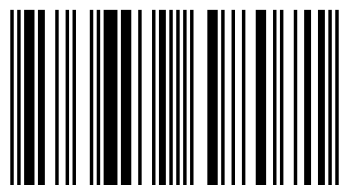


В пособии рассматриваются методы и алгоритмы оценивания коэффициентов математических моделей колебательных систем на основе экспериментальных данных. Приведены конкретные примеры решения задач оценивания. Особое внимание уделено вопросам создания достоверных моделей роторных систем. Пособие рассчитано на студентов уровня магистр и аспирантов специальности «Динамика и прочность», а также на специалистов в области динамики и прочности машин.

ОЦЕНИВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ



Симоновский Виталий Иович, род. в 1937 г. в г. Сумы. В 1962 году закончил ХПИ по спец. «Динамика и прочность машин». Работал в Истринском отд. ВНИИЭМ (Моск. обл.) (1962-1973). С 1973 года живёт в г. Сумы. В 1994 году защитил докт. дисс. В н.в. проф. каф. Общей механики и динамики машин СумГУ.



978-3-659-69807-1

Симоновский

Виталий Симоновский

Оценивание коэффициентов математических моделей колебательных систем

(учебное пособие)

LAP
LAMBERT
Academic Publishing

Виталий Симоновский

**Оценивание коэффициентов математических моделей
колебательных систем**

Виталий Симоновский

**Оценивание коэффициентов
математических моделей
колебательных систем**

учебное пособие

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:

LAP LAMBERT Academic Publishing

ist ein Imprint der / является торговой маркой

OmniScriptum GmbH & Co. KG

Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия

Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /

Напечатано: см. последнюю страницу

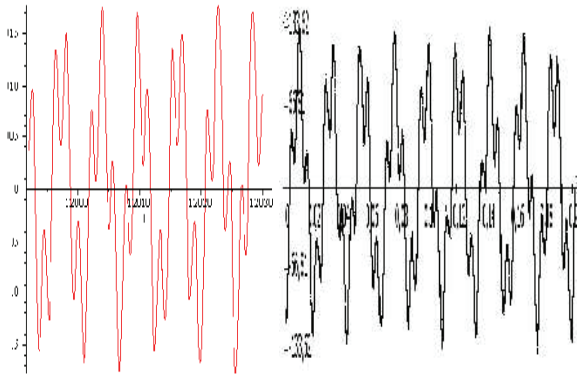
ISBN: 978-3-659-69807-1

Copyright / АВТОРСКОЕ ПРАВО © 2015 OmniScriptum GmbH & Co. KG

Alle Rechte vorbehalten. / Все права защищены. Saarbrücken 2015

В.И. СИМОНОВСКИЙ

**ОЦЕНИВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ
(УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ)**



эксперимент

математическая модель

Симоновский В.И.

Оценивание коэффициентов математических моделей колебательных систем (учебное пособие)

В пособии рассматриваются методы и алгоритмы оценивания коэффициентов математических моделей колебательных систем на основе экспериментальных данных. Приведены конкретные примеры решения задач оценивания. Особое внимание уделено вопросам создания достоверных моделей роторных систем.

Пособие рассчитано на студентов уровня магистр и аспирантов специальности «Динамика и прочность», а также на специалистов в области динамики и прочности машин.

Содержание

Предисловие.....	5
Часть 1. Основные теоретические положения и соотношения для решения задач оценивания.	7
1.1 Математические модели.....	7
1.2 Целевая функция метода наименьших квадратов... ..	11
1.3. Формула линейной регрессии.....	13
1.4. Оценивание с помощью матрицы коэффициентов влияния.....	17
1.5. Оценивание с помощью матрицы комплексных коэффициентов влияния.....	18
1.6. Оценивание параметров дискретных моделей линейных колебательных систем.....	23
1.7. Оценивание параметров одно массовой модели ротора.....	28
1.8. Об одном способе сведения нелинейной задачи оценивания к линейной.....	30
1.9. Балансировка гибких роторов как задача линейного оценивания дисбалансов.....	36
1.10. Использование методов идентификации для создания упрощённых дискретных моделей.....	49
Часть 2. Практические занятия.....	55
2.1. Занятие 1. Составление матричных соотношений для задач линейного оценивания. Колебательные модели в виде уравнений, записанных в прямой форме.....	55
2.2. Занятие 2. Составление матричных соотношений для задач линейного оценивания. Колебательные модели в виде одного уравнения высокого порядка.....	60
2.3. Занятие 3. Составление матричных соотношений для задач линейного оценивания (продолжение).....	65
2.4. Занятие 4. Составление соотношений для оценивания	

коэффициентов математических моделей элементов конструкций центробежных насосов.....	68
2.5. Занятие 5. Численные эксперименты.....	72
2.6. Занятие 6. Численные эксперименты по оцениванию параметров систем с обратной связью.....	77
2.7. Занятие 7. Оценивание параметров дискретной колебательной модели по экспериментально замеренным собственным частотам и формам в случае, когда уравнения модели записаны в прямой форме.....	80
2.8. Занятие 8. Оценивание параметров дискретной колебательной модели по экспериментально замеренным собственным частотам и формам в случае, когда уравнения модели записаны в обратной форме.....	86
2.9. Занятие 9. Оценивание параметров дискретной модели ротора по данным расчёта собственных частот и форм его МКЭ-модели.....	90
Список литературы.....	98

Предисловие

Разработка новых конструкций технических объектов (в частности, центробежных насосов и турбокомпрессоров) требует предварительных расчётов их на вибронедёжность. Эти расчёты могут эффективно прогнозировать уровень вибраций только при достаточно адекватных математических моделях, описывающих колебательные процессы в машинах и агрегатах. В то же время многие параметры колебательных систем (например, коэффициенты жёсткости и сопротивления реакций жидкостного слоя в сегментных подшипниках, в сотовых и лабиринтных уплотнениях роторов, структура и коэффициенты сил внутреннего трения валопроводов и т.п.) трудно поддаются расчётной оценке.

Одним из эффективных способов создания достоверных математических моделей колебательных процессов является идентификация – уточнение структуры и коэффициентов дифференциальных уравнений, описывающих эти процессы, по экспериментальным данным. Однако для успешной реализации идентификации необходимы два условия:

1) наличие программ расчёта сложных математических моделей, удовлетворительно отражающих все основные взаимодействия системы ;

2) достаточно точные средства измерения колебаний.

Только в последние десятилетия эти условия достигли надлежащего уровня. С одной стороны, появились такие сложные программные комплексы как ANSYS, реализующие расчёт механических и гидромеханических колебательных систем с практически любой необходимой степенью детализации их элементов. С другой стороны, стали доступными высокоточные средства измерения и

спектрального анализа вибрационных процессов. Как показывает опыт исследования динамических моделей роторов центробежных машин [2–15], задача идентификации оказывается, как правило, сложной математической вычислительной проблемой. В случае нелинейной модели (нелинейной зависимости измеряемых величин от оцениваемых параметров) идентификация (оценивание) параметров модели решается посредством поиска минимума функции цели, например, на основе метода наименьших квадратов.

Иногда полагают, что методы идентификации имеют ограниченное значение, так как оцениваются параметры каждый раз какого-то конкретного объекта. Поэтому затруднительно экстраполировать полученные результаты на системы с существенно иными параметрами. Однако, во-первых, идентификация позволяет оценить точность существующих теорий расчёта, выделить, какие факторы являются действительно существенными, а какие суть плоды малополезного теоретизирования. Во-вторых, многие типы машин весьма близки по ряду параметров. Перенос на динамическую модель вновь проектируемой конструкции данных, полученных при оценивании работающих, по крайней мере, гораздо эффективней, чем использование мало проверенных методов расчёта.

Часть 1. Основные теоретические положения и соотношения для решения задач оценивания.

1.1 Математические модели

В общем случае математическая модель любого объекта или процесса есть способ (алгоритм) вычисления некоторой совокупности выходных величин

$$y_1, y_2, \dots, y_k$$

по некоторым входным данным, определяющим модели и условия эксперимента. Эти данные можно разделить на две группы величин: данные, которые можно полагать достоверно известными

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r,$$

и параметры, подлежащие оцениванию

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l.$$

В дальнейшем выходные величины будем представлять k -мерным вектором-столбцом

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)^T.$$

Соответственно известные величины модели обозначим вектором

$$\begin{aligned}
\varphi_1(y_1, \dots, y_k; \alpha_1, \dots, \alpha_r; \theta_1, \dots, \theta_l) &= 0, \\
\text{.....} & \\
\varphi_k(y_1, \dots, y_k; \alpha_1, \dots, \alpha_r; \theta_1, \dots, \theta_l) &= 0.
\end{aligned}
\tag{2}$$

В компактной векторной форме система (2) записывается в виде

$$\overline{\varphi}(\overline{y}, \overline{\alpha}, \overline{\theta}) = 0. \tag{2)'$$

Динамика таких сложных технических конструкций, каковыми являются, например, многомассовые роторные системы, описывается системами дифференциальных уравнений. Модели этих систем не могут быть представлены алгебраическими структурами типа (1) или (2). Искомые величины (собственные частоты и формы, амплитуды вынужденных колебаний) здесь определяются с помощью программ для ПВМ, реализующих современные методы расчёта механических систем.

Рассматривая методы оценивания, будем иметь в виду алгоритмы и программы, с помощью которых на ПВМ производится расчет выходного вектора \overline{y} по схеме рис. 1.

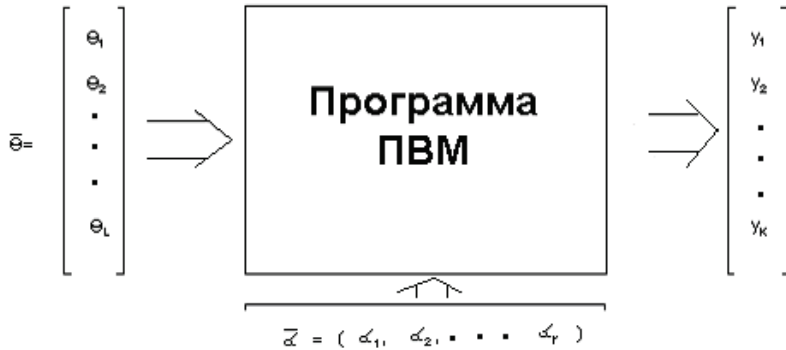


Рисунок 1

Определение выходного вектора \bar{y} по входным данным, образующим векторы $\bar{\theta}$ и $\bar{\alpha}$, называют прямой задачей.

Нахождение вектора $\bar{\theta} = \hat{\bar{\theta}}$ по экспериментальным данным $\bar{y} = \bar{y}^*$ есть обратная задача, или задача оценивания.

Вообще говоря, процесс создания и уточнения структуры и параметров математической модели на основе экспериментального исследования объекта является идентификацией.

Оценивание есть частный, простейший случай идентификации, когда ставится задача определения некоторой совокупности параметров математической модели $\bar{\theta}$ по данным экспериментов \bar{y} при заданной структуре модели.

Очевидно, что в качестве выходных величин y_1, y_2, \dots, y_k следует рассматривать только такие, какие

могут быть измерены. Поэтому далее вектор \bar{y} будет именоваться также вектором измеряемых величин.

1.2 Целевая функция метода наименьших квадратов

Оценивание вектора $\bar{\theta}$ реализуется с помощью некоторой целевой функции l переменных

$$\Phi(\bar{\theta}) = \Phi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l),$$

нахождение экстремума которой определит те значения $\bar{\theta} = \hat{\bar{\theta}}$, при которых математическая модель соответственно выбранному критерию будет наиболее адекватна реальному объекту. Ниже рассматриваются способы оценивания на основе метода наименьших квадратов. Согласно этому методу в качестве целевой функции принимается сумма квадратов разностей величин, которые замеряются на реальном объекте и соответственно вычисляются с помощью математической модели

$$\Phi(\bar{\theta}) = \sum_{a=1}^k (y_a^* - y_a(\bar{\alpha}, \bar{\theta}))^2, \quad (3)$$

где y_a^* - я экспериментально замеренная величина объекта;

$y_a(\bar{\alpha}, \bar{\theta})$ - соответствующая расчетная величина модели, вычисленная при некотором наборе параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l$. Задача оценивания сводится к нахождению такого вектора:

$$\hat{\bar{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_l)^T,$$

при котором сумма квадратичных отклонений расчетных величин y_a от экспериментально измеренных y_a^* будет минимальной. Тогда целевая функция $\Phi(\bar{\theta})$ (3) достигает минимума.

При проведении n экспериментов, в каждом μ -м из которых меняется набор известных параметров

$$\bar{\alpha}_\mu = (\alpha_{\mu_1}, \alpha_{\mu_2}, \dots, \alpha_{\mu_n}) \quad (\mu = \overline{1, n}),$$

целевая функция будет включать квадраты отклонений во всех проведенных экспериментах

$$\Phi(\bar{\theta}) = \sum_{a=1}^k \sum_{\mu=1}^n (y_{\mu a}^* - y_{\mu a}(\bar{\alpha}_\mu, \bar{\theta}))^2. \quad (4)$$

Значения $\bar{\theta} = \hat{\bar{\theta}}$, которые дают минимум целевой функции (4), находятся из условий $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\theta}}\right) = 0$, то есть

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} = - \sum_{a=1}^k \sum_{\mu=1}^n 2(y_{\mu a}^* - y_{\mu a}(\bar{\alpha}_\mu, \bar{\theta})) \cdot \frac{\partial y_{\mu a}(\bar{\alpha}_\mu, \bar{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, \quad (i = \overline{1, l}). \quad (5)$$

или в матричной форме

$$\bar{y} = \bar{K} \cdot \bar{\theta}, \quad (6)'$$

где прямоугольная матрица размерности $k \times l$ имеет структуру

$$\bar{K} = \left[\begin{array}{cccc} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{k1} & k_{k2} & & k_{kl} \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} k_{11} \\ k_{21} \\ \dots \\ k_{k1} \end{array}} \right\} k$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_l$

Коэффициенты k_{ai} могут рассматриваться как некоторые коэффициенты влияния. Соответственно матрицу \bar{K} далее будем называть матрицей коэффициентов влияния.

Линейное оценивание не имеет проблем для численной реализации в отличие от нелинейного, где эта задача не всегда «обречена на успех».

В случае $k = l$ матрица \bar{K} квадратная, и тогда вектор $\bar{\theta}$ находится путем непосредственного решения системы (6) относительно $k = l$ неизвестных $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l$. В матричной форме это решение записывается в виде

$$\bar{\theta} = \bar{K}^{-1} \bar{y}^*, \quad (7)$$

где $\bar{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_k^*)$ - набор экспериментально измеренных величин; \bar{K}^{-1} - матрица, обратная матрице \bar{K} .

Многими исследователями «обратная задача» так и понималась, как решение вида (7). Поэтому число измеренных величин должно было быть равным числу оцениваемых параметров. Но при $k > l$ имеет место большая информативность, ибо количество измеренных величин превышает (и чем больше, тем лучше) количество оцениваемых параметров. В этом случае применяют нижеследующий подход [1], основанный, в конечном счете, на методе наименьших квадратов.

Умножим слева левую и правую части уравнения (6)' на транспонированную матрицу \bar{K}^T :

$$\bar{K}^T \bar{y} = \bar{K}^T \bar{K} \bar{\theta}. \quad (8)$$

Заметим, что произведение матрицы \bar{K}^T размерностью $l \times k$ на матрицу \bar{K} размерностью $k \times l$ дает квадратную матрицу размерностью $l \times l$. Поэтому выражение (8), если его выписать в скалярной форме, есть не что иное, как система l линейных уравнений относительно l неизвестных $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l$. Ее решение в матричной форме есть нахождение вектора оцениваемых параметров $\bar{\theta} = \hat{\bar{\theta}}$:

$$\hat{\bar{\theta}} = \left[\bar{K}^T \bar{K} \right]^{-1} \bar{K}^T \bar{y}^*. \quad (9)$$

Последнее соотношение является известной формулой линейной регрессии. Можно показать [2], что формула (9) выводится из условия минимума целевой функции метода наименьших квадратов (3), если приведенная модель линейна, т.е. имеет вид (6).

Для читателей, испытывающих некоторые затруднения в прослеживании операций с матричными объектами, приведем в скалярной форме вышеприведенные преобразования при $k = 3$, $l = 2$. В этом случае соотношения (6) будут следующие:

$$\begin{aligned}y_1 &= k_{11}\theta_1 + k_{12}\theta_2, \\y_2 &= k_{21}\theta_1 + k_{22}\theta_2, \\y_3 &= k_{31}\theta_1 + k_{32}\theta_2.\end{aligned}$$

Транспонированная матрица

$$\overline{K'} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \end{bmatrix}.$$

Произведение матриц

$$\overline{K'}\overline{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \\ k_{31} & k_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix},$$

$$\text{где } l_{11} = k_{11}^2 + k_{21}^2 + k_{31}^2, \quad l_{12} = k_{11}k_{12} + k_{21}k_{22} + k_{31}k_{32}, \\ l_{21} = k_{12}k_{11} + k_{22}k_{21} + k_{32}k_{31}, \quad l_{22} = k_{12}^2 + k_{22}^2 + k_{32}^2.$$

Уравнение (8) скалярно теперь можно представить так:

$$l_{11}\theta_1 + l_{12}\theta_2 = k_{11}y_1 + k_{21}y_2 + k_{31}y_3, \\ l_{21}\theta_1 + l_{22}\theta_2 = k_{12}y_1 + k_{22}y_2 + k_{32}y_3.$$

Решая последнюю систему уравнений относительно оцениваемых параметров, находим оценки $\theta_1 = \hat{\theta}_1$, $\theta_2 = \hat{\theta}_2$ для некоторого набора измеренных величин $y_1 = y_1^*$, $y_2 = y_2^*$, $y_3 = y_3^*$. Это решение и является применением формулы линейной регрессии (9).

1.4. Оценивание с помощью матрицы коэффициентов влияния.

Для сложных математических моделей, где элементы вектора \bar{y} определяются не явными алгебраическими соотношениями вида (1), а в результате расчета на ПВМ (структура рис.1), каждый коэффициент k_{aj} можно вычислить по программе прямой задачи как выходную величину y_a при $\theta_j = 1$ и всех иных $\theta_r = 0$, $r \neq j$. Разумеется, делать это допустимо, если заведомо известно, что зависимость \bar{y} от $\bar{\theta}$ линейна. Например, это имеет

место в случае расчета методом начальных параметров или МКЭ прогибов Y_a ($a = 1, k$) при вынужденных колебаниях произвольного ротора. Прогибы будут линейно зависеть от дисбалансов.

Таким образом, задача линейного оценивания сложных динамических объектов, описываемых «алгоритмически», может быть реализована с использованием следующих программных блоков:

1) блок расчёта коэффициентов k_{ai} путём 1-кратной прогонки «прямой задачи» при $\theta_j = 1, \theta_r = 0 (r \neq j)$;

2) формирование матриц $\bar{K}^T, [\bar{K}^T \cdot \bar{K}]^{-1}$ и $[\bar{K}^T \cdot \bar{K}]^{-1} \cdot \bar{K}^T$;

3) оценивание коэффициентов по формуле линейной регрессии (9).

1.5. Оценивание с помощью матрицы комплексных коэффициентов влияния

Для расчёта вынужденных колебаний линейных систем под воздействием гармонических сил используется метод комплексных амплитуд. Вынужденная составляющая колебаний в некоторой a -ой точке системы согласно этому методу определяется комплексной амплитудой

$$\bar{Y}_a = Y_a \cdot \exp(i\varphi_a) = Y_a \cdot \cos\varphi_a + i \cdot Y_a \cdot \sin\varphi_a, \quad (10)$$

где Y_a -- амплитуда, а φ_a -- фаза гармонических колебаний.

где $\bar{\bar{Y}} = (\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_k)^T$ -- вектор-столбец комплексных амплитуд,

$\bar{\bar{F}} = (\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_l)^T$ -- вектор-столбец комплексных амплитуд вынуждающих сил,

$\bar{\bar{K}}$ -- матрица $k \times l$ комплексных коэффициентов влияния.

Для использования формулы (11) в целях оценивания комплексных амплитуд сил по измеренным комплексным амплитудам колебаний необходимо составить соотношения относительно «вытянутых» векторов с действительными компонентами. Вектору комплексных амплитуд $\bar{\bar{Y}}$ поставим в соответствие вектор действительных составляющих \bar{Y} размерностью $2k$:

$$\bar{Y} = (Y_1^{(r)}, Y_1^{(i)}, \dots, Y_k^{(r)}, Y_k^{(i)})^T,$$

где $Y_a^{(r)}, Y_a^{(i)}$ -- соответственно действительная и мнимая части a -ой комплексной амплитуды,

$$Y_a^{(i)} = Y_a \cos \varphi_a, Y_a^{(r)} = Y_a \sin \varphi_a.$$

Вектору комплексных амплитуд сил размерностью l будет соответствовать вытянутый вектор \bar{F} размерностью $2l$:

$$\bar{F} = (F_1^{(r)}, F_1^{(i)}, \dots, F_l^{(r)}, F_l^{(i)})^T.$$

$$Y_a^{(r)} = Y_a \cdot \cos \varphi_a, Y_a^{(i)} = Y_a \cdot \sin \varphi_a. \quad (14)$$

И тогда в соответствии с соотношением (9) комплексных амплитуд вынуждающих сил \bar{F} оценивается по формуле

$$\bar{F} = \left[\bar{K}^T \cdot \bar{K} \right]^{-1} \cdot \bar{K}^T \cdot \bar{Y}. \quad (15)$$

Динамические коэффициенты влияния \bar{k}_{aj} могут быть определены с помощью как математической модели объекта, так и экспериментальным путём.

Пусть, например, имеется программа вычисления на ПК комплексных амплитуд $\bar{Y}_a (a = \overline{1, k})$ по заданным комплексным амплитудам сил $\bar{F}_j (j = \overline{1, l})$ (прямая задача). Тогда коэффициент \bar{k}_{aj} численно будет равен комплексной амплитуде $\bar{Y}_a (a = \overline{1, k})$ при $\bar{F}_j = 1$ и $\bar{F}_r = 0$ ($r = \overline{1, l}$ кроме $r=j$).

Более достоверно коэффициенты влияния определяются экспериментально. Если в j -ой точке приложить гармоническую силу $f_j(t) = F_n \sin(\omega t)$ (где F_n -- известная амплитуда силы гармонического возбудителя) и замерить во всех k точках комплексные амплитуды $\bar{Y}_a^* (a = \overline{1, k})$, то численно

$$\bar{k}_{aj} = \bar{Y}_a^* / F_n (a = \overline{1, k}; j = \overline{1, l}).$$

Такой способ используется, например, при балансировке роторов с помощью установки пробных дисбалансов.

Таким образом, задача линейного оценивания параметров колебательных систем с помощью комплексной матрицы коэффициентов влияния реализуется с помощью следующих программных блоков:

- 1) блок расчёта комплексных коэффициентов влияния \bar{k}_{aj} путём прогонки 1 раз прямой задачи ;
- 2) блок формирования матрицы \bar{K} (13);
- 3) блок расчёта амплитуд вынуждающих сил согласно соотношению (15).

1.6. Оценивание параметров дискретных моделей линейных колебательных систем

Рассмотрим линейную дискретную модель колебательной системы с n степенями свободы, дифференциальные уравнения вынужденных гармонических колебаний которой можно представить в следующей матричной форме:

$$\bar{m} \cdot \ddot{\bar{x}} + \bar{\alpha} \cdot \dot{\bar{x}} + \bar{c} \cdot \bar{x} = \bar{F} \cdot \sin(\omega t). \quad (16)$$

В (16) обозначено

$\bar{m}, \bar{\alpha}, \bar{c}$ -- матрицы размерностью $n \times n$ соответственно масс, коэффициентов сопротивления и жёсткости;

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ -- вектор-столбец координат системы;

$\bar{F} = (F_1, \dots, F_n)^T$ -- вектор-столбец амплитуд вынуждающих сил.

Следуя методу комплексных амплитуд, правую часть (16) представим в виде

$$\bar{F} \exp(i\omega t),$$

а решение будем искать в виде

$$\bar{x}(t) = \bar{X} \exp(i\omega t), \quad (17)$$

где $\bar{X} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)^T$ -- вектор искоемых комплексных амплитуд.

После подстановки (17) в (16) получим, после сокращения на $\exp(i\omega t)$, систему n линейных уравнений для определения n комплексных амплитуд. В матричной форме эта система записывается в виде:

$$[-\omega^2 \bar{m} + i\alpha\omega + c] \cdot \bar{X} = \bar{F}. \quad (18)$$

Пусть l параметров системы (16) подлежат оцениванию на основе экспериментальных данных, остальные коэффициенты полагаются достаточно достоверно известными. Тогда, расписывая в скалярной форме уравнение (18), можно получить в конечном счёте линейную систему уравнений

$$\bar{Y}_\Sigma^* = \bar{K}_\Sigma \cdot \bar{\theta}, \quad (19)$$

где \bar{Y}_Σ^* -- «вытянутый» вектор измеряемых величин, рассчитываемый по экспериментальным данным;

\bar{K}_Σ -- матрица коэффициентов влияния, которая также определяется по экспериментальным данным и известным параметрам модели;

$\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_l)^T$ -- вектор-столбец оцениваемых параметров.

Задача оценивания в конечном счёте сводится к применению формулы линейной регрессии

$$\bar{\hat{\theta}} = [\bar{K}_{\Sigma}^T \cdot \bar{K}_{\Sigma}]^{-1} \cdot \bar{K}_{\Sigma}^T \cdot \bar{Y}_{\Sigma}^* \quad (20)$$

Если число степеней свободы n , число экспериментов m , то размерность k вектора \bar{Y}_{Σ}^* будет равна $2nm$; размерность матрицы \bar{K}_{Σ} соответственно будет $2nm \times 1$.

Рассмотрим аналитическую подготовку для реализации задачи оценивания (20) на примере двухмассовой системы, описываемой уравнениями (16), если

$$\bar{m} = \begin{bmatrix} m_1; 0 \\ 0; m_2 \end{bmatrix}, \bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1; \alpha \\ \alpha; \alpha_2 \end{bmatrix}, \bar{c} = \begin{bmatrix} c_1; c \\ c; c_2 \end{bmatrix}.$$

Матричное соотношение (18) в скалярно-комплексной форме в данном случае примет вид:

$$\begin{aligned} (-m_1 \omega^2 + \alpha_1 \omega i + c_1) \bar{X}_1 + (\alpha \omega i + c) \bar{X}_2 &= F_1, \\ (\alpha \omega i + c) \bar{X}_1 + (-m_2 \omega^2 + \alpha_2 \omega i + c_2) \bar{X}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Поставим задачу оценивания коэффициентов сопротивления $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$, полагая значения других параметров достоверно известными. Пусть при некоторой частоте вынуждающей силы амплитуды F_1 мы замерили амплитуды X_1, X_2 и фазы φ_1, φ_2 колебаний рассматриваемых масс m_1, m_2 . Делаем пересчёт

$$\begin{aligned}
X_{rel} &= X_1 \cos \varphi_1, X_{im1} = X_1 \sin \varphi_1, \\
X_{re2} &= X_2 \cos \varphi_2, X_{im2} = X_2 \sin \varphi_2.
\end{aligned}
\tag{22}$$

Подставляя в (21) $\bar{X}_1 = X_{rel} + i X_{im1}$, $\bar{X}_2 = X_{re2} + i X_{im2}$, приравнивая мнимые и вещественные части, запишем полученные таким образом вещественные соотношения в виде:

$$\begin{aligned}
-\omega X_{im1} \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 - \omega X_{im2} \alpha &= F_1 + (m_1 \omega^2 - c_1) X_{rel} - c_2 X_{re2}, \\
\omega X_{rel} \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \omega X_{re2} \alpha &= (m_1 \omega^2 - c_1) X_{im1} - c_2 X_{im2}, \\
0 \cdot \alpha_1 - \omega X_{im2} \alpha_2 - \omega X_{im1} \alpha &= -c_1 X_{rel} + (m_2 \omega^2 - c_2) X_{re2}, \\
0 \cdot \alpha_1 + \omega X_{re2} \alpha_2 + \omega X_{rel} \alpha &= (m_2 \omega^2 - c_2) X_{im2} - c_1 X_{im1}.
\end{aligned}
\tag{23}$$

Правые части (23) (которые можно подсчитать для каждого a -го эксперимента при $\omega = \omega_a$, $F_1 = F_{1a}$, известных массах и жесткостях и замеренных $X_{rel,2}^{(a)}$, $X_{im1,2}^{(a)}$) обозначим соответственно Y_{1a}^* , Y_{2a}^* , Y_{3a}^* , Y_{4a}^* . Тогда соотношения (23) для всей совокупности результатов m экспериментов можно представить в виде

$$\bar{Y}_\Sigma = \bar{K}_\Sigma \cdot \bar{\theta},
\tag{24}$$

где $\bar{Y}_\Sigma = (Y_{11}^*, Y_{21}^*, Y_{31}^*, Y_{41}^*, \dots, Y_{1m}^*, Y_{2m}^*, Y_{3m}^*, Y_{4m}^*)^T$ --

вектор-столбец размерностью $4m$;

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\dot{x} + cx + qy &= me\omega^2 \cos\omega t, \\ m\ddot{y} + b\dot{y} + cy - qx &= me\omega^2 \sin\omega t. \end{aligned} \quad (26)$$

В (26) обозначено:

x, y – координаты центра ротора относительно неподвижной системы отсчёта,
 m, b, c, q – соответственно эквивалентная масса, коэффициенты сопротивления, жёсткости и циркуляционных сил,
 e – эксцентриситет центра масс ротора,
 ω -- частота вращения ротора.

Для роторов центробежных машин коэффициенты b, c, q обычно обуславливаются сложными гидродинамическими процессами в жидкостных слоях подшипников и уплотнений. Расчёт этих процессов сопряжён с определёнными трудностями и не всегда даёт удовлетворительные для практики результаты.

Поставим задачу оценивания этих коэффициентов по данным замера амплитуд и фаз колебаний ротора.

Рассмотрим случай прямой синхронной прецессии неуравновешенного ротора. Пусть при каком-то a -ом эксперименте замерены частота вращения ω_a , амплитуда колебаний центра ротора Z_a и фаза относительно метки φ_a . Эксцентриситет e будем считать известным, равно как и расположение дисбаланса (в плоскости метки).

Уравнения (26) в «спрессованной» форме ($z=x+iy$) записываются в виде

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + cz - iqz = me\omega^2 \exp(i\omega t).$$

Подставим в это уравнение решение для синхронной прецессии

$$z = Z_a \exp(i(\omega_a t + \varphi_a)).$$

После сокращения на $\exp(i\omega t)$ и приравнивания справа и слева соответственно действительных и мнимых частей получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} Z_a c + 0 \cdot b + 0 \cdot q &= Z_a \omega_a^2 m + m e \omega_a^2 \cos \varphi_a, \\ 0 \cdot c - Z_a \omega_a b + Z_a q &= m e \omega_a^2 \sin \varphi_a. \end{aligned} \quad (27)$$

Обозначив правые части (27) соответственно через Y_{1a}^*, Y_{2a}^* , можем записать для всей совокупности m экспериментов ($a = \overline{1, m}$):

$$\overline{Y}_\Sigma = \overline{K}_\Sigma \overline{\theta},$$

где \overline{Y}_Σ -- вектор-столбец размерностью $2m$, $\overline{\theta}$ -- вектор оцениваемых параметров,

$$\begin{aligned} \overline{Y}_\Sigma &= (Y_{11}^*, Y_{21}^*, \dots, Y_{1m}^*, Y_{2m}^*)^T; \\ \overline{\theta} &= (c, b, q)^T; \end{aligned}$$

\overline{K}_Σ -- сводная матрица коэффициентов влияния по всем экспериментам размерностью $2m \times 3$;

оценивание параметров реализуется с помощью формулы линейной регрессии

$$\hat{\theta} = [\overline{K}_{\Sigma}^T \cdot \overline{K}_{\Sigma}]^{-1} \cdot \overline{K}_{\Sigma} \cdot \overline{y}^*.$$

Определив по этой формуле оценки $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_l; \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m$, далее тем или иным способом вычисляются оценки остальных параметров $\hat{\theta}_{l+1}, \dots, \hat{\theta}_{l+m}$ путём, например, численного решения системы нелинейных алгебраических уравнений

$$f_i(\theta_{l+1}, \dots, \theta_{l+m}) = \hat{f}_i (i = \overline{1, m}).$$

В качестве примера рассмотрим математическую модель некоторой системы автоматического регулирования, дифференциальное уравнение которой, записанное в символической форме, имеет вид

$$(T_0 T_1 T_2 p^3 + T_2 (T_0 + T_1) p^2 + T_2 p + K) S = (T_1 T_2 p^2 + T_2 p) f.$$

В этом уравнении обозначено:

$p = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования,

S – регулируемая величина,

f – возмущающее воздействие,

K – коэффициент усиления системы,

T_0, T_1, T_2 – постоянные времени соответственно объекта, измерительного устройства и серводвигателя.

Предположим, проведен эксперимент, заключающийся в воспроизведении возмущающего воздействия в виде гармонического сигнала

$$f(t) = H \sin(\omega t)$$

и замере амплитуды S и фазы φ регулируемой величины

$$s(t) = S \sin(\omega t + \varphi).$$

Следуя методу комплексных амплитуд, положим

$$\bar{f}(t) = H \exp(i\omega t), \bar{s}(t) = \bar{S} \exp(i\omega t),$$

где $\bar{S} = S_r + iS_i$ – искомая комплексная амплитуда, вещественную и мнимую части которой можно вычислить по экспериментальным данным:

$$S_r = S \cos \varphi, S_i = S \sin \varphi.$$

Подставив комплексные правую часть и решение в исходное уравнение, полагая при этом формально $p = i\omega$, получим после очевидных алгебраических преобразований расчётные соотношения для определения S_r, S_i :

$$\begin{aligned} (K - \omega^2 T_2 (T_0 + T_1)) S_r + (\omega^3 T_0 T_1 T_2 - \omega T_2) S_i &= -\omega^2 T_1 T_2 H, \\ (\omega T_2 - \omega^3 T_0 T_1 T_2) S_r + (K - \omega^2 T_2 (T_0 + T_1)) S_i &= \omega T_2 H. \end{aligned}$$

Поставим задачу оценивания постоянных времени T_1, T_2 по экспериментально измеренным параметрам H, ω, S_r, S_i ,

считая параметры K и T_0 достоверно известными.
Полученные уравнения перепишем в виде

$$\begin{aligned}
 -\omega (S_i + \omega T_0 S_r) T_2 + \omega^2 (H - S_r + \omega T_0 S_i) T_1 T_2 &= -K S_r, \\
 -\omega (H - S_r + \omega T_0 S_i) T_2 - \omega^2 (S_i + \omega T_0 S_r) T_1 T_2 &= -K S_i.
 \end{aligned}$$

Данная модель относительно оцениваемых параметров $T_1 T_2$ является нелинейной. Однако, замечая, что если нелинейную функцию $f(T_1, T_2) = T_1, T_2$ положить равной некоторому параметру f_1 , подлежащему оцениванию, то система примет вид линейной относительно букв T_2 и f_1 .

Предположим, проведено n экспериментов, в каждом j -м из которых замерены $\omega_j, H_j, S_{rj}, S_{ij}$. Тогда получим матричное соотношение

$$\bar{y} = \bar{K} \bar{\theta},$$

где $\bar{\theta} = (T_2, f_1)^T$ – вектор оцениваемых параметров;

$\bar{y} = (-K S_{r1}, -K S_{i1}, \dots, -K S_{rn}, -K S_{in})^T$ – вектор измеряемых величин размерностью $2n$;

\bar{K} – матрица размерностью $2n \cdot 2$, каждый коэффициент которой нетрудно выписать и вычислить в соответствии с уравнениями модели.

Для численного эксперимента положим $T_0 = 1c, T_1 = 0.5c, T_2 = 0.8c, K = 10$. Предполагаем, что проведено два эксперимента с частотами возмущающей силы $\omega_1 = 1c^{-1}, \omega_2 = 2c^{-1}$ и амплитудой $H_1 = H_2 = 1$. Решая при заданных параметрах систему исходных уравнений, находим

$$S_{r1} = -0.041, S_{i1} = 0.093, S_{r2} = -0.368, S_{i2} = 0.195.$$

Округляя полученные значения до двух значащих цифр (имитируя таким образом измерение «экспериментальных» величин с точностью до 5%), рассчитываем элементы матрицы \bar{K} и столбца \bar{y} :

$$K := \begin{pmatrix} -0.052 & 1.1 \\ -1.1 & -0.052 \\ 1.1 & 7.0 \\ -3.5 & 2.2 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} .41 \\ -.93 \\ 3.7 \\ -2.0 \end{pmatrix}.$$

Далее, воспользовавшись комплексом Mathcad, находим

$$\bar{\theta} = [\bar{K}^T \bar{K}]^{-1} \cdot \bar{K}^T \cdot \bar{y} = \begin{bmatrix} .823 \\ .400 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получаем оценки

$$T_2 = 0.823, T_1 = 0.4 / 0.823 = 0.486.$$

Погрешность результатов оценивания не превышает 3%.

Предложенный способ оценивания параметров нелинейных моделей с помощью представления их в квазилинейной форме позволяет в ряде случаев снять вычислительные проблемы, связанные с задачами нелинейного оценивания.

$$\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{W}} \overline{\overline{D}}, \quad (28)'$$

где $\overline{\overline{Y}} = (\overline{\overline{Y}}_1, \dots, \overline{\overline{Y}}_k)^T$ – вектор-столбец комплексных амплитуд;

$\overline{\overline{D}} = (\overline{\overline{D}}_1, \dots, \overline{\overline{D}}_l)^T$ – вектор-столбец комплексных дисбалансов;

$\overline{\overline{W}}$ – матрица $k \times l$ комплексных коэффициентов влияния $\overline{\overline{W}}_{aj}$ ($a = 1, k; j = 1, l$).

К системе (28)' для оценивания комплексных дисбалансов на основе измеренных комплексных прогибов непосредственно формулу линейной регрессии (15) применять нельзя. Необходимо составить соотношения относительно «вытянутых» векторов с вещественными компонентами [9]. Вектору комплексных амплитуд $\overline{\overline{Y}}$ размерностью k поставим в соответствие вектор вещественных составляющих $\overline{\overline{Y}}$ размерностью $2k$:

$$\overline{\overline{Y}} = (Y_1^{(r)}, Y_1^{(i)}, Y_2^{(r)}, Y_2^{(i)}, \dots, Y_k^{(r)}, Y_k^{(i)})^T. \quad (29)$$

Соответственно введем «вытянутый» вектор размерностью $2l$ вещественных составляющих дисбалансов:

$$\overline{\overline{D}} = (D_1^{(r)}, D_1^{(i)}, D_2^{(r)}, D_2^{(i)}, \dots, D_l^{(r)}, D_l^{(i)})^T. \quad (30)$$

Рассмотрим теперь матрицу $2k \times 2l$ вещественных компонентов $\overline{\overline{W}}$, которая имеет структуру

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} W_{11}^{(r)}, -W_{11}^{(i)}, W_{12}^{(r)}, -W_{12}^{(i)}, \dots, W_{1l}^{(r)}, -W_{1l}^{(i)} \\ W_{11}^{(i)}, W_{11}^{(r)}, W_{12}^{(i)}, W_{12}^{(r)}, \dots, W_{1l}^{(i)}, W_{1l}^{(r)} \\ \dots \\ W_{k1}^{(r)}, -W_{k1}^{(i)}, W_{k2}^{(r)}, -W_{k2}^{(i)}, \dots, W_{kl}^{(r)}, -W_{kl}^{(i)} \\ W_{k1}^{(i)}, W_{k1}^{(r)}, W_{k2}^{(i)}, W_{k2}^{(r)}, \dots, W_{kl}^{(i)}, W_{kl}^{(r)} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

где произвольный коэффициент матрицы \overline{W} определяется соотношением

$$\overline{W}_{aj} = W_{aj}^{(r)} + iW_{aj}^{(i)} \quad (a = \overline{1, k}; j = \overline{1, l}).$$

Нетрудно убедиться, что комплексно-матричному соотношению (28)' будет соответствовать вещественное матричное соотношение

$$\overline{Y} = \overline{W} \overline{D}, \quad (32)$$

где структура столбцов \overline{Y} и \overline{D} определяется выражениями (29), (30).

К соотношению (32) теперь уже может быть применена формула (15). И тогда систему дисбалансов \overline{D} можно оценить по вектору замеренных прогибов \overline{Y}^* согласно соотношению

$$\hat{\overline{D}} = \left[\overline{W}^T \overline{W} \right]^{-1} \overline{W}^T \overline{Y}^*. \quad (33)$$

В случае, если балансировка выполняется по данным замеров на нескольких частотах ω_ν ($\nu = \overline{1, n}$), вектор $\overline{\overline{Y}}$ будет иметь размерность $(k \times n)$:

$$\overline{\overline{Y}} = (\overline{Y}_1^{(1)}, \dots, \overline{Y}_k^{(1)}; \dots; \overline{Y}_1^{(n)}, \dots; \overline{Y}_k^{(n)})^T,$$

а «вытянутый» вектор \overline{Y} -- размерность $2 * k * n$:

$$\overline{Y} = (Y_{11}^{(r)}, Y_{11}^{(i)}, \dots, Y_{k1}^{(r)}, Y_{k1}^{(i)}; \dots; Y_{1n}^{(r)}, Y_{1n}^{(i)}, \dots, Y_{kn}^{(r)}, Y_{kn}^{(i)})^T.$$

При этом матрица \overline{W} «вытянется» в n раз по вертикали и будет иметь размерность $(2k * n) * l$:

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} \overline{W}_1 \\ \cdot \\ \cdot \overline{W}_\nu \\ \cdot \\ \overline{W}_n \end{bmatrix},$$

где каждая матрица \overline{W}_ν ($\nu = \overline{1, n}$) имеет структуру матрицы \overline{W} (49).

Пусть в k точках ротора при некоторых частотах вращения ω_ν ($\nu = \overline{1, n}$) измерены комплексные амплитуды $\overline{Y}_a^{*(\nu)}$ ($a = \overline{1, k}, \nu = \overline{1, n}$). Пусть далее в некоторых l точках (плоскостях коррекции) намечено установить уравнивающие дисбалансы \overline{D}_{δ_j} ($j = \overline{1, l}$). Задача заключается в оценивании группы некоторых

комплексных дисбалансов \bar{D}_j ($j = \overline{1, l}$) в предположении, что они расположены в плоскостях коррекции и вызывают те же прогибы \bar{Y}_a в измеряемых точках, что и истинная совокупность дисбалансов. Если мы оценим эти дисбалансы по формуле (33), т.е. найдем

$$\hat{\bar{D}}_j = D_j^{(r)} + iD_j^{(i)}$$

и соответственно

$$\left| \hat{\bar{D}}_j \right| = \sqrt{(D_j^{(r)})^2 + (D_j^{(i)})^2}, \quad \varphi_j = \arg \hat{\bar{D}}_j \quad (j = \overline{1, l}),$$

то процесс балансировки сведется к установке в плоскостях коррекции уравновешивающих дисбалансов (рис. 2), равных

$$D_{\delta j} = \left| \bar{D}_j \right|,$$

под углами $\varphi_{\delta j}$, отсчитываемыми по вращению от метки, равными

$$\varphi_{\delta j} = \varphi_j + 180^\circ \quad (j = \overline{1, l}).$$

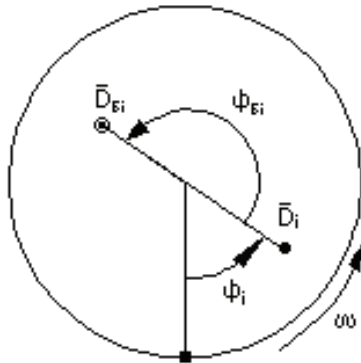


Рисунок 2

Программа оценивания дисбалансов по описанной выше методике содержит такие подпрограммы:

а) расчета вынужденных колебаний неконсервативной модели ротора методом конечных элементов;

б) формирования комплексной матрицы коэффициентов влияния $\overline{W}[(n * k) * I]$ и вещественной $\overline{W}[(2k * n) * 2I]$;

в) реализации формулы линейной регрессии (51). Каждый комплексный коэффициент влияния $\overline{W}_{aj}^{(\nu)}$ определяется по подпрограмме расчета вынужденных колебаний как комплексный прогиб \overline{Y}_a от единичного дисбаланса $D = 1$ в точке j при частоте ω_ν .

Приведенная выше методика оценивания дисбалансов требует одного замера комплексных прогибов $\overline{Y}_a^{*(\nu)}$ ($a = \overline{1, k}$; k - число точек измерения, $\nu = \overline{1, n}$). Она может дать практически удовлетворительный результат

при достаточном уровне адекватности расчетной модели реальному ротору.

1.9.2 Практическая балансировка гибкого ротора на рабочей частоте

На практике комплексные коэффициенты влияния \overline{W}_{aj} получают экспериментально. Для этого необходимо выполнить $(l+1)$ измерений комплексных амплитуд, устанавливая пробный дисбаланс в каждой из l плоскостей коррекции. В k точках ротора измеряют на рабочей частоте комплексные прогибы:

$$\overline{Y}_0^* = (\overline{Y}_{10}^*, \overline{Y}_{20}^*, \dots, \overline{Y}_{k0}^*)^T \text{ - нулевой запуск;}$$

$$\overline{Y}_1^* = (\overline{Y}_{11}^*, \overline{Y}_{21}^*, \dots, \overline{Y}_{k1}^*)^T \text{ - первый запуск;}$$

.....

$$\overline{Y}_l^* = (\overline{Y}_{1l}^*, \overline{Y}_{2l}^*, \dots, \overline{Y}_{kl}^*)^T \text{ - } l\text{-й запуск.}$$

Нулевой запуск есть запуск ротора в исходном состоянии. В первом запуске устанавливается пробный дисбаланс в плоскости метки в первой плоскости коррекции. Далее во второй, третьей, вплоть до установки пробного дисбаланса в последней, k -й плоскости коррекции.

Можем записать в матричной форме

$$\overline{Y}_0^* = \overline{W} \overline{D}, \tag{34}$$

где $\overline{D} = (\hat{D}_1, \hat{D}_2, \dots, \hat{D}_l)$ - вектор оцениваемых дисбалансов.

Введем понятие j -го вектора пробных дисбалансов

$$\overline{\overline{D}}_{jnp} = (0; \dots; D_{np}; \dots 0) \quad (j = \overline{1, l})$$

как «совокупности» дисбалансов, состоящей из одного пробного дисбаланса D_{np} , установленного в j -й плоскости коррекции:

$$\overline{\overline{D}}_{1np} = (D_{np}; 0; \dots; 0),$$

$$\overline{\overline{D}}_{2np} = (0; D_{np}; 0; \dots; 0),$$

.....

$$\overline{\overline{D}}_{lnp} = (0; \dots; 0; D_{np}).$$

Тогда для j -го пуска будет иметь место соотношение

$$\overline{\overline{Y}}_j^* = \overline{\overline{W}} (\overline{\overline{D}} + \overline{\overline{D}}_{jnp}). \quad (35)$$

Вычитая из (35) для каждого j ($j = \overline{1, l}$) (34), определим матрицу $k \times l$ комплексных коэффициентов влияния, каждый элемент которой будет равен

$$\hat{W}_{aj} = \frac{\overline{\overline{Y}}_{aj}^* - \overline{\overline{Y}}_{a0}^*}{D_{np}} \quad (a = \overline{1, k}; j = \overline{1, l}). \quad (36)$$

Далее, исходя из экспериментально таким образом найденных коэффициентов влияния \hat{W}_{aj} , по методике, описанной в разд. 1.8.1, оценивается искомый набор

дисбалансов \hat{D} согласно формуле (33) и производится расчет уравнивающих дисбалансов.

Для более четкого понимания получения формул (36) повторим их вывод в скалярной форме при $k=3$, $l=2$. Искомая матрица в этом случае имеет структуру

$$\overline{\overline{W}} = \begin{bmatrix} \hat{W}_{11} & \hat{W}_{12} \\ \hat{W}_{21} & \hat{W}_{22} \\ \hat{W}_{31} & \hat{W}_{32} \end{bmatrix}.$$

Соотношение (34) имеет вид в скалярно-комплексной форме:

$$\begin{aligned} \overline{Y}_{10}^* &= \overline{W}_{11} \overline{D}_1 + \overline{W}_{12} \overline{D}_2, \\ \overline{Y}_{20}^* &= \overline{W}_{21} \overline{D}_1 + \overline{W}_{22} \overline{D}_2, \\ \overline{Y}_{30}^* &= \overline{W}_{31} \overline{D}_1 + \overline{W}_{32} \overline{D}_2. \end{aligned} \tag{37}$$

Для первого пуска следует записать:

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_{11}^* &= \bar{W}_{11}(\bar{D}_1 + D_{np}) + \bar{W}_{12}\bar{D}_2, \\
\bar{Y}_{21}^* &= \bar{W}_{21}(\bar{D}_1 + D_{np}) + \bar{W}_{22}\bar{D}_2, \\
\bar{Y}_{31}^* &= \bar{W}_{31}(\bar{D}_1 + D_{np}) + \bar{W}_{32}\bar{D}_2.
\end{aligned}
\tag{38}$$

Вычитая из соотношений (38) соответствующие соотношения (37), получим:

$$\begin{aligned}
\bar{W}_{11} &= \frac{(\bar{Y}_{11}^* - \bar{Y}_{10}^*)}{D_{np}}, \quad \bar{W}_{21} = \frac{(\bar{Y}_{21}^* - \bar{Y}_{20}^*)}{D_{np}}, \\
\bar{W}_{31} &= \frac{(\bar{Y}_{31}^* - \bar{Y}_{30}^*)}{D_{np}}.
\end{aligned}$$

Аналогично, записав соотношения для второго пуска и проделав соответствующие вычитания, можем записать:

$$\begin{aligned}
\bar{W}_{12} &= \frac{(\bar{Y}_{12}^* - \bar{Y}_{10}^*)}{D_{np}}, \quad \bar{W}_{22} = \frac{(\bar{Y}_{22}^* - \bar{Y}_{20}^*)}{D_{np}}, \\
\bar{W}_{32} &= \frac{(\bar{Y}_{32}^* - \bar{Y}_{30}^*)}{D_{np}}.
\end{aligned}$$

1.9.3 Использование формулы линейной регрессии при балансировке гибких роторов способом Ден-Гартога

Способ Ден-Гартога применяется при балансировке роторов, рабочие частоты которых определяются некоторым диапазоном

$$\omega_{p \min} < \omega_p < \omega_{p \max}.$$

В этом диапазоне могут находиться одна или несколько критических частот.

Пусть мы выбрали l плоскостей коррекции, где будут устанавливаться уравнивающие грузы (рис.3).

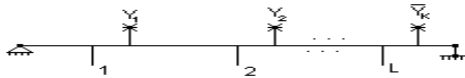


Рисунок 3

На ряде n частот в интервале

$$\omega_{p \min} \leq \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \leq \omega_{p \max}$$

делаются замеры комплексных амплитуд в некоторых k точках измерения $\bar{Y}_{10}^{(\nu)}, \bar{Y}_{20}^{(\nu)}, \dots, \bar{Y}_{k0}^{(\nu)}$ ($\nu = \overline{1, n}$). Далее в плоскости метки устанавливается пробный груз D_{Π} последовательно в первой, второй и т.д. плоскостях

линейных уравнений с комплексными коэффициентами для оценивания l комплексных уравновешивающих дисбалансов $\overline{D}_{1\delta}, \dots, \overline{D}_{l\delta}$.

Рассмотрим систему комплексных уравнений (40) в случае, когда число уравнений, равное $n \times k$, больше числа плоскостей коррекции l . Тогда эту систему можно привести к виду (28)', где

$$\overline{\overline{D}} = (\overline{D}_{1\delta}, \overline{D}_{2\delta}, \dots, \overline{D}_{l\delta})^T -$$

искомый вектор комплексных уравновешивающих балансов;

$$\overline{\overline{Y}} = (-\overline{Y}_{10}^{(1)}, -\overline{Y}_{20}^{(1)}, \dots, -\overline{Y}_{k0}^{(1)}; -\overline{Y}_{10}^{(2)}, -\overline{Y}_{20}^{(2)}, \dots, -\overline{Y}_{k10}^{(2)}; \dots, -\overline{Y}_{10}^{(n)}, -\overline{Y}_{20}^{(n)}, \dots, -\overline{Y}_{k10}^{(n)})^T$$

- вектор размерностью $n \times k$ взятых со знаком минус комплексных амплитуд нулевого пуска;

$$\overline{\overline{W}} = \begin{bmatrix} \overline{W}_{11}^{(1)}, \overline{W}_{12}^{(1)}, \dots, \overline{W}_{1l}^{(1)} \\ \dots \dots \dots \\ \overline{W}_{k1}^{(1)}, \overline{W}_{k2}^{(1)}, \dots, \overline{W}_{kl}^{(1)} \\ \dots \dots \dots \\ \overline{W}_{11}^{(n)}, \overline{W}_{12}^{(n)}, \dots, \overline{W}_{1l}^{(n)} \\ \dots \dots \dots \\ \overline{W}_{k1}^{(n)}, \overline{W}_{k2}^{(n)}, \dots, \overline{W}_{kl}^{(n)} \end{bmatrix} - \text{ матрица}$$

размерностью $(n \times k) \times l$ комплексных коэффициентов влияния. Эти коэффициенты \bar{W}_{ai}^{ν} ($a = \overline{1, k}; i = \overline{1, l}; \nu = \overline{1, n}$) определяются по экспериментально измеренным амплитудам согласно формулам (39). Далее искомым «вытянутый» вектор уравнивающих дисбалансов $\bar{D} = (D_{1\delta}^{(r)}, D_{1\delta}^{(i)}, \dots, D_{l\delta}^{(r)}, D_{l\delta}^{(i)})^T$ определяется, в конечном счете, согласно матричному соотношению (33), как это было описано выше в разд. 1.8.1.

1.10. Использование методов идентификации для создания упрощённых дискретных моделей.

Существующие методы и программы расчёта динамики роторов (например, методом конечных элементов (МКЭ)) позволяют определить критические частоты и формы собственных и вынужденных колебаний синхронной прецессии.

В то же время исследование таких сложных явлений, как потеря устойчивости, появление несинхронных автоколебательных составляющих, остаются вне возможностей расчёта по этим программам. Эти явления могут быть исследованы только с помощью численного интегрирования нелинейных уравнений дискретной модели движения ротора. Ранее рассматривались одно массовые (реже – двух массовые) модели, с помощью которых удавалось выявить некоторые общие закономерности. Однако для не только качественного, но и достаточно достоверного количественного исследования динамики ротора одно массовой модели недостаточно. Нужны дискретные 3-, 4-массовые модели, в полной мере отражающие динамические свойства реальной конструкции и

открывающие возможность учёта неконсервативных нелинейных сил в подшипниках, а также эффекты, связанные с наличием внутреннего трения. Такие модели могут оказаться также целесообразными при разработке систем управления активными магнитными подшипниками турбокомпрессоров с гибкими роторами. Использование этих моделей с учётом имеющихся в настоящее время эффективных программ численного интегрирования систем дифференциальных уравнений (Maple, Mathcad) открывает широкие возможности для исследования динамики роторов энергетических машин.

Для решения перечисленных выше задач разработан метод построения дискретной модели роторов с ограниченным числом масс.

Расчетная схема дискретной модели ротора имеет вид, представленный на рис. 4. В отличие от работ [3,4] изложенный ниже вариант метода допускает расположение дискретных масс, смещенными с опорных узлов [17]. Это целесообразно, в частности, в случае весьма высокой жесткости подшипников, что подтверждается малой величиной погрешности для значений собственных частот при переходе от КЭ-модели к дискретной.

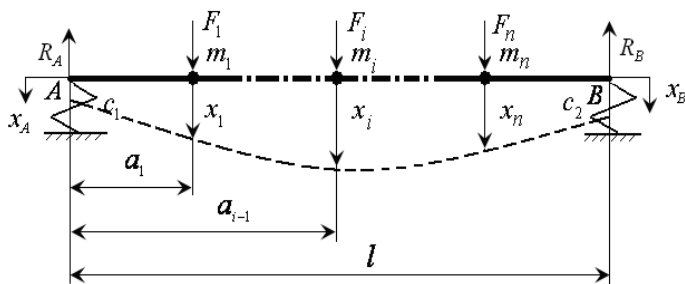


Рисунок 4 – Расчетная схема дискретной модели ротора

Предположим, что на каждую массу действует некоторая сила. Рассматривая статическую задачу, можем получить значения реакций в опорных точках

$$R_B = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n a_i F_i, R_A = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n (l - a_i) F_i \quad (41)$$

Очевидно, что смещения опорных точек будут равны

$$x_B = \frac{R_B}{c_2} = \frac{1}{c_2 l} \sum_{i=1}^n a_i F_i, x_A = \frac{R_A}{c_1} = \frac{1}{c_1 l} \sum_{i=1}^n (l - a_i) F_i \quad (42)$$

Для определения прогибов масс представим их в виде суммы

$$x_i = x_i' + x_i'' \quad (43)$$

где x_i' – составляющая прогиба в предположении, что балка абсолютно жесткая, но смещается из-за смещений опорных точек x_A и x_B ;

x_i'' – составляющая прогиба в предположении изгиба упругой балки под действием сил при абсолютно жестких опорах и.

Вторая составляющая прогиба вычисляется по формуле

$$x_i'' = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} F_j \quad (44)$$

где коэффициент податливости δ_{ij} численно равен прогибу i -ой массы при действии на j -ую массу единичной силы $F_j=1$. Коэффициенты податливости могут быть получены по программе расчета статических прогибов МКЭ-модели реального ротора.

Для нахождения первой составляющей рассмотрим перемещение жесткой балки при некоторых известных прогибах и (Рис.5).

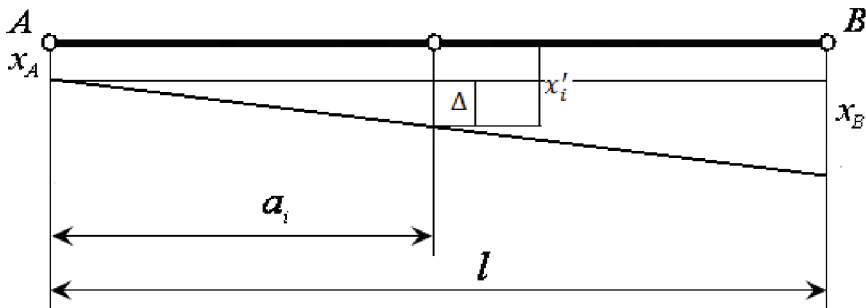


Рисунок 5 – К выводу уравнений колебаний

Очевидно, что

$$x'_i = x_A + \Delta, \quad \frac{\Delta}{a_i} = \frac{x_B - x_A}{l}.$$

Откуда следует

$$x'_i = \frac{l - a_i}{l} x_A + \frac{a_i}{l} x_B \quad (45)$$

Учитывая соотношения (42),(43),(44),(45) можем представить смещения точек расположения масс в виде классического выражения для прогибов балки:

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} F_j, \quad (46)$$

где эквивалентные коэффициенты податливости определяются по формулам

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} + \frac{(l - a_i) \cdot (l - a_j)}{c_1 \cdot l^2} + \frac{a_i \cdot a_j}{c_2 \cdot l^2}. \quad (47)$$

Эти коэффициенты могут быть получены на ПК с помощью программы расчёта вынужденных колебаний МКЭ-модели ротора. Коэффициенты α_{ij} ($i=1, n$) определяются как прогибы в i -ой точке при приложении

единичного дисбаланса в j -ой точке. При этом частоту вращения ротора удобно положить равной единице.

Уравнения свободных колебаний дискретной модели (рис.4), если, согласно принципу Даламбера, положить в уравнениях (46)

$$F_i = -m_i \cdot \ddot{x}_i \quad , \quad (48)$$

примут классический вид уравнений в обратной форме

$$x_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot m_j \cdot \ddot{x}_j = 0 \quad . \quad (49)$$

В качестве примера рассмотрим дискретную трех массовую линейную консервативную модель (рис.6).

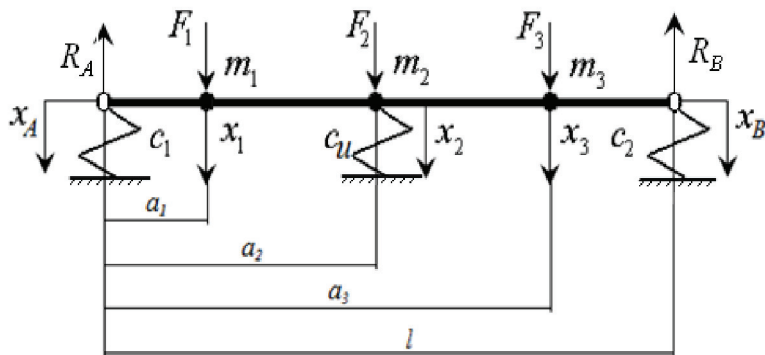


Рисунок 6 – трех массовая модель ротора

Решая задачу нахождения собственных частот и форм (как это было проделано для записи дискретной модели в

прямой форме в разд.1.6) и приняв в качестве оцениваемых параметров массы дискретной модели, определяем значения этих масс с помощью формулы линейной регрессии:

$$\hat{m} = [\bar{B}^T \cdot \bar{B}]^{-1} \bar{B}^T \cdot \bar{D} \quad (50)$$

В случае оценивания по двум первым собственным формам и частотам выражения для матриц В и D примут вид:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_{11}; \alpha_{12} \cdot U_{21}; \alpha_{13} \cdot U_{31} \\ \alpha_{21}; \alpha_{22} \cdot U_{21}; \alpha_{23} \cdot U_{31} \\ \alpha_{31}; \alpha_{32} \cdot U_{21}; \alpha_{33} \cdot U_{31} \\ \alpha_{11}; \alpha_{12} \cdot U_{22}; \alpha_{13} \cdot U_{32} \\ \alpha_{21}; \alpha_{22} \cdot U_{22}; \alpha_{23} \cdot U_{32} \\ \alpha_{31}; \alpha_{32} \cdot U_{22}; \alpha_{33} \cdot U_{32} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot (1 + \alpha_{12} \cdot c_u \cdot U_{21}) \\ \lambda_1 \cdot U_{21} \cdot (1 + \alpha_{22} \cdot c_u) \\ \lambda_1 \cdot (U_{31} + \alpha_{32} \cdot c_u \cdot U_{21}) \\ \lambda_2 \cdot (1 + \alpha_{12} \cdot c_u \cdot U_{22}) \\ \lambda_2 \cdot U_{22} \cdot (1 + \alpha_{22} \cdot c_u) \\ \lambda_2 \cdot (U_{32} + \alpha_{32} \cdot c_u \cdot U_{22}) \end{bmatrix}$$

где U_{ij} - относительные амплитуды первой и второй собственных форм (i – номер массы, j – номер собственной частоты, $U_{1j} = 1$);

$c_{уп}$ - жесткость щелевых уплотнений;

$\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2}; \lambda_2 = \frac{1}{\omega_2^2}$ - величины, обратные

соответственно 1-й и 2-й собственной частоте вращения ротора. Амплитуды собственных форм и собственные частоты берутся из расчёта МКЭ-модели ротора.

На основе полученных таким образом дискретных моделей роторных систем могут быть построены

нелинейные модели путём добавления в уравнениях (49) нелинейных слагаемых, учитывающих, например, нелинейности квазиупругих, циркуляционных и демпфирующих составляющих реакций подшипников скольжения [18, 19, 20].

Часть 2. Практические занятия.

2.1. Занятие 1. Составление матричных соотношений для задач линейного оценивания. Колебательные модели в виде уравнений, записанных в прямой форме.

Задача 1. 1. Для схемы, представленной на рис.7:

- 1) составить дифференциальное уравнение вынужденных колебаний;
- 2) составить соотношения для определения комплексных амплитуд вынужденных колебаний;
- 3) составить матрицу \bar{K} и столбец \bar{Y}^* по структуре $\bar{K} \cdot \bar{\theta} = \bar{Y}^*$

для результатов двух экспериментов:

$$f_1(t) = F_1 \cdot \sin \omega_1 t, f_2 = F_2 \cdot \sin \omega_2 t.$$

Вектор оцениваемых параметров принять следующий:

$$\bar{\theta} = (\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2)^T.$$

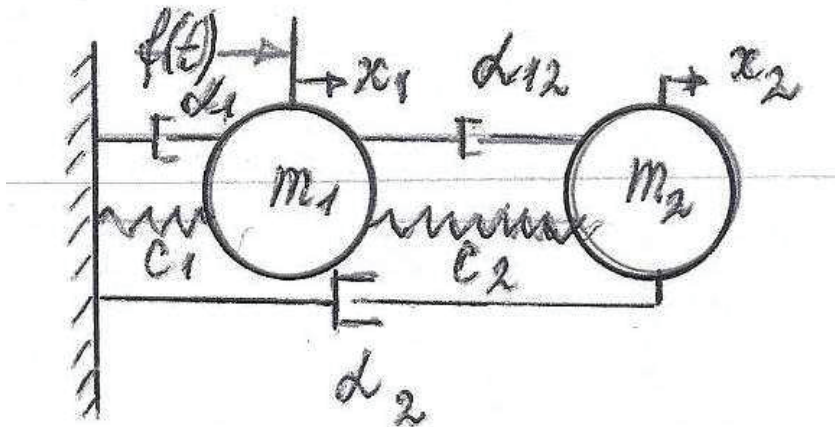


Рис.7

Решение.

- 1) Дифференциальные уравнения движения системы рис.3 записываем в прямой форме, используя второй закон Ньютона:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (\alpha_1 + \alpha_{12}) \cdot \dot{x}_1 + (c_1 + c_2) \cdot x_1 - \alpha_{12} \cdot \dot{x}_2 - c_2 \cdot x_2 = F \cdot \sin \omega t,$$

$$-\alpha_{12} \cdot \dot{x}_1 - c_2 \cdot \dot{x}_1 + m_2 \cdot \ddot{x}_2 + (\alpha_2 + \alpha_{12}) \cdot \dot{x}_2 + c_2 \cdot x_2 = 0.$$

- 2) Используя метод комплексных амплитуд, подставляем в эти уравнения комплексную правую часть и решение в виде:

$$f(t) = F \cdot \exp(i\omega t), x_1 = \overline{X}_1 \cdot \exp(i\omega t), x_2 = \overline{X}_2 \cdot \exp(i\omega t).$$

В результате после сокращения на $\exp(i\omega t)$ получим следующие алгебраические уравнения для нахождения комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} (-m_1 \cdot \omega^2 + c_1 + c_2 + i \cdot \omega \cdot (\alpha_1 + \alpha_{12})) \cdot \bar{X}_1 - (c_2 + i \cdot \omega \cdot \alpha_{12}) \cdot \bar{X}_2 &= F, \\ -(c_2 + i \cdot \omega \cdot \alpha_{12}) \cdot \bar{X}_1 + (-m_2 \cdot \omega^2 + c_2 + i \cdot \omega \cdot (\alpha_2 + \alpha_{12})) \cdot \bar{X}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Предположим, что мы измерили амплитуду X и фазу φ какого-то перемещения. Тогда вещественная и мнимая части соответствующей комплексной амплитуды

$$\bar{X} = X^{(r)} + i \cdot X^{(i)}$$

могут быть вычислены по формулам

$$X^{(r)} = X \cdot \cos \varphi, X^{(i)} = X \cdot \sin \varphi.$$

В дальнейшем эти величины будем полагать полученными экспериментально.

Подставляя в уравнения для комплексных амплитуд в виде сумм вещественных и мнимых частей, получим в итоге четыре уравнения для нахождения

$$X_1^{(r)}, X_1^{(i)}, X_2^{(r)}, X_2^{(i)},$$

которые имеют вид:

$$\begin{aligned}
&(-m_1 \cdot \omega^2 + c_1 + c_2) \cdot X_1^{(r)} - \omega \cdot (\alpha_1 + \alpha_{12}) \cdot X_1^{(i)} - c_2 \cdot X_2^{(r)} + \omega \cdot \alpha_{12} \cdot X_2^{(i)} = F, \\
&\omega \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot X_1^{(r)} + (c_1 + c_2 - m_1 \cdot \omega^2) \cdot X_1^{(i)} - \omega \cdot \alpha_{12} \cdot X_2^{(r)} - c_2 \cdot X_2^{(i)} = 0, \\
&-c_2 \cdot X_1^{(r)} + \omega \cdot \alpha_{12} \cdot X_1^{(i)} + (c_2 - m_2 \cdot \omega^2) \cdot X_2^{(r)} - \omega \cdot (\alpha_1 + \alpha_{12}) \cdot X_2^{(i)} = 0, \\
&-\omega \cdot \alpha_{12} \cdot X_1^{(r)} - c_2 \cdot X_1^{(i)} + \omega \cdot (\alpha_2 + \alpha_{12}) \cdot X_2^{(r)} + (c_2 - m_2 \cdot \omega^2) \cdot X_2^{(i)} = 0.
\end{aligned}$$

Решая «обратную» задачу, т.е. задачу оценивания требуемых параметров $\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2$, перепишем эти соотношения, относя в правую часть слагаемые, не содержащие эти коэффициенты. В конечном счёте получаем матричное соотношение вида

$$\bar{K} \cdot \bar{\theta} = \bar{Y}^*$$

где вектор оцениваемых параметров

$$\bar{\theta} = (\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2)^T,$$

вектор «измеряемых величин» для двух экспериментов имеет структуру

$$\bar{Y}^* = (Y_{11}, Y_{21}, Y_{31}, Y_{41}, Y_{12}, Y_{22}, Y_{32}, Y_{42})^T.$$

В последнем соотношении

$$\begin{aligned}
Y_{1j} &= F_j + (m_1 \cdot \omega_j^2 - (c_1 + c_2)) \cdot X_{1j}^{(r)} + c_2 \cdot X_{2j}^{(r)}, \\
Y_{2j} &= (m_1 \cdot \omega_j^2 - (c_1 + c_2)) \cdot X_{1j}^{(i)} - c_2 \cdot X_{2j}^{(i)}, \\
Y_{3j} &= c_2 \cdot X_{1j}^{(r)} + (m_2 \cdot \omega_j^2 - c_2) \cdot X_{2j}^{(r)}, \\
Y_{4j} &= c_2 \cdot X_{1j}^{(i)} + (m_2 \cdot \omega_j^2 - c_2) \cdot X_{2j}^{(i)}, \\
j &= 1, 2.
\end{aligned}$$

Матрица коэффициентов левой части для одного эксперимента имеет вид:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} -\omega \cdot X_1^{(i)} & \omega \cdot (X_2^{(i)} - X_1^{(i)}) & 0 \\ \omega \cdot X_1^{(r)} & \omega \cdot (X_1^{(r)} - X_2^{(r)}) & 0 \\ -\omega \cdot X_2^{(i)} & \omega \cdot (X_1^{(i)} - X_2^{(i)}) & 0 \\ 0 & \omega \cdot (X_2^{(r)} - X_1^{(r)}) & \omega \cdot X_2^{(r)}. \end{bmatrix}$$

В случае двух экспериментов эта матрица наращивается ещё на четыре строки, заполнение которых аналогичным образом осуществляется при новой частоте ω_2 и соответствующих замеренных при этой частоте вещественных и мнимых частей амплитуд.

Затем искомые коэффициенты оцениваются по формуле линейной регрессии

$$\bar{\theta} = \left[\bar{K}^T \cdot \bar{K} \right]^{-1} \cdot \bar{K}^T \cdot \bar{Y}^*.$$

Задача 1.2. Для системы рис.7

составить матрицу \bar{K} и столбец \bar{Y}^* по структуре

$$\bar{K} \cdot \bar{\theta} = \bar{Y}^*$$

для результатов двух экспериментов:

$$f_1(t) = F_1 \cdot \sin \omega_1 t, f_2 = F_2 \cdot \sin \omega_2 t,$$

приняв в качестве оцениваемых параметров вектор-столбец

$$\bar{\theta} = (c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2)^T.$$

Примечание: задачу 2 в случае, если время аудиторного практического занятия уйдёт на решение первой задачи, можно выдать студентам в качестве самостоятельной домашней работы.

2.2. Занятие 2. Составление матричных соотношений для задач линейного оценивания. Колебательные модели в виде одного уравнения высокого порядка.

Задача 2.1. Для математической модели, представляющей собой дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\ddot{x} + a_1 \cdot \dot{x} + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x = f(t), \quad (1)$$

составить матрицу \bar{K} и столбец \bar{Y}^* по структуре

$$\bar{K} \cdot \bar{\theta} = \bar{Y}^*$$

для результатов экспериментов

$$f_i = F_i \cdot \sin \omega_i t, i = 1 \dots k,$$

k – число экспериментов.

Вектор оцениваемых параметров принять следующий:

$$\bar{\theta} = (a_1, a_2, a_3)^T.$$

Решение. Применяя метод комплексных амплитуд, подставим в уравнение (1)

$$\bar{f}(t) = F \cdot \exp(i\omega t), \bar{x}(t) = (X^{(r)} + i \cdot X^{(i)}) \cdot \exp(i\omega t).$$

После очевидных алгебраических преобразований получим систему двух алгебраических уравнений для нахождения искомых вещественных и мнимых частей комплексной амплитуды:

$$\begin{aligned} (-a_1 \cdot \omega^2 + a_3) \cdot X^{(r)} + (\omega^3 - a_2 \cdot \omega) \cdot X^{(i)} &= F, \\ -(\omega^3 - a_2 \cdot \omega) \cdot X^{(r)} + (-a_1 \cdot \omega^2 + a_3) \cdot X^{(i)} &= 0. \end{aligned}$$

Перенеся вправо слагаемые, не содержащие множители a_i , матрицу \bar{K} и столбец \bar{Y}^* для одного эксперимента получаем в виде:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 \cdot X_1^{(r)} & -\omega_1 \cdot X_1^{(i)} & X_1^{(r)} \\ -\omega_1^2 \cdot X_1^{(i)} & \omega_1 \cdot X_1^{(r)} & X_1^{(i)} \end{bmatrix},$$

$$\bar{Y}^* = (F_1 - \omega_1^3 \cdot X_1^{(i)}; \omega_1^3 \cdot X_1^{(r)})^T.$$

В случае k экспериментов матрица увеличивается на $2 \times (k-1)$ строк (аналогично с индексами $2, \dots, k$), столбец правых частей «растягивается» ещё на $2 \times (k-1)$ элементов (аналогично первым двум, но с индексами $2, \dots, k$).

Задача 2.2. Для системы с обратной связью, математическая модель которой представлена в виде структурной схемы (рис.8):

- 1) составить дифференциальное уравнение вынужденных колебаний относительно регулируемой величины $s(t)$;
- 2) составить соотношения для определения комплексных амплитуд вынужденных колебаний;
- 3) составить матрицу оценивания \bar{K} и столбец правых частей \bar{Y}^* по структуре

$$\bar{K} \cdot \bar{\theta} = \bar{Y}^*$$

для результатов экспериментов

$$f_j = F_j \cdot \sin \omega_j t, j = 1 \dots k,$$

k – число экспериментов.

Вектор оцениваемых параметров принять следующий:

$$\bar{\theta} = (K, T_1)^T.$$

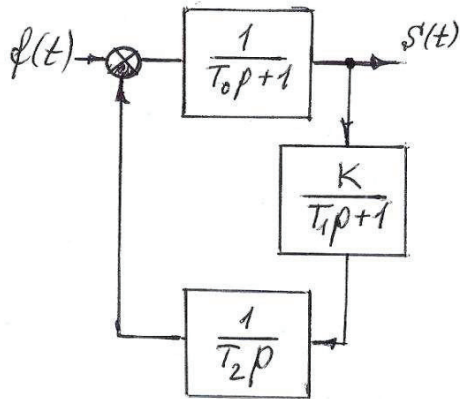


Рис.8

Решение. 1) Операторное выражение для передаточной функции замкнутой системы получаем в виде

$$\frac{S}{F} = \frac{\frac{1}{T_0 \cdot p + 1}}{1 + \frac{K}{(T_0 p + 1) \cdot (T_1 p + 1) \cdot T_2 p}} = \frac{T_1 T_2 p^2 + T_2 P}{T_0 T_1 T_2 p^3 + (T_0 + T_1) T_2 p^2 + T_2 p + K}.$$

Откуда дифференциальное уравнение системы в операторной форме можем записать так:

$$(T_0 T_1 T_2 p^3 + (T_0 + T_1) T_2 p^2 + T_2 p + K) s = (T_1 T_2 p^2 + T_2 p) f.$$

2) Подставим в это уравнение правую часть и решение в виде

$$\bar{f}(t) = F \cdot \exp(i\omega t), \bar{s}(t) = (S^{(r)} + i \cdot S^{(i)}) \cdot \exp(i\omega t).$$

После сокращения на $\exp(i\omega t)$ можем записать, перенеся вправо все слагаемые, не содержащие оцениваемые параметры K и T_2 , соотношения для их оценивания в виде:

$$\begin{aligned} S^{(r)} \bullet K + (-\omega^2 T_2 S^{(r)} + \omega^3 T_0 T_2 S^{(i)} + F T_2) \bullet T_1 &= \\ = \omega^2 T_0 T_2 S^{(r)} + \omega T_2 S^{(i)}, \\ S^{(i)} \bullet K - \omega^2 (\omega T_0 T_2 S^{(r)} + T_2 S^{(i)}) \bullet T_1 &= \\ = \omega (-T_2 S^{(r)} + \omega T_0 T_2 S^{(i)} + T_2 F). \end{aligned}$$

(1)

Из этих уравнений выписывается матрица оценивания и столбец правых частей. В случае k экспериментов матрица очевидным образом приобретает $2 \times k$ строк, а столбец – $2 \times k$ элементов.

Задача 2.3. Для системы задачи 2 составить соотношения для линейного оценивания трёх параметров:

$$K, T_1, T_0.$$

Решение. Поставленная задача оценивания формально является нелинейной, так как уравнения (1) содержат слагаемые, в которых фигурируют кроме членов, в которые оцениваемые параметры входят линейно, так же слагаемые, содержащие произведение

$$\alpha = T_0 T_1.$$

Поэтому, как это описывалось в разделе 1.8, вектор-столбец оцениваемых параметров положим в виде четырёх коэффициентов:

$$\bar{\theta} = (K, T_1, T_0, \alpha)^T.$$

Соответственно уравнения (1) перегруппируем следующим образом:

$$S^{(r)} \cdot K + T_2(-\omega^2 S^{(r)} + F) \cdot T_1 - \omega^2 T_2 S^{(r)} \cdot T_0 + \omega^3 T_2 S^{(i)} \cdot \alpha = \omega T_2 S^{(i)},$$

$$S^{(i)} \cdot K - \omega^2 T_2 S^{(i)} \cdot T_1 - \omega^2 T_2 S^{(i)} \cdot T_0 - \omega^3 T_2 S^{(r)} \cdot \alpha = \omega T_2 (-S^{(r)} + F).$$

Исходя из этих соотношений формируем матрицу K размерностью $(2 \times k) \times 2$ и вектор-столбец правых частей размерностью $(2 \times k) \times 1$.

2.3. Занятие 3. Составление матричных соотношений для задач линейного оценивания (продолжение).

Задача 3.1. Для схемы системы автоматического регулирования, представленной на рис.9, выписать выражения для матрицы K и столбца правых частей при оценивании параметров

$$\bar{\theta} = (K, T_1)^T.$$

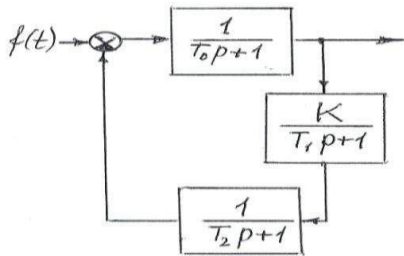


Рис.9

Решение. Получив передаточную функцию замкнутой системы, запишем в операторной форме дифференциальное уравнение её движения:

$$(T_0 T_1 T_2 p^3 + (T_0 T_1 + T_0 T_2 + T_1 T_2) p^2 + (T_0 + T_1 + T_2) p + 1 + K) S = (T_1 T_2 p + (T_1 + T_2) p + 1) F.$$

Подставим в это уравнение правую часть и решение в виде

$$\bar{f}(t) = F \cdot \exp(i\omega t), \bar{s}(t) = (S^{(r)} + i \cdot S^{(i)}) \cdot \exp(i\omega t).$$

После известных алгебраических преобразований можем записать:

$$\begin{aligned} S^{(r)} \bullet K + (-\omega^2 (T_0 + T_2) S^{(r)} + \omega^2 T_2 H + (\omega^3 T_0 T_2 - \omega) S^{(i)}) \bullet T_1 &= \\ = (\omega^2 T_2 T_0 - 1) S^{(r)} + \omega (T_0 + T_2) S^{(i)} + H; & \\ S^{(i)} \bullet K + ((-\omega^3 T_0 T_2 + \omega) S^{(r)} - \omega^2 (T_0 + T_2) S^{(i)} - \omega H) \bullet T_1 &= \\ = -\omega (T_0 + T_2) S^{(r)} + (\omega^2 T_2 T_0 - 1) S^{(i)} + \omega T_2 H. & \end{aligned} \quad (1)$$

Исходя из этих соотношений формируем матрицу K размерностью $(2 \times k) \times 2$ и вектор-столбец правых частей размерностью $(2 \times k) \times 1$ (где k – число экспериментов).

Задача 3.2. Для системы задачи 3.1 составить матрицу \bar{K} и столбец \bar{Y}^* по структуре

$$\bar{K} \cdot \bar{\theta} = \bar{Y}^*$$

для оценивания параметров T_1, T_2 .

Решение. Поскольку задача оценивания этих параметров формально является нелинейной, обозначим $\alpha = T_1 T_2$ и будем рассматривать (см. раздел 1.8) задачу линейного оценивания, положив в качестве вектора оцениваемых параметров

$$\bar{\theta} = (\alpha, T_1, T_2)^T.$$

При этом уравнения (1) перепишем, отнеся в правую часть слагаемые, не содержащие принятых для оценивания параметров:

$$\begin{aligned} & (\omega^2(H - S^{(r)}) + \omega^3 T_0 S^{(i)}) \bullet \alpha - \omega(\omega T_0 S^{(r)} + S^{(i)}) \bullet T_1 + \\ & + \omega(-\omega T_0 S^{(r)} + S^{(i)}) \bullet T_2 = H - \omega^2(1 + K)S^{(r)} + \omega T_0 S^{(i)}; \\ & -(\omega T_0 S^{(r)} + S^{(i)})\omega^2 \bullet \alpha + (\omega S^{(r)} - \omega^2 T_0 S^{(i)} - \omega H) \bullet T_1 + \\ & + (\omega S^{(r)} - \omega^2 T_0 S^{(i)} - \omega H) \bullet T_2 = -\omega T_0 S^{(r)} - (1 + K)S^{(i)}. \end{aligned}$$

Задача 3.3. Составить линейные соотношения для оценивания постоянных времени T_0, T_1, T_2 .

Решение. Используя приём, предложенный в разделе (1.7), обозначим

$$\alpha = T_0 T_1 T_2, \beta = T_0 T_1, \gamma = T_0 T_2, \delta = T_1 T_2.$$

В качестве вектора оцениваемых параметров примем:

$$\bar{\theta} = (\alpha, T_0, T_1, T_2, \beta, \gamma, \delta)^T.$$

При этом уравнения (1) перепишем так:

$$\begin{aligned} & \omega^3 S^{(i)} \cdot \alpha - \omega S^{(i)} \cdot T_0 - \omega S^{(i)} \cdot T_1 - \omega S^{(i)} \cdot T_2 - \omega^2 S^{(r)} \cdot \beta - \\ & - \omega^2 S^{(r)} \cdot \gamma + \omega^2 (H - S^{(r)}) \cdot \delta = H - (1 + K)S^{(r)}; \\ & - \omega^3 S^{(r)} \cdot \alpha + \omega S^{(r)} \cdot T_0 + \omega(S^{(r)} - H) \cdot T_1 + \omega(S^{(r)} - H) \cdot T_2 - \\ & - \omega^2 S^{(i)} \cdot \beta - \omega^2 S^{(i)} \cdot \gamma - \omega^2 S^{(i)} \cdot \delta = -(1 + K)S^{(i)}. \end{aligned}$$

В данном случае нужно как минимум 4 эксперимента. При этом получим 8 уравнений для оценивания семи параметров.

2.4. Занятие 4. Составление соотношений для оценивания Коэффициентов математических моделей элементов конструкций центробежных насосов.

Задача 4.1. Оценивание параметров одно массовой модели ротора центробежного насоса.

Уравнения колебаний одно массового ротора имеют вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\ddot{y} + cx + qy &= me\omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{y} + b\ddot{x} + cy - qx &= me\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned}$$

В комплексной форме эти уравнения записываются относительно комплексной переменной $z=x+iy$ в виде одного уравнения

$$m \cdot \ddot{z} + b \cdot \dot{z} + c \cdot z - i \cdot q \cdot z = me\omega^2 \exp(i\omega t). \quad (1)$$

Пусть замерены амплитуда Z и фаза φ колебаний ротора при дисбалансе $D=me$, установленном в плоскости метки. Тогда вещественная и мнимая части комплексной амплитуды

$$\bar{Z} = Z^{(r)} + i \cdot Z^{(i)}$$

вычисляются по данным эксперимента

$$Z^{(r)} = Z \cos \varphi, Z^{(i)} = Z \sin \varphi.$$

Известно, что дисбаланс установлен в плоскости метки. Учитывая, что

$$q = \delta b \omega,$$

составить соотношения для оценивания коэффициентов c, b, δ .

Решение. Обозначим $\alpha = \delta b$ и в качестве вектора оцениваемых параметров примем

$$\bar{\theta} = (c, b, \alpha)^T.$$

Ищем решение прямой задачи в виде

$$\bar{z}(t) = (Z^{(r)} + i \cdot Z^{(i)}) \cdot \exp(i\omega t).$$

Подставляя это решение в (1), получим систему двух алгебраических уравнений для нахождения вещественной и мнимой частей комплексной амплитуды:

$$(-m\omega^2 + c) \cdot Z^{(r)} + (-\omega b + \delta b \omega) \cdot Z^{(i)} = me\omega^2,$$

$$(-m\omega^2 + c) \cdot Z^{(i)} + (\omega b - \delta b \omega) \cdot Z^{(r)} = 0.$$

Для задачи оценивания эти уравнения надо переписать так:

$$Z^{(r)} \bullet c - \omega Z^{(i)} \bullet b + \omega Z^{(i)} \bullet \alpha = m \omega^2 (e + Z^{(r)}),$$

$$Z^{(i)} \bullet c + \omega Z^{(r)} \bullet b - \omega Z^{(r)} \bullet \alpha = m \omega^2 Z^{(i)}.$$

Для решения обратной задачи оценивания необходимо как минимум два эксперимента. Тогда будем иметь четыре уравнения относительно трёх оцениваемых параметров.

Задача 4.2. Для системы с обратной связью, структурная схема которой дана на рисунке 10, составить уравнения для оценивания её коэффициентов: постоянных времени T_1 , T_2 и коэффициента сопротивления ζ .

Рассматриваемая система может служить математической моделью таких элементов конструкций центробежных насосов, как гидропята либо гидростатическое уплотнение.

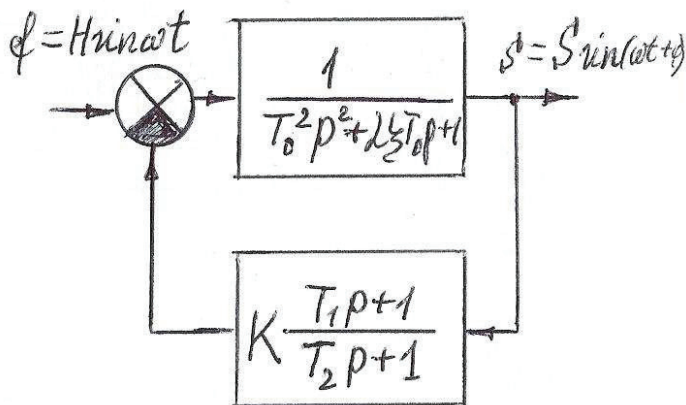


Рис.10

Решение. С помощью выражения для передаточной функции замкнутой системы запишем дифференциальное уравнение её движения в символической форме:

$$(T_0^2 T_2 p^3 + T_0(2\zeta T_2 + T_0)p^2 + (2\zeta T_0 + KT_1 + T_2)p + 1 + K)s = (T_2 p + 1)f.$$

Подставляя в это уравнение

$$\bar{f}(t) = F \cdot \exp(i\omega t), \bar{s}(t) = (S^{(r)} + i \cdot S^{(i)}) \cdot \exp(i\omega t),$$

получим уравнения для нахождения амплитуд колебаний:

$$(-T_0(2\zeta T_2 + T_0)\omega^2 + 1 + K) \bullet S^{(r)} + (\omega^3 T_0^2 T_2 - \omega(T_2 + 2\zeta T_0 + KT_1)) \bullet S^{(i)} = H;$$

$$(-\omega^3 T_0^2 T_2 + \omega(T_2 + 2\zeta T_0 + KT_1)) \bullet S^{(r)} + (-T_0(2\zeta T_2 + T_0)\omega^2 + 1 + K) \bullet S^{(i)} = H\omega T_2.$$

Поскольку в этих уравнениях произведение оцениваемых параметров $\alpha = \zeta T_2$, то в качестве вектора оцениваемых параметров примем

$$\bar{\theta} = (T_1, T_2, \zeta, \alpha)^T.$$

Оставляя слева слагаемые, содержащие оцениваемых коэффициенты, запишем

$$-\omega K S^{(i)} \bullet T_1 + (T_0^2 \omega^3 - \omega) S^{(i)} \bullet T_2 - 2T_0 \omega S^{(i)} \bullet \zeta -$$

$$-2T_0 \omega^2 S^{(r)} \bullet \alpha = H - (1 + K - T_0^2 \omega^2) S^{(r)};$$

$$\omega K S^{(r)} \bullet T_1 + (-T_0^2 \omega^3 + \omega) S^{(r)} - H\omega \bullet T_2 + 2T_0 \omega S^{(r)} \bullet \zeta -$$

$$-2T_0 \omega^2 S^{(i)} \bullet \alpha = (\omega^2 T_0^2 - (1 + K)) S^{(i)}.$$

В данном случае необходимо провести не менее двух экспериментов для оценивания четырёх коэффициентов.

Задача 4.3. Для модели рис.4 составить соотношения для оценивания четырёх коэффициентов: постоянных времени T_1, T_2 , коэффициента сопротивления ζ и коэффициента усиления K .

Решение. Для сведения задачи к линейной положим $\alpha = \zeta T_2, \beta = K T_1$. Тогда вектор оцениваемых параметров примет вид:

$$\bar{\theta} = (T_2, K, \zeta, \alpha, \beta)^T.$$

Оставляя слева слагаемые, содержащие оцениваемых коэффициенты, запишем

$$\begin{aligned} & (T_0^2 \omega^2 - 1) \omega S^{(i)} \bullet T_2 - S^{(r)} \bullet K - 2T_0 \omega S^{(i)} \bullet \zeta - \\ & - 2T_0 \omega^2 S^{(r)} \bullet \alpha - \omega S^{(i)} \bullet \beta = H - (T_0^2 \omega^2 - 1) S^{(r)}; \\ & - ((T_0^2 \omega^2 - 1) \omega S^{(i)} + H \omega) \bullet T_2 + S^{(i)} \bullet K + 2T_0 \omega S^{(r)} \bullet \zeta - \\ & - 2T_0 \omega^2 S^{(i)} \bullet \alpha + \omega S^{(r)} \bullet \beta = (T_0^2 \omega^2 - 1) S^{(i)}. \end{aligned}$$

Поскольку оцениваемых параметров пять, необходимо провести как минимум три измерения при трёх разных частотах ω .

2.5. Занятие 5. Численные эксперименты.

Чтобы получить практические навыки оценивания коэффициентов математической модели по экспериментальным данным, полезно провести ряд занятий по схеме:

- 1) решение прямой задачи при некоторой совокупности исходных данных;

- 2) округление величин, принимаемых как полученные экспериментально, до двух-трёх значащих цифр;
- 3) оценивание некоторых коэффициентов уравнений по формуле линейной регрессии по данным расчётов прямой задачи, где в качестве «измеряемых величин» вводятся округлённые данные решения прямой задачи.

Далее будем округлять данные расчёта прямой задачи до двух значащих цифр, что соответствует замеру «экспериментально полученных величин» с точностью до $\pm 5\%$. Проведение подобных вычислений дают также представление о точности оценивания для тех или иных математических моделей.

Задача 5.1. Для одно массовой модели (рис.11), описываемой уравнением

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = F \sin \omega t,$$

провести оценивание коэффициентов сопротивления α и жёсткости c , исходя из следующих данных:

$m = 10$ кг, $c = 1000$ Н/м, $\alpha = 10$ кг/с, $F = 10$ Н.

При этом использовать данные трёх «экспериментов» для частот вынуждающей силы $\omega = 10, 20, 30$ 1/с.

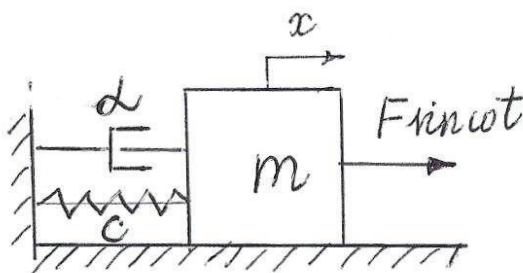


Рис.11

Решение. Подставляя в уравнение движения

$$\bar{f}(t) = F \cdot \exp(i\omega t), \bar{x}(t) = (X^{(r)} + i \cdot X^{(i)}) \cdot \exp(i\omega t),$$

получим после алгебраических преобразований два уравнения для вычисления вещественной и мнимой частей комплексной амплитуды:

$$\begin{aligned} (-m \cdot \omega^2 + c) \cdot X^{(r)} - \alpha \cdot \omega \cdot X^{(i)} &= F, \\ \alpha \cdot \omega \cdot X^{(r)} + (-m \cdot \omega^2 + c) \cdot X^{(i)} &= 0. \end{aligned}$$

Откуда получаем

$$X^{(r)} = F(c - m\omega^2) / ((c - m\omega^2)^2 + \omega^2 \alpha^2),$$

$$X^{(i)} = -Fm\alpha / ((c - m\omega^2)^2 + \omega^2 \alpha^2).$$

Результаты расчёта для трёх экспериментов приведены в таблице.

ω	10	20	30
$X^{(r)}$	0	$-3,3 \times 10^{-3}$	$-1,2 \times 10^{-3}$
$X^{(i)}$	-0,1	$-2,2 \times 10^{-4}$	$-4,7 \times 10^{-5}$

Полагая полученные (и округлённые до двух значащих цифр) как измеренные экспериментально, решаем теперь задачу оценивания для вектора оцениваемых параметров

$$\bar{\theta} = (c, \alpha)^T.$$

Ниже приведена маткадовая распечатка задачи оценивания. Матрица K и столбец Y получены путём оставления в левой части уравнений для амплитуд членов, содержащих множителями коэффициенты c и α . Обозначения маткадовых формул очевидны.

$$\begin{aligned}
 m &:= 10 & c &:= 1000 & \alpha &:= 10 & F &:= 10 & \omega_1 &:= 10 & \omega_2 &:= 20 & \omega_3 &:= 3 \\
 XR1 &:= 0 & XR2 &:= -3.3 \cdot 10^{-3} & XR3 &:= -1.2 \cdot 10^{-3} \\
 XI1 &:= -.1 & XI2 &:= -2.2 \cdot 10^{-4} & XI3 &:= -4.7 \cdot 10^{-5}
 \end{aligned}$$

$$K := \begin{pmatrix} XR1 & -\omega_1 \cdot XI1 \\ XI1 & \omega_1 \cdot XR1 \\ XR2 & -\omega_2 \cdot XI2 \\ XI2 & \omega_2 \cdot XR2 \\ XR3 & -\omega_3 \cdot XI3 \\ XI3 & \omega_3 \cdot XR3 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} F + XR1 \cdot m \cdot \omega_1^2 \\ XI1 \cdot m \cdot \omega_1^2 \\ F + XR2 \cdot m \cdot \omega_2^2 \\ XI2 \cdot m \cdot \omega_2^2 \\ F + XR3 \cdot m \cdot \omega_3^2 \\ XI3 \cdot m \cdot \omega_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\theta := (K^T \cdot K)^{-1} \cdot K^T \cdot Y \quad \theta = \begin{pmatrix} 999.935 \\ 10.001 \end{pmatrix}$$

Как видим, процедура оценивания дала следующие результаты:

$$c=999,935, \alpha=10,001.$$

Таким образом, в данном конкретном случае не превысила 0,01%, в то время как в численный эксперимент была заложена погрешность измерений в пределах +/-5%.

Задача 5.2. Для одно массовой модели ротора центробежного насоса, описываемого дифференциальным

уравнением (1) (задача 4.1), провести оценивание коэффициентов жёсткости c и сопротивления b , полагая $q=0,5b\omega$.

Исходные данные: $m=10$ кг, $c=10^5$ Н/м, $b=10^4$ кг/с, $e=10^{-4}$ м.

Для решения прямой задачи воспользуемся уравнениями для нахождения вещественной и мнимой частей комплексной амплитуды:

$$(-m\omega^2 + c) \cdot Z^{(r)} - 0.5\omega b \cdot Z^{(i)} = me\omega^2,$$

$$(-m\omega^2 + c) \cdot Z^{(i)} + 0.5b\omega \cdot Z^{(r)} = 0.$$

Предположим, проведены два замера комплексных амплитуд колебаний ротора при частотах вращения 80 и 1001/с. Рассчитанные вещественные и мнимые части комплексной амплитуды колебаний ротора (с округлением до двух значащих цифр) в таблице.

№ эксперимента	1	2
ω	80	100
$Z^{(r)}$	$1,4 \times 10^{-6}$	0
$Z^{(i)}$	-16×10^{-6}	-20×10^{-6}

Составляя изложенным выше способом матрицу K и столбец Y , выполним оценивание требуемых коэффициентов, используя комплекс Mathcad.

$$m := 10 \quad e := 10^{-4} \quad \omega_1 := 80 \quad \omega_2 := 100 \quad ZR1 := 1.43 \cdot 10^{-6} \quad ZR2 := c$$

$$ZI1 := -16 \cdot 10^{-6} \quad ZI2 := -20 \cdot 10^{-6}$$

$$K := \begin{pmatrix} ZR1 & -.5 \cdot \omega_1 \cdot ZI1 \\ ZI1 & .5 \cdot \omega_1 \cdot ZR1 \\ ZR2 & -.5 \cdot \omega_2 \cdot ZI2 \\ ZI2 & .5 \cdot \omega_2 \cdot ZR2 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} m \cdot \omega_1^2 \cdot (e + ZR1) \\ m \cdot \omega_1^2 \cdot ZI1 \\ m \cdot \omega_2^2 \cdot (e + ZR2) \\ m \cdot \omega_2^2 \cdot ZI2 \end{pmatrix}$$

$$\theta := (K^T \cdot K)^{-1} \cdot K^T \cdot Y \quad \theta = \begin{pmatrix} 9.979 \times 10^4 \\ 9.977 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Итак, получен результат: $c=99790$, $b=9977$.

Погрешность в данном случае не превысила 0,23%.

2.6. Занятие 6. Численные эксперименты по оцениванию параметров систем с обратной связью.

Задача 6.1. Для системы, структурная схема которой приведена на рис.8, выполнить оценивание постоянных времени T_1 и T_2 . Исходные данные: $T_0=1,0$ с, $T_1=0,5$ с, $T_2=0,8$ с, $K=10$, $N=1,0$. Эксперименты проведены для двух част вынуждающей силы : $\omega_1=1,0$ 1/с, $\omega_2=2,0$ 1/с.

Решение. Воспользовавшись уравнениями прямой задачи (занятие2, задача 2), вычисляем вещественные и мнимые части амплитуд колебаний регулируемой величины. Результаты (с округлением до двух значащих цифр) приведены ниже в таблице.

№ эксперимента	1	2
ω	1	2
$Z^{(0)}$	-0,041	-0,31
$Z^{(1)}$	0,093	0,20

Далее решаем «обратную» задачу оценивания. Поскольку в уравнения прямой задачи имеются слагаемые, содержащие произведение $T_1 T_2$, то в качестве вектора оцениваемых параметров примем

$$\bar{\theta} = (T_2, \alpha)^T,$$

где $\alpha = T_1 T_2$. Затем составляя в уравнениях для амплитуд слева слагаемые, содержащие T_2 и α , приходим к выражениям для матрицы K и вектора правых частей Y вида:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} -\omega_i^2 \cdot T_0 \cdot S_i^{(r)} - \omega_i \cdot S_i^{(i)} & \omega_i^2 (-S_i^{(r)} + \omega_i \cdot T_0 S_i^{(i)} + H) \\ \omega_i (S_i^{(r)} - \omega_i \cdot T_0 S_i^{(i)} - H) & -\omega_i^3 \cdot T_0 \cdot S_i^{(r)} - \omega_i^2 \cdot S_i^{(i)} \end{bmatrix},$$

$$\bar{Y}^* = (-K \cdot S_i^{(r)})^T, -K \cdot S_i^{(i)})^T.$$

Для случая $i=1,2$ матрица K будет иметь четыре строки, столбец соответственно четыре элемента.

Ниже приведена матричная распечатка результатов расчёта.

$$\begin{aligned} T_0 &:= 1 & T_1 &:= .5 & T_2 &:= .8 & K &:= 10 & H &:= 1 & SR1 &:= -.041 & SR2 &:= -.37 \\ SI1 &:= .093 & SI2 &:= .2 & \omega_1 &:= 1 & \omega_2 &:= 2 & E &:= 1 \end{aligned}$$

$$K := \begin{bmatrix} -\omega_1^2 \cdot T_0 SR1 - \omega_1 \cdot SI1 & \omega_1^2 (-SR1 + \omega_1 \cdot T_0 SI1 + H) \\ \omega_1 (SR1 - \omega_1 \cdot T_0 SI1 - H) & -\omega_1^3 \cdot T_0 SR1 - \omega_1^2 \cdot SI1 \\ -\omega_2^2 \cdot T_0 SR2 - \omega_2 \cdot SI2 & \omega_2^2 (-SR2 + \omega_2 \cdot T_0 SI2 + H) \\ \omega_2 (SR2 - \omega_2 \cdot T_0 SI2 - H) & -\omega_2^3 \cdot T_0 SR2 - \omega_2^2 \cdot SI2 \end{bmatrix} \quad Y := \begin{bmatrix} -K \cdot SR1 \\ -K \cdot SI1 \\ -K \cdot SR2 \\ -K \cdot SI2 \end{bmatrix}$$

$$\vartheta := (K^T \cdot K)^{-1} \cdot K^T \cdot Y \quad \vartheta = \begin{pmatrix} 0.808 \\ 0.399 \end{pmatrix}$$

Итак, по данным расчёта имеем $T_2=0,808$, $T_1=\alpha/T_2=0,494$. Погрешность оценивания постоянной T_1 составила 1,2%, постоянной времени T_2 -- 1%.

Задача 6.2. Для системы, рассмотренной в задаче 6.1, выполнить оценивание коэффициента усиления K и постоянной времени T_1 . Все данные взять из задачи 6.1.

Решение. Систему уравнений для амплитуд приводим к виду:

$$\begin{aligned} S^{(r)} \cdot K + (-\omega^2 T_2 S^{(r)} + \omega^3 T_0 T_2 S^{(i)} + \omega^2 F T_2) \cdot T_1 &= \\ = \omega^2 T_0 T_2 S^{(r)} + \omega T_2 S^{(i)}, \\ S^{(i)} \cdot K - \omega^2 (\omega T_0 T_2 S^{(r)} + T_2 S^{(i)}) \cdot T_1 &= \\ = \omega (-T_2 S^{(r)} + \omega T_0 T_2 S^{(i)} + T_2 F). \end{aligned}$$

Ниже дана матричная распечатка результатов оценивания.

$$L := \begin{bmatrix} SR1 & -\omega_1^2 \cdot T_2 \cdot SR1 + \omega_1^3 \cdot T_0 \cdot T_2 \cdot SI1 + F \cdot \omega_1^2 \cdot T_2 \\ SI1 & -\omega_1^2 \cdot (\omega_1 \cdot T_0 \cdot T_2 \cdot SR1 + T_2 \cdot SI1) \\ SR2 & -\omega_2^2 \cdot T_2 \cdot SR2 + \omega_2^3 \cdot T_0 \cdot T_2 \cdot SI2 + F \cdot \omega_2^2 \cdot T_2 \\ SI2 & -\omega_2^2 \cdot (\omega_2 \cdot T_0 \cdot T_2 \cdot SR2 + T_2 \cdot SI2) \end{bmatrix} \quad Z := \begin{bmatrix} \omega_1^2 \cdot T_0 \cdot T_2 \cdot SR1 + \omega_1 \cdot T_2 \cdot SI1 \\ \omega_1 \cdot (-T_2 \cdot SR1 + \omega_1 \cdot T_0 \cdot T_2 \cdot SI1 + T_2 \cdot F) \\ \omega_2^2 \cdot T_0 \cdot T_2 \cdot SR2 + \omega_2 \cdot T_2 \cdot SI2 \\ \omega_2 \cdot (-T_2 \cdot SR2 + \omega_2 \cdot T_0 \cdot T_2 \cdot SI2 + T_2 \cdot F) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\delta} := (L^T \cdot L)^{-1} \cdot L^T \cdot Z \quad \hat{\delta} = \begin{pmatrix} 9.901 \\ 0.494 \end{pmatrix}$$

Таким образом, по данным оценивания имеем $K=9,9$, $T_1=0,494$. Погрешность по оцениванию K составила 1%, по T_1 соответственно 1,2%.

2.7. Занятие 7. Оценивание параметров дискретной колебательной модели по экспериментально замеренным собственным частотам и формам в случае, когда уравнения модели записаны в прямой форме.

В приведенных выше темах занятий (занятия 1-7) рассматривались задачи оценивания на основе замеров амплитуд и фаз вынужденных колебаний при действии вынуждающей гармонической силы. Однако экспериментально возможно также получить значения собственных частот (по резонансным пикам), а также собственные формы (по амплитудам вынужденных

колебаний с частотой, совпадающей с собственной). При этом используется известное положение, что система при возбуждении на резонансе совершает колебания по соответствующей собственной форме вне зависимости от точек приложения вынуждающих сил и соотношений их амплитуд.

Навыки оценивания по собственным частотам и формам можно получить, выполняя вычисления по схеме:

- 1) решение прямой задачи, т.е. определение собственных частот и форм;
- 2) округление полученных величин до, например, двух значащих цифр и принятие их в качестве замеренных "экспериментально";
- 3) оценивание некоторых коэффициентов дискретной модели, которые принимаются как неизвестные. При этом используются линейные соотношения для расчёта собственных форм дискретной модели.

Задача 7.1. Оценить коэффициенты жёсткости c_1 , c_2 , c_3 колебательной системы, представленной в виде трех массовой модели, показанной на рис.12.

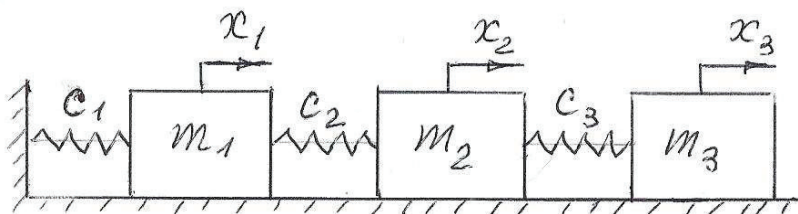


Рис.12

Решение.

Прямая задача. Запишем уравнения свободных колебаний системы:

$$\begin{aligned}m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \cdot x_1 - c_2 \cdot x_2 &= 0, \\-c_2 \cdot x_1 + m_2 \cdot \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \cdot x_2 - c_3 \cdot x_3 &= 0, \\-c_3 \cdot x_2 + m_3 \cdot \ddot{x}_3 + c_3 \cdot x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Подставляя в эти уравнения решение в виде

$$x_i = A_i \cdot \sin \omega_i t, i = 1, 2, 3,$$

Приходи к уравнениям для форм колебаний

$$\begin{aligned}(-m_1 \omega^2 + c_1 + c_2)A_1 - c_2 A_2 + 0A_3 &= 0, \\-c_2 A_1 + (-m_2 \omega^2 + c_3 + c_2)A_2 - c_3 A_3 &= 0, \quad (1) \\0A_1 - c_3 A_2 + (-m_3 \omega^2 + c_3)A_3 &= 0.\end{aligned}$$

Из условия нетривиальности решения последней системы получаем частотное уравнение в виде

$$\begin{aligned}-m_1 m_2 m_3 z^3 + (m_1 m_2 c_3 + m_1 m_3 (c_2 + c_3) + (m_2 m_3 (c_1 + c_2)))z^2 - \\(m_1 c_2 c_3 + m_2 (c_1 + c_2) c_3 + m_3 (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3))z + c_1 c_2 c_3 &= 0, \quad (2)\end{aligned}$$

где обозначено $z = p^2$, p – одна из собственных частот.

Решая уравнение (2), находим квадраты собственных частот z_i ($i=1,2,3$). Далее, полагая $A_{1i}=1$, по любым двум уравнениям (1) находим собственные формы для трёх собственных частот A_{2i}, A_{3i} , где $i=1,2,3$.

Задача оценивания. Два последних уравнения для форм (1) перепишем так, чтобы слева оставались слагаемые, содержащие коэффициентами оцениваемые параметры c_1, c_2, c_3 . Получаем структуру

$$\bar{K} \cdot \bar{\theta} = \bar{Y}^*,$$

где

$$\bar{\theta} = (c_1, c_2, c_3)^T.$$

Выражения для матрицы оценивания и столбца правых частей очевидно и ниже их запись приводится в маткадовой распечатке расчёта, который выполнен при исходных данных, записанных в этой распечатке.

Прямая задача

$$m1 := 20 \quad m2 := 20 \quad m3 := 10 \quad c1 := 10^4 \quad c2 := 2 \cdot 10^4 \quad c3 := 5 \cdot 10^4$$

$$v := \begin{bmatrix} c1 \cdot c2 \cdot c3 \\ -[m1 \cdot c2 \cdot c3 + m2 \cdot (c1 + c2) \cdot c3 + m3 \cdot (c1 \cdot c2 + c1 \cdot c3 + c2 \cdot c3)] \\ m1 \cdot m2 \cdot c3 + m1 \cdot m3 \cdot (c2 + c3) + m2 \cdot m3 \cdot (c1 + c2) \\ -m1 \cdot m2 \cdot m3 \end{bmatrix}$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} 150.823 \\ 687.236 \\ 2.412 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$z1 := 150 \quad z2 := 690 \quad z3 := 2400$$

$$A2(z) := c2 \cdot (c3 - m3 \cdot z) + \begin{pmatrix} -m2 \cdot z + c2 + c3 & -c3 \\ -c3 & -m3 \cdot z + c3 \end{pmatrix}$$

$$A3(z) := c2 \cdot c3 + \begin{pmatrix} -m2 \cdot z + c2 + c3 & -c3 \\ -c3 & -m3 \cdot z + c3 \end{pmatrix}$$

$$A21 := A2(z1) \quad A31 := A3(z1) \quad A22 := A2(z2) \quad A32 := A3(z2) \quad A23 := A2(z3) \quad A33 := A3(z3)$$

$$A21 = 1.346 \quad A31 = 1.923 \quad A22 = 0.821 \quad A32 = -2.161 \quad A23 = -0.922 \quad A33 = 0.243$$

Задача оценивания

$$m1 := 20 \quad m2 := 20 \quad m3 := 10$$

$$A21 = 1.346 \quad A31 = 1.923 \quad A22 = 0.821 \quad A32 = -2.161 \quad A23 = -0.922 \quad A33 = 0.243$$

$$K := \begin{pmatrix} 1 & 1 - A21 & 0 \\ 0 & A21 - 1 & A21 - A31 \\ 0 & 0 & A31 - A21 \\ 1 & 1 - A22 & 0 \\ 0 & A22 - 1 & A22 - A32 \\ 0 & 0 & A32 - A22 \\ 1 & 1 - A23 & 0 \\ 0 & A23 - 1 & A23 - A33 \\ 0 & 0 & A33 - A23 \end{pmatrix}$$

$$Y := \begin{pmatrix} m1 \cdot z1 \\ m2 \cdot A21 \cdot z1 \\ m3 \cdot A31 \cdot z1 \\ m1 \cdot z2 \\ m2 \cdot A22 \cdot z2 \\ m3 \cdot A32 \cdot z2 \\ m1 \cdot z3 \\ m2 \cdot A23 \cdot z3 \\ m3 \cdot A33 \cdot z3 \end{pmatrix}$$

$$\theta := (K^T \cdot K)^{-1} \cdot K^T \cdot Y$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 9.954 \times 10^3 \\ 1.991 \times 10^4 \\ 5.007 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Как видно по результатам расчёта, точность оценивания находится в пределах до 0,5%, как и исходные «результаты измерений», где данные расчёта прямой задачи округлялись до трёх значащих цифр.

Задача 7.2. При исходных данных предыдущей задачи выполнить оценивание пяти параметров: c_1, c_2, c_3, m_2, m_3 .

Решение. Выполнив соответствующие выкладки, как это было сделано в предыдущей задаче, с помощью матрицы производим вычисления.

$$\begin{aligned}
 & \text{Прямая задача} \\
 & m_1 := 20 \quad m_2 := 20 \quad m_3 := 10 \quad c_1 := 10^4 \quad c_2 := 2 \cdot 10^4 \quad c_3 := 5 \cdot 10^4 \\
 & v := \begin{bmatrix} c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \\ -[m_1 \cdot c_2 \cdot c_3 + m_2 \cdot (c_1 + c_2) \cdot c_3 + m_3 \cdot (c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3)] \\ m_1 \cdot m_2 \cdot c_3 + m_1 \cdot m_3 \cdot (c_2 + c_3) + m_2 \cdot m_3 \cdot (c_1 + c_2) \\ -m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \end{bmatrix} \\
 & \text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} 150.823 \\ 687.236 \\ 2.412 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad z_1 := 150 \quad z_2 := 690 \quad z_3 := 2400 \\
 & A_2(z) := c_2 \cdot (c_3 - m_3 \cdot z) + \begin{bmatrix} -m_2 \cdot z + c_2 + c_3 & -c_3 \\ -c_3 & -m_3 \cdot z + c_3 \end{bmatrix} \\
 & A_3(z) := c_2 \cdot c_3 + \begin{bmatrix} -m_2 \cdot z + c_2 + c_3 & -c_3 \\ -c_3 & -m_3 \cdot z + c_3 \end{bmatrix} \\
 & A_{21} := A_2(z_1) \quad A_{31} := A_3(z_1) \quad A_{22} := A_2(z_2) \quad A_{32} := A_3(z_2) \quad A_{23} := A_2(z_3) \quad A_{33} := A_3(z_3) \\
 & A_{21} = 1.346 \quad A_{31} = 1.923 \quad A_{22} = 0.821 \quad A_{32} = -2.161 \quad A_{23} = -0.922 \quad A_{33} = 0.243 \\
 & \text{Обратная задача} \\
 & K := \begin{pmatrix} 1 & 1 - A_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{21} - 1 & A_{21} - A_{31} & -A_{21} \cdot z_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31} - A_{21} & 0 & -A_{31} \cdot z_1 \\ 1 & 1 - A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} - 1 & A_{22} - A_{32} & -A_{22} \cdot z_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{32} - A_{22} & 0 & -A_{32} \cdot z_2 \\ 1 & 1 - A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{23} - 1 & A_{23} - A_{33} & -A_{23} \cdot z_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} - A_{23} & 0 & -A_{33} \cdot z_3 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} m_1 \cdot z_1 \\ 0 \\ 0 \\ m_1 \cdot z_2 \\ 0 \\ 0 \\ m_1 \cdot z_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \theta := (K^T \cdot K)^{-1} \cdot K^T \cdot Y \\
 & \theta = \begin{pmatrix} 1.003 \times 10^4 \\ 1.978 \times 10^4 \\ 4.945 \times 10^3 \\ 19.782 \\ 9.891 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Как видно из полученных результатов, точность определения масс несколько понижается – в пределах 1%.

Занятие 8. Оценивание параметров дискретной колебательной модели по экспериментально замеренным собственным частотам и формам в случае, когда уравнения модели записаны в обратной форме.

Задача 8.1. Оценить коэффициенты жёсткости c_1, c_2 , колебательной балочной системы, представленной в виде двух массовой модели, показанной на рис.13.

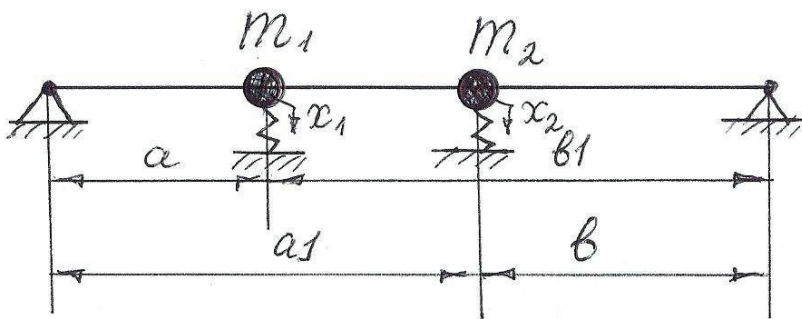


Рис.13

Исходные данные: $m_1=10$ кг, $m_2=20$ кг, $c_1=2 \times 10^6$ Н/м, $c_2=3 \times 10^6$ Н/м, $l=1$ м, $a=0.3$ м, $b_1=0.7$ м, $a_1=0.6$ м, $b=0.4$ м. При диаметре стальной балки $d=0.1$ м получаем $EI=1.03 \times 10^6$ Нм². По формулам сопромата вычисляем податливости:

$$\delta_{11} = \frac{a^2 b_1^2}{3EI} = .143 \cdot 10^{-7}, \delta_{22} = \frac{a_1^2 b^2}{3EI} = .187 \cdot 10^{-7},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{ab}{EI} = .146 \times 10^{-7} \text{ м/Н.}$$

Дифференциальные уравнения свободных колебаний системы запишем в обратной форме:

$$\begin{aligned}x_1 &= \delta_{11}(-m_1\ddot{x}_1 - c_1x_1) + \delta_{12}(-m_2\ddot{x}_2 - c_2x_2), \\x_2 &= \delta_{21}(-m_1\ddot{x}_1 - c_1x_1) + \delta_{22}(-m_2\ddot{x}_2 - c_2x_2).\end{aligned}$$

Полагая решение для свободных колебаний в виде

$$x_i = A_i \cdot \sin \omega_i t, (i = 1, 2),$$

подставляя его в исходные дифференциальные уравнения, получим систему двух уравнений для форм колебаний

$$\begin{aligned}(\delta_{11}(-m_1z + c_1) + 1)A_1 + \delta_{12}(-m_2z + c_2)A_2 &= 0, \\ \delta_{21}(-m_1z + c_1)A_1 + \delta_{22}(-m_2z + c_2)A_2 &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где обозначено: $z = \omega^2$ – квадрат собственной частоты, A_1 , A_2 – амплитуды собственной формы.. Из условия равенства нулю определителя этой системы

$$\begin{vmatrix}(\delta_{11}(-m_1z + c_1) + 1), \delta_{12}(-m_2z + c_2) \\ \delta_{21}(-m_1z + c_1), \delta_{22}(-m_2z + c_2)\end{vmatrix} = 0$$

находим квадраты первой и второй собственных частот z_1, z_2 соответственно. Далее, полагая $A_1 = 1$, находим, например, из второго уравнения (1) амплитуды A_{21} , A_{22} второй массы, подставляя в это уравнение последовательно $z = z_1$, $z = z_2$. На приведенных ниже распечатке даны результаты расчёта прямой задачи (квадратов собственных частот и форм при заданных параметрах системы), а также осциллограммы колебаний при осцилировании жесткостей.

Прямая задача

$$\begin{aligned} \delta_{11} &:= 0143 \cdot 10^{-6} & \delta_{22} &:= 0187 \cdot 10^{-6} & \delta_{12} &:= 0146 \cdot 10^{-6} & \delta_{21} &:= \delta_{12} \\ m_1 &:= 10 & m_2 &:= 20 & c_1 &:= 2 \cdot 10^6 & c_2 &:= 10^6 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$B(z) := \begin{bmatrix} -\delta_{11} \cdot m_1 \cdot z + (1 + \delta_{11} \cdot c_1) & \delta_{12} \cdot c_2 - \delta_{12} \cdot m_2 \cdot z \\ \delta_{21} \cdot c_1 - \delta_{21} \cdot m_1 \cdot z & (\delta_{22} \cdot c_2 + 1) - \delta_{22} \cdot m_2 \cdot z \end{bmatrix}$$

$$f(z) := |B(z)|$$

$$f(z) \text{ solve, } z \rightarrow \begin{pmatrix} 2182641.1576268901752 \\ 45817128.427626566046 \end{pmatrix}$$

$$z_2 := 4.581 \cdot 10^7 \quad z_1 := 2.183 \cdot 10^6$$

$$A_{21} := \frac{(\delta_{21} \cdot c_1 - \delta_{21} \cdot m_1 \cdot z_1)}{[-(\delta_{22} \cdot c_2 + 1) + \delta_{22} \cdot m_2 \cdot z_1]} \quad A_{22} := \frac{(\delta_{21} \cdot c_1 - \delta_{21} \cdot m_1 \cdot z_2)}{[-(\delta_{22} \cdot c_2 + 1) + \delta_{22} \cdot m_2 \cdot z_2]}$$

$$A_{11} := 1 \quad A_{21} := 1.208 \quad A_{22} := -414$$

Оценивание двух параметров: c_1, c_2

$$L := \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \cdot A_{21} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \cdot A_{21} \\ \delta_{11} & \delta_{12} \cdot A_{22} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \cdot A_{22} \end{pmatrix} \quad Z := \begin{pmatrix} -1 + \delta_{11} \cdot z_1 \cdot m_1 + \delta_{12} \cdot z_1 \cdot A_{21} \cdot m_2 \\ -A_{21} + \delta_{21} \cdot z_1 \cdot m_1 + \delta_{22} \cdot z_1 \cdot A_{21} \cdot m_2 \\ -1 + \delta_{11} \cdot z_2 \cdot m_1 + \delta_{12} \cdot z_2 \cdot A_{22} \cdot m_2 \\ -A_{22} + \delta_{21} \cdot z_2 \cdot m_1 + \delta_{22} \cdot z_2 \cdot A_{22} \cdot m_2 \end{pmatrix}$$

$$\delta := (L^T \cdot L)^{-1} \cdot L^T \cdot Z \quad \delta = \begin{pmatrix} 2.155 \times 10^6 \\ 2.905 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

Результаты оценивания жёсткостей дают погрешность в пределах в данном случае дают погрешность до 8%.

Задача 8.2. Выполнить оценивание в системе, рассмотренной в предыдущей задаче, четырех параметров:

m_1, m_2, c_1, c_2 .

Ниже приведена маткадовая распечатка оценивания этих четырёх параметров. Как видно из полученных результатов, погрешность оценивания масс не превысила 0,06%, однако оценивание жесткостей получилось с точностью до 12%.

Прямая задача

$$\begin{aligned} \delta_{11} &:= .0143 \cdot 10^{-6} & \delta_{22} &:= .0187 \cdot 10^{-6} & \delta_{12} &:= .0146 \cdot 10^{-6} & \delta_{21} &:= \delta_{12} \\ m_1 &:= 1\text{т} & m_2 &:= 2\text{т} & c_1 &:= 2 \cdot 10^6 & c_2 &:= 10^6 \end{aligned}$$

$$B(z) := \begin{bmatrix} -\delta_{11} \cdot m_1 \cdot z + (1 + \delta_{11} \cdot c_1) & \delta_{12} \cdot c_2 - \delta_{12} \cdot m_2 \cdot z \\ \delta_{21} \cdot c_1 - \delta_{21} \cdot m_1 \cdot z & (\delta_{22} \cdot c_2 + 1) - \delta_{22} \cdot m_2 \cdot z \end{bmatrix}$$

$$f(z) := |B(z)|$$

$$f(z) \text{ solve, } z \rightarrow \begin{pmatrix} 2182641.1576268901752 \\ 45817128.427626566046 \end{pmatrix}$$

$$z_2 := 4.581 \cdot 10^7$$

$$z_1 := 2.183 \cdot 10^6$$

$$A_{21} := \frac{(\delta_{21} \cdot c_1 - \delta_{21} \cdot m_1 \cdot z_1)}{[-(\delta_{22} \cdot c_2 + 1) + \delta_{22} \cdot m_2 \cdot z_1]} \quad A_{22} := \frac{(\delta_{21} \cdot c_1 - \delta_{21} \cdot m_1 \cdot z_2)}{[-(\delta_{22} \cdot c_2 + 1) + \delta_{22} \cdot m_2 \cdot z_2]}$$

$$A_{11} := 1 \quad A_{21} := 1.208 \quad A_{22} := -.414$$

Оценивание четырёх параметров: m_1, m_2, c_1, c_2

$$K := \begin{pmatrix} -\delta_{11} \cdot z_1 & -\delta_{12} \cdot A_{21} \cdot z_1 & \delta_{11} & \delta_{12} \cdot A_{21} \\ -\delta_{21} \cdot z_1 & -\delta_{22} \cdot A_{21} \cdot z_1 & \delta_{21} & \delta_{22} \cdot A_{21} \\ -\delta_{11} \cdot z_2 & -\delta_{12} \cdot A_{22} \cdot z_2 & \delta_{11} & \delta_{12} \cdot A_{22} \\ -\delta_{21} \cdot z_2 & -\delta_{22} \cdot A_{22} \cdot z_2 & \delta_{21} & \delta_{22} \cdot A_{22} \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} -1 \\ -A_{21} \\ -1 \\ -A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\theta := (K^T \cdot K)^{-1} \cdot K^T \cdot Y \quad \theta = \begin{pmatrix} 10.006 \\ 20.007 \\ 2.244 \times 10^6 \\ 2.866 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

Занятие 9. Оценивание параметров дискретной модели ротора по данным расчёта собственных частот и форм его МКЭ-модели.

Задача 9.1. Вычислить эквивалентные массы для трех массовой дискретной модели ротора, расчётная схема МКЭ-модели которого приведена на рисунке 14.

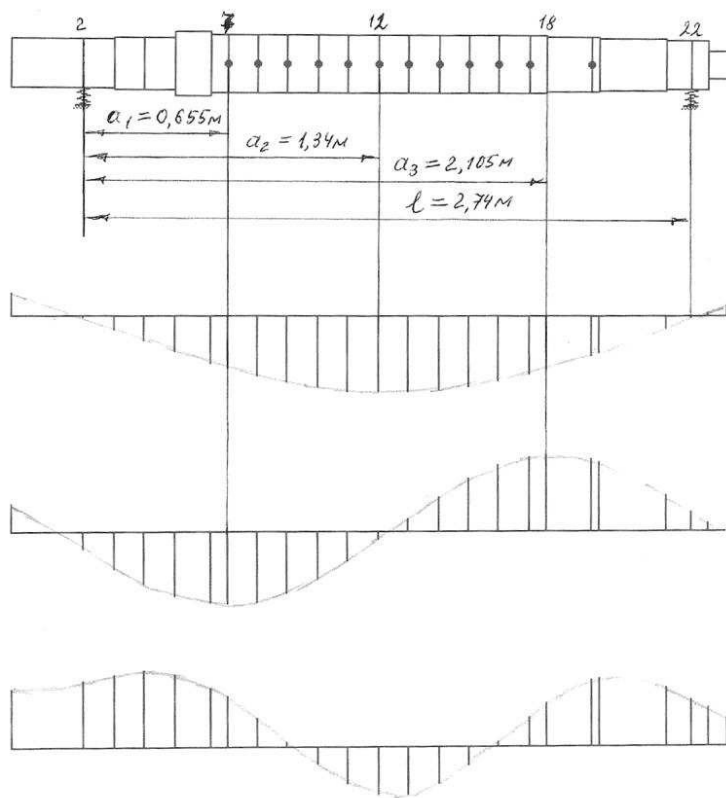


Рис. 14. Расчётная схема ротора и первые три собственные формы

Решение.

Ниже даны распечатки исходных данных для программ расчёта свободных и вынужденных колебаний и результатов расчёта первых трёх собственных частот и форм

Исходные данные МКЭ-модели

N	L (m)	D (m)	C (H/m)	M (kg)
1	3.18000E-1	1.10000E-1	0.00000E+0	0.00000E+0
2	1.45000E-1	1.10000E-1	1.00000E+8	0.00000E+0
3	1.35000E-1	1.15000E-1	0.00000E+0	0.00000E+0
4	1.40000E-1	1.16000E-1	0.00000E+0	0.00000E+0
5	1.60000E-1	1.44000E-1	0.00000E+0	0.00000E+0
6	7.50000E-2	1.28000E-1	0.00000E+0	0.00000E+0
7	1.37000E-1	1.28000E-1	0.00000E+0	2.50000E+1
10	1.37000E-1	1.28000E-1	0.00000E+0	2.10000E+1
11	1.37000E-1	1.28000E-1	0.00000E+0	2.10000E+1
12	1.37000E-1	1.28000E-1	0.00000E+0	2.10000E+1
13	1.37000E-1	1.28000E-1	0.00000E+0	2.10000E+1
14	1.37000E-1	1.28000E-1	0.00000E+0	2.10000E+1
15	1.37000E-1	1.28000E-1	0.00000E+0	2.10000E+1
16	1.37000E-1	1.28000E-1	0.00000E+0	2.10000E+1
17	8.00000E-2	1.28000E-1	0.00000E+0	2.10000E+1
18	2.00000E-1	1.25000E-1	0.00000E+0	0.00000E+0
19	4.00000E-2	1.25000E-1	0.00000E+0	3.00000E+1
20	3.00000E-1	1.15000E-1	0.00000E+0	0.00000E+0
21	1.15000E-1	1.10000E-1	0.00000E+0	0.00000E+0
22	7.50000E-2	1.10000E-1	1.00000E+8	0.00000E+0
23	9.00000E-2	6.00000E-2	0.00000E+0	0.00000E+0

Критические частоты (1/c) и их формы

$$p01 = 1.352394E+2$$

$$Y01 = 1.000000000E+0$$

$$Y02 = -1.119810467E-1$$

$$Y03 = -6.145168299E-1$$

$$Y04 = -1.063875823E+0$$

$$Y05 = -1.496141797E+0$$

$$Y06 = -1.949343466E+0$$

$$Y07 = -2.147005199E+0$$

$$Y08 = -2.469377942E+0$$

$$Y09 = -2.735033623E+0$$

$$Y10 = -2.937375955E+0$$

$$Y11 = -3.071417760E+0$$

$$Y12 = -3.133899990E+0$$

$$Y13 = -3.123370567E+0$$

$$Y14 = -3.040221148E+0$$

$$Y15 = -2.886680941E+0$$

$$Y16 = -2.666767819E+0$$

$$Y17 = -2.386198028E+0$$

$$Y18 = -2.197149693E+0$$

$$Y19 = -1.651351898E+0$$

$$Y20 = -1.531269695E+0$$

$$Y21 = -5.283974164E-1$$

$$Y22 = -1.162406576E-1$$

$$Y23 = 1.538396165E-1$$

$$Y24 = 4.779559529E-1$$

$$p02 = 5.407326E+2$$

$$Y01 = 1.000000000E+0$$

$$Y02 = -5.923169590E-1$$

$$Y03 = -1.289776003E+0$$

$$Y04 = -1.839453427E+0$$

$$Y05 = -2.235800022E+0$$

$$Y06 = -2.486913756E+0$$

$$Y07 = -2.536068554E+0$$

$$Y08 = -2.459295494E+0$$

$$Y09 = -2.167456400E+0$$

$$Y10 = -1.681097622E+0$$

$$Y11 = -1.040924194E+0$$

$$Y12 = -3.032717563E-1$$

$$Y13 = 4.658492015E-1$$

$$Y14 = 1.197614267E+0$$

$$Y15 = 1.827538719E+0$$

$$Y16 = 2.302285260E+0$$

$$Y17 = 2.585527734E+0$$

$$Y18 = 2.655411851E+0$$

$$Y19 = 2.508616182E+0$$

$$Y20 = 2.426255578E+0$$

$$Y21 = 1.265616061E+0$$

$$Y22 = 6.691981421E-1$$

$$Y23 = 2.731325479E-1$$

$$Y24 = -2.021732524E-1$$

$$p03 = 1.163804E+3$$

$$Y01 = 1.000000000E+0$$

$$Y02 = 1.140616535E+0$$

$$Y03 = 1.255795990E+0$$

$$Y04 = 1.311885771E+0$$

$$Y05 = 1.242943295E+0$$

$$Y06 = 1.018773967E+0$$

$$Y07 = 8.709066064E-1$$

$$Y08 = 5.177864550E-1$$

$$Y09 = 1.014652011E-1$$

$$Y10 = -3.076090701E-1$$

$$Y11 = -6.344978039E-1$$

$$Y12 = -8.171168082E-1$$

$$Y13 = -8.200803553E-1$$

$$Y14 = -6.424301833E-1$$

$$Y15 = -3.177581234E-1$$

$$Y16 = 9.331866361E-2$$

$$Y17 = 5.169155362E-1$$

$$Y18 = 7.415290977E-1$$

$$Y19 = 1.137319000E+0$$

$$Y20 = 1.179091822E+0$$

$$Y21 = 1.011541626E+0$$

$$Y22 = 8.028623640E-1$$

$$Y23 = 6.605549961E-1$$

$$Y24 = 4.910607980E-1$$

Места расположения масс были выбраны в точках максимумов второй формы (первая и третья массы) и в точке максимума первой формы (вторая масса). Как показала практика расчётов, для оценивания это наиболее удачные места расположения эквивалентных масс. При этом имеем (согласно схеме рис.6):

$a_1=0.655\text{м}, a_2=1.34\text{м}, a_3=2.105\text{м}, l=2.74\text{м}.$

Далее по программе расчёта вынужденных колебаний, принимая для удобства дисбаланс $D=1$, частоту вращения ротора $\omega=1$, жёсткость подшипников $c=10^8$ Н/м, находим коэффициенты

α_{ij} ($i=1,n$) как прогибы в i -ой точке при приложении единичного дисбаланса в j -ой точке. При этом частоту вращения ротора удобно положить равной единице. В результате получаем:

$\alpha_{11}=8.92 \times 10^{-8}$ м/Н, $\alpha_{12}=11.2 \times 10^{-8}$ м/Н, $\alpha_{13}=6.8 \times 10^{-8}$ м/Н,
 $\alpha_{22}=9.35 \times 10^{-8}$ м/Н, $\alpha_{23}=11.07 \times 10^{-8}$ м/Н, $\alpha_{33}=9.35 \times 10^{-8}$ м/Н.

Оценивание масс согласно формуле (50) (раздел 1.10) по первой собственной форме выполнено с помощью комплекса MathCAD.

Оценивание масс трёхмассовой модели ротора по первой частоте и форме (ротор с 23-мя участками)

$$z_1 := .547 \cdot 10^{-4} \quad U_{21} := 1.46 \quad U_{31} := 1.02 \quad \alpha_{11} := 8.92 \cdot 10^{-8} \quad \alpha_{12} := 11.2 \cdot 10^{-8} \quad \alpha_{13} := 6.8 \cdot 10^{-8}$$

$$\alpha_{21} := \alpha_{12} \quad \alpha_{22} := 16.4 \cdot 10^{-8} \quad \alpha_{23} := 11.07 \cdot 10^{-8} \quad \alpha_{31} := \alpha_{13} \quad \alpha_{32} := \alpha_{23} \quad \alpha_{33} := 9.35 \cdot 10^{-8}$$

$$B := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdot U_{21} & \alpha_{13} \cdot U_{31} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdot U_{21} & \alpha_{23} \cdot U_{31} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \cdot U_{21} & \alpha_{33} \cdot U_{31} \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1 \cdot U_{21} \\ z_1 \cdot U_{31} \end{pmatrix}$$

$$m := (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot D \quad m = \begin{pmatrix} 95.879 \\ 224.283 \\ 136.375 \end{pmatrix}$$

$m_1 := 95.88 \quad m_2 := 224.28 \quad m_3 := 136.58$

Собственные частоты трех массовой модели:

$$A(z) := \begin{pmatrix} \alpha_{11} \cdot m_1 - z & \alpha_{12} \cdot m_2 & \alpha_{13} \cdot m_3 \\ \alpha_{21} \cdot m_1 & \alpha_{22} \cdot m_2 - z & \alpha_{23} \cdot m_3 \\ \alpha_{31} \cdot m_1 & \alpha_{32} \cdot m_2 & \alpha_{33} \cdot m_3 - z \end{pmatrix} \quad f(z) := |A(z)|$$

$$f(z) \text{ solve, } z \rightarrow \begin{pmatrix} 5.6013830686857908223 \cdot 10^{-7} \\ 2.8445228090759880109 \cdot 10^{-6} \\ 5.4699984884055432907 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \quad \omega_1 := \sqrt{\frac{1}{5.47 \cdot 10^{-5}}} \quad \omega_1 = 135.209$$

$$\omega_2 := \sqrt{\frac{1}{2.84 \cdot 10^{-6}}} \quad \omega_2 = 593.391$$

Как видим, первая собственная частота трехмассовой модели практически совпадает с первой собственной МКЭ-модели. Интересно отметить, что хотя оценивание проведено только по первым собственной частоте и форме, вторая собственная частота дискретной модели оказалась довольно близка к соответствующей частоте МКЭ-модели, превышая последнюю на 10%.

Задача 9.2. Вычислить эквивалентные массы, исходя из данных расчёта первой и второй собственных частот и форм МКЭ-модели ротора, рассмотренного в задаче 1.

Расчёт проводим аналогичным образом согласно формуле линейной регрессии (60).

Распечатка оценивания дана ниже. Как видим, теперь практически совпадают не только первая но и вторая собственные частоты дискретной и МКЭ-моделей.

Трёхмассовая модель ротора
 Оценивание по двум первым частотам и
 формам

$$\begin{aligned}
 z1 &:= 547 \cdot 10^{-4} & U21 &:= 1.46 & U31 &:= 1.02 & \alpha11 &:= 8.92 \cdot 10^{-8} & \alpha12 &:= 11.2 \cdot 10^{-8} & \alpha13 &:= 6.8 \cdot 10^{-8} \\
 \alpha21 &:= \alpha12 & \alpha22 &:= 16.4 \cdot 10^{-8} & \alpha23 &:= 11.07 \cdot 10^{-8} & \alpha31 &:= \alpha13 & \alpha32 &:= \alpha23 & \alpha33 &:= 9.35 \cdot 10^{-8} \\
 U22 &:= .12 & U32 &:= -1.047 & z2 &:= 342 \cdot 10^{-5}
 \end{aligned}$$

$$C := \begin{pmatrix} \alpha11 & \alpha12 \cdot U21 & \alpha13 \cdot U31 \\ \alpha21 & \alpha22 \cdot U21 & \alpha23 \cdot U31 \\ \alpha31 & \alpha32 \cdot U21 & \alpha33 \cdot U31 \\ \alpha11 & \alpha12 \cdot U22 & \alpha13 \cdot U32 \\ \alpha21 & \alpha22 \cdot U22 & \alpha23 \cdot U32 \\ \alpha31 & \alpha32 \cdot U22 & \alpha33 \cdot U32 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} z1 \\ z1 \cdot U21 \\ z1 \cdot U31 \\ z2 \\ z2 \cdot U22 \\ z2 \cdot U32 \end{pmatrix}$$

$$\text{mm} := (C^T \cdot C)^{-1} \cdot C^T \cdot E \quad \text{mm} = \begin{pmatrix} 130.05 \\ 199.191 \\ 154.698 \end{pmatrix}$$

$$m1 := 130.05 \quad m2 := 199.191 \quad m3 := 154.698$$

Расчёт собственных частот полученной трех массовой модели

$$A(z) := \begin{pmatrix} \alpha11 \cdot m1 - z & \alpha12 \cdot m2 & \alpha13 \cdot m3 \\ \alpha21 \cdot m1 & \alpha22 \cdot m2 - z & \alpha23 \cdot m3 \\ \alpha31 \cdot m1 & \alpha32 \cdot m2 & \alpha33 \cdot m3 - z \end{pmatrix} \quad f(z) := |A(z)|$$

$$f(z) \text{ solve, } z \rightarrow \begin{pmatrix} 6.3712088145957582972 \cdot 10^{-7} \\ 3.4134112098230237262 \cdot 10^{-6} \\ 5.4681514908717400444 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \quad \omega1 := \sqrt{\frac{1}{(5.47 \cdot 10^{-5})}} \quad \omega1 = 135.209$$

$$\omega2 := \sqrt{\frac{1}{(3.4134 \cdot 10^{-6})}} \quad \omega2 = 541.261$$

Список литературы

1. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров.- М.: Статистика, 1979.- 352с.
2. Бондаренко Г.А., Симоновский В.И., Пшик В.Р. Экспериментальное определение коэффициентов гидродинамических сил в лабиринтных уплотнениях.- Машиноведение, 1981, №5, с.39-41.
3. Будник А.И., Симоновский В.И., Кафтарян О.Н. Экспериментальное исследование демпфирования в роторе с щелевыми уплотнениями. Химическое и нефтяное машиностроение, научно-технический реферативный сборник, ЦИНТИХИМНЕФТЕМАШ, М., 1983, №2, с.8-10.
4. В.И.Симоновский. Устойчивость и нелинейные колебания роторов центробежных машин. Изд-во «Вища школа», Харьков, 1986. 128 с.
5. Барнев С.В., Симоновский В.И., Доценко В.А., Фирсов П.Н. Оценивание жёсткости сегментных подшипников турбокомпрессоров по собственным частотам и формам колебаний.- Химическое и нефтяное машиностроение, 1990, №8, с.21-22.
6. В.И.Симоновский, С.В.Барнев. Исследование демпфирования подшипников и дисбалансов роторов по экспериментально замеренным амплитудам их колебаний. – Проблемы прочности, №2, 1992, с.82-85.
7. В.И.Симоновский. Оценивание демпфирования колебаний ротора. Вісник СумДУ, №2(8), 1997, с.61-65.
8. О.В.Ноль, В.І.Симоновський. Оцінювання коефіцієнтів опору роторів відцентрових машин по

- трьом параметрам.-Вісник СДАУ, сер. Мех.. та авт. виробн. процесів, 2001, вип..6,с.132-136.
9. В.І.Симоновський, В.А.Хворост. Оцінювання параметрів динамічних моделей роторів.-Суми, СумДУ, 2002. 144 с.
 10. В.И.Симоновский. Динамика роторов центробежных машин.-Сумы, СумГУ, 2006. 126 с.
 11. Гадяка В.Г., Симоновський В.І. Оцінювання коефіцієнтів жорсткості сегментних підшипників при балансуванні гнучких роторів турбокомпресорів на розгінно –балансувальному стенді.- Вісник СНАУ, сер. Мех.. та авт. виробн. Процесів, 2005, вип..11(14), с.145-150.
 12. Гадяка В.Г., Симоновский В.И. Разработка методики оценивания динамических кэффицентов подшипников турбокомпрессоров при балансировке на вакуумном разгонно-балансирующем стенде.- Вісник СумДУ, №12, 2006, с.125-132.
 13. Гадяка В.Г., Симоновский В.И. Расчётно-экспериментальная методика уравнивания роторов турбокомпрессоров.-Вісник СНАУ, сер. Мех.. та авт. виробн. процесів, 2006, вип..9(15), с.199-204.
 14. В. І. Симоновський Уточнення математичних моделей коливальних систем за експериментальними даними.- Суми : Сумський державний університет, 2010. – 91 с.
 15. Математическая модель ротора турбокомпрессора для исследования несинхронных составляющих вибрации/ В.Г. Гадяка, Д.В. Лейких, В.И. Симоновский // Компрессорное и энергетическое машиностроение,-2010. – № 2(20). – С. 48-50.

16. Оценивание влияния нелинейных реакций сегментных подшипников на динамику и устойчивость роторов турбокомпрессоров / В. Г. Гадяка, Д. В. Лейких, В. И. Симоновский // Прочность материалов и элементов конструкций : труды Международной научно-технической конференции (Киев, 28–30 сентября 2010 г.). – К. : Ин-т проблем прочности им. Г.С. Писаренко НАН Украины, 2011. – С. 17–24.
17. В.И. Симоновский, А.Г. Хализева . О влиянии подшипников скольжения на устойчивость роторов центробежных насосов/ Вісник СумДУ. Технічні науки.—2013.- №2.—с.84-89.
18. V. Gadyaka, D. Leikykh, V. Simonovskiy. Phenomena of Stability Loss of Rotor Rotation at Filting Pad Bearings. XIIIth International Scientific and Engineering Conferense “ Hermetic Sealing Vibration Reability and Ecologikal Safety of Pump and Compressors Machinery” – “HERVICON” – 2011”.
http://www.sciencedirect.com/science/journal/18777058/39/supp/C_Phenomena_of_Stability_Loss_of_Rotor_Rotation_at_Tilting_Pad_BearingsOriginal Research Article
Pages 244-253
19. A.Beda, V. Simonowsky. Analysis of a Nonlinear Elastic Force in a Relatively Long Annular Seal and its Impact on the Dynamics of the Rotor. Applied Mechanics and Materials. Vol. 630(2014) pp 240-247.
20. Симоновский В.И., Василевский В.О. Особенности колебаний роторов турбокомпрессоров в неустойчивой области частот вращения. Журнал инженерных наук. Том 1, №2 (2014). С.с1-с7.

Люблю книги
ljubljuknigi.ru



yes
I want morebooks!

Покупайте Ваши книги быстро и без посредников он-лайн - в одном из самых быстрорастущих книжных он-лайн магазинов!
Мы используем экологически безопасную технологию "Печать-на-Заказ".

Покупайте Ваши книги на
www.ljubljuknigi.ru

Buy your books fast and straightforward online - at one of the world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at
www.ljubljuknigi.ru

OmniScriptum Marketing DEU GmbH
Heinrich-Böcking-Str. 6-8
D - 66121 Saarbrücken
Telefax: +49 681 93 81 567-9

info@omniscrptum.com
www.omniscrptum.com

OMNIScriptum



