

Аномальные релаксационные процессы в двухуровневых системах

Ю.С. Быстрик*, Л.А. Денисова

Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, 40007 Сумы, Украина

(Получено 05.08.2015; опубликовано online 20.10.2015)

В работе рассматриваются смещенные релаксационные процессы в двухуровневых системах, чьи структурные элементы изменяются согласно дихотомическому случайному процессу. Применяя концепцию непрерывных во времени случайных блужданий, найдено интегральное уравнение, решением которого является релаксационная функция, и показано, что релаксация в таких системах проявляет эффекты памяти. Особое внимание уделено изучению поведения асимптотических законов релаксации в случае, когда времена пребывания системы в верхнем и нижнем состояниях характеризуются тяжелыми и / или сверхтяжелыми хвостами распределений. Из полученных асимптотических законов релаксации следует, что для изучаемых процессов характерно аномально медленное стремление к определенному равновесному положению. Кроме того, проведены численные расчеты, демонстрирующие хорошее соответствие с аналитическими результатами.

Ключевые слова: Аномальная релаксация, Дихотомический процесс, Тяжелые / сверхтяжелые плотности вероятности.

PACS numbers: 05.40.Fb, 02.50.Ey, 76.20.+q

1. ВВЕДЕНИЕ

Релаксационные процессы описывают переходы макроскопической системы между равновесными состояниями и содержат важную информацию об общих механизмах релаксации. Зачастую релаксационные процессы изучаются для систем, подверженных воздействию обобщенной постоянной силы, которая случайным образом переключается [1]. В таком случае одной из наиболее важных характеристик исследуемого процесса является внешняя термодинамическая переменная, сопряженная с обобщенной силой. В качестве примера можно привести магнитную релаксацию [2-4], где соответствующей парой сопряженных переменных будут внешнее магнитное поле и магнитный момент системы, или диэлектрическую релаксацию [5-7], для которой сопряженными переменными являются внешнее электрическое поле и электрический дипольный момент.

Помимо классической дебаевской релаксации, для которой изменение релаксационной функции $\mu(t)$ пропорционально ее величине, т.е. соответствующий закон релаксации имеет вид $\mu(t) = \mu_0 \exp(-t/T)$, где $\mu_0 = \mu(0)$ и T – характерное время релаксации, существует много систем с аномальной, неэкспоненциальной релаксацией (см. работы [8-11] и ссылки в них). Например, релаксация в неупорядоченных средах, стеклах, диэлектрическая релаксация в полимерах описывается растянутой экспоненциальной функцией (*the stretched exponential function*) $\mu(t) = \mu_0 \exp[-(t/T)^\gamma]$ ($0 < \gamma < 1$), которую иногда называют законом Кольрауша-Уильямса-Уоттса. Также процесс релаксации для некоторых явлений, таких как захват электронов, электронно-дырочная рекомбинация, прямой перенос энергии в телах со сложной структурой при больших временах хорошо описывается экспоненциально-логарифмической функцией $\mu(t) \sim \exp[-\gamma \ln^\beta(t/T)]$, где γ и β – положительные

параметры. Данный тип релаксации более медленный, чем закон Кольрауша-Уильямса-Уоттса, и при $\beta = 1$ описывает важный класс степенных законов релаксации: $\mu(t) \sim (t/T)^{-\gamma}$. Кроме того, можно наблюдать переходы от закона Кольрауша-Уильямса-Уоттса при малых значениях времени к степенному поведению при больших временах.

Особое внимание уделяют изучению релаксационных процессов для систем, чьи свойства полностью определяются свойствами их структурных элементов (таких как мономолекулярные магниты, цепочечные магниты, однодоменные ферромагнитные наночастицы). Важным классом такого рода систем являются двухуровневые системы, для которых составляющие элементы изменяются согласно дихотомическому (телеграфному) процессу [12-14]. В статье [15], используя теорию непрерывных во времени случайных блужданий (*continuous-time random walk theory*) [8-10, 16-17], исследовано асимптотическое поведение релаксационного процесса в случае, когда времена пребывания процесса в каждом из двух возможных состояний (верхнем и нижнем) распределены с одинаковой плотностью вероятности. Показано, что если данная плотность имеет тяжелые или сверхтяжелые хвосты, тогда в системе наблюдается соответственно аномально медленная или сверхмедленная релаксация. В данной работе мы продолжаем предыдущие исследования и рассматриваем *смещенную* релаксацию в двухуровневой системе, времена пребывания которой в верхнем и нижнем состоянии распределены с различными тяжелыми / сверхтяжелыми плотностями.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим систему, состоящую из множества одинаковых объектов, каждый из которых в течение случайного промежутка времени пребывает в одном

*yurabystrik@gmail.com

из двух возможных равновесных состояний. Интересным и наглядным примером такого рода систем являются системы одноосных однодоменных ферромагнитных наночастиц. В каждой наночастице вектор намагниченности имеет два равновесных направления, однако в связи с тепловыми флуктуациями этот вектор может принимать произвольные направления. Как следствие, динамика вектора намагниченности становится случайной и может быть описана стохастическим уравнением Ландау-Лифшица (или Ландау-Лифшица-Гильберта). При этом необходимые статистические свойства определяются с помощью соответствующего уравнения Фоккера-Планка для плотности вероятности направления намагниченности [3, 18-20]. В частности, в рамках данного подхода удается приближенно описать влияние на магнитную релаксацию диполь-дипольного взаимодействия частиц [21-23] и вращающегося внешнего магнитного поля [24-25]. В силу того, что этот метод является общим, изучение релаксации в системе может быть довольно трудным, если необходимо учитывать все возможные направления вектора намагниченности. Однако, при уменьшении температуры вероятность направлений вектора намагниченности, отличных от равновесных, уменьшается. Следовательно, когда общая вероятность таких направлений достаточно мала, динамика вектора намагниченности может быть приближенно описана дихотомическим случайным процессом. Как будет показано ниже, дихотомическая аппроксимация позволяет без особых вычислительных трудностей детально изучить явление релаксации для широкого класса двухуровневых систем.

2.1 Вывод релаксационного уравнения

В рамках дихотомического приближения состояние каждого структурного элемента системы связывается с дихотомическим процессом $f(t)$ (см. рис. 1). Согласно определению, этот процесс в течение случайных промежутков времени $\{\tau_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) принимает значения $+1$ или -1 , и $f(0) = 1$ в начальный момент времени $t_0 = 0$. Времена ожидания $\{\tau_n\}$ распределены с плотностями вероятности $p_{\pm}(\tau_n)$, где знаки $+ / -$ отвечают соответственно распределениям для времен ожидания в состоянии $+1 / -1$ (т.е. для τ_n с нечетным / четным индексом n).

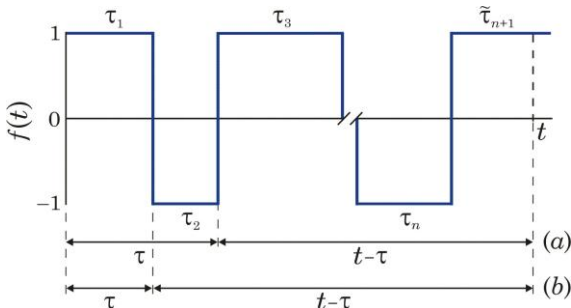


Рис. 1 – Схематическое изображение дихотомического процесса $f(t)$ с четным числом перемен знака на интервале $(0, t]$. Здесь же показано разбиение временного интервала $(0, t]$ в смещенном (а) и несмещенном (б) случае.

Теперь, следуя работе [15], опишем метод получения закона релаксации на основе подхода непрерывных во времени случайных блужданий. Отметим, что предложенный подход основывается не на динамических, а на чисто вероятностных соображениях. Под релаксационной функцией будем понимать усреднение дихотомического процесса $f(t)$, а именно

$$\mu(t) = \langle f(t) \rangle, \tag{2.1}$$

где угловые скобки обозначают усреднение по всем подходящим траекториям процесса. Принимая во внимание, что для каждого t функция $f(t)$ принимает лишь значение $+1$ или -1 , определение (2.1) можно переписать как

$$\mu(t) = \langle f(t) = +1 \rangle + \langle f(t) = -1 \rangle. \tag{2.2}$$

Учитывая, что $f(t) = +1$ для четного числа скачков (перемен знака) функции $f(t)$, а $f(t) = -1$ – для нечетного, формула (2.2) принимает вид

$$\mu(t) = \Pr\{f(t) = +1\} - \Pr\{f(t) = -1\}. \tag{2.3}$$

Здесь $\Pr\{\}$ определяет вероятность события в фигурных скобках. Вводя вероятность $W_n(t)$ того, что за время t процесс $f(t)$ совершил ровно n ($n = 1, 2, \dots$) скачков, можем записать

$$\begin{aligned} \Pr\{f(t) = +1\} &= \sum_{m=0}^{\infty} W_{2m}(t), \\ \Pr\{f(t) = -1\} &= \sum_{m=0}^{\infty} W_{2m+1}(t). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Если количество скачков функции $f(t)$ за время t равно нулю ($n = 0$), то первое время ожидания $\tau_1 > t$ и, следовательно, вероятность отсутствия скачка записывается как

$$W_0(t) = \int_t^{\infty} d\tau_1 p_+(\tau_1). \tag{2.5}$$

Для $n \geq 1$ вероятности, отвечающие n скачкам функции $f(t)$ на интервале $(0, t]$, выражаются формулой

$$W_n(t) = \int_{\Omega(t)} \left[\prod_{j=1}^n d\tau_j p_{(-)^{j+1}}(\tau_j) \right] \int_{\tilde{\tau}_{n+1}}^{\infty} d\tau_{n+1} p_{(-)^{n+2}}(\tau_{n+1}), \tag{2.6}$$

где область интегрирования $\Omega(t)$ определяется условием $\sum_{j=1}^n \tau_j \leq t$, поэтому интеграл по области $\Omega(t)$ в (2.6) будет задаваться n -кратной сверткой плотностей $\{p_{(-)^{j+1}}(\tau_j)\}$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Учитывая то обстоятельство, что последнее время ожидания равно $\tilde{\tau}_{n+1} = t - \sum_{j=1}^n \tau_j$, перепишем выражение (2.6) в развернутой форме

$$\begin{aligned} W_n(t) &= \int_0^t d\tau_1 p_+(\tau_1) \int_0^{t-\tau_1} d\tau_2 p_-(\tau_2) \dots \times \\ &\int_0^{t-\sum_{j=1}^{n-1} \tau_j} d\tau_n p_{(-)^{n+1}}(\tau_n) \int_{t-\sum_{j=1}^n \tau_j}^{\infty} d\tau_{n+1} p_{(-)^{n+2}}(\tau_{n+1}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Далее, применяя к уравнению (2.3) преобразова-

ние Лапласа, которое для функции $g(t)$ задается формулой $g^s = \int_0^\infty dt g(t) e^{-st}$ [$\text{Re } s > 0$], с учетом (2.4) имеем

$$\mu^s = \sum_{m=0}^{\infty} W_{2m}^s - \sum_{m=0}^{\infty} W_{2m+1}^s. \quad (2.8)$$

Теперь, используя правило преобразования Лапласа для свертки функций, а именно $g_1^s g_2^s = \int_0^\infty dt e^{-st} \int_0^\infty dt' \times g_1(t) g_2(t-t')$, нетрудно найти преобразования Лапласа для вероятностей, дающихся выражениями (2.5) и (2.7)

$$W_{2m}^s = (p_+^s p_-^s)^m \frac{1-p_+^s}{s}, \quad (2.9)$$

$$W_{2m+1}^s = (p_+^s p_-^s)^m p_+^s \frac{1-p_-^s}{s},$$

($m=0, 1, \dots$). Наконец, подставляя формулы (2.9) в уравнение (2.8) и суммируя возникающие бесконечные геометрические прогрессии, находим преобразование Лапласа для закона релаксации

$$\mu^s = \frac{1}{1-p_+^s p_-^s} \left(\frac{1-p_+^s}{s} - p_+^s \frac{1-p_-^s}{s} \right). \quad (2.10)$$

Опять применяя свойства свертки функций, из последней формулы следует, что релаксационная функция удовлетворяет интегральному уравнению

$$\mu(t) - \int_0^t d\tau \mu(\tau) \int_0^{t-\tau} d\tau' p_+(\tau') p_-(t-\tau-\tau') = \int_t^\infty d\tau p_+(\tau) - \int_0^t d\tau p_+(\tau) \int_{t-\tau}^\infty d\tau' p_-(\tau'). \quad (2.11)$$

Легко увидеть, что если имеет место несмещенная релаксация, т.е. $p_\pm(\tau) = p(\tau)$, то уравнения (2.10) и (2.11) упрощаются и принимают вид [15]

$$\mu^s = \frac{1}{1+p^s} \frac{1-p^s}{s}, \quad (2.12)$$

$$\mu(t) + \int_0^t d\tau \mu(\tau) p(t-\tau) = \int_t^\infty d\tau p(\tau). \quad (2.13)$$

Уравнения (2.11) и (2.13) – это интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода с разностным ядром [26], которые играют важную роль во многих задачах теории восстановления [27-29]. Поскольку численные методы их решения хорошо известны [30-31], уравнения (2.11) и (2.13) удобны для численного исследования поведения функции $\mu(t)$ при конечных временах. А из представлений (2.10) и (2.12) целесообразно исходить при аналитическом изучении поведения $\mu(t)$ в случае больших времен (см. раздел 3).

Рассмотрим важный класс экспоненциальных плотностей вероятности времен ожидания, т.е. $p_\pm(\tau) = \bar{\tau}_\pm^{-1} e^{-\tau/\bar{\tau}_\pm}$, где параметр $\bar{\tau}_\pm$ равен среднему времени пребывания системы в верхнем/нижнем состоянии: $\bar{\tau}_\pm = \int_0^\infty d\tau \tau p_\pm(\tau)$. Несложно проверить, что в этом

случае интегральное уравнение (2.11) сводится к дифференциальному

$$\frac{d}{dt} \mu(t) + \left(\frac{1}{\bar{\tau}_+} + \frac{1}{\bar{\tau}_-} \right) \mu(t) + \left(\frac{1}{\bar{\tau}_+} - \frac{1}{\bar{\tau}_-} \right) = 0 \quad (2.14)$$

с начальным условием $\mu(0) = 1$. Его решение имеет простой вид

$$\mu(t) = (1 - \mu_\infty) e^{-t/T} + \mu_\infty, \quad (2.15)$$

где $\mu_\infty = (\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-) / (\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)$, $T = \bar{\tau}_+ \bar{\tau}_- / (\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)$. Исходя из других соображений и при определенных предположениях о поведении релаксационного процесса, данная формула получена в работах [21, 22, 24, 25] по изучению (в частности) релаксации магнитного момента в системах одноосных наночастиц во вращающемся магнитном поле. В данных работах средние времена $\bar{\tau}_\pm$ – это функции параметров изучаемой системы, которые получены с помощью соответствующего уравнения Фоккера-Планка. Из уравнений (2.10)-(2.13) видно, что для различных плотностей вероятности $p_\pm(\tau)$ с одинаковым средним значением (при условии, что оно конечно) законы релаксации могут существенно отличаться. Таким образом, существование среднего времени пребывания системы в верхнем и нижнем состоянии еще не гарантирует, что закон релаксации будет экспоненциальным. Иными словами, при нахождении закона релаксации для конкретной физической системы мы должны учитывать дополнительную информацию о характере ее поведения. Тем не менее, предельное значение $\mu(t)$ зависит только от средних значений $\bar{\tau}_\pm$ и равняется $\mu(\infty) = (\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-) / (\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)$ [см. раздел 3].

Обратим внимание, что из интегральных уравнений (2.11) и (2.13) следует важный результат: в общем случае релаксационные процессы в двухуровневых системах характеризуются сильными эффектами памяти. Иначе говоря, состояние $\mu(t)$ в каждый момент времени зависит от всех предыдущих моментов.

2.2 Альтернативный вывод релаксационного уравнения

Далее, для лучшего понимания структуры и физической интерпретации интегральных уравнений (2.11) и (2.13) мы дадим альтернативный, более прямой их вывод. Рассмотрим сначала случай смещенной релаксации. Напомним, что правая часть (2.1) – это усреднение (математическое ожидание) процесса $f(t)$ по всем возможным траекториям. Траектории характеризуются тем, что начинаются в момент $t_0 = 0$ в точке $f(0) = 1$ и, совершив n ($n = 1, 2, \dots$) скачков в случайные моменты времени $\{\tau_n\}$, заканчиваются в момент времени t в точке $f(t) = 1$ для четного числа скачков процесса, или в точке $f(t) = -1$ для нечетного. Если скачек отсутствует ($n = 0$), то очевидно, что $f(t) = 1$. Таким образом, усреднение процесса $f(t)$ по всем реализациям можно представить как сумму усреднений по реализациям, для которых $n = 0$, $n = 1$ и $n \geq 2$. Следовательно, закон релаксации $\mu(t)$ можно представить в виде

$$\mu(t) = \langle f(t) |_{\tau_1 > t} \rangle + \langle f(t) |_{\tau_1 + \tau_2 > t} \rangle + \langle f(t) |_{\tau_1 + \tau_2 \leq t} \rangle, \quad (2.16)$$

где величина $\langle f(t) |_A \rangle$ обозначает математическое ожидание процесса $f(t)$ при условии, что событие A выполнено.

Исходя из предыдущих результатов [формулы (2.2)-(2.7)] непосредственно следует, что

$$\langle f(t) |_{\tau_1 > t} \rangle = W_0(t) = \int_t^\infty d\tau_1 p_+(\tau_1) \quad (2.17)$$

и

$$\langle f(t) |_{\tau_1 + \tau_2 > t} \rangle = -W_1(t) = -\int_0^t d\tau_1 p_+(\tau_1) \int_{t-\tau_1}^\infty d\tau_2 p_-(\tau_2). \quad (2.18)$$

В случае, когда $n \geq 2$, разобьем временной интервал $(0, t]$ на части $(0, \tau]$ и $(\tau, t]$, где $\tau = \tau_1 + \tau_2$ [рис. 1, (a)]. Тогда процесс $f(t)$, начиная с момента времени $\tau = t$, можно рассматривать как новый процесс $f(t)|_{t_0 = \tau}$, для которого точка старта сдвинута на τ вправо по оси t , начальное значение равно $f(t_0)|_{t_0 = \tau} = 1$, а длительность блуждания равна $t - \tau$. Статистические свойства этого процесса такие же, как и для процесса $f(t - \tau)$, поскольку они определяются только его значением на старте, длительностью блуждания и распределениями времен пребывания в верхнем и нижнем положении [очевидно, что процессы $f(t)|_{t_0 = \tau}$ и $f(t - \tau)$ характеризуются одинаковыми распределениями времен ожидания]. Отсюда следует, что все статистические характеристики процессов $f(t)|_{t_0 = \tau}$ и $f(t - \tau)$ равны, включая равенство их средних значений:

$$\langle f(t) |_{t_0 = \tau} \rangle = \langle f(t - \tau) \rangle. \quad (2.19)$$

Подчеркнем, что, конечно, сами процессы $f(t)|_{t_0 = \tau}$ и $f(t - \tau)$ не являются тождественными (с той лишь разницей, что время старта смещено). Однако, принимая в общем случае разные значения и имея разные длительности времен $\{\tau_n\}$, эти процессы эквивалентны в статистическом смысле.

Для фиксированного τ значение $f(t)$ при условии $n \geq 2$ [обозначим эту величину $f(t)|_{\tau_1 + \tau_2 = \tau}$] равно значению функции $f(t)|_{t_0 = \tau}$. При этом среднее значение процесса $f(t)|_{\tau_1 + \tau_2 = \tau}$ по реализациям равно среднему значению $f(t)|_{t_0 = \tau}$ умноженному на вероятность того, что второй скачок функции $f(t)$ произошел в интервале $(\tau, \tau + d\tau)$ при $d\tau \rightarrow 0$. Отсюда, полагая, что плотности случайных величин τ_1 и τ_2 равны $p_+(\tau_1)$ и $p_-(\tau_2)$ соответственно, и учитывая то обстоятельство, что плотность вероятности случайной величины $\tau = \tau_1 + \tau_2$ равна $\int_0^\tau d\tau' p_+(\tau') p_-(\tau - \tau')$ [29], получаем

$$\langle f(t) |_{\tau_1 + \tau_2 = \tau} \rangle = d\tau \int_0^\tau d\tau' p_+(\tau') p_-(\tau - \tau') \langle f(t) |_{t_0 = \tau} \rangle. \quad (2.20)$$

Эта формула с учетом равенства (2.19) принимает вид

$$\langle f(t) |_{\tau_1 + \tau_2 = \tau} \rangle = d\tau \int_0^\tau d\tau' p_+(\tau') p_-(\tau - \tau') \langle f(t - \tau) \rangle. \quad (2.21)$$

Величина $\langle f(t) |_{\tau_1 + \tau_2 \leq t} \rangle$ представляет собой среднее значение процесса $f(t)$ при $n \geq 2$ для всех возможных

значений переменной τ ($\tau \in (0, t]$). Следовательно, она определяется интегрированием $\langle f(t) |_{\tau_1 + \tau_2 = \tau} \rangle$ относительно всех τ , а поэтому

$$\langle f(t) |_{\tau_1 + \tau_2 \leq t} \rangle = \int_0^t d\tau \langle f(t - \tau) \rangle \int_0^\tau d\tau' p_+(\tau') p_-(\tau - \tau'). \quad (2.22)$$

Далее, принимая во внимание тот факт, что $\langle f(t - \tau) \rangle = \mu(t - \tau)$ [определение (2.1)], получаем

$$\langle f(t) |_{\tau_1 + \tau_2 \leq t} \rangle = \int_0^t d\tau \mu(t - \tau) \int_0^\tau d\tau' p_+(\tau') p_-(\tau - \tau'). \quad (2.23)$$

Наконец, подставляя формулы (2.17), (2.18) и (2.23) в уравнение (2.16), а также учитывая, что для произвольных функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$ выполняется равенство их сверток $\int_0^t dt g_1(t - \tau) g_2(\tau) = \int_0^t dt g_1(\tau) g_2(t - \tau)$, приходим к интегральному уравнению (2.11).

Сейчас, проведя прямой вывод этого уравнения, несложно дать его интерпретацию: релаксационная функция $\mu(t)$ равна разности вероятности того, что процесс $f(t)$ не сделал ни одного скачка, и вероятности, что процесс $f(t)$ сделал ровно один скачок, плюс среднее значение функции $\mu(t)$ при условии, что процесс $f(t)$ сделал больше одного скачка.

Получим теперь интегральное уравнение (2.13) для несмещенной релаксации. Метод вывода будет аналогичен смещенному случаю, с той лишь разницей, что усреднение процесса $f(t)$ по всем реализациям запишем как сумму усреднений по реализациям, для которых $n=0$ и $n \geq 1$. Таким образом, релаксационную функцию $\mu(t)$ представим как

$$\mu(t) = \langle f(t) |_{\tau_1 > t} \rangle + \langle f(t) |_{\tau_1 \leq t} \rangle, \quad (2.24)$$

где

$$\langle f(t) |_{\tau_1 > t} \rangle = W_0(t) = \int_t^\infty d\tau_1 p(\tau_1). \quad (2.25)$$

Для вычисления $\langle f(t) |_{\tau_1 \leq t} \rangle$ разобьем интервал времени $(0, t]$ промежуточной точкой $\tau = \tau_1$ на части $(0, \tau]$ и $(\tau, t]$ [рис. 1, (b)]. С момента времени $t = \tau$ процесс $f(t)$ можно представить как новый процесс $f(t) |_{t_0 = \tau}$ с начальным условием $f(t_0) |_{t_0 = \tau} = -1$. Поэтому одинаковыми статистическими свойствами будут обладать процессы $f(t - \tau)$ и $-f(t) |_{t_0 = \tau}$. Повторяя предыдущий вывод, записываем среднее значение $f(t)$ при условии, что первый скачок был в интервале $(\tau, \tau + d\tau)$

$$\langle f(t) |_{\tau_1 = \tau} \rangle = d\tau p(\tau) \langle f(t) |_{t_0 = \tau} \rangle \quad (2.26)$$

или

$$\langle f(t) |_{\tau_1 = \tau} \rangle = -d\tau p(\tau) \langle f(t - \tau) \rangle. \quad (2.27)$$

Среднее значение $f(t)$ при условии, что за время t произошел хотя бы один скачок процесса, дается выражением

$$\langle f(t) |_{\tau_1 \leq t} \rangle = -\int_0^t d\tau \langle f(t - \tau) \rangle p(\tau). \quad (2.28)$$

Отсюда, принимая во внимание определение (2.1), имеем

$$\langle f(t) |_{n \leq t} \rangle = -\int_0^t d\tau \mu(t-\tau) p(\tau). \quad (2.29)$$

В итоге, подставляя выражения (2.25), (2.29) в (2.24) и учитывая свойство сверки функций, приходим к интегральному уравнению (2.13).

Это уравнение также имеет простую интерпретацию: в каждый момент времени значение релаксационной функции $\mu(t)$ равно разности вероятности того, что процесс $f(t)$ не сделал ни одного скачка и среднего значения $\mu(t)$ при условии, что был хотя бы один скачок $f(t)$. Отметим, что сильные эффекты памяти в данной модели определяются интегральными членами в уравнениях (2.13) и (2.11). Их присутствие связано с тем, что один (для несмещенной) или два (для смещенной) первых скачка процесса $f(t)$ могут произойти в любой момент времени, и поэтому, вычисляя значение релаксационной функции $\mu(t)$, мы должны учитывать все возможные времена этих первых скачков.

В следующем разделе мы покажем, что для широкого класса плотностей вероятности времен ожидания релаксация в двухуровневых системах будет аномально медленной при больших временах.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЗАКОНОВ РЕЛАКСАЦИИ

Рассмотрим поведение закона релаксации в двухуровневых системах при больших значениях времени для класса распределений $p_{\pm}(\tau)$ с тяжелыми и сверхтяжелыми хвостами. Выбор этого класса функций обусловлен тем, что они играют большую роль в системах с аномальным поведением [8-10, 32-35]. Далее мы будем изучать смещенный случай [$p_+(\tau) \neq p_-(\tau)$]; несмещенная ситуация [$p_+(\tau) = p_-(\tau)$], как говорилось ранее, рассмотрена в работе [15]. Подчеркнем, что в этом разделе переменная τ связана только с распределением случайных времен $\{\tau_n\}$ и не имеет отношения к разбиению интервала $(0, t]$ из предыдущего раздела.

3.1 Тяжелые хвосты $p_{\pm}(\tau)$

Плотности вероятности $p_{\pm}(\tau)$ называются тяжелыми, если асимптотическое поведение их хвостов определяется формулой

$$p_{\pm}(\tau) \sim \frac{q_{\pm}}{\tau^{1+\alpha_{\pm}}} \quad (3.1)$$

при $\tau \rightarrow \infty$, где $q_{\pm} > 0$ и хвостовой параметр $\alpha_{\pm} \in (0, 2]$. Ограничение на значения α_{\pm} обусловлено тем, что в таком случае все моменты (в том числе дробные) порядка $\eta \geq \alpha_{\pm}$ для плотностей $p_{\pm}(\tau)$ будут бесконечными. Следовательно, эти плотности всегда имеют бесконечную дисперсию, среднее же значение бесконечно только если $\alpha_{\pm} \in (0, 1]$.

Согласно тауберовой теореме Караматы [9, 29], поведение $\mu(t)$ при больших t будет задаваться поведением μ^s при малых s . Более точно эта теорема гласит, что если, начиная с некоторой точки, функция

$k(t)$ монотонна и

$$k^s \sim \frac{1}{s^{\gamma}} L\left(\frac{1}{s}\right) \quad (3.2)$$

при $s \rightarrow 0$, то

$$k(t) \sim \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} L(t) \quad (3.3)$$

при $t \rightarrow \infty$. Здесь $\text{Re } s > 0$, $\gamma > 0$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция и $L(\cdot)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция, т.е. $L(\nu t) \sim L(t)$ при $t \rightarrow \infty$ для всех $\nu > 0$.

Уравнение (2.10) показывает, что поведение μ^s при $s \rightarrow 0$ определяется поведением p_{\pm}^s при $s \rightarrow 0$. Перепишем его в виде

$$\mu^s = \frac{\phi_+^s - \phi_-^s + \phi_+^s \phi_-^s}{s(\phi_+^s + \phi_-^s - \phi_+^s \phi_-^s)}. \quad (3.4)$$

где введено обозначение $\phi_{\pm}^s = 1 - p_{\pm}^s$. Известно, что для плотностей с асимптотическим поведением, определяемым (3.1), справедливы формулы (см., например, [36])

$$\phi_{\pm}^s \sim \begin{cases} \frac{q_{\pm} \Gamma(1 - \alpha_{\pm})}{\alpha_{\pm}} s^{\alpha_{\pm}}, & \alpha_{\pm} \in (0, 1), \\ q_{\pm} s \ln(1/s), & \alpha_{\pm} = 1, \\ \bar{\tau}_{\pm} s - \frac{q_{\pm} \Gamma(2 - \alpha_{\pm})}{\alpha_{\pm}(\alpha_{\pm} - 1)} s^{\alpha_{\pm}}, & \alpha_{\pm} \in (1, 2), \\ \bar{\tau}_{\pm} s - \frac{q_{\pm}}{2} s^2 \ln(1/s), & \alpha_{\pm} = 2. \end{cases} \quad (3.5)$$

Здесь, как и в предыдущем разделе, $\bar{\tau}_{\pm}$ – среднее время пребывания системы в верхнем/нижнем состоянии. Пользуясь представленными выше результатами, можно найти асимптотические законы релаксации при всех распределениях $p_{\pm}(\tau)$ с тяжелыми хвостами. Обратим внимание, что на асимптотическое поведение $\mu(t)$ влияют только хвосты $p_{\pm}(\tau)$; как ведут себя распределения $p_{\pm}(\tau)$ при конечных τ не имеет значения. Далее мы будем проводить анализ для случая $\alpha_+ < \alpha_-$ [т.е. $p_+(\tau) \gg p_-(\tau)$ при больших τ]. Если же $\alpha_+ > \alpha_-$, то во всех полученных формулах необходимо просто поменять местами индексы "+" и "-", а также заменить функцию $\mu(t)$ на $-\mu(t)$. Ситуацию с $\alpha_+ = \alpha_-$ [но $p_+(\tau) \neq p_-(\tau)$] мы не рассматриваем, так как в этом случае необходимо знать дополнительные члены разложения $p_{\pm}(\tau)$ на бесконечности.

1) $\alpha_+ \in (0, 1]$.

Если $\alpha_+ \in (0, 1]$, то из (3.4) с учетом (3.5) следует, что $\mu^s \sim 1/s$ [$s \rightarrow 0$] и поэтому $\mu(t) \sim 1$ [$t \rightarrow \infty$]. Для нахождения характера стремления $\mu(t)$ к единице рассмотрим вспомогательную функцию $h(t) = 1 - \mu(t)$, для которой $h^s \sim 1/s - \mu^s$. Таким образом, получаем

$$h^s = \frac{2(\phi_-^s - \phi_+^s \phi_-^s)}{s(\phi_+^s + \phi_-^s - \phi_+^s \phi_-^s)} \quad (3.6)$$

и отсюда находим при $s \rightarrow 0$

$$h^s \sim \frac{2\phi_-^s}{s\phi_+^s}. \quad (3.7)$$

Так как $\alpha_+ \in (0, 1]$ и $\alpha_+ < \alpha_-$, то в данном случае возможны ситуации: (a) $\alpha_{\pm} \in (0, 1)$; (b) $\alpha_+ \in (0, 1)$ и $\alpha_- = 1$; (c) $\alpha_+ \in (0, 1)$ и $\alpha_- \in (1, 2]$; (d) $\alpha_+ = 1$ и $\alpha_- \in (1, 2]$. Используя (3.5), (3.7) и тауберovu теорему [формулы (3.2)-(3.3)], получаем соответственно для (a), (b), (c) и (d) асимптотики закона релаксации

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2q_+ \alpha_+ \Gamma(1 - \alpha_+)}{q_+ \alpha_- \Gamma(1 - \alpha_+) \Gamma(1 + \alpha_+ - \alpha_-)} t^{\alpha_+ - \alpha_-}, \quad (3.8)$$

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2q_+ \alpha_+ \sin(\pi\alpha_+)}{\pi q_+} \ln(t) t^{\alpha_+ - 1}, \quad (3.9)$$

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2\bar{\tau}_- \alpha_+ \sin(\pi\alpha_+)}{\pi q_+} t^{\alpha_+ - 1}, \quad (3.10)$$

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2\bar{\tau}_-}{q_+} \frac{1}{\ln(t)}. \quad (3.11)$$

2) $\alpha_+ \in (1, 2)$.

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение закона релаксации при $\alpha_+ \in (1, 2)$ (поэтому $\alpha_- \in (1, 2]$). Отметим, что случай $\alpha_+ = 2$ мы пока что не рассматриваем, поскольку $\alpha_+ < \alpha_-$ и это влечет за собой выполнение условия $\alpha_- > 2$ (как следствие, дисперсия $p_-(\tau)$ была бы конечной). Подставляя нужные формулы из (3.5) в выражение (3.4), приходим к выводу, что $\mu^s \sim [(\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-)/(\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)](1/s)$ [$s \rightarrow 0$] и, таким образом, $\mu(t) \sim (\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-)/(\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)$ [$t \rightarrow \infty$]. Следовательно, для определения характера стремления $\mu(t)$ к предельному значению целесообразно ввести вспомогательную функцию $h(t) = (\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-)/(\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-) - \mu(t)$, для которой преобразование Лапласа имеет вид

$$h^s = \frac{2(-\bar{\tau}_- \phi_+^s + \bar{\tau}_+ \phi_-^s - \bar{\tau}_+ \phi_+^s \phi_-^s)}{s(\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)(\phi_+^s + \phi_-^s - \phi_+^s \phi_-^s)}. \quad (3.12)$$

Аналогично предыдущему случаю, используя тауберovu теорему (3.2)-(3.3) и соответствующие асимптотики ϕ_{\pm}^s (3.5), получаем

$$\mu(t) \sim \frac{\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-}{\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-} - \frac{2\bar{\tau}_- q_+}{(\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)^2 \alpha_+ (\alpha_+ - 1)} t^{1 - \alpha_+}. \quad (3.13)$$

Следует отметить, что в ситуации, когда только одна плотность вероятности, скажем $p_-(\tau)$ [так как мы условились исследовать релаксацию при $p_+(\tau) \gg p_-(\tau)$ для больших τ], имеет конечную дисперсию и среднее значение равно $\bar{\tau}_-$, а хвосты $p_+(\tau)$ тяжелые, то формулы (3.10), (3.11) и (3.13) остаются в силе. Отметим также, что с помощью последней асимптотики из выражения (3.5) и вспомогательной функции $h(t) = \int_0^t d\tau [(\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-)/(\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-) - \mu(t)]$ несложно убедиться, что соотношение (3.13) выполняется и для параметра

$\alpha_+ = 2$, если распределения $p_-(\tau)$ имеют конечную дисперсию.

В рамках предложенного выше подхода не удается определить характер поведения $\mu(t)$ при больших временах для дихотомического процесса $f(t)$, который характеризуется плотностями $p_{\pm}(\tau)$ с конечной дисперсией. Это связано с тем, что в этом случае $\mu(t)$ будет стремиться к предельному значению гораздо быстрее, чем степенная функция, поэтому тауберова теорема Караматы не применима. Тем не менее, в этой ситуации с помощью тауберовой теоремы из уравнения (3.4) нетрудно установить, что релаксационная функция стремится к предельному значению $\mu(\infty) = (\bar{\tau}_+ - \bar{\tau}_-)/(\bar{\tau}_+ + \bar{\tau}_-)$.

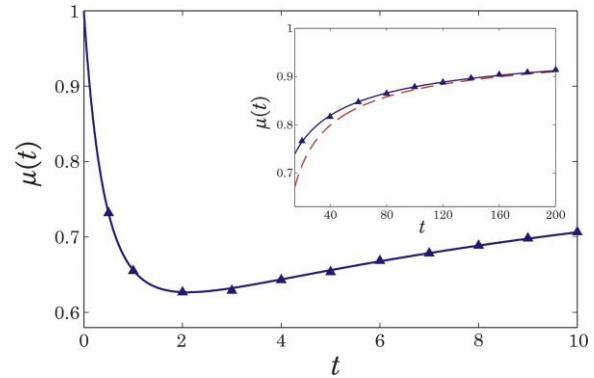


Рис. 2 – Закон релаксации в случае, когда $\alpha_+ = 0.5$ и $\alpha_- = 1.5$. Сплошная синяя линия соответствует точному закону релаксации $\mu(t)$, полученному с помощью решения интегрального уравнения (2.11); синие треугольники соответствуют результатам численного моделирования; а пунктирная красная линия отвечает асимптотической формуле (3.10).

На рисунке 2 в качестве иллюстрации приведен график закона релаксации в случае, когда хвостовые параметры $\alpha_+ \in (0, 1]$ и $\alpha_- \in (1, 2]$. Для проведения расчетов мы использовали тяжелые плотности вероятности времен ожидания следующего вида: $p_{\pm}(\tau) = \alpha_{\pm}/(1+\tau)^{1+\alpha_{\pm}}$. Решение интегрального уравнения (2.11) найдено с помощью известного метода квадратур [30, 31], а асимптотическое поведение получено с помощью формулы (3.10), где [с учетом выбранных плотностей $p_{\pm}(\tau)$] необходимые параметры даются равенствами $q_+ = \alpha_+$ и $\bar{\tau}_- = 1/(\alpha_- - 1)$. Наконец, численное моделирование осуществлено с использованием предложенного в работе [35] метода для $N = 10^5$ реализаций процесса $f(t)$. Как видно, аналитические и численные результаты находятся в очень хорошем соответствии друг с другом. Другие законы релаксации этого подраздела нами также численно исследовались, однако во избежание излишней громоздкости мы ограничимся лишь одним примером.

3.2 Сверхтяжелые хвосты $p_{\pm}(\tau)$

Сверхтяжелые плотности вероятности характеризуются тем, что их асимптотическое поведение при $\tau \rightarrow \infty$ описывается выражением

$$p_{\pm}(\tau) \sim \frac{\sigma_{\pm}(\tau)}{\tau}. \quad (3.14)$$

В последнем соотношении $\sigma_{\pm}(\cdot)$ – положительные функции, медленно меняющиеся на бесконечности. С целью обеспечения нормировки плотностей $p_{\pm}(\tau)$ на $\sigma_{\pm}(\cdot)$ накладывается условие: $\sigma_{\pm}(\tau) = o(1/\ln \tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Для дальнейшего исследования удобно ввести функции

$$V_{\pm}(t) = \int_t^{\infty} d\tau p_{\pm}(\tau), \quad (3.14)$$

равные вероятности того, что времена ожидания процесса $f(t)$ в верхнем / нижнем положении превосходят t . Используя правило Лопиталя, несложно показать, что $\lim_{t \rightarrow \infty} V_{\pm}(vt)/V_{\pm}(t) = 1$, то есть функции $V_{\pm}(t)$ также медленно меняются. Далее, пользуясь свойствами медленно меняющихся функций [37-38], получаем

$$\phi_{\pm}^s = sV_{\pm}^s = \int_0^{\infty} d\tau e^{-\tau} V_{\pm}(\tau/s) \sim V_{\pm}(1/s). \quad (3.15)$$

Как и для тяжелых хвостов, проведем расчеты при $p_+(\tau) \gg p_-(\tau)$ [в обратном случае в полученных ниже формулах следует поменять местами индексы "+" и "-", а функцию $\mu(t)$ заменить на $-\mu(t)$]. Так как $V_+(1/s) \gg V_-(1/s)$ при $s \rightarrow 0$, из (3.15) и (3.4) следует, что $\mu(t) \sim 1$ при больших временах. Таким образом, мы вновь приходим к необходимости использовать вспомогательную функцию $h(t) = 1 - \mu(t)$ и асимптотическое соотношение (3.7). Подставляя в него формулу (3.15) и применяя тауберovu теорему (3.2)-(3.3), получаем $h^s \sim 2V_-(1/s)[sV_+(1/s)]^{-1}$, откуда находим закон релаксации

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2V_-(t)}{V_+(t)}. \quad (3.16)$$

Изучим теперь ситуацию, когда лишь хвост одной плотности вероятности, скажем $p_+(\tau)$, является сверхтяжелым. В этом случае необходимо отдельно рассмотреть три различных характера поведения $p_-(\tau)$: (a) тяжелый хвост с $\alpha_- \in (0,1)$; (b) тяжелый хвост с $\alpha_- = 1$; (c) $p_-(\tau)$ имеет конечное среднее значение $\bar{\tau}_-$ (очевидно, что сюда входят как тяжелые распределения $p_-(\tau)$ с $\alpha_- \in (1,2]$, так и распределения с конечной дисперсией). Для случая (a) достаточно подставить необходимые асимптотики (3.5) и (3.15) в формулу (3.7), чтобы на основании тауберовой теоремы получить

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2q_- t^{-\alpha_-}}{\alpha_- V_+(t)}. \quad (3.17)$$

В ситуации (b) и (c) определим вспомогательную функцию как $h(t) = \int_0^t d\tau [1 - \mu(t)]$, для которой при малых s выполняется соотношение

$$h^s \sim \frac{2\phi_-^s}{s^2 \phi_+^s}. \quad (3.18)$$

Отсюда для случая (b) находим

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2q_-}{V_+(t)t} \left[1 + \frac{t \ln(t) p_+(t)}{V_+(t)} \right], \quad (3.19)$$

а для случая (c)

$$\mu(t) \sim 1 - \frac{2\bar{\tau}_- p_+(t)}{V_+^2(t)}. \quad (3.20)$$

Заметим, что в формуле (3.19) фигурируют два зависимых от времени члена асимптотического разложения $\mu(t)$. Это связано с тем, что для различных плотностей вероятности $p_+(\tau)$ основной вклад в выражение $1 - \mu(t)$ может вносить каждый из этих членов, либо оба имеют одинаковый порядок малости. Например, если выбрать распределения $p_+(\tau)$ такие, что вероятность отсутствия скачка равна $V_+(t) = 1/\ln \ln t$, $1/\ln t$ и $\exp(-\ln t / \ln \ln t)$, то для уравнения (3.19) основной вклад в квадратных скобках будет определяться первым, обоими (т.к. второй член на бесконечности стремится к единице) и вторым членом соответственно.

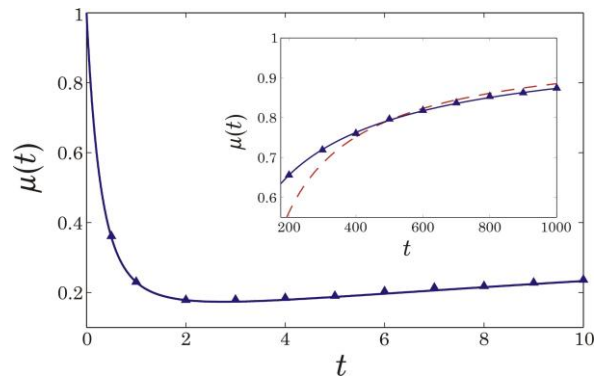


Рис. 3 – Закон релаксации в случае, когда плотность $p_+(\tau)$ имеет сверхтяжелый хвост, а $p_-(\tau)$ – тяжелый с $\alpha_- = 1.5$. Сплошная синяя линия отвечает точному закону релаксации $\mu(t)$, полученному с помощью решения интегрального уравнения (2.11); синие треугольники показывают результаты численного моделирования; а пунктирная красная линия соответствует асимптотической формуле (3.20).

На рисунке 3 показан пример поведения закона релаксации в случае, когда плотность вероятности $p_+(\tau)$ характеризуется сверхтяжелым хвостом, а плотность $p_-(\tau)$ – тяжелым хвостом с параметром $\alpha_- \in (1, 2]$. Для численных расчетов мы взяли плотность $p_+(\tau)$ вида $p_+(\tau) = \nu \ln^{\nu} (g + \tau)^{-1} \ln^{-1-\nu} (g + \tau)$ с параметрами $\nu = g = 2$ и плотность $p_-(\tau)$ того же вида, что и в подразделе 3.1 с $\alpha_- = 1.5$. Решение интегрального уравнения (2.11) и метод численного моделирования также аналогичны подразделу 3.1.

Из найденных асимптотических законов релаксации следует, что релаксация во всех рассматриваемых случаях проявляет аномальные свойства. При этом спектр поведения закона релаксации очень широк и

существенно зависит от асимптотик хвостов распределений времен ожидания в верхнем и нижнем состоянии дихотомического процесса. Так, для рассматриваемого типа случайных систем, релаксация к равновесному положению может себя вести как медленная степенная функция, сверхмедленная (медленно меняющаяся) функция, а также как произведение степенной и медленно меняющейся функции. Все эти три класса функций относятся к так называемым правильно меняющимся функциям [37, 38].

4. ВЫВОДЫ

Используя теорию непрерывных во времени случайных блужданий, мы изучили процесс релаксации для широкого класса двухуровневых систем, чьи составляющие элементы изменяются согласно дихотомическому процессу. В работе получено интегральное уравнение для закона релаксации в случае про-

извольных плотностей вероятности времен ожидания системы в верхнем и нижнем состоянии. Из интегрального уравнения следует, что в общем случае для двухуровневых систем процесс релаксации является нелокальным во времени и обладает сильными эффектами памяти. При условии, что плотности вероятности пребывания системы в верхнем и нижнем состоянии имеют тяжелые и/или сверхтяжелые хвосты и используя преобразование Лапласа и тауберова теорему Караматы, мы нашли асимптотическое поведение исследуемых законов релаксации при больших значениях времени и показали, что соответствующие релаксационные процессы являются аномальными. Найденные законы релаксации являются универсальными для двухуровневых систем любой природы и качественно отличаются от ранее известных. Аналитические результаты подтверждены численными расчетами.

Anomalous Relaxation Processes in Two-state Systems

Yu.S. Bystrik, L.A. Denisova

Sumy State University, 2, Rimsky Korsakov St., 40007 Sumy, Ukraine

In this paper the biased relaxation processes in the two-state systems whose structural elements evolve in accordance with the dichotomous random process are investigated. Using the continuous-time random walk approach we obtain the integral equation whose solution is the relaxation function and show that relaxation in these systems demonstrates the memory effects. Also our attention is paid to studying the long-time behavior of the relaxation laws in the case when probability densities of the waiting times in the up and down states of system have heavy and / or superheavy tails. From the asymptotic results it follows that the relaxation of these systems to the certain equilibrium state may occur in an anomalously slow way. Finally, we perform numerical calculations that confirm our theoretical predictions.

Keywords: Anomalous relaxation, Dichotomous process, Heavy / superheavy probability densities.

Аномальні релаксаційні процеси у дворівневих системах

Ю.С. Бистрик, Л.А. Денисова

Сумський державний університет, вул. Римського-Корсакова, 2, 40007 Суми, Україна

У роботі розглядаються зміщені релаксаційні процеси у дворівневих системах, чії структурні елементи змінюються у відповідності з дихотомічним випадковим процесом. Використовуючи концепцію неперервних у часі випадкових блукань, знайдено інтегральне рівняння, розв'язком якого є релаксаційна функція, і показано, що релаксація в таких системах проявляє ефекти пам'яті. Також увагу приділено вивченню поведінки законів релаксації при великих значеннях часу у випадку, коли часи перебування системи у верхньому та нижньому станах характеризуються важкими та / або надважкими хвостами розподілів. Із отриманих асимптотичних законів релаксації випливає, що для досліджуваних процесів характерне аномально повільне прямування до певного рівноважного положення. Окрім того, проведено чисельні розрахунки, які підтвердили наші теоретичні результати.

Ключові слова: Аномальна релаксація, Дихотомічний процес, Важкі/надважкі густини ймовірності.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Dattagupta, *Relaxation Phenomena in Condensed Matter Physics* (Academic Press: Orlando: 1987).
2. B. Cowan, *Nuclear Magnetic Resonance and Relaxation* (Cambridge University Press: Cambridge: 2005).
3. H. Suhl, *Relaxation Processes in Micromagnetics* (Oxford University Press: Oxford: 2007).
4. G. Bertotti, I. Mayergoyz, C. Serpico, *Nonlinear Magnetization Dynamics in Nanosystems* (Elsevier: Oxford: 2009).
5. K.C. Kao, *Dielectric Phenomena in Solids* (Elsevier Academic Press: San Diego: 2004).
6. R.H. Boyd, G.D. Smith, *Polymer Dynamics and Relaxation* (Cambridge University Press: Orlando: 2007).
7. K.L. Ngai, *Relaxation and Diffusion in Complex Systems* (Springer: New York: 2011).
8. R. Klages, G. Radons, I.M. Sokolov, eds., *Anomalous Transport: Foundations and Applications* (Wiley-VCH: Berlin: 2008).
9. B.D. Hughes, *Random Walks and Random Environments*, Vol. 1 (Clarendon Press: Oxford: 1995).
10. R. Metzler, J. Klafter, *Phys. Rep.* **339**, 1 (2000).
11. A. Blumen, J. Klafter, G. Zumofen, in: I. Zschokke (Ed.), *Optical Spectroscopy of Glasses* (Reidel: Dordrecht: 1986).
12. S. Goldstein, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **4**, 129 (1951).
13. M. Kac, *Rocky Mount. J. Math.* **4**, 497 (1974).
14. A.D. Kolesnik and N. Ratanov, *Telegraph Processes and Option Pricing* (Springer: Heidelberg: 2013).
15. S.I. Denisov, Yu.S. Bystrik, *Acta Phys. Pol. B* **46**, 931 (2015).
16. E.W. Montroll, G.H. Weiss, *J. Math. Phys.* **6**, 167 (1965).
17. D. ben-Avraham, S. Havlin, *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems* (Cambridge University Press: Cambridge: 2000).
18. J.L. Dormann, D. Fiorani, E. Tronc, *Adv. Chem. Phys.* **98**, 283 (1997).
19. W.T. Coffey, Yu.P. Kalmykov, J.T. Waldron, *The Langevin Equation*, 2nd ed. (World Scientific: Singapore: 2004).
20. W.T. Coffey, Yu.P. Kalmykov, *J. Appl. Phys.* **112**, 121301 (2012).
21. S.I. Denisov, K. N. Trohidou, *Phys. Rev. B* **64**, 184433 (2001).
22. S.I. Denisov, T.V. Lyutyy, K.N. Trohidou, *Phys. Rev. B* **67**, 014411 (2003).
23. P. M. Déjardin, *J. Appl. Phys.* **110**, 113921 (2011).
24. S.I. Denisov, T.V. Lyutyy, P. Hänggi, K.N. Trohidou, *Phys. Rev. B* **74**, 104406 (2006).
25. S.I. Denisov, K. Sakmann, P. Talkner, and P. Hänggi, *Phys. Rev. B* **75**, 184432 (2007).
26. A.D. Polyandin, A.V. Manzhirov, *Handbook of Integral Equations*, 2nd ed. (Chapman & Hall/CRC Press: London: 2008).
27. D.R. Cox, *Renewal Theory* (Methuen and Co.: London: 1967).
28. W.L. Smith, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **20**, 243 (1958).
29. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. 2 (Wiley: New York: 1971).
30. K.E. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind* (Cambridge University Press: Cambridge: 1997).
31. L.M. Delves, J.L. Mohamed, *Computational Methods for Integral Equations* (Cambridge University Press: Cambridge: 1985).
32. S.I. Denisov, H. Kantz, *Europhys. Lett.* **92**, 30001 (2010).
33. S.I. Denisov, H. Kantz, *Phys. Rev. E* **83**, 041132 (2011).
34. S.I. Denisov, S.B. Yuste, Yu.S. Bystrik, H. Kantz, K. Lindenberg, *Phys. Rev. E* **84**, 061143 (2011).
35. S.I. Denisov, Yu.S. Bystrik, H. Kantz, *Phys. Rev. E* **87**, 022117 (2013).
36. S.I. Denisov, E.S. Denisova, H. Kantz, *Eur. Phys. J. B* **76**, 1 (2010).
37. N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels, *Regular Variation* (Cambridge University Press: Cambridge: 1987).
38. E. Seneta, *Functions of regular variation. Lecture Notes in Mathematics* **508** (Springer-Verlag: New York: 1976).