МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА, АВТОМАТИКА

ІМА :: 2013

МАТЕРІАЛИ
та програма

НАУКОВО-ТЕХНІЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ

(Суми, 22-27 квітня 2013 року)

Суми
Сумський державний університет
2013

Изометрическое неравенство для кривых ограниченной кривизны на сфере

Борисенко А. А., *проф.*; Драч К. Д., *асп.*
Сумской государственный университет, г. Сумы;
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, г. Харьков

В работе [1] было доказано изопериметрическое неравенство для кривых ограниченной снизу кривизны на евклидовой плоскости. В ней было показано, что при фиксированной длине для такого класса кривых существует положительный минимум ограничиваемых ими площадей. Оказывается, аналогичный результат верен и в сферическом пространстве.

Теорема 1: Пусть γ – замкнутая вложенная кривая кривизны $k\geq 1$, лежащая на единичной сфере $\boldsymbol{S}^2$, L и A – длина кривой и площадь выпуклой области, ею ограниченной. Тогда

$$A \geq 4\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{L}{2\sqrt{2}}\right)\right) - L,$$

причем равенство достигается для луночки γ_0, т.е. выпуклой замкнутой кривой, составленной из двух равных дуг окружностей кривизны 1.

Основные этапы доказательства Теоремы 1:

Доказательство приведенного утверждения основано на применении принципа максимума Понтрягина.

Для начала считаем кривую γ кусочно-гладкой.

В силу выпуклости, кривую γ можно задать опорной функцией $h(t)$, $t\in[0,2\pi)$ расстояния от начала координат до соответствующей опорной прямой (большой окружности). Тогда для функции $g(t):=\tan h(t)$ справедлива формула

$$\frac{g''+g}{\left(1+\frac{g'^2}{1+g^2}\right)} = u, \qquad (1)$$

где $u(t):=1/k(t)$ – радиус кривизны кривой. Эта формула аналогична известной формуле, связывающей опорную функцию и радиус кривизны в евклидовом случае. При этом в силу ограничений, $u\in[0,1]$.

Записывая функционалы площади $A(\gamma)$ и длины $L(\gamma)$ кривой γ через опорную функцию и радиус кривизны, мы приходим к задаче оптимального управления, заключающейся в необходимости минимизировать площадь A при фиксированной длине $L=L_0$, где управляющим параметром выступает радиус кривизны u, а движение в фазовой плоскости описывается (1). Формализованная задача выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} A = \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}}{1 + x_1^2}\right) \mathrm{dt} \to \min \\ \int_0^{2\pi} u \frac{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}}{1 + x_1^2} \mathrm{dt} = L_0 \\ x_1' = x_2 \\ x_2' = u \left(\frac{1 + x_1^2 + x_2^2}{1 + x_1^2}\right)^{\frac{3}{2}} - x_1 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

где $x_1(t) = g(t)$, $x_2(t) = g'(t)$.

В силу теоремы выбора Бляшке, поставленная задача всегда имеет решение. При помощи принципа максимума Понтрягина удается показать, что с необходимостью решением задачи является выпуклая кривая, составленная из конечного числа дуг окружностей кривизны 1.

После этого, используя идею четырехшарнирного метода Штейнера, доказывается, что в классе таких кривых при фиксированной длине L_0 минимум площади может достигаться только для луночки. Записывая зависимость площади от длины для луночки, мы приходим к нужному неравенству, что и доказывает утверждении Теоремы 1 в кусочно-гладком случае.

Для произвольных вложенных кривых неравенство доказывается путем аппроксимации γ гладкими кривыми и последующим предельным переходом.

1. Борисенко А.А., Драч К.Д. *Изопериметрическое неравенство для кривых ограниченной снизу кривизны*, 2012 (отправлено к публикации).