НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

Матвійчук С.В., *студент*; СумДУ, гр. ІН-01

Один из первый результатов в изучении свойств числа e был получен, Дж. Ламбертом, который доказал иррациональность числа e. С. Эрмит доказал трансцендентность числа e, т.е., что число e не является корнем никакого полинома с целыми коэффициентами. Дж. Лиувиль и С. Бетти показали, что e^2 не является корнем никакого полинома второй степени.

Теорема 1 (Ламберт). *Число e является иррациональным.*

Теорема 2. *Число e является квадратично-иррациональным.*

Теорема 3. *число* e^2 *является квадратично-иррациональным, т.е. не существует полинома* $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$, *где* $a,b,c \in \boldsymbol{Z}$, $a \neq 0$, *такого что*, $P(e) = 0$.

Рассмотри теперь более общую теорему.

Теорема 4 (Этмит). Число e является трансцендентным, т.е. не является корнем никакого полинома с целыми коэффициентами.

Доказательство. Приведем только поэтапную схему доказательства.

1) Пусть $P(x)$ – произвольный полином степени n. Определим функцию $I(t)$ равенством:

$$I(t) = \int_0^t e^{t-u} f(u)du.$$

Пусть $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$. Определим

$$P^*(x) = |a_0| + |a_1|x + ... + |a_n|x^n.$$

Можно показать, что

$$|I(t)| \leq |t|P^*(|t|)e^{|t|}.$$

2) Предположим, что $G(x) = b_0 + b_1x + ... + b_rx^r$ – полином с целыми коэффициентами и $b_0 \neq 0$, такой, что $G(e) = 0$. Определим

$$P(x) = x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p...(x-r)^p,$$

и рассмотрим выражение

$$J = b_0 I(0) + b_1 I(1) + \ldots + b_r I(r),$$

где $I(t)$ определяется с помощью полинома P по правилу, рассмотренному в пункте 1). Заметим что степень p равна $n = (r+1)p - 1$. Тогда

$$J = \sum_{k=0}^{r} b_k I(k) = \sum_{k=0}^{r} b_k \left(e^k \sum_{j=0}^{n} P^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{n} P^{(j)}(k) \right)$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{n} P^{(j)}(0) \right) g(e) - \sum_{k=0}^{r} \sum_{j=0}^{n} b_k P^{(j)}(k) = -\sum_{k=0}^{r} \sum_{j=0}^{n} b_k P^{(j)}(k).$$

Полином P имеет корень порядка $p-1$ в точке $x = 0$, следовательно, $P^{(j)}(0) = 0$, для $0 \le j \le p-2$. Аналогично, $P^{(j)}(k) = 0$, для $0 \le j \le p-1$, отсюда получаем

$$J = -b_0 P^{(p-1)}(0) - b_0 \sum_{j=p}^{n} P^{(j)}(0) + \sum_{k=1}^{r} b_k \sum_{j=p}^{n} P^{(j)}(k).$$

3) Каждый член, за исключением первого, в последнем равенстве делится на $p!$. Первый член делится на $(p-1)!$.

4) Число J делится на $(p-1)!$ и $J \ne 0$, так как не делится на $p!$.

Следовательно, $|J| \ge (p-1)!$. Отсюда получаем

$$|J| = \sum_{k=0}^{r} |b_k| k P^{*}(k) e^k.$$

Отсюда получаем: $|J| \le c a^p$, где $a = (2r)^{r+1}$, а c – постоянная, независящая от p. Последнее неравенство невозможно для больших p.

Руководитель: Малютин К.Г., *профессор*