ЖУРНАЛ НАНО- ТА ЕЛЕКТРОННОЇ ФІЗИКИ *JOURNAL OF NANO- AND ELECTRONIC PHYSICS*
Том **7** № 3, 03032(3cc) (2015) Vol. **7** No 3, 03032(3pp) (2015)

Проблема граничного переходу до станів неперервного спектру в задачі про рух електрона в магнітному полі

О. Новак

Інститут прикладної фізики НАН України, вул. Петропавлівська, 58, 40000 Суми, Україна

(Одержано 02.06.2015; опубліковано online 20.10.2015)

Хвильова функція електрона в магнітному полі має властивості як дискретного, так і неперервного спектрів. Це призводить до появи нефізичних довжин нормування у ймовірностях процесів, розрахованих за теорією розсіяння. В даній роботі розглянуто граничний перехід до випадку слабкого поля, коли вплив магнітного поля на рух електрона нескінченно малий. Показано, що в малій області простору хвильова функція переходить в суперпозицію біжучих хвиль, нормованих на половину довжину ларморівської орбіти.

Ключові слова: Магнітне поле, Хвильова функція, Нормування.

PACS numbers: 12.20. – m, 95.30.Cq

1. ВСТУП

Як відомо, хвильові функції неперервного спектра нормуються на деяку довільну довжину L. В магнітному полі, однак, рух електрона квантується по одній з координат. За калібровки потенціалу $\vec{A} = (0, xH, 0)$ хвильова функція має вигляд [1-3]

$$\Psi = e^{-iEt} \frac{e^{ip_y y}}{L_y} \frac{e^{ip_z z}}{L_z} \psi_n(x) , \tag{1}$$

де H – напруженість поля. Ортонормована функція $\psi_n(x)$ задовольняє рівнянню Шредінгера для одновимірного гармонічного осцилятора і дорівнює

$$\psi_n(x) = \frac{\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right)}{\pi^{1/4}\sqrt{a 2^n n!}} H_n\left(\frac{x-x_0}{a}\right), \tag{2}$$

де $H_n(x)$ – поліном Ерміта,

$$a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_H}} . \tag{3}$$

$$\omega_H = \frac{eH}{mc}, \qquad x_0 = \frac{cp_y}{eH} , \tag{4}$$

При цьому власні значення енергії становлять

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} + \sigma\right)\hbar\omega_H + \frac{p_z^2}{2m} , \tag{5}$$

де $\sigma = \pm 1/2$ – значення проекції спіна електрона та $n = 0,1,...$ – квантове число.

Така особливість хвильової функції становить методичні трудноші при дослідженні квантово-електродинамічних процесів в магнітному полі, оскільки у виразах для ймовірностей та перерізів можуть виникати нефізичні множники, що містять константи нормування L [4-6]. Зокрема, в імовірності процесів одно- та двофотонного народження e^-e^+ пари в магнітному полі виникає множник $p_y L_y L_z / V$, де V – нормувальний об'єм, p_y – компонента узагальненого імпульсу електрона, яка може бути виражена через координату центра класичної орбіти електрона x_0 згідно (4). Щоб позбавитися цього множника, в роботі [4] було запропоновано наступний рецепт: величину L_x необхідно ототожнити зі значенням координати центра орбіти електрона. Тоді

$$\frac{p_y L_y L_z}{V} = \frac{p_y}{L_x} \rightarrow \frac{eH}{c} . \tag{6}$$

Зазначимо, що в граничному випадку високих енергій дане правило дає відомі результати, одержані наступним чином. В [7, 8] показано, що при ультрарелятивістських енергіях частинок імовірності процесів залежать від інваріантного параметру

$$\chi = \frac{e}{m^3}\sqrt{(F_{\mu\nu}p_\nu)^2} \tag{7}$$

де $F_{\mu\nu}$ – тензор електромагнітного поля, p_ν – імпульс частинки. Зокрема, якщо обрати в якості $F_{\mu\nu}$ магнітне поле, то результати для інтенсивності випромінювання та утворення пари фотоном, знайдені в [4], а також в [9, 10], можуть бути одержані з виразів для імовірності відповідних процесів у постійному схрещеному полі, де $\vec{E} \perp \vec{H}$ і $E = H$. Послідовного обґрунтування співвідношення (6), однак, немає.

У граничному випадку слабкого магнітного поля (а отже високих енергетичних рівнів) радіус класичної орбіти електрона прямує до нескінченності, а його хвильова функція в малій області простору повинна приймати вигляд плоскої хвилі. Таке наближення дає змогу описувати процеси більш послідовно та уникнути використання штучного правила (6). Даний граничний перехід, однак, не є очевидним, оскільки хвильова функція (2) не переходить у плоску хвилю за умови $H = 0$.

Метою даної роботи є аналіз граничного переходу до слабкого магнітного поля та дослідження питання нормування хвильової функції електрона в такому випадку.

2. ПРЯМОКУТНА ПОТЕНЦІАЛЬНА ЯМА

Спочатку розглянемо найпростіший випадок фінітного руху – частинку в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі. Розв'язок стаціонарного рівняння Шредингера

$$\psi_w(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(kx), \qquad k = \frac{\pi n}{a}, \tag{8}$$

де a – ширина ями, $n = 1, 2, \ldots$ – головне квантове число.

Очевидно, що хвильову функцію (8) можна представити як суперпозицію двох біжучих хвиль, причому обидва стани рівноймовірні. Тоді

$$\psi_w(x) = \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_- - \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_+, \tag{9}$$

де $\psi_\pm$ – плоскі хвилі, нормовані на довжину L:

$$\psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{\pm ikx}. \tag{10}$$

Фазові множники $\pm i$ обрані для зручності. Порівнюючи вирази (8) та (9) можна заключити, що $L = a$.

3. РУХ В МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Як бачимо, рух частинки в прямокутній потенціальній ямі завжди можна представити як суперпозицію двох біжучих хвиль.

Розглянемо граничний випадок малого магнітного поля. З формули (5) випливає, що $n \sim E/H$, а отже за умови фіксованої енергії частинки маємо $n \gg 1$.

Виразимо поліноми Ерміта через функції Трікомі згідно [11]

$$H_n(x) = 2^n x U\left(\frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right). \tag{11}$$

Скористаємося відомим асимптотичним виразом функції $U(a,b,x)$:

$$\begin{aligned} U(a,b,x) = \cos\left(\sqrt{2x(b-2a)} - \frac{b\pi}{2} + a\pi + \frac{\pi}{4}\right) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{b}{2} - a + \frac{1}{4}\right)\frac{x^{-\frac{1}{4}-\frac{b}{2}}}{\sqrt{\pi e^x}}\left[1 + O\left(\left|\frac{b}{2} - a\right|^{-\frac{1}{2}}\right)\right], \end{aligned} \tag{12}$$

справедливим коли $a \to -\infty$, b обмежене та x дійсне. Підставляючи (12) в (11) та використовуючи формулу Стірлінга, знайдемо:

$$e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x) \approx \left(\frac{2n}{e}\right)^{\frac{n}{2}}\sqrt{2}\cos\left(x\sqrt{2n} - \frac{n\pi}{2}\right) \tag{13}$$

із залишковим членом $O(n^{-1/2})$.

Скориставшись (13), одержимо асимптотичний вигляд хвильової функції поблизу точки x_0 у вигляді

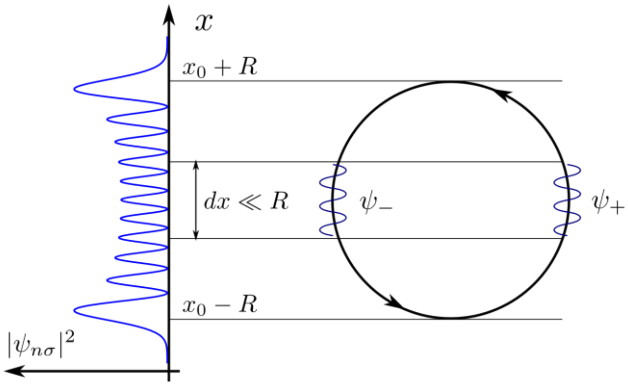
$$\psi_n(x) \approx \sqrt{2}\left(\frac{m\omega_H}{2\pi^2 n\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{p_\perp}{\hbar}(x - x_0) + \delta_n\right), \tag{14}$$

де

$$p_\perp = \sqrt{2m\, n\hbar\omega_H}, \qquad \delta_n = \frac{n\pi}{2}. \tag{15}$$

Зазначимо, що за умови $n \gg 1$ приблизне значення поперечної енергії становить $E_\perp \approx n\hbar\omega_H$, а отже $p_\perp$ має зміст поперечної компоненти кінетичного імпульсу частинки, що рухається по коловій орбіті:

$$p_\perp = \sqrt{2mE_\perp}. \tag{16}$$



Граничний перехід до випадку слабкого магнітного поля. Величина $|\psi_n|^2$ наближається до густини ймовірності класичного осцилятора, а хвильова функція ψ_n є суперпозицією «викривлених» плоских хвиль $\psi_\pm$.

Виразимо функцію (14) через величини, що характеризують класичний рух частинки по коловій орбіті. Для класичної частинки, що рухається по коловій орбіті з радіусом R та центром в точці (x_0, y_0), маємо:

$$x(t) = x_0 + R\cos\omega t, \tag{17}$$

$$\bar{x} = x_0, \qquad \overline{x^2} = x_0^2 + \frac{1}{2}R^2. \tag{18}$$

За означенням середньоквадратичне відхилення дорівнює $\Delta = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$. Тоді одержимо співвідношення

$$R = \Delta\sqrt{2}. \tag{19}$$

Знайдемо тепер середньоквадратичне відхилення x-координати електрона в стані, що описується функцією (2). Використовуючи співвідношення

$$2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1} \tag{20}$$

та ортогональність поліномів Ерміта,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)\,dx = \sqrt{\pi}\,2^n n!\,\delta_{nm}, \tag{21}$$

легко обчислити середні значення $\bar{x}$ та $\overline{x^2}$:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x\,|\psi(x)|^2\,dx = x_0, \tag{22}$$

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,|\psi(x)|^2\,dx = x_0^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)a^2. \tag{23}$$

Беручи до уваги вираз (3), за умови $n \gg 1$ одержимо

$$\Delta = \sqrt{\frac{n\hbar}{m\omega_H}} \tag{24}$$

Після підстановки виразів (19) та (24) в (14), хвильова функція набуває вигляду

$$\psi_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{R\pi}}\cos\left((x - x_0)\frac{p_\perp}{\hbar} + \delta_n\right). \tag{25}$$

Порівнюючи (25) з (9) можна зробити висновок, що в малій області простору $|x - x_0| \ll R$ за умови $H \to 0$ функція $\psi_n(x)$ являє собою суперпозицію двох плоских хвиль, нормованих на половину довжини класичної орбіти електрона:

$$L_x = \pi R. \tag{26}$$

Знайдене співвідношення відповідає на питання про нормування хвильової функції електрона в магнітному полі гранично малої напруженості.

Одержаний результат може бути наочно проілюстровано на рис 1. У випадку великих квантових чисел імовірність $|\psi_n|^2\,dx$ наближається до ймовірності знайти проекцію класичного електрона на інтервалі dx. Тоді константа нормування L_x плоских хвиль $\psi_\pm$ дорівнює довжині частини класичної орбіти електрона, якій відповідає половина коливання його проекції на вісь x.

Проблема предельного перехода к состояниям непрерывного спектра в задаче о движении электрона в магнитном поле

А. Новак

Институт прикладной физики НАН Украины, ул. Петропавловская, 58, 40000 Сумы, Украина

Волновая функция электрона в магнитном поле имеет свойства как дискретного, так и непрерывного спектра. Это приводит к появлению нефизических нормировочных длин в вероятностях процессов, вычисленных по теории рассеяния. В данной работе рассмотрен предельный переход к случаю слабого поля, когда влияние поля на движение электрона исчезающе мало. Показано, что в малой области пространства волновая функция переходит в суперпозицию бегущих волн, нормированных на половину длины ларморовской орбиты.

Ключевые слова: Магнитное поле, Волновая функция, Длина нормирования.

The Problem of the Limit Transition to the States of Continuous Spectrum in the Electron Motion in a Magnetic Field

O. Novak

The Institute of Applied Physics of NAS of Ukraine, 58, Petropavlivska Str., 40000 Sumy, Ukraine

The wave function of an electron in a magnetic field shows features of both the discrete and the continuous spectra. It results in appearance of the normalizing lengths in process rates calculated using the scattering theory technique. In the present work the limit transition to the case of a weak field strength has been studied, when the field influence on the electron motion is negligibly small. It is shown that in a small spatial region, the wave function takes the form of a superposition of two waves, which are normalized to the half of the Larmor orbit length.

Keywords: Magnetic field, Wave function, Normalizing length.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика* (Москва: Наука: 1989) (L.D. Landau, Ye.M. Lifshits, *Kvantovaya mekhanika*, (Moskva: Nauka: 1989)).
2. А.А. Соколов, И.М. Тернов, *Релятивистский электрон* (Москва: Наука: 1974) (A.A. Sokolov, I.M. Ternov, *Relyativistskiy elektron* (Moskva: Nauka: 1974)).
3. А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика* (Москва: Наука: 1981) (A.I. Akhiyezer, V.B. Berestetskiy, *Kvantovaya elektrodinamika* (Moskva: Nauka: 1981)).
4. Н.П. Клепиков, *ЖЭТФ* **26**, 19 (1954) (N.P. Klepikov, *ZhETF* **26**, 19 (1954)).
5. O. Novak, R. Kholodov, *Phys. Rev. D* **80**, 025025 (2009).
6. М.М. Дяченко, О.П. Новак, Р.І. Холодов, *Укр. фіз. журн.* **59** No 9, 849 (2014) (M.M. Dyachenko, O.P. Novak, R.I. Kholodov, *Ukr. J. Phys.* **59** No 9, 849 (2014)).
7. A.I. Nikishov, V.I. Ritus, *ZhETF* **46** No 2, 776 (1964).
8. В.И. Ритус, *Труды ФИАН* **111** (Москва: Наука: 1979) (V.I. Ritus, *Trudy FIAN* **111** (Moskva: Nauka: 1979)).
9. А.А. Соколов, Н.П. Клепиков, И.М. Тернов, *ЖЭТФ* **24**, 249 (1953) (A.A. Sokolov, N.P. Klepikov, I.M. Ternov, *ZhETF* **24**, 249 (1953)).
10. J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **40**, 132 (1954).
11. *Справочник по специальным функциям* (Под ред М. Абрамовица, И. Стиган) (Москва: Наука: 1979) *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam* (Pod red M. Abramovitsa, I. Stigan) (Moskva: Nauka: 1979).