + R_{22}\sigma_{22} + 2R_{12}\sigma_{12} + R_{1111}\sigma_{11}^2 + R_{2222}\sigma_{22}^2 + 4R_{1212}\sigma_{12}^2 + 2R_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 4R_{1112}\sigma_{11}\sigma_{12} + 4R_{2212}\sigma_{22}\sigma_{12} = 1. \quad (5.5)$$

Коефіцієнти рівняння (5.5) визначаються з використанням експериментально встановлених граничних характеристик міцності  $\sigma_{ij}^-, \sigma_{ij}^+$  ( $i, j = 1, 2$ ). Індекс "+" означає, що дана компонента – максимальне напруження при розтягуванні, індексом "-" позначено максимальне напруження при стисканні. Для компонент тензорів поверхні міцності (5.5) в [144] запропоновані наступні співвідношення:

$$R_{11} = \frac{\sigma_{11}^- - \sigma_{11}^+}{\sigma_{11}^- \sigma_{11}^+}; \quad R_{22} = \frac{\sigma_{22}^- - \sigma_{22}^+}{\sigma_{22}^- \sigma_{22}^+}; \quad R_{12} = \frac{\sigma_{12}^- - \sigma_{12}^+}{\sigma_{12}^- \sigma_{12}^+}; \quad R_{1111} = \frac{1}{\sigma_{11}^- \sigma_{11}^+};$$

$$R_{2222} = \frac{1}{\sigma_{22}^- \sigma_{22}^+}; 4R_{1212} = \frac{1}{\sigma_{12}^- \sigma_{12}^+} 2R_{1122} = \frac{R_{11} - R_{22}}{\sigma_{12}^-} + R_{1111} + R_{2222} - \frac{1}{(\sigma_{12}^-)^2} \quad (5.6)$$

В (5.5) - (5.6) тензори міцності враховують можливе розбіжність характеристик міцності матеріалу при розтяганні та стисканні. Слід зазначити, що міцність матеріалу не залежить від знака граничних значень дотичних напружень:  $\sigma_{ij}^- = \sigma_{ij}^+$ . Для ортотропного матеріалу в осях симетрії справедлива тотожність  $R_{1112} = R_{2212} = 0$ . Знання величин  $\sigma_{ij}^-$ ,  $\sigma_{ij}^+$  ( $i, j=1,2$ ), які вдається визначити експериментальним шляхом, недостатньо для визначення компонент тензорів міцності типу  $R_{1112}$ , що, в свою чергу, обумовлює необхідність проведення ретельно спланованих експериментів для отримання та обґрунтування емпіричних залежностей, складених для  $R_{1122}$ . Велика частина методів побудови граничних поверхонь заснована на уявленні армованого матеріалу як набору анізотропних шарів. Тому вивчення фізико-механічних властивостей окремих шарів при навантаженні представляється актуальною задачею. За допомогою теорії шаруватих середовищ можна перейти від усереднених напружень і деформацій композиту до локальних напружень і деформацій в будь-якому шарі. Слід зазначити, що, виключаючи одиничні роботи, у всіх підходах не враховуються напруження і деформації поперечного зсуву  $\sigma_{i3}^-$ ,  $\sigma_{i3}^+$  ( $i, j=1,2$ ), і трансверсального відриву або стискання  $\sigma_{33}^-$ ,  $\sigma_{33}^+$ . Значна відмінність граничних характеристик несучих шарів і властивостей проміжних міжфазних шарів обумовлює вибір тієї чи іншої моделі дискретно-структурної теорії пластин і оболонок. Стає очевидним, що розшарування слід розглядати не як окремий вид руйнування, а як фактор, що визначає вигляд дискретно-структурної моделі багат шарової конструкції. Таким чином, для оцінки ступеня впливу ослабленого міжфазного контакту шарів критерій (5.5) слід записувати в модифікованому вигляді

$$\begin{aligned}
& R_{11}\sigma_{11} + R_{22}\sigma_{22} + R_{33}\sigma_{33} + R_{1111}\sigma_{11}^2 + R_{2222}\sigma_{22}^2 + \\
& + R_{3333}\sigma_{33}^2 + 4R_{1212}\sigma_{12}^2 + 4R_{1313}\sigma_{13}^2 + 4R_{2323}\sigma_{23}^2 + \\
& + 2R_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2R_{1133}\sigma_{11}\sigma_{33} + 2R_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33} = 1,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

де до тензорів поверхні міцності (5.6) слід за аналогією додати додаткові компоненти:

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \frac{\sigma_{33}^- - \sigma_{33}^+}{\sigma_{33}^- \sigma_{33}^+}, & R_{3333} &= \frac{1}{\sigma_{33}^- \sigma_{33}^+}, & 4R_{1313} &= \frac{1}{\sigma_{13}^- \sigma_{13}^+}, & 4R_{2323} &= \frac{1}{\sigma_{23}^- \sigma_{23}^+}, \\
2R_{1133} &= \frac{R_{11} - R_{33}}{\sigma_{13}^-} + R_{1111} + R_{3333} - \frac{1}{(\sigma_{13}^-)^2}, & 2R_{2233} &= \frac{R_{22} - R_{33}}{\sigma_{23}^-} + R_{2222} + R_{3333} - \frac{1}{(\sigma_{23}^-)^2},
\end{aligned} \tag{5.8}$$

При цьому вважається, що міжшарова міцність матеріалу на зсув не залежить від знака поперечних дотичних напружень, тобто  $\sigma_{13}^- = \sigma_{13}^+$ ;  $\sigma_{23}^- = \sigma_{23}^+$ .

Для використання модифікованого критерію (5.7), (5.8) необхідно експериментально визначити граничні характеристики шару на поперечний зсув та трансверсальне стискання або відрив.

## 5.2. Осесиметрична деформація тонкостінних конструкцій шаруватої структури

**5.2.1. Спосіб обчислення геометричних параметрів оболонок обертання.** Відомо, що поверхня оболонок обертання утворюється обертанням кривої лінії, що лежить у площині  $yOz$ , навколо осі  $Oz$  (рис. 5.1 а).

Положення точки  $N_i$  на поверхні оболонки обертання визначається за допомогою криволінійних координат  $\alpha_1, \alpha_2$ , які співпадають з лініями головних кривизн [145]. При цьому компонента тензора другої квадратичної форми поверхні, що характеризує кручення поверхні, дорівнює нулю.

Для оболонок обертання характерні наступні геометричні параметри, які входять до геометричних співвідношення і рівнянь рівноваги: коефіцієнти Ламе  $A$  і  $B$ , головні кривизни  $k_1 = 1/R_1$ ,  $k_2 = 1/R_2$ , і додаткові параметри –

$$\rho_1 = -\frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha_1}, \rho_2 = -\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \alpha_2}.$$

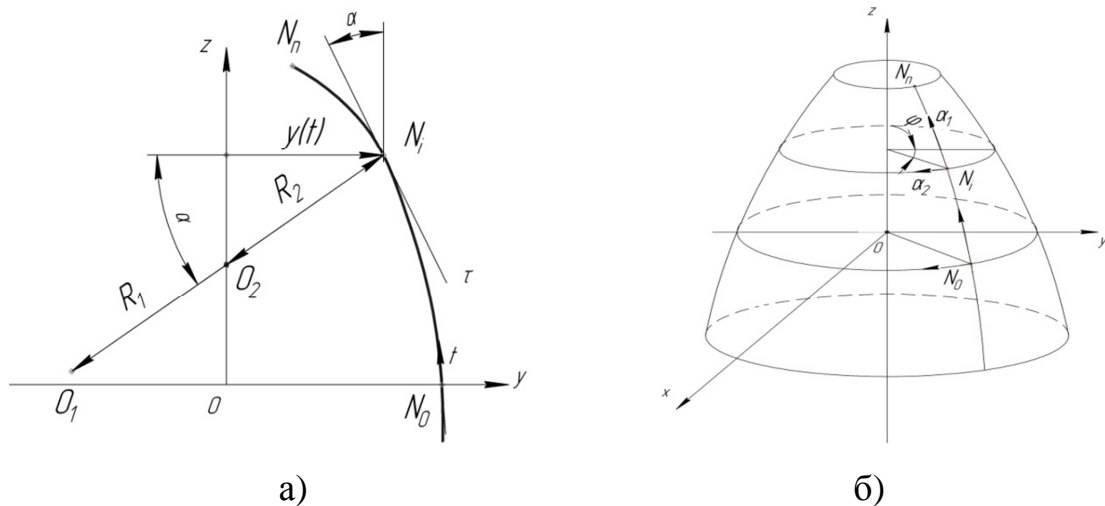


Рисунок 5.1 – Поверхня оболонки обертання

Так як коефіцієнт Ламе  $A$  не залежить від координати  $\alpha_2$ , додатковий параметр  $\rho_2 = 0$ .

Криву  $N_0 N_n$  (рис.5.1 б) називають меридіаном. Нехай рівняння меридіана задано в параметричній формі –  $z = z(t), y = y(t)$ , де  $t$  - дугова координата, яка відраховується від початкової точки  $N_0$  до кінцевої точки  $N_n$ . Використовуючи відомі співвідношення кривизн для дуги  $N_0 N_n$  в точці  $N_i$  –

$$N_i - k_1 = \frac{d\alpha}{dt} \text{ і похідні від функцій } z = z(t), y = y(t) \text{ (рис. 5.1 а):}$$

$$z'_t = \frac{dz}{dt} = \cos \alpha, y'_t = \frac{dy}{dt} = \sin \alpha, z''_t = \frac{d^2 z}{dt^2} = -k_1 \sin \alpha, y''_t = \frac{d^2 y}{dt^2} = k_1 \cos \alpha,$$

нескладно отримати наступну формулу кривизни меридіана

$$k_1 = z'_t y''_t - y'_t z''_t. \quad (5.9)$$

Квадрат довжини поверхневого лінійного елемента, кінці якого розташовані в точках  $N(t, \varphi)$  і  $N'(t + dt, \varphi + d\varphi)$ , запишеться

$$d^2s = (dt)^2 + (y d\varphi)^2. \quad (5.10)$$

де  $\varphi$  - кут циліндричної системи координат ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ).

Таким чином, для обчислення параметрів Ламе можна записати вирази

$$A = 1, B = y(t). \quad (5.11)$$

Кривизна перерізу, нормального до меридіану оболонки обертання, визначається виразом (рис. 5.1 а)

$$k_2 = \cos \alpha / y = z'_t / y. \quad (5.12)$$

Додатковий параметр  $\rho_1$  приймає вигляд

$$\rho_1 = -\frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{AB} \frac{dB}{dt} = -y'_t / y. \quad (5.13)$$

Коли оболонка обертання має складну форму поверхні, меридіан такої поверхні зручно апроксимувати у вигляді – сплайнів, заданих у вигляді параметричних функцій  $(z(t), y(t))$  на рівномірній сітці

$$z_i = (i-1)\Delta t, y_i = (i-1)\Delta t, i = 1, \dots, n.$$

В основу процедури покладені алгоритми [146] реалізації, В-сплайн апроксимацій. Задача апроксимації розв'язується як відома задача найменших квадратів для заданих граничних умов. за допомогою, В-сплайнів:

$$z(t) = \sum_{j=1}^k C_j B_j(t), \quad y(t) = \sum_{j=1}^k C'_j B_j(t),$$

Де  $C_j, C'_j$  – коефіцієнти,  $k$  – порядок сплайн-функції.

**5.2.2. Осесиметрична деформація багат шарових оболонок обертання з ослабленим контактом між шарами.** Нехай оболонка обертання шаруватої структури є осесиметричною конструкцією щодо механічних, геометричних параметрів у напрямку колової координати, яка також знаходиться під дією осесиметричного зовнішнього навантаження. Таким чином, якщо не розглядати можливість переходу від осесиметричної форми рівноваги до неосесиметричних форм, всі величини, що характеризують напружено-деформований стан таких конструкцій, не залежать від координати  $\alpha_2$  і є функціями, лише однієї координати  $\alpha_1$ .

З урахуванням введених припущень система рівнянь (2.102) - (2.108) запишеться

$$\frac{d\vec{Y}^{(k)}}{A_{(k)} d\alpha_1} = F(\alpha_1, \vec{Y}^{(k)}, \vec{f}^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.14)$$

Тут

$$\begin{aligned} \vec{Y}^{(k)} &= \{\vec{Y}_1^{(k)}, \vec{Y}_2^{(k)}, \dots, \vec{Y}_{14}^{(k)}\}^T = \\ &= \{T_{11}^{(k)}, T_{12}^{(k)}, R_{13}^{(k)}, M_{11}^{(k)}, M_{12}^{(k)}, L_{11}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \omega^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \Psi_1^{(k)}, \Psi_2^{(k)}\}^T \end{aligned}$$

– вектор розв'язків; компоненти вектора правих частин в розгорнутій формі мають вигляд

$$\begin{aligned} F_1^{(k)} &= \rho_1^{(k)} Y_1^{(k)} - \rho_1^{(k)} T_{22}^{(k)} - k_1^{(k)} Y_3^{(k)} - X_1^{(k)}; \\ F_2^{(k)} &= 2\rho_1^{(k)} Y_2^{(k)} - k_2^{(k)} R_{23}^{(k)} - X_2^{(k)}; \\ F_3^{(k)} &= k_1^{(k)} Y_1^{(k)} + \rho_1^{(k)} Y_3^{(k)} + k_2^{(k)} T_{22}^{(k)} - X_3^{(k)}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
F_4^{(k)} &= \rho_1^{(k)} Y_4^{(k)} - \rho_1^{(k)} M_{22}^{(k)} + Q_1^{(k)} - \frac{h^{(k)}}{2} X_1^{(k)}; \\
F_5^{(k)} &= 2\rho_1^{(k)} Y_5^{(k)} + Q_2^{(k)} - \frac{h^{(k)}}{2} X_2^{(k)}; \\
F_6^{(k)} &= \rho_1^{(k)} Y_6^{(k)} - \rho_1^{(k)} L_{22}^{(k)} + L_{13}^{(k)} - \varphi_{(k)} \left( \frac{h^{(k)}}{2} \right) X_1^{(k)}; \\
F_7^{(k)} &= 2\rho_1^{(k)} Y_7^{(k)} + L_{23}^{(k)} - \varphi_{(k)} \left( \frac{h^{(k)}}{2} \right) X_2^{(k)}; \\
F_8^{(k)} &= \varepsilon_{11}^{(k)} - k_1^{(k)} Y_{10}^{(k)} - \frac{1}{2} (2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)})^2; \\
F_9^{(k)} &= \varepsilon_{12}^{(k)} - \rho_1^{(k)} Y_9^{(k)} + k_2^{(k)} Y_9^{(k)} (2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)})^2; \\
F_{10}^{(k)} &= 2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)} + k_1^{(k)} Y_8^{(k)}; \\
F_{11}^{(k)} &= \chi_{11}^{(k)\gamma}; F_{12}^{(k)} = 2\chi_{12}^{(k)\gamma} - \rho_1^{(k)} Y_{12}^{(k)}; F_{13}^{(k)} = \psi_{12}^{(k)}; F_{14}^{(k)} = 2\psi_{12}^{(k)} - \rho_1^{(k)} Y_{14}^{(k)}; \quad (5.15)
\end{aligned}$$

де 
$$\rho_1 = -\frac{\partial B}{A^{(k)} B^{(k)} \partial \alpha_1}.$$

Всі невідомі, які входять в праву частину системи рівнянь (5.14), необхідно виразити через компоненти вектора розв'язків  $\vec{Y}^{(k)}$ . Ці залежності, якщо знехтувати нелінійними доданками більш високого порядку малості і ввести допущення

$$C_{55}^{(k)} + 2Y_1^{(k)} \approx C_{55}^{(k)}, \quad (5.16)$$

можна отримати,

$$\begin{aligned}
M_{22}^{(k)} &= m_1^{(k)} Y_4^{(k)} - m_2^{(k)} Y_5^{(k)} + m_3^{(k)} Y_6^{(k)} - m_4^{(k)} Y_7^{(k)} + m_5^{(k)} \rho_1^{(k)} Y_{11}^{(k)} + m_6^{(k)} \rho_1^{(k)} Y_{13}^{(k)}; \\
L_{22}^{(k)} &= l_1^{(k)} Y_4^{(k)} - l_2^{(k)} Y_5^{(k)} + l_3^{(k)} Y_6^{(k)} - l_4^{(k)} Y_7^{(k)} + l_5^{(k)} \rho_1^{(k)} Y_{11}^{(k)} + l_6^{(k)} \rho_1^{(k)} Y_{13}^{(k)}; \\
T_{22}^{(k)} &= t_1^{(k)} Y_1^{(k)} + t_2^{(k)} Y_2^{(k)} + t_3^{(k)} Y_4^{(k)} - t_4^{(k)} Y_5^{(k)} + t_5^{(k)} Y_6^{(k)} - t_6^{(k)} Y_7^{(k)} - \\
&\quad - t_7^{(k)} Y_8^{(k)} - t_8^{(k)} (Y_9^{(k)})^2 + t_9^{(k)} Y_{10}^{(k)} + t_{10}^{(k)} Y_{11}^{(k)} + t_{11}^{(k)} Y_{12}^{(k)}; \\
Q_2^{(k)} &= \frac{C_{44}^{(k)}}{2} (-k_2^{(k)} Y_9^{(k)} + Y_{12}^{(k)}) + \frac{C_{45}^{(k)}}{C_{55}^{(k)}} \left( Y_3^{(k)} + \frac{1}{2} C_{54}^{(k)} k_2^{(k)} Y_9^{(k)} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}C_{54}^{(k)}Y_{12} - R_{55}^{(k)}Y_{13}^{(k)} - R_{54}^{(k)}Y_{14}^{(k)} + Y_1^{(k)}Y_{11}^{(k)} \Big) + R_{44}^{(k)}Y_{14}^{(k)} + R_{45}^{(k)}Y_{13}^{(k)}; \\
& Q_1^{(k)} = Y_3^{(k)} + Y_1^{(k)}Y_{11}^{(k)}; \\
& L_{23}^{(k)} = \frac{R_{44}^{(k)}}{2}(-k_2^{(k)}Y_9^{(k)} + Y_{12}^{(k)}) + \frac{C_{45}^{(k)}}{C_{55}^{(k)}} \left( Y_3^{(k)} + \frac{1}{2}C_{54}^{(k)}k_2^{(k)}Y_9^{(k)} - \right. \\
& \left. -\frac{1}{2}C_{54}^{(k)}Y_{12} - R_{55}^{(k)}Y_{13}^{(k)} - R_{54}^{(k)}Y_{14}^{(k)} + Y_1^{(k)}Y_{11}^{(k)} \right) + G_{44}^{(k)}Y_{14}^{(k)} + G_{45}^{(k)}Y_{13}^{(k)}; \\
& L_{23}^{(k)} = \frac{R_{54}^{(k)}}{2}(-k_2^{(k)}Y_9^{(k)} + Y_{12}^{(k)}) + \frac{R_{45}^{(k)}}{C_{55}^{(k)}} \left( Y_3^{(k)} + \frac{1}{2}C_{54}^{(k)}k_2^{(k)}Y_9^{(k)} - \right. \\
& \left. -\frac{1}{2}C_{54}^{(k)}Y_{12} - R_{55}^{(k)}Y_{13}^{(k)} - R_{54}^{(k)}Y_{14}^{(k)} + Y_1^{(k)}Y_{11}^{(k)} \right) + G_{54}^{(k)}Y_{14}^{(k)} + G_{55}^{(k)}Y_{13}^{(k)}; \\
& R_{23}^{(k)} = Q_2^{(k)} - \frac{Y_2^{(k)}}{C_{55}^{(k)}}(C_{54}^{(k)}Y_{12}^{(k)} + 2R_{55}^{(k)}Y_{13}^{(k)} + 2R_{54}^{(k)}Y_{14}^{(k)}) - Y_2^{(k)}Y_{11}^{(k)}. \quad (5.17)
\end{aligned}$$

Відповідно до допущень першого варіанту моделі дискретно-структурної теорії шаруватих пластин і оболонок передбачається пружне проковзування жорстких шарів один щодо одного, тобто по лицьовим сполученим поверхням виконуються тільки статичні умови контакту. Статичні умови контакту по сполученим лицьовим поверхням  $k$ -го шару враховуються за допомогою методу штрафних функцій.

Введення допущення про те, що розглянутий напружено-деформований стан оболонки буде симетричним щодо осі обертання, істотно спрощує алгоритм розв'язання. Враховуючи геометричну нелінійність в квадратичному наближенні, вихідну крайову задачу можна звести до розв'язання системи  $14 \times k$  звичайних диференціальних рівнянь (5.14) щодо вектор-функції  $\vec{Y}^{(k)}$ . Систему диференціальних рівнянь (5.14) слід доповнити граничними умовами— по сім на кожному торці жорсткого шару оболонки обертання. З урахуванням введених позначень вони мають вигляд

$$Y_j^{(k)}(\alpha_1^0)l_j + Y_{j+6}^{(k)}(\alpha_1^0)(1-l_j) = 0; Y_j^{(k)}(\alpha_1^z)l_{j+6} + Y_{j+6}^{(k)}(\alpha_1^z)(1-l_{j+6}) = 0. \quad (5.18)$$

Параметри  $1_j, 1_{j+6}$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ) приймають значення 0, 1 і визначають однорідні як статичні, так і кінематичні граничні умови на торцях жорстких шарів оболонки  $\alpha_1 = \alpha_1^0, \alpha_1 = \alpha_1^z$ .

Розв'язок геометрично нелінійної крайової задачі (5.14) - (5.18) можна отримати на основі ітераційного методу Ньютона-Канторовича, алгоритм якого наведено в підрозділі 5.2.3, та методу дискретної ортогоналізації С.К.Годунова [109].

На основі представлених вище залежностей геометрично нелінійної дискретно-структурної теорії шаруватих елементів конструкцій досліджено напружено-деформований стан анізотропних оболонок. Сполучення жорстких анізотропних шарів на міжшарових межах моделюються двома розрахунковими моделями, в яких враховуються умови їх ідеального і ослабленого контакту.

**5.2.3. Лінеаризація розв'язувальною системи звичайних диференціальних рівнянь.** Розв'язок геометрично нелінійної задачі нескладно отримати на основі ітераційного методу Ньютона-Канторовича. Можна представити систему диференційно-алгебраїчних співвідношень у вигляді:

$$\Phi(\vec{Y}) = 0, \quad (5.19)$$

де  $\Phi$  – диференційно-алгебраїчний оператор. Тоді згідно з методом Ньютона-Канторовича система (5.19) переписеться

$$\Phi(\vec{Y} + \Delta\vec{Y}) = \Phi(\vec{Y}) + \Phi'_y(\vec{Y})\Delta\vec{Y} = 0.. \quad (5.20)$$

Тут  $\Delta\vec{Y}$  – малий приріст вектор – функції  $\vec{Y}$ .

Задаючи два послідовних наближення у вигляді  $\vec{Y}^{(i+1)} = \vec{Y}^{(i)} + \Delta\vec{Y}$  систему (5.20) можна переписати

$$\Phi(\vec{Y}^{(i)}) + \Phi'_Y(\vec{Y}^{(i)})(\vec{Y}^{(i+1)} - \vec{Y}^{(i)}) = 0. \quad (5.21)$$

Оператор  $\Phi(\vec{Y})$  (5.19) слід представити у формі

$$\Phi(\vec{Y}) = \Phi^l(\vec{Y}) + \Phi^h(\vec{Y}) = 0. \quad (5.22)$$

де  $\Phi^l(\vec{Y}), \Phi^h(\vec{Y})$  – лінійний і нелінійний оператори. Тоді, враховуючи співвідношення  $\Phi^l_Y(\vec{Y}^{(i)})\vec{Y}^{(i)} = \Phi^l(\vec{Y}^{(i)})$ ,  $\Phi^l_Y(\vec{Y}^{(i)})\vec{Y}^{(i+1)} = \Phi^l(\vec{Y}^{(i+1)})$  складемо замість системи (5.21) ітераційну схему методу Ньютона-Канторовича

$$\Phi^l(\vec{Y}^{(i+1)}) + \Phi^h_Y(\vec{Y}^{(i)})\vec{Y}^{(i+1)} + \Phi^h(\vec{Y}^{(i)}) - \Phi^h_Y(\vec{Y}^{(i)})\vec{Y}^{(i)} = 0. \quad (5.23)$$

Таким чином, на  $i+1$ -ій ітерації методу Ньютона – Канторовича система зберігає той же вигляд, виключаючи нелінійні доданки.

Ітераційний процес закінчується, коли різниця двох останніх величин виявляється меншою заданої величини  $\varepsilon$ . В якості першого наближення рекомендується використовувати розв'язки лінійної крайової задачі.

### 5.3. Міцність торових балонів високого тиску.

Як показують дослідження М.А. Комкова, заміна циліндричних балонів на рівновеликі композитні торові балони дає значний економічний ефект, а також знижує масу конструкції. Проте, зазначені переваги до теперішнього часу залишаються нереалізованими через низку невирішених задач проектування та технології намотування. До таких задач можна віднести створення надійної методики розрахунку торових балонів шаруватої структури і змінної товщини в меридіональному напрямку з наявністю міжшарових дефектів структури матеріалу. Зазначена задача вирішується на

основі першої моделі дискретно-структурної теорії та прикладного методу розрахунку несучої здатності шаруватих тонкостінних елементів.

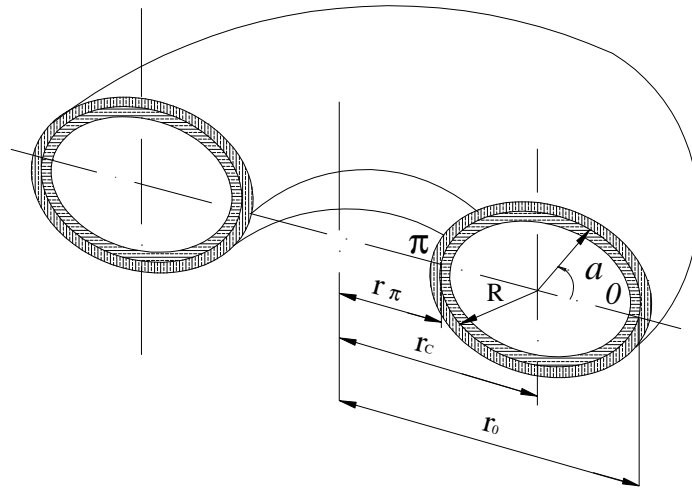


Рисунок 5.2 – Композитний торовий балон

Оцінка несучої здатності торових балонів з композиційних матеріалів, які виготовляються методом намотування, на основі досить простих аналітичних залежностей, проведена в [147]. Розглядався торовий балон з поздовжньо поперечною схемою армування. Склопластикова оболонка виготовлялася методом намотування двох поздовжніх і трьох поперечних шарів стрічками, набраними з 10 ниток ВМ-1. Максимальний діаметр торового балона дорівнює  $2r_c = 0,403\text{ м}$  і діаметр перерізу  $2R = 0,083\text{ м}$  (рис. 5.2). Товщина одного шару складала  $0,7 \cdot 10^{-4}\text{ м}$ . Товщина тора в поперечному перерізі в напрямку меридіана змінюється за законом:

$$h_1 = h_{10} \frac{a + 1}{a + a \cos \alpha}, \text{ де } h_{10} - \text{товщина шару при } \alpha = 0, a = r_c / R$$

Механічні характеристики односпрямованого склопластику за результатами випробувань кільцевих зразків:  $\sigma_k = 1620\text{ МПа}$ ,  $E_k = 60\text{ ГПа}$ . Решта наведених технічних параметрів склопластику визначалися за методикою підрозділу 3.1.

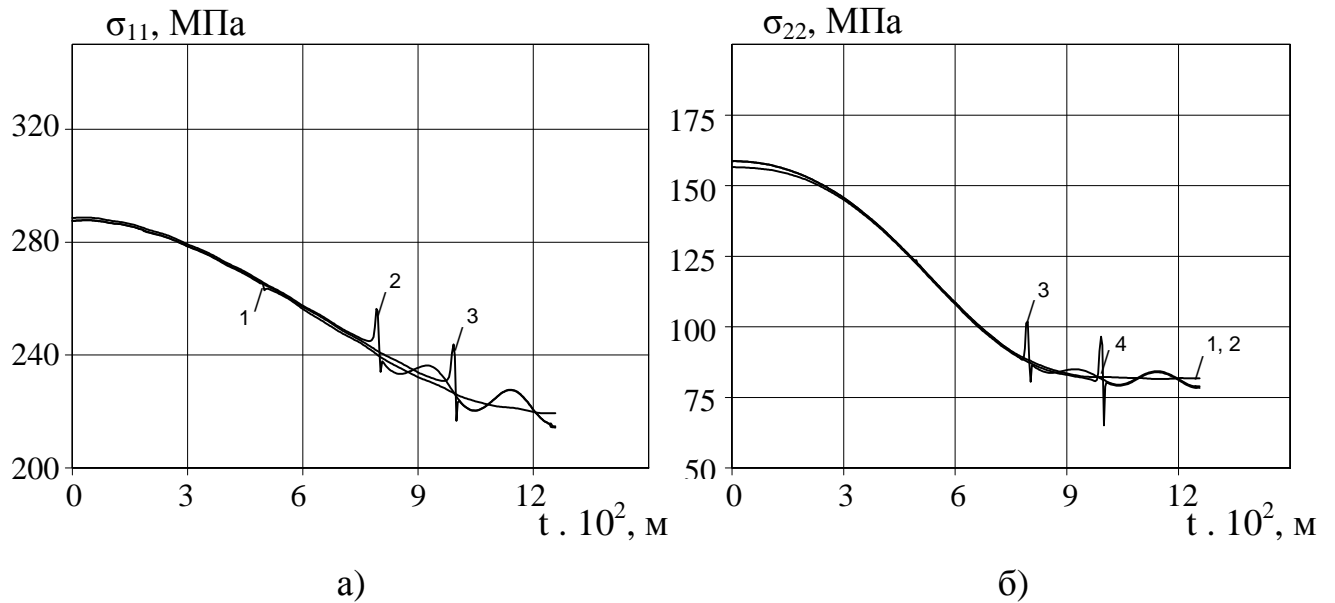


Рисунок 5.3 – Зміна напружень уздовж меридіана тора при наявності кільцевих ділянок непроклею: а) меридіональні напруження; б) колівні напруження

Розрахункові криві напружено-деформованого стану тора уздовж меридіана  $0 \leq \alpha \leq \pi$  показані на рис. 5.3 – 5.4. Цифрами на рисунку вказані напруження на лицьових поверхнях тора.

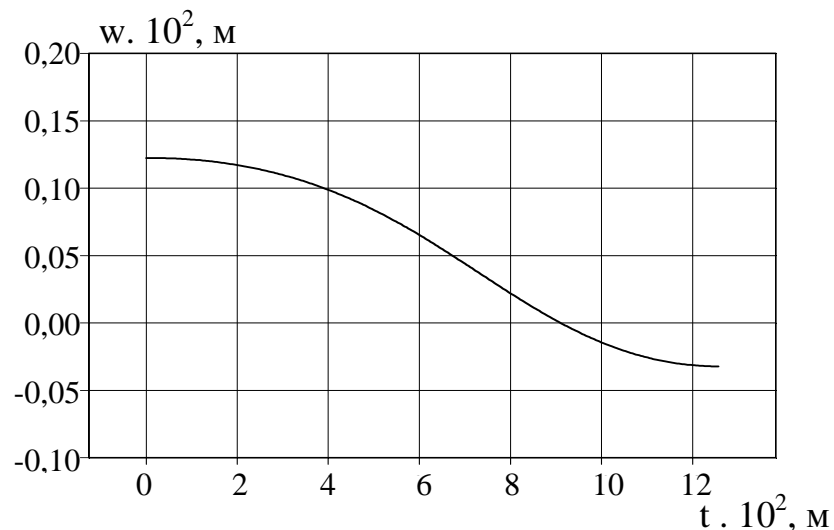


Рисунок 5.4 - Зміна прогину оболонки уздовж меридіана тора.

Як видно з представлених рисунків, максимальні напруження і прогини в торовій оболонці з поздовжньо-поперечною схемою армування мають місце

поблизу вершини тора. З цією областю починається руйнування оболонки тора, що збігається з результатами експерименту [147].

На границях ділянок розшарування оболонки торового балона можливе виникнення крайового ефекту (рис. 5.3). Амплітуда напружень в зоні крайового ефекту збільшується з ростом довжини ділянки розшарування.

Отримана величина граничного внутрішнього тиску відрізняється від експериментального значення, наведеного в роботі М.А. Комкова, не більше ніж на 5%.

#### **5.4. Розрахунок на міцність склопластикової труби в зоні фланцевих з'єднань.**

Склопластикові трубопроводи мають чотири види сполучень:

- розтрубно-шипове з'єднання з подвійним кільцевим ущільненням, що забезпечує швидку і надійну збірку труб і фасонних елементів. Залежно від характеристик середовища, що транспортується по трубопроводу, застосовуються кільцеві ущільнення з різних марок гумових сумішей;

- розтрубно-шипове з'єднання з подвійним кільцевим ущільненням і стопорним елементом, який використовується для компенсації дії на трубопровід осьових сил;

- фланцеве з'єднання, що застосовується для з'єднання елементів склопластикового трубопроводу з металевими трубопроводами і арматурою;

- клейове стикове з'єднання, яке виконується пошаровим нанесенням на гладкі торці труб просочених поліефірним зв'язуючим "холодного" затвердіння армуючих скло матеріалів. На відміну від інших видів з'єднань клейове є нерозбірним.

Згідно [148] з'єднувальні деталі виготовляють методом безперервного просторового комп'ютерного намотування склоровінга, просоченого епоксидною смолою з затверджувачем на оправлення відповідної форми. Фланці, муфти, ніпелі, перехідники та адаптери виготовляють методом спіральної намотки. З'єднання виготовляються разом з деталлю.

Приєднувальні розміри склопластикових фланців виконуються по ГОСТ 12815-80 [149]. Міцність з'єднань і зв'язуючих деталей повинна бути не нижче міцності труб.

Під час експериментальних досліджень граничного стану склопластикової труби, що випускалася ТОВ "Склопластикові труби" (розділ 4), на першому етапі було зафіксовано руйнування склопластику в зоні фланцевого з'єднання при внутрішньому гідростатичному тиску  $p_1^{*E} = 3,5 \text{ МПа}$ .

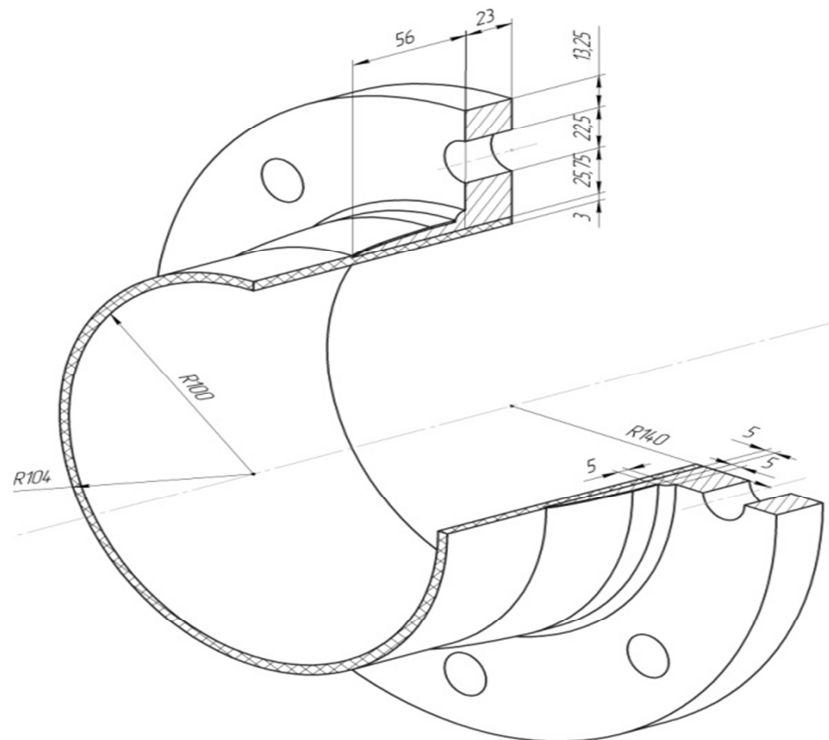


Рисунок 5.5 – Геометричні розміри фланця

Геометричні розміри фланця, виготовленого зі сталі, показані на рис.5.5. Як уже відмічалось, склопластикова труба – це багатошарова циліндрична оболонка діаметром 200 мм із товщиною стінки 4 мм і довжиною 1200 мм.

Технічні пружні сталі й граничні характеристики склопластику визначалися за методикою, наведеною в розділі 3. Фізико-механічні характеристики сталевому фланцю мали такі значення:  $E=210000 \text{ МПа}$ ,  $\nu=0,25$ . Як альтернатива сталевому фланцю розглядався фланець, виконаний із дюралюмінію В-95:  $E=70000 \text{ МПа}$ ,  $\nu=0,3$ .



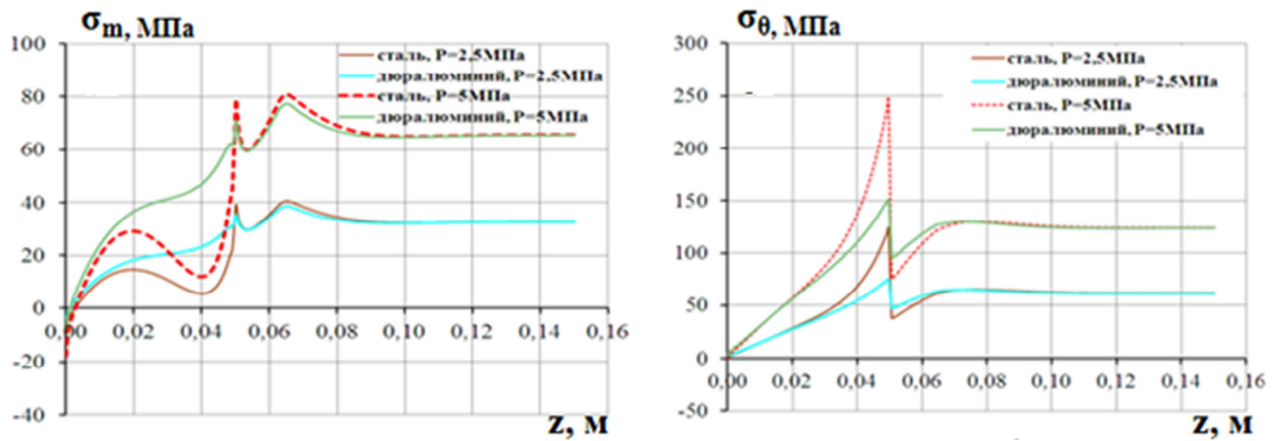


Рисунок 5.6 – Графіки зміни меридіональних  $\sigma_m$  і колових напружень  $\sigma_\theta$  вздовж контактної поверхні труби в зоні фланцевого з'єднання

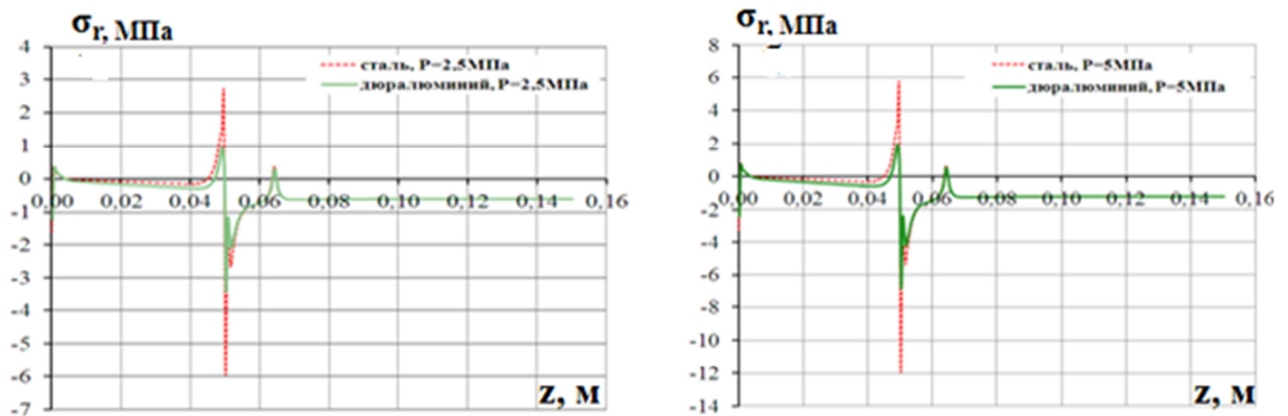


Рисунок 5.7 – Графіки зміни трансверсальних напружень  $\sigma_r$  вздовж контактної поверхні труби в зоні фланцевого з'єднання

На основі методу переміщень складені алгоритм і програма розрахунку на міцність багат шарових оболонок обертання складної форми. Для оцінки достовірності отриманих теоретичних і експериментальних даних використаний метод кінцевих елементів, реалізований у програмному комплексі ANSYS. Задача вирішується в осесиметричній постановці. Склопластикова труба розглядається як багат шарова оболонка обертання.

Аналіз результатів показує, що максимальні напруження виникають у точках контакту металевого фланця і склопластикової труби вздовж поверхні контакту (рис. 5.6-5.8). При цьому величини поперечних дотичних і трансверсальних напружень значно перевищують аналогічні напруження, що

виникають на внутрішній і зовнішній поверхнях труби, під час дії одного і того самого навантаження.

Порівнюючи значення дотичних і трансверсальних напружень, які виникають в точках контакту сталевих і дюралюмінієвих фланців зі склопластиковою оболонкою, можна відзначити, що зазначені напруження відрізняються майже в 1,5 рази. Отримані теоретичні значення величин граничного тиску, при якому відбувається руйнування склопластикової труби в точках контакту її поверхні з металевими фланцями, за допомогою модифікованого поліноміального критерію міцності, рівні: для сталевих фланців – 3,4МПа; для дюралюмінієвих фланців – 4,9МПа. Таким чином, варіюючи жорсткістю фланців, можна досягти оптимальних умов роботи розглянутої конструкції склопластикової труби.

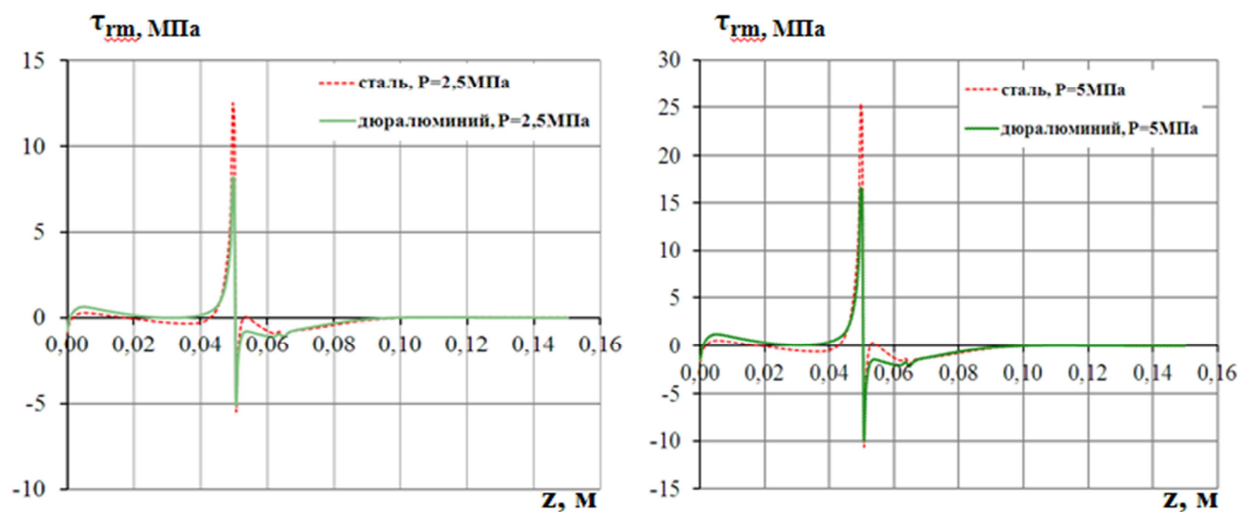


Рисунок 5.8 – Графіки зміни дотичних напружень  $\tau_{rm}$  вздовж контактної поверхні труби в зоні фланцевого з'єднання

### 5.5. Висновки по п'ятому розділу

У п'ятому розділі на основі методу ортогональної прогонки С.К.Годунова розроблений алгоритм розв'язання задач міцності та несучої здатності тонкостінних осесиметричних конструкцій складної геометрії уздовж меридіана. На основі запропонованих розрахункових моделей, а також

розглянутих раніше алгоритмів розрахунку такого класу задач на мові програмування ФОРТРАН створено пакет прикладних програм.

Для оцінки несучої здатності комбінованого балона високого тиску запропонована нова методика розрахунку його конструкційної міцності. Застосовуючи алгоритм покрокового навантаження і модифікований тензорно-поліноміальний критерій міцності, який включає напруження поперечного зсуву  $\sigma_{i3}^-$ ,  $\sigma_{i3}^+$  ( $i, j = 1, 2$ ) і трансверсального відриву або стискання  $\sigma_{i3}^-$ ,  $\sigma_{i3}^+$ , нескладно знайти момент руйнування зв'язуючого і порушення статичних і кінематичних умов контакту між шарами.

Вивчена несуча здатність торових балонів з композиційних матеріалів, які виготовляються методом намотування. Задача вирішується на основі першої моделі дискретно-структурної теорії та прикладного методу розрахунку несучої здатності шаруватих тонкостінних елементів. Отримана величина граничного внутрішнього тиску відрізняється від експериментального значення, наведеного в роботі М.А.Комкова, не більше ніж на 5%.

Встановлено вплив жорсткості фланців на напружено-деформований та граничний стан склопластикових труб в зоні їх з'єднання. Порівнюючи значення дотичних і трансверсальних напружень, які виникають в точках контакту сталевих і дюралюмінієвих фланців зі склопластиковою оболонкою, можна відзначити, що зазначені напруження відрізняються майже в 1,5 рази. Отримані за допомогою модифікованого поліноміального критерію міцності теоретичні значення величин граничного тиску, при якому відбувається руйнування склопластикової труби в точках контакту її поверхні з металевими фланцями, дозволяють стверджувати, що застосування дюралюмінієвих фланців у порівнянні зі сталевими фланцями дозволяють збільшити граничний тиск майже на 25%. Таким чином, варіюючи жорсткістю фланців, можна досягти оптимальних умов роботи розглянутої конструкції склопластикової труби.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішений ряд важливих науково-технічних завдань, які включають в себе обґрунтування моделей і методик розрахунку напружено-деформованого та термопружного стану багатошарових оболонок обертання з міжшаровими дефектами структури. Розроблені алгоритми, програми, методики досліджень та отримані на їх основі теоретико-експериментальні результати показали наявність нових особливостей деформованого стану розглянутих конструкцій.

1. Проведено аналіз різних розрахункових моделей і методик розрахунку напружено-деформованого стану багатошарових елементів конструкцій з дефектами структури від дії статичних та температурних навантажень. Результатом аналізу став висновок, що в даний час проводиться активна робота по створенню ефективних методик розрахунку багатошарових конструкцій на основі дискретно-структурної теорії, коли враховується анізотропія термопружних властивостей матеріалу, схеми армування, особливості спільної роботи та умови контакту шарів, температурні навантаження. Актуальними також залишаються питання експериментальної перевірки різних моделей, які враховують дефекти структури композиційного матеріалу, вплив температури.

2. На основі дискретно-структурної теорії створено методику дослідження термопружного стану багатошарових оболонок обертання, коли на одній частині міжфазної поверхні контакту суміжних шарів виконуються умови ідеального контакту, а на іншій спостерігаються ділянки з неідеальним контактом (непроклеї, розшарування, проковзування). Побудовано замкнену систему диференціальних рівнянь та відповідні крайові умови незв'язаної стаціонарної задачі термопружного деформування багатошарової композитної оболонки, що дозволяють врахувати деформації поперечного зсуву і трансверсального обтиснення, забезпечити умови механічного і теплового

сполучення шарів і умови термомеханічного навантаження на лицьових поверхнях такої оболонки.

3. Розроблено та апробовано методику визначення інтегральних термопружних характеристик композитів шаруватої структури. Запропоновано ефективний алгоритм визначення теплового коефіцієнта лінійного розширення для багат шарового анізотропного матеріалу. Відповідно до дискретно-структурної моделі багат шарових оболонок і пластин розроблено методику визначення коефіцієнту проковзування сполучених поверхонь суміжних шарів, коли порушуються умови їх ідеального кінематичного контакту. Що дозволили на основі класичної теорії пружності анізотропного тіла розробити чисельно-аналітичний підхід розв'язання термопружних незв'язаних крайових задач для циліндричних товстостінних оболонок за умови як ідеального, так і неідеального контакту суміжних шарів по сполученим поверхням, який реалізовано на мові програмування VISUAL FORTRAN. Встановлено вплив температурних навантажень на напружено-деформований стан ущільнення робочого колеса, виготовленого із композиційних матеріалів.

4. Методом тензометрування досліджено деформований стан циліндричних оболонок зі склопластику з дефектами структури. Порівняння теоретичних та експериментальних результатів доводять адекватність обраної розрахункової моделі.

5. Порівнюючи значення дотичних і трансверсальних напружень, які виникають в точках контакту сталевих і дюралюмінієвих фланців зі склопластиковою оболонкою, можна відзначити, що зазначені напруження відрізняються майже в 1,5 рази. Отримані за допомогою модифікованого поліноміального критерію міцності теоретичні значення величин граничного тиску, при якому відбувається руйнування склопластикової труби в точках контакту її поверхні з металевими фланцями, дозволяють стверджувати, що застосування дюралюмінієвих фланців у порівнянні зі сталевими фланцями дозволяють збільшити граничний тиск майже на 25%. Таким чином, варіюючи

жорсткістю фланців, можна досягти оптимальних умов роботи розглянутої конструкції склопластикової труби.

б. Практична цінність роботи підтверджена актами впровадження результатів дисертації при розрахунку конструкцій з композиційних матеріалів для хімічного машинобудування.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дейнека А.В. Напряженно-деформированное состояние анизотропного криволинейного бруса при изгибе с учетом идеального и неидеального контакта между слоями / С.М. Верещака, А.В. Дейнека, О.Н. Орел, А.Г. Хализева // Вісник СумДУ. Серія “Технічні науки”. – 2012. – № 4. – С. 74 – 87.
2. Дейнека А.В. Экспериментальные испытания механических свойств стеклопластикового цилиндра с межслойными дефектами структуры / С.М. Верещака, И.Т. Караш, Д.А. Жигилий, А.В. Дейнека // Компрессорное и энергетическое машиностроение. – 2012. – №3(29). – С. 32 – 34.
3. Дейнека А.В. Конструкционная прочность торообразных баллонов высокого давления / С.М. Верещака, Д. А. Жигилий, И.Т. Караш, А.В. Дейнека // Вісник СевНТУ. Серія “Механіка, енергетика, екологія”: збірник наукових праць. – 2012. – Вип. 133. – С. 329 – 334.
4. Дейнека А.В. Напряженное состояние толстостенной трубы из стеклопластика при действии внутреннего давления и температурной нагрузки / С.М. Верещака, А.В. Дейнека // Вісник СевНТУ. Серія “Механіка, енергетика, екологія”: збірник наукових праць – 2013. – Вип. 137. – С. 221 – 229.
5. Дейнека А.В. Термоупругое напряженное состояние многослойной трубы неоднородной структуры по толщине с учетом идеального контакта между слоями / С.М. Верещака, А.В. Дейнека, Ю.В. Мороз, А.В. Шулумей // Вісник СумДУ. Серія “Технічні науки”. – 2013. – № 4. – С. 136 – 149.
6. Deineka A.V. Thermal stress state of impeller seal made from composite material / A.V. Deineka, S.M. Vereshchaka // Applied Mechanics and Materials. Vol. 630. – 2014. – p. 326-333. (обліковується базою даних SCOPUS).

7. Дейнека А.В. Термоупругое напряженное состояние многослойной трубы с защитным слоем из дюралюминия и углепластика / С.М. Верещака, А.В. Дейнека // Вісник НТУ «ХП»: Інформатика і моделювання. – 2014. – № 57. – С. 19 – 31.

8. Дейнека А.В. Напружено-деформований стан армованого плоского кривого бруса при згинанні з урахуванням ідеального контакту між шарами / С.М. Верещака, А.В. Дейнека, О.В. Орел // Сучасні технології в промисловому виробництві: матеріали II Всеукр. міжвуз. наук.-техн. конф., 17-20 квітня 2012р. – Суми, 2012. – С. 125.

9. Дейнека А.В. Напружено-деформований стан армованого плоского кривого бруса при згинанні з урахуванням неідеального контакту між шарами / С.М. Верещака, А.В. Дейнека, А.Г. Халізева // Сучасні технології в промисловому виробництві: матеріали II Всеукр. міжвуз. наук.-техн. конф., 17-20 квітня 2012р. – Суми, 2012. – С. 124.

10. Дейнека А.В. Термоупругое напряженное состояние, возникающее при соединении металлического фланца со стеклопластиковой трубой / С.М. Верещака, А.В. Дейнека, В.В. Данильцев, И.В. Верещака // Технологія XXI століття: Матеріали міжнародної наук.-практ. конф. 15 – 19 вересня 2014 р. – Южне, 2014. – С.53.

11. Дейнека А.В. Термопружній напружений стан багат шарової труби з дефектами структури з різними умовами закріплення на торцях / С.М. Верещака, А.В. Дейнека // Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Тези доповідей. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД. – 2014. – С. 30.

12. Андреев Л.В. Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации /Андреев Л.В, Ободан Н.И., Лебедев А.Г. – М.: Наука, 1988. – 208 с.



13. Григолюк Э.И. Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники // Э.И. Григолюк, И.Т. Селезов. – М.: Наука, 1971. – Т. 5. – 271 с.
14. Григоренко Я.М. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ // Я.М. Григоренко, А.П. Мукоед. – К.: Вища шк., 1983. – 286 с.
15. Гузь А.Н. Механика разрушения при сжатии композитных материалов // А.Н. Гузь – К.: Наук. думка, 1990. – 630 с.
16. Гуляев В.И. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач // Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. – Львов: Изд-во при Львов. ун-те, 1978. – 192 с.
17. Дудченко А.А. Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф. – М.: ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. Механика твердого деформируемого тела. – 1983. – Вып. 15. - С. 3 - 68.
18. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек // С.А. Амбарцумян – М.: Наука, 1974. – 448 с.
19. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин // С.А. Амбарцумян – М.: Наука, 1987. – 360 с.
20. Григоренко Я.М. Задачи теории упругости неоднородных тел // Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н. Д. – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.
21. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс // В.И. Королев – М.: Машиностроение, 1965. – 272с.
22. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластины // С.Г. Лехницкий. – М.: Изд-во техн.-теор. лит., 1957. – 463 с.
23. Григолюк Э.И. Современное состояние теории многослойных оболочек // Э.И. Григолюк, Ф.А. Коган // Прикл. механика. – 1972. – 8, №6. – С. 3 -17.

24. Тимошенко С.П. Курс теории упругости / С.П. Тимошенко – К.: Наук. думка, 1972. – 501 с.
25. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates / E. Reissner // J. Math. and Phys. – 1944. – № 33. – P.184 - 191.
26. Амбарцумян С.А. Некоторые вопросы развития теории анизотропных слоистых оболочек / С.А. Амбарцумян // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Физ. - мат. наук. – 1964. – 17, № 3. – С. 29 - 53.
27. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов // В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
28. Григоренко Я.М. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек // Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко. – М.: Наука, 1992. – 336 с.
29. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости // Я.М. Григоренко. – Киев: Наук. думка, 1973. – 228 с.
30. Григоренко Я.М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках /Я.М.Григоренко // Прикл. механика. – 1996. № 6. – С. 3 - 40.
31. Гузь А.Н. Механика элементов конструкций // Гузь А.Н., Григоренко Я.М., Бабич И.Ю. – К.: Наук. думка, 1983. – 484 с.
32. Донелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки / Л.Г. Донелл. – М.: Наука, 1982. – 567 с.
33. Naghdi P.M. On the theory of thin elastic shells / P. M. Naghdi // Quarterly of Applied Mathematics. – 1957. – V.14, № 4. – P. 369 – 380.
34. Vasiliev V.V. Modern conceptions of plate theory / V.V. Vasiliev // Composite structures. – 2000. – № 48. – P. 39 – 48.
35. Пискунов В.Г. Развитие теории слоистых пластин и оболочек / В.Г. Пискунов, А.А. Рассказов // Прикл. механика. 2002. – 38, № 2. С. 22 – 57.

36. Григолюк Э.И. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин // Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
37. Пикуль В.В. К проблеме построения физически корректной теории оболочек / В.В. Пикуль // Изв. АН СССР. МТТ. – 1992. – №3. – С. 18 – 25.
38. Родионова В.А. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек // Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф. – СПб.:Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1996. – 278 с.
39. Гуртовой А.Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур / А.Г. Гуртовой // Механика композитных материалов. – 1999. – 35, №1. – С. 13 – 28.
40. Немиш Ю.Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел / Ю.Н. Немиш // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 2. – С. 3 – 38.
41. Григолюк Э.И. Основные математические модели деформирования и прочности многослойных анизотропных оболочек / Э.И. Григолюк, Ф.А. Коган // Прикладные проблемы механики тонкостенных конструкций: Сб. науч. статей. – М.: Изд-во МГУ, 2000. – С. 56 – 109.
42. А.С. Сахаров Математическая модель деформирования многослойных композитных оболочечных систем / А.С. Сахаров, О.Л. Козак, А.В. Гондлях, С.Л. Мельников // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1984. – №44. – С.13 – 16.
43. Александров А.Я. Конструкции с наполнителем из пенопластов // Александров А.Я., Бородин И.Я., Павлов В.В. – М.: Машиностроение, 1972. – 211 с.
44. Librescu L. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey // L.Librescu, T.Hause // Composite structures. – 2000. – V.48. – P. 1 – 17.

45. Noor A.K. Computational models for sandwich panels and shells // A.K. Noor, W.S. Burton, C.W. Bert // *Appl. Mech. Rev.* – 1996, – V.9, № 3. – P. 155 – 199.
46. Болотин В.В. Теория армированной слоистой среды со случайными начальными неправильностями / В.В. Болотин // *Механика полимеров.* – 1966. – № 1. – С. 11 – 19.
47. Болотин В.В. Основные уравнения теории армированных сред / В.В. Болотин // *Механика полимеров.* – 1965. – № 2. – С. 27 – 37.
48. Андреев А.Н. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания // Андреев А.Н., Немировский Ю.В. – Новосибирск: Наука, 2001. – 287с.
49. Белозеров Л.Г. Композитные оболочки при силовых и тепловых воздействиях // Белозеров Л.Г., Киреев В.А. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2003. – 388 с.
50. Немировский Ю.В. Эффективные физико-механические характеристики композитов однонаправленно-армированных моноотропными волокнами / Немировский Ю.В., Янковский А.П. // Сообщение 1. Модель армированной среды – Изв. вузов. Строительство. – 2006. № 5. – С. 16 – 24.
51. Немировский Ю.В. Эффективные физико-механические характеристики композитов однонаправленно-армированных моноотропными волокнами / Немировский Ю.В., Янковский А.П. // Сообщение 2. Модель армированной среды – Изв. вузов. Строительство. – 2006. № 6. – С. 10 – 19.
52. Перов Ю.Ю. Экспериментально-теоретическое исследование термических деформаций конструкционного углепластика КМУ-8 / Перов Ю.Ю., Мельников П.В. // *Механика композитных материалов.* – 1993. – Т. 29. – №5. – С. 608 – 612.
53. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела // Работнов Ю.Н. – М.: Наука, 1979. – 744 с.

54. Головин Н.Н. Смесеые модели механики композитов / Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. // Ч.1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси – Вестник МГУТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. №3. С. 36 – 49.
55. Зарубин В.С. Оценка эффективной теплопроводности волокнистого композита методом согласования / Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. // Наука и образование – 2013 – С. 519 – 532.
56. Зарубин В.С. Теплопроводность композита, армированного волокнами / Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. // Известия высших учебных заведений. Машиностроение – 2013 – № 5. – С. 75 – 81.
57. Зарубин В.С. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с включениями в виде удлиненных эллипсоидов вращения / Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. // Тепловые процессы в технике. – 2013 – Т. 5. № 6. – С. 276 – 282.
58. Кристенсен Р. Введение в механику композитов: Пер. с англ.// Кристенсен Р. – М.: Мир, 1982. – 336 с.
59. Кувыркин Г.Н. Теплопроводность однонаправленного волокнистого композита / Кувыркин Г.Н. // Инженерный журнал: наука и инновации, вып. 8 – 2013. – с. 27-33.
60. Тимошенко С.П. Теория упругости: Пер: с англ. // Тимошенко С.П., Гудьер Дж. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
61. Немировский Ю.В. Определение эффективных термомеханических характеристик слоистого композита регулярной структуры в несимметричной постановке / Немировский Ю.В., Янковский А.П. // Прикладная механика. – 2009. Т. 45, № 11. – С. 71 – 79.
62. Биргер И.Д. Сопротивление материалов // Биргер И.Д., Мавшотов Р.Р. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
63. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела // Лехницкий С.Г. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

64. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред // Шермергор Т.Д. – М.: Наука. – 1997. – 400 с.
65. Шленский О.Ф. Тепловые свойства стеклопластиков // Шленский О.Ф. – М.: Химия, 1973. – 219 с.
66. Шленский О.Ф. Теплофизика разлагающихся материалов // Шленский О.Ф., Шашков Л.Г., Аксенов Л.Н. – М.: Энергоиздат, 1985. – 144 с.
67. Ильюшин А.А. Основы математической теории термовязкоупругости // Ильюшин А.А., Победря Б.Б. – М.: Наука, 1970. – 280с.
68. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация // Колтунов М.А. – М.: Высш. шк., 1976. – 277 с.
69. Композиционные материалы. Т. 3. Применение композиционных материалов в технике: Пер. с англ. - М.: Машиностроение, 1978. - 512 с.
70. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций // Работнов Ю.Н. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
71. Бураков В.Л. Влияние теплового воздействия частиц на нестационарный нагрев и термохимическое разрушение коксующихся теплозащитных материалов / Бураков В.Л., Санду С.Ф. // Теплофизика и аэромеханика – 1996, – М. – С. 381 – 388.
72. Исаков Г.Н. Моделирование и идентификация процессов тепломассопереноса во вспучивающихся теплозащитных материалах / Исаков Г.Н., Кузин А.Я. // Прикладная механика и техническая физика. – 1996. – № 4. – С. 126 – 134.
73. Павлов В.П. Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел / Павлов В.П. // УГАТУ. – Уфа: УГАТУ, 2003. – 197 с.
74. Розин Л.А. Метод конечных элементов и применение к упругим системам // Розин Л.А. – М.: Стройиздат, 1977. – 129 с.

75. Рассказов А.О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек // Рассказов А.О., Соколовская И.И. Шульга Н.А. – К.: Вища шк., 1986. – 191 с.
76. Алфугов Н.А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов // Алфугов Н.А., Зиновьев П.Д., Попов Б.Г. – М.: 1984. – 264 с.
77. Болотин В.В. Механика многослойных конструкций // Болотин В.В., Новичков Ю.Н. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
78. Валишвили И.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ // Валишвили И.В. – М.: Машиностроение, 1976. – 278 с.
79. Елпатьевский А.Н. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов // Елпатьевский А.Н., Васильев В.В. – М.: Машиностроение. 1972. – 167 с.
80. Ершов П.П. Проектирование анизотропных конструкций // Ершов П.П. – М.: ВИМИ, 1981. – 160 с.
81. Мяченков В.И. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ // Мяченков В.И., Григорьев И.В. – М.: Машиностроение. 1981. – 216 с.
82. Образцов И.Ф. Строительная механика летательных аппаратов // Образцов И.Ф., Булычев Л.А., Васильев В.В. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.
83. Острик А.В. Расчет прочности композитных оболочек высокого давления под действием лучистых потоков энергии / Острик А.В., Слободчиков С.С. // Технол. сер. Конструкции из композиционных материалов. – 1995. – № 1. – С. 21 – 30.
84. Пестренин В.М. Влияние скорости теплового нагружения на напряженное состояние вязкоупругих слоистых конструкций / Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ибламинава Д.Р. // Механика композитных материалов. – 1989. – № 6. – С. 1080 – 1085.

85. Пикуль В.В. Теория и расчет слоистых конструкций // Пикуль В.В. – М.: Наука, 1985. – 184 с.
86. Розин Л.А. Метод конечных элементов и применение к упругим системам // Розин Л.А. – М.: Стройиздат, 1977. – 129 с.
87. Тарнопольский Ю.М. Особенности расчета деталей из армированных пластиков // Тарнопольский Ю.М., Розе Л.В. – Рит: Зинатне, 1969. – 276 с.
88. Тетере Г.А. Оптимизация оболочек из слоистых композитов // Тетере Г.А., Рикардс Р.Б., Нарусберг В.Л. – Рига, 1978. – 240 с.
89. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки // Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
90. Бакулин В.Н. Уточненные эффективные подходы для построения моделей слоистых оболочек и криволинейных стержней / Бакулин В.Н. // Десятая юбилейная международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным средствам. – Переславль-Залесский, - М., МГИУ, 1999. – С.132-134.
91. Бакулин В.Н. Расчетно-экспериментальное исследование механического действия излучений на композитные элементы конструкций летательных аппаратов в полетных условиях / Бакулин В.Н., Острик А.В. // Механика композиционных материалов и конструкций. – М. ИПРИМ РАН, 1999. – Т. 4, N4. – С. 77-87.
92. Бакулин В.Н. Уравнения трехмерной теории для расчета толстостенных многослойных оболочек / Бакулин В.Н., Потопахин В.А. // Механика композиционных материалов и конструкций. – М. ИПРИМ РАН, 1998. – Т. 4, N2. – С. 83-96.
93. Павлов В.П. Математическая модель теплового деформирования теплозащитного материала / Павлов В.П., Первушин Ю.С., Звонарев В.Д. // Механика деформируемых тел и конструкций: Межвузовский научный сборник, УГАТУ. – Уфа, 1998. – С. 9 -15.



94. Третьяченко Г.Н. Термическое деформирование неметаллических деструктурирующих материалов // Третьяченко Г.Н., Грачева Л.И. – Киев: Наукова думка, 1983. – 248 с.
95. Композиционные материалы. Т. 3. Применение композиционных материалов в технике: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1978. – 512 с.
96. Композиционные материалы. Т. 4. Композиционные материалы с металлической матрицей: Пер. с англ. – М.: Маш и построение, 1978. – 504 с.
97. Павлов В.П. Тепловая деформация, прочность и термовязкоупругость стеклопластиков при высокой переменной во времени температуре в условиях термодеструкции. Экспериментальные исследования и математическое моделирование / Павлов В.П. // УГАТУ. – Уфа: УГАТУ, 2004. – 218 с.
98. Варвак П.М. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций // Варвак П.М., Варвак Л.П. – М.: Стройиздат, 1977. – 160 с.
99. Григоренко Я.М. Численное решение задач статики ортотропных оболочек с переменными параметрами // Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Беспалова Б.И. – К.: Наукова думка, 1975. – 184 с.
100. Мяченков В.И. Методы и алгоритмы расчета пространственных конструкций на ЭВМ ПС // Мяченков В.И., Мальцев В.П. – М.: Машиностроение. 1984. – 280 с.
101. Александров А.В. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы // Александров А.В., Лащемиков Б.Я., Шапошников Н.Н. – М.: Стройиздат, 1933. – 488 с.
102. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике // Зенкевич О. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
103. Порри Д. Введение в метод конечных элементов: Пер. с англ. // Порри Д., де Фриз Ж. – М.: Мир, 1981. – 304 с.

104. Пискунов В. Г. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций // В. Г. Пискунов, В. Е. Вериженко. – К.: Будівельник, 1986. – 176с.
105. Рассказов А.О. Расчет многослойной ортотропной полой оболочки методом конечных элементов / А.О. Рассказов // Прикл. механика. – 1978. – 14, № 8. – С. 51 – 57.
106. Пискунов В.Г. Расчет неоднородных оболочек и пластин методом конечных элементов // В.Г. Пискунов, В.Е. Вериженко, В.К. Присяжнюк, В.С. Сипетов, В. С. Карпиловский. – К.: Вища шк., 1987. – 200 с.
107. Сахаров А.С. Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений / А.С. Сахаров // Соппротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1974 – №24. – С.147– 156.
108. Григоренко Я.М. Некоторые подходы к решению задач теории тонких оболочек с переменными геометрическими и механическими параметрами / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко // Прикл. механика. – 2002. – 38, №11. – С.32 – 68.
109. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов //Успехи мат. наук. – 1961. – 16, №3. – С. 171 – 174.
110. Григоренко Я.М. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) / Я.М. Григоренко, Н.Н.Крюков // Прикл. механика – 1995. – 31, № 6. – С. 3 – 27.
111. Григоренко А.Я. О напряженно-деформированном состоянии ортотропных толстостенных прямоугольных пластин / А.Я. Григоренко, А.С. Бергулев, С.Н. Яремченко // Доп. НАН України. – 2011. – № 9. – С. 49-55.
112. Александров А.Я. Расчет трехслойных панелей // Александров А.Я., Брюккер Л.Э., Куршин Л.М. – М.: Оборонгиз, 1960. – 270с.
113. Бессонов В.Г. Масштабные коэффициенты подобия для конструкций из стеклопластика / В.Г. Бессонов // Механическое подобие

конструкций из армированного материала; под ред. Г. Н. Савина. – Киев: Наук. думка, 1970. – С. 108 – 137.

114. Брюккер Л.Э. Некоторые варианты упрощения уравнений изгиба трехслойных пластин / Л.Э. Брюккер // Расчеты элементов авиационных конструкций. – М.: Машиностроение, 1965. – Вып. 3. – С. 74 – 99.

115. Исаханов Г.В. Прочность армированных пластиков и ситалов // Г.В. Исаханов, А.Е. Журавель. – М.: Машиностроение, 1981. – 234 с.

116. Королёв В.И. Упругопластические деформации оболочек // В.И. Королёв. – М.: Машиностроение, 1971. – 303 с.

117. Остерник Э.С. Анизотропные слоистые пластины средней толщины / Э.С. Остерник // Изв. АН Арм. ССР. Механика. – 1967. – 20, № 5. – С. 48 – 57.

118. Потапов А.И. Неразрушающий контроль конструкций из композиционных материалов // А.И. Потапов, Ф.П. Пеккер. - Л.: Машиностроение, 1977. – 192 с.

119. Скудра А.М. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков // Скудра А.М., Булавс Ф.Я., Роценс К.А. – Рига: Зинатне, 1971. – 239с.

120. Пелех Б.Л. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями // Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. – К.: Наук. думка, 1988. – 279 с.

121. Кулиев В.Д. К теории разрушения n-слойных материалов с трещиной / Кулиев В.Д, Сеидов Э.Э. // Мат. XIII международного семинара «Технологические проблемы прочности». – Подольск. МГОУ, 2006., С. 209 – 211.

122. Кучерявый В.И. Расчет обсадных труб заданной надежности при растягивающих нагрузках и внутреннем давлении / Кучерявый В.И., Мильков С.Н. // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2003. – № 5. – С. 30-36.

123. Левин В.А. Избранные нелинейные задачи механики разрушения / Левин В.А., Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г. // М. ФИЗМАТЛИТ. – 2004. – 408 с. - ISBN 5-9221-0514-0.
124. Акопян В.Н. Напряженное состояние однородной упругой плоскости, содержащей накрест лежащие трещины, при смешанных граничных условиях на берегах трещин / Акопян В.Н., Саакян А.В. // Известия РАН. – Механика твердого тела. – 1999. – № 3. – С. 106 – 113.
125. Акопян В.Н. Напряженное состояние упругой полуплоскости, содержащей тонкое жесткое включение / Акопян В.Н., Саакян А.В. // Известия РАН. – Механика твердого тела. – 2002. – № 6. – С. 76 – 82.
126. Неупругие свойства композиционных материалов // Под ред. К. Гераковича [Пер. с англ.]. – М.: Мир, 1978. – 294 с.
127. Гольдман А.Я. Прочность конструкционных пластмасс А.Я. Гольдман. – Л.: Машиностроение, 1979. – 320 с.
128. Тамуж В.П. Микромеханика разрушения полимерных материалов // В.П. Тамуж, В.С. Куксенко. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
129. Фудзии Т. Механика разрушения композиционных материалов // Т. Фудзии, М. Дзако [Пер. с яп.]. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
130. Болотин В.В. Влияние технологических факторов на механическую надёжность конструкций из композитов / Болотин В.В. // Механика полимеров. – 1972. – Л 3. – С. 529 – 540
131. Зайцев Г.П. Теоретическое и экспериментальное исследование трещиностойкости и скорости роста макро-трещины в органопластиках при чистом сдвиге / Зайцев Г.П., Кайков К.В. // Механика композитных материалов. – 1984. – № I. – С. 149 – 152.
132. Малмейстер А.К. Проблемы механики композитных материалов / Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетере Г.А. // В кн.: Современные проблемы теоретической и прикладной механики. – Киев: Наукова думка. – 1978. – С. 359 - 372.

133. Маркочев В.М. Методика исследования роста усталостных трещин при постоянном значении размаха коэффициента интенсивности напряжений / Маркочев В.М., Краев А.Т. // Заводская лаборатория. – 1976. – № 4. – С. 469 – 473.

134. Пархизгар Ш. Определение вязкости разрушения композитов, армированных однонаправленными волокнами / Пархизгар Ш., Захари Л.В., Сан Ч.Т. // В кн.: Прочность и разрушение композитных материалов.- Тр. второго советско-американского симпозиума. – Рига – 1983. – С. 293 – 303.

135. Alwar R.S. Three-dimensional finite element analysis of cracked plates in bending / Alwar R.S., Ramachandran Nambissan K.E. // Int. J. Numer. – Meth. Eng., 1983. – v.2. – Ж 2. – pp. 293 – 303.

136. Верещака С.М. Нелинейное деформирование и устойчивость многослойных элементов конструкций с дефектами структуры // Верещака С.М. – Сумы: Изд-во СумГУ, 2009. – 286 с.

137. Галимов К.З. Уравнения равновесия и движения тонких оболочек по нелинейной теории типа Тимошенко / К.З. Галимов // Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – С. 36 – 95

138. Ривлин Р. Проектирование сосудов высокого давления минимального веса, усиленных нерастяжимыми нитями/ Ривлин Р., Пипкин А. // Труды американского общества инженеров-механиков. Прикладная механика. – 1963. – № 1. – С. 123-129.

139. Болотин В.В. Механика многослойных конструкций // В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

140. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости // Новацкий В.М. – М.: Мир, 1970 – 256 с.

141. Скудра А.М. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков // Скудра А.М., Булавс Ф.Я., Роценс К.А. – Рига: Зинатне, 1971. – 239 с.

142. Малмейстер А.К. Сопротивление полимерных и композитных материалов // Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.

143. Shao Z.S. Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length / Z.S. Shao // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2005. – Vol. 82. – P. 155 – 163.

144. Kollar L. Buckling of complete spherical shells and spherical caps subjected to uniform overall radial pressure / Kollar L. // Proc. colloq. on buckling of shells. – Stuttgart.- Mai 6-7.- 1982. – Berlins Springer. – 1982. – pp. 401-425.

145. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек // А.Л. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.

146. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам // Де Бор К. – М.: Радио и связь, 1985. - 304 с.

147. Комков М.А. Композитный торовый баллон для дыхательных аппаратов с продольно - поперечной схемой армирования силовой оболочки /М.А.Комков, Ч.Н.Тхань // Известия вузов. Машиностроение. – 2006. – № 3. – С. 10 – 18.

148. ТУ 2296-001-452Амерон-03. Трубы стеклопластиковые, соединительные детали и соединения серии Бондстренд® 3400. Общие технические условия.

149. ГОСТ 12815-80 (СТ СЭВ 3249-81, СТ СЭВ 3250-81, СТ СЭВ 3251-81), Государственный комитет СССР по управлению качеством продукции и стандартам. Фланцы, арматуры, соединительных частей трубопроводов на  $p_y$  от 0,1 до 20,0 МПа.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЗАТВЕРДЖУЮ

Перший проректор

В.Д. Карпуша

« \_\_\_\_\_ » 2015 р.

**АКТ**

про впровадження результатів виконання дисертаційної роботи «Конструкційна міцність багат шарових елементів машин з дефектами структури» у навчальний процес СумДУ

Складений комісією у складі:

Голова комісії - професор кафедри загальної механіки та динаміки машин, д.т.н., проф. В.А. Марцинковський,  
Члени комісії - доц. кафедри загальної механіки та динаміки машин, к.т.н., доц. Є.М. Савченко,  
- ас. кафедри загальної механіки та динаміки машин, к.т.н. О.С. Бережний.

Встановлено, що за результатами виконання дисертаційної роботи «*Конструкційна міцність багат шарових елементів машин з дефектами структури*» здобувача – асистента кафедри ЗМ і ДМ Дейнеки А.В. у навчальний процес впроваджено наступне:

- результати досліджень використовуються при викладанні дисципліни «Механіка композиційних матеріалів» для студентів напрямку підготовки «Механіка» та магістрів спеціальності «Комп'ютерна механіка»;

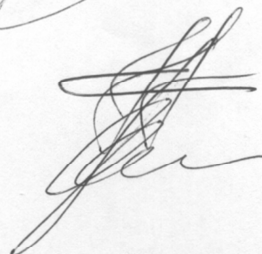
- розроблені в роботі експериментальні установки використовуються студентами напрямку підготовки «Механіка» та спеціальності «Комп'ютерна механіка» при підготовці курсових та випускних кваліфікаційних робіт.

Голова комісії



В.А. Марцинковський

Члени комісії:



Є.М. Савченко

О.С. Бережний

ЗАТВЕРДЖУЮ:

директор

ТОВ «Склопластикові труби»

*В.В. Данільцев* Данільцев В.Г.

«3» березня 2015 р.



## АКТ

**про впровадження результатів дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук Дейнеки Андрія Віталійовича**

Даним актом посвідчується, що наукові результати та рекомендації отримані в дисертаційній роботі Дейнеки Андрія Віталійовича «Конструкційна міцність багатошарових елементів машин з дефектами структури», впроваджені під час проектування та виготовлення тонкостінних конструкцій із композиційних матеріалів ТОВ «Склопластикові труби»

Зокрема надані методики та програми розрахунків шаруватих оболонок, згідно яких можна буде враховувати різного роду структурні та технологічні недосконалості, тобто початкові прогини серединної поверхні несучих шарів, непроклеї, розшарування, тощо, дозволяють частково вирішувати питання надійності при експлуатації такого типу конструкцій.

Експериментально отримані показники фізико-механічних властивостей склопластиків, результати теоретичних досліджень та пропозиції щодо збільшення несучої здатності шаруватих конструкцій мають важливе практичне значення і плануються до використання в подальших проектах.

Заступник директора

ТОВ «Склопластикові труби»

В.В.Данільцев