Крайова задача з нелокальними умовами для рівняння руху однорідної пружної балки

Негрич М.П., *студент*; Гой Т.П., *доцент*
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, м. Івано-Франківськ

В області $D = \{(t, x): 0 \le t \le T, 0 \le x \le L\}$ досліджуємо задачу

$$u_{tt}(t, x) + u_{xxxx}(t, x) + au_{xx}(t, x) + bu(t, x) + u^3(t, x) = 0, \quad (1)$$

$$\mu u(0, x) + \omega u(T, x) - \nu \int_0^T u(s, x)ds = \varphi_1(x), \quad (2)$$

$$\mu u_t(0, x) + \nu u(0, x) + \omega u_t(T, x) - \nu u(T, x) = \varphi_2(x), \quad (3)$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, L) = 0, \quad (4)$$

де $a, b \in \mathbf{R}$, $\mu, \nu, \omega \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$, функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – достатньо гладкі на відрізку $[0, L]$ та задовольняють умови вигляду (4).

Розв’язок задачі (1)–(4) шукаємо у вигляді ряду Фур’є

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L}, \quad u_k(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(t, x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx.$$

Тоді кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbf{N}$, є розв’язком крайової задачі

$$u_k''(t) + \left((\pi k/L)^4 - a(\pi k/L)^2 + b\right)u_k(t) = -f_k(t; \{u_k(t)\}), \quad (5)$$

$$\mu u_k(0) + \omega u_k(T) - \nu \int_0^T u_k(s)\,ds = \varphi_{1k}, \quad (6)$$

$$\mu u_k'(0) + \nu u_k(0) + \omega u_k'(T) - \nu u_k(T) = \varphi_{2k}, \quad (7)$$

де $f_k(t; \{u_k(t)\})$, φ_{1k}, φ_{2k} – коефіцієнти розвинення функцій $u^3(t, x)$, $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ відповідно у ряди Фур’є за системою функцій $\{\sin(k\pi x/L)\}_{k\ge1}$.

Задачу (5)–(7) зведено до інтегрального рівняння, існування та єдиність класичного розв’язку якого доведено за допомогою принципу стискаючих відображень для досить малих значень $T > 0$.