Начально-краевая задача для уравнения диффузии дробного порядка

Ячменёв В.А., *профессор*
Сумський государственный университет, г. Суми

В работе приводится аналитическое решение начально-краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка.

Рассматривается уравнение

$$\left(D_{0_+,t}^{\alpha}\right)(x,t) = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (t > 0, x > 0) \tag{1}$$

с частной производной Римана-Лиувилля порядка $0 < \alpha \leq 1$ относительно t, которая определяется формулой

$$\left(D_{0_+,t}^{\alpha}\right)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau$$

Дополним уравнение (1) начальным условием типа Коши

$$\left(D_{0_+,t}^{\alpha-1} u\right)(x, 0_+) = u_0 \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0; \qquad u|_{x=l} = u_1 = const \tag{3}$$

Применив преобразования Лапласа по переменной t и уравнению (1) и граничным условиям (3) приходим к двухточечной краевой задаче для операторного уравнения:

$$\frac{d^2\bar{U}}{dx^2} - \frac{s^{\alpha}}{a^2}\bar{U} = -\frac{u_0}{a^2} \qquad \left.\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}\right|_{x=0} = 0; \quad \bar{U}|_{x=e} = \frac{u_1}{s} \tag{4}$$

Общее решение задачи (4) имеет вид

$$\bar{U}(x,s) = \frac{u_0}{s} + \frac{u_1 - u_0}{s} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{a} s^{\alpha/2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{l}{a} s^{\alpha/2}\right)}$$

Заметим, что второе слагаемое стремится к нулю при $s \to \infty$ и не имеет особенностей кроме начала координат $s = 0$. Более того, второе слагаемое может быть представлено в виде разложения в обобщённый степенной ряд, а значит, в соответствии с правилом дробных показателей оригиналом для функции $\overline{U}(x,s)$ служит ряд

$$u(x,t) = u_0 + (u_1 - u_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(\alpha - k\beta)} \cdot \frac{1}{t^{k\beta}}$$