Об одном способе интегрирования рациональных функций с помощью цепных дробей

Величко И.Г.[1], *доцент*; Ткаченко И.Г.,[2] *доцент*;
Балабанова В.В.[2], *студент*
[1] Таврический государственный агротехнологический университет, г. Мелитополь
[2] Запорожский национальный университет, г. Запорожье

Чаще всего при нахождении интеграла $\int P_m(x)dx/Q_n(x)$ подынтегральная рациональная функции раскладывается на сумму простейших дробей, интеграл от каждой их которых достаточно легко найти. В данной работе представлен способ интегрирования таких выражений без использования описанного выше приема. Заметим, что предложенный в работе способ применим лишь в том случае, когда первообразная есть рациональное выражение.

Рассмотрим задачу Коши:

$$y' = -\left(x^2+6x+7\right)\Big/\left[(x+1)^2(x+2)^2\right],\ y(0)=3/2. \qquad (1)$$

Находя общий интеграл, получим, что

$$y=(x+3)\Big/\left(x^2+3x+2\right). \qquad (2)$$

Найдем теперь решение с помощью функциональных цепных дробей. Алгоритм решения описан в [2]. Первое приближение к решению будем искать в виде $\tilde{y}_1 = 3/2 + C_1 x$. Подставляя данное выражение в (1), будем иметь, что $C_1 + \left(x^2+6x+7\right)\Big/\left[(x+1)^2(x+2)^2\right]=0$. Для определения константы C_1 считаем, что левая часть последнего равенства есть бесконечно малой более высокого порядка в окрестности точки $x = 0$. В результате получаем, что $C_1 = -7/4$. То есть первое приближение $\tilde{y}_1 = 3/2 - 7x/4$.

Второе приближение к решению ищем в виде $\tilde{y}_2 = 3/2 - 7x/4(1+C_2x)$. Подставляем данное выражение в (1) и, учитывая, что функция должна быть бесконечно малой в окрестности нуля, находим, что $C_2 = 15/14$.

Третье приближение

$$\tilde{y}_3(x) = \frac{3}{2} - \frac{7x/4}{1 + \dfrac{15x/14}{1 + C_3 x}}.$$

Подставляя данную функцию в исходное дифференциальное уравнение (1) и проделывая описанные выше действия, получаем, что

$$C_3 = -\frac{4}{105} \text{ и } \tilde{y}_3(x) = \frac{3}{2} - \frac{\dfrac{7x}{4}}{1 + \dfrac{\dfrac{15x}{14}}{1 - \dfrac{4x}{105}}}.$$

Продолжая данный процесс и далее, получим, что уже четвертое приближение

$$\tilde{y}_4(x) = \frac{3}{2} - \frac{\dfrac{7x}{4}}{1 + \dfrac{\dfrac{15x}{14}}{1 - \dfrac{\dfrac{4x}{105}}{1 + \dfrac{7x}{15}}}} = \frac{x+3}{x^2 + 3x + 2}$$

совпадает с решением (2), найденным при помощи разложения рациональной функции на простейшие дроби и последующим непосредственным интегрированием.

Каждая из полученных функциональных цепных дробей $\tilde{y}_i, i = \overline{1;4}$, совпадает с аппроксимацией Паде [1] искомой функции-решения.

1. Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде* (М.: Мир: 1996).
2. И.Г. Ткаченко, В.В. Балабанова, *ИМА :: 2014*, 147 (Суми: СумДУ: 2014).