

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины

На правах рукописи

Сайко Игорь Николаевич

УДК 004.519.6, 539.3

Математическое моделирование
поведения систем отражателей при гармонических воздействиях
на основе сингулярных интегральных уравнений

01.05.02 - математическое моделирование
и вычислительные методы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
Панченко Борис Евгеньевич
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник

Киев – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|-----|
| ВВЕДЕНИЕ | 4 |
| РАЗДЕЛ 1. СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ. . . | 12 |
| 1.1. Обзор источников по теме диссертации | 12 |
| 1.2. Сингулярные интегралы | 22 |
| 1.3. Моделирование некоторых задач, решаемых методом СИУ | 24 |
| 1.4. Квадратурные формулы для вычисления сингулярного интеграла..... | 31 |
| 1.5. Об одном важном свойстве СИУ 1 рода..... | 35 |
| 1.6. Элементы теории обусловленности СЛАУ | 38 |
| РАЗДЕЛ 2. МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ – СХЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ. | 44 |
| 2.1. Основные соотношения динамической теории упругости в случае антиплоской деформации. | 44 |
| 2.2. Сведение задачи дифракции на системе цилиндрических полостей к интегральным уравнениям. | 48 |
| 2.3. Схема параллельной численной реализации интегральных уравнений.... | 50 |
| 2.4. Дифракция волн сдвига на периодической системе цилиндрических полостей..... | 55 |
| 2.5. Верификация полученных результатов. | 58 |
| 2.6. Вычисление касательных контурных напряжений на локальной системе полостей..... | 62 |
| 2.7. Метод золотого сечения при численном решении СИУ | 66 |
| 2.8. Выводы к 2 разделу. | 69 |
| РАЗДЕЛ 3. СХЕМА КЛАСТЕРНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ ЖЕСТКИХ ИЛИ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ SH-ВОЛН..... | 71 |
| 3.1. Формулировка краевых задач. | 71 |
| 3.2. Сведение задачи дифракции на системе упругих цилиндрических включений к СИУ..... | 74 |
| 3.3. Численная реализация СИУ на системе упругих цилиндрических включений. | 78 |
| 3.4. Сведение задачи дифракции на системе цилиндрических подвижных и неподвижных жестких включений к СИУ..... | 80 |
| 3.5. Периодическая задача для упругих и жестких включений. | 82 |
| 3.7. Верификация полученных результатов. | 87 |
| 3.8. Вычисление контурных напряжений локальной системы упругих и жестких включений. | 94 |
| 3.9. Выводы к 3 разделу. | 101 |
| РАЗДЕЛ 4. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГИХ ВОЛН С СИСТЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ БЕСКОНЕЧНОЙ | |

| | |
|---|-----|
| ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ. | 104 |
| 4.1. Основные соотношения динамической теории упругости в условиях плоской деформации..... | 104 |
| 4.2. Гармонические функции источника в условиях плоской деформации... .. | 106 |
| 4.3. Постановка краевых задач..... | 111 |
| 4.4. Система СИУ в случае дифракции на системе цилиндрических полостей некруговой формы..... | 112 |
| 4.4. Верификация полученных результатов. | 115 |
| 4.6. Вычисление контурных напряжений на локальной системе полостей. .. | 120 |
| 4.7. Выводы к 4 разделу. | 127 |
| РАЗДЕЛ 5. КЛАСТЕРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕПОДВИЖНЫХ ЖЕСТКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ ОТ ВОЗДЕЙСТВИЯ УПРУГИХ ВОЛН..... | 129 |
| 5.1. Формулировка краевой задачи..... | 129 |
| 5.2. Система СИУ в случае дифракции на системе жестких неподвижных включений..... | 130 |
| 5.3. Верификация полученных результатов. | 133 |
| 5.4. Вычисление контурных напряжений системы неподвижных жестких включений. | 136 |
| 5.5. Выводы к 5 разделу. | 139 |
| Выводы диссертационной работы..... | 141 |
| Список использованных источников | 144 |
| Приложение 1 | 161 |
| Приложение 2 | 162 |
| Приложение 3 | 168 |
| Приложение 4 | 172 |
| Приложение 5 | 175 |
| Приложение 6 | 178 |
| Приложение 7 | 181 |
| Приложение 8 | 184 |
| Приложение 9 | 187 |
| Приложение 10 | 190 |
| Приложение 11 | 193 |

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Развитие вычислительной техники расширяет перечень и информационную емкость моделируемых объектов. Повышаются требования к эффективности моделирования систем. Увеличение вычислительных мощностей и их доступность делает возможным и целесообразным расширение перечня практических задач, численное решение которых строится на основе моделей и методов теории дифракции. Упомянутые тенденции обуславливают то, что исследования в области математического моделирования процессов дифракции вызывают повышенный интерес и находят все большее применение. Дифракционные математические модели сегодня используются как основа для проведения численного эксперимента в таких отраслях, как гидроакустика, геофизика, сейсмология, для решения современных задач акустических воздействий на системы объектов сложной реологии, в дефектоскопии, медицине и диагностике, в сейсмической разведке залежей нефти, газа и других полезных ископаемых, электродинамике, компьютерной томографии, при решении фундаментальных проблем физики поверхности, интроскопии, в задачах неразрушающего контроля и при решении других проблем.

Большинство исследований посвящено развитию метода конечных элементов. Однако существуют другие подходы, позволяющие существенно экономить вычислительные ресурсы и повышать точность вычислений. Поэтому при рассмотрении вопроса разработки приложений, позволяющих моделировать динамическое поведение сложных механических систем, необходимо проанализировать именно такие модели и методики решения дифракционных задач.

Для анализа ресурсов конструкции, содержащих значительное число неоднородностей и работающих под воздействием динамических нагрузок, важным является моделирование взаимодействия механических волн в упругой среде с отверстиями, включениями, трещинами или линейными вставками. Поэтому исследования дифракции упругих волн на системах отражателей, имеющих произвольный поперечное сечение, – вопрос актуальный. Однако

вследствие необходимости привлечения значительных объемов вычислений и значительных ресурсов цифровой памяти, не только алгоритмы и модели, но и сами эти задачи исследованы мало. Поэтому важны эффективные параллельные алгоритмы, в основу которых положены обусловлены аналитические методы. Для решения новых антиплоских или плоских задач теории дифракции значительную эффективность имеет метод интегральных уравнений. Дополнительные преимущества этого метода заключаются в сокращении числа пространственных переменных, достаточной скоростью сходимости и возможности использования различных эффективных численных методов решения. Кроме этого, метод имеет значительные возможности для использования параллельных вычислительных схем.

Результаты диссертационной работы является развитием исследований С.М. Белоцерковского [10-12], А.Ф. Верлани [20, 21], Ю.В. Ганделя [30-32], А.Н. Гузя [38-41], Ю.Д. Ковалева [50], Ю.Г. Кривоноса [58], В.Д. Кубенко [40], И.К. Лифанова [66], А.Н. Назаренко [79-87], З.Т. Назарчука [88], В.И. Острика [79, 80], В.В. Панасюка [94], Б.Е. Панченко [95-97], О.Л. Перевозчиковой [99], М.П. Саврука [94], И.Т. Селезова [106-109], Л.А. Фильштинского [116-119], А.Н. Химича [122-124], Н.А. Шульги [130, 131].

Связь работы с научными программами, планами, темами.

Исследования, представленные в диссертации, выполнены в соответствии с рабочими планами научно-исследовательских работ в отделе автоматизации программирования Института кибернетики имени В.М. Глушкова Национальной академии наук Украины, где автор был исполнителем, в рамках следующих тем:

1. «Высокопроизводительные методы анализа и спецификации пространств атрибутов предметной области для организации вычислений» (№ госрегистрации 0107U000800, 2007 - 2011);

2. «Разработка метода интеллектуализации информационных технологий для оптимизации параллельных вычислений и верификации дедуктивного метода параллельных программ масштабируемых» (№ госрегистрации

0107U003570, 2007 - 2011);

3. «Создание отечественного энергоэффективного суперкомпьютера для решения сложных научно-технических задач и задач государственного управления» (№ госрегистрации 0112U002720, 2012);

4. «Развитие отечественного кластерного комплекса СКИТ-GPU и развитие инструментария управления информационными технологиями в гетерогенных кластерных системах» (№ госрегистрации 0112U002720, 2013).

Цель и задачи исследования. Основная цель работы – повышение эффективности и точности определения характеристик физических полей на системе отражателей, находящихся под влиянием гармонических антиплоских или плоских нагрузок, если эти процессы моделируются сингулярными интегральными уравнениями (СИУ).

В диссертационной работе цель достигается благодаря выполнению двух типов задач. Первый заключается в непосредственном численном решении дифракционных задач в новой постановке, когда гармонические воздействия осуществляются на локальные системы отражателей произвольного поперечного сечения и произвольного числа, что позволяет учесть их взаимное влияние. При этом в интерпретации теории упругости определяются зависимости характеристик механических полей. А другой – это исследования обусловленности и устойчивости использованных для решения вышеупомянутых задач математических моделей, а также свойств локальных и кластерных схем вычислений.

Объект исследования – процесс кластерного моделирования поведения систем отражателей, построенный на СИУ, если локальные системы отражателей находятся под влиянием гармонических стационарных антиплоских или плоских волн.

Предмет исследования – схемы вычислений (локальные и кластерные) и алгоритмы решения новых задач математической физики в интерпретации теорий упругости о дифракции антиплоских или плоских волн на системах отражателей произвольного поперечного сечения.

Методы исследования. Теоретическую основу выполненных исследований составляют такие теории: дифракции, интегральных уравнений, систем линейных уравнений, обусловленности и устойчивости математических моделей, параллельных вычислений, а также сравнительный анализ.

Задачи исследования:

- разработка и верификация приложений, которые в параллельном режиме численно решают СИУ шести задач дифракции на локальных системах отражателей произвольного поперечного сечения, находящихся под воздействием гармонических антиплоских или плоских волн, а именно задачи о: 1) воздействии гармонических волн сдвига на локальную систему отверстий; 2) воздействии волн сдвига на периодическую систему отверстий; 3) воздействии волн сдвига на локальную систему упругих включений 4) воздействии волн сдвига на периодическую систему упругих включений 5) воздействии волн плоской деформации на локальную систему отверстий; 6) воздействии волн плоской деформации на локальную систему неподвижных включений;

- численное исследование с точностью до 10^{-10} упомянутых задач дифракции и получение зависимостей характеристик волновых полей в интерпретации теории упругости от волновых чисел и геометрических параметров систем отражателей;

- исследование обусловленности и устойчивости использованных математических моделей;

- исследование временных показателей загрузки узлов кластера при параллельном решении упомянутых задач.

Научная новизна полученных результатов. В диссертационной работе в процессе исследования получены новые научные результаты.

Получено впервые:

- метод высокоточного определения локаций и максимальных характеристик искомым функций на контурах локальных систем неоднородностей произвольного поперечного сечения (в интерпретации теории

упругости – полей перемещений и напряжений), который отличается от известных тем, что значения искомых функций и их аргументов (локаций) осуществляется последовательными приближениями в параллельном режиме путем смещения точек коллокации и сравнения полученных величин после численного решения соответствующих СИУ;

- критерий применимости основанных на СИУ математических моделей поведения систем неоднородностей, находящихся под влиянием стационарных гармонических волн антиплоской или плоской деформации, учитывающий зависимость обусловленности матриц систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) от диапазонов волновых чисел (частот) гармонических колебаний, отличающийся тем, что впервые применена зависимость обусловленности матриц СЛАУ от диапазонов волновых чисел (частот);

- эффект насыщения характеристик волновых полей локальных систем неоднородностей с увеличенным числом отражателей (от 10 и более), то есть равенство безразмерных значений искомых функций на контуре центральной неоднородности аналогичным значениям на контуре неоднородности при решении периодической задачи с точностью до 10^{-3} , который отличается от известных тем, что учтены взаимные влияния при увеличенном числе неоднородностей (от 10 и более);

- шкалы высокоточных значений локаций в радианах и безразмерных значений амплитуд максимальных напряжений на контурах локальных систем отверстий, жестких и упругих включений эллиптического и ромбического сечения от гармонических нагрузок, взаимодействующих с локальными системами неоднородностей, а также общие контурные безразмерные напряжения, отличающиеся от известных тем, что рассмотрены локальные взаимные влияния в системах неоднородностей, а численные расчеты безразмерных значений искомых функций проведено с точностью до 10^{-10} ;

- закономерности загрузки узлов при кластерном параллельном исследованию четырех различных моделей, основанных на СИУ, которые отличаются от известных тем, что исследование проведено в параллельном

режиме.

Усовершенствовано:

- упорядочение (рейтинг) исследованных моделей в соответствии с падением обусловленности (ростом числа обусловленности) матриц СЛАУ (с тенденцией для использования в трехмерных постановках) благодаря сравнительному анализу числа обусловленности в используемых СИУ 1-го и 2-го рода, отличающийся тем, что определена тенденция зависимости между ростом сложности моделей, построенных на СИУ, и падением обусловленности матриц;

- дополнительные условия, обуславливающие СИУ 1-го рода и моделирующие свойства отражателей, отличающиеся тем, что дополнительные условия используются пакетом совместно для всех неоднородностей.

Получили дальнейшее развитие:

- тесты валидации алгоритмов, отличающихся от известных тем, что для сравнений искомых значений безразмерных контурных функций в интерпретации теории упругости (контурных напряжений) учтена возможность моделирования физических свойств одних отражателей благодаря другим (моделирование поведения отверстий или жестких подвижных или неподвижных включений благодаря частным случаям физических параметров упругих включений), когда сравниваемые безразмерные значения контурных напряжений совпадают с точностью до 10^{-5} ;

- способы разработки программных приложений для кластеров, которые в параллельном режиме решают СИУ, отличающиеся тем, что в параллельном режиме реализовано поэлементное формирование СЛАУ, когда число процессов равно числу элементов матрицы, а решения СЛАУ – строчное;

- схемы численной реализации СИУ в части выбора способов включения дополнительных условий в СЛАУ, что проверено двумя способами – согласно схеме Мультота (путем изъятия любого одного линейного уравнения) или согласно теореме Лифанова (добавлением колонки с неизвестной константой), причем различий не обнаружено, отличающийся тем, что проведен

сравнительный анализ безразмерных значений искомым контурных функций с точностью до 10^{-10} .

Практическое значение полученных результатов. Диссертационная работа имеет как теоретическое, так и прикладное значение. Предложенный подход численного анализа математических моделей может использоваться в разных направлениях современной математической физики, где используются СИУ. Предоставлены выводы об использовании моделей на практике. На основе приведенного в работе метода в интерпретации теорий упругости решаются проблемы высокоточного определения локаций и максимальных напряжений на контурах локальных систем неоднородностей произвольного поперечного сечения, и на параллельных кластерных вычислениях строится численное решение СИУ с учетом определяющего фактора применения математических моделей поведения систем неоднородностей - зависимости обусловленности матриц СЛАУ от диапазонов волновых чисел (частот) гармонических колебаний. Временные закономерности загрузки узлов при параллельном кластера решению задач, основанных на СИУ, предоставляют возможность управления производительностью алгоритма при решении СЛАУ.

Личный вклад соискателя. Все научные результаты, представленные в диссертации, получены автором лично. В работах, опубликованных в соавторстве, лично диссертанту принадлежат такие результаты - обзор литературы, вывод формул ядер СИУ для задачи взаимодействия волн сдвига с локальной системой отверстий, разработка параллельных программных приложений, численная реализация, сравнительный анализ тестов, а также интерпретация и анализ полученных результатов.

Апробация результатов диссертационной работы. Основные результаты диссертации прошли апробацию на международных и общегосударственных конференциях: VIII Международная научно-практическая конференция «Теоретические и прикладные аспекты построения программных систем ТАAPSD-2011» (Ялта, 2011); «Высокопроизводительные вычисления НРС-2011» (Киев, 2011); VIII Международная научно-техническая

конференция «Прогрессивная техника и технология 2012» (Киев - Севастополь, 2012); XIV Международная научная конференция им. акад. Михаила Кравчука (Киев, 2012); I Международная конференция «Кластерные вычисления» (Киев, 2012); IX Международная научно-практическая конференция «Теоретические и прикладные аспекты построения программных систем ТАAPSD-2012» (Киев, 2012); XVI Международная конференция «Моделирование и исследование устойчивости динамических систем» (DSMSI-2013) (Киев, 2013); Международная конференция «Современная информатика: проблемы, достижения и перспективы развития» (Киев, 2013);

В полном объеме диссертация докладывалась на научных семинарах: в Институте кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, Киевском государственном университете им. Т. Шевченко, Харьковском национальном университете им. В.Н. Каразина, Сумском государственном университете.

Публикации. Результаты диссертационных исследований опубликованы в 16 научных работах, из них 8 статей в научных изданиях, включенных в состав Перечня профессиональных научных изданий Украины, в том числе 1 статья – в издании, включенном в международные научно-метрические базы; 8 докладов на международных и межвузовских конференциях.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованных источников из 177 наименований и 11 приложений. Работа содержит 42 рисунка. Основной текст составляет 132 страниц.

РАЗДЕЛ 1.

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.

1.1. Обзор источников по теме диссертации

Современные вычислительные комплексы в сочетании с программными системами, базирующимися на хорошо обусловленных алгоритмах, позволяют высокоэффективно моделировать напряженно-деформированное состояние сред с усложненными свойствами. Большинство исследований посвящено развитию метода конечных элементов [1]. Однако существуют иные подходы, позволяющие существенно экономить вычислительные ресурсы и повышать точность результата. Целью настоящего обзора является анализ метода СИУ [77, 88], а также алгоритмов параллельного численного решения СИУ на примере моделирования задач динамической теории упругости, которые позволяют получать результаты с высокой точностью.

Указанные вопросы являются важными для многих отраслей. Примером задач, где точность играет принципиальную роль, является определения орбитального и вращательного движения небесных тел, а также задачи исследования динамики пучков заряженных частиц [65]. Узким местом в исследованиях уравнений движения этих математических моделей является необходимость применения весьма громоздких и сложных процедур решения дифференциальных уравнений, лежащих в их основе. Поэтому крайне актуальными являются практики использования высокоточных технологий. Однако только сегодня появляется реальная возможность доступа к быстродействующим ЭВМ. Вопросы точности численной реализации применяемых моделей является также важными и актуальными [65].

Другим примером актуальности рассматриваемых вопросов является

сейсмическая разведка [2], которая в настоящий момент занимает одно из ведущих мест при поиске месторождений полезных ископаемых. Данная совокупность методов исследований геологического строения земной коры основана на изучении распространения в среде упругих волн, возбужденных искусственно [2]. Вызванные ударом или взрывом сейсмические волны распространяются на значительную глубину, где претерпевают преломление и отражение, после чего частично возвращаются к поверхности земли, где регистрируются специальной аппаратурой. Определяется глубина залегания, форма геологических границ и неоднородностей, составе пород и т.п. Развитие точности моделей, используемых в соответствующих устройствах важно для точности определения искомого физические характеристики.

Распространение, дифракция и рассеяния волн в сплошных средах описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими условиями сопряжения и начальными условиями [106]. Явление дифракции возникает при наличии в среде некоторых неоднородностей. В зависимости от свойств отражателей (неоднородностей), различают три случая [107-109]:

- идеально отражающее или непрозрачное тело, когда поле внутри неоднородности не проникает (полость или абсолютно жесткое тело в акустике и теории упругости, или идеально проводящее тело в электромагнитном поле);
- прозрачный объект, свойства которого отличны от окружающей среды, но постоянны;
- произвольная неоднородность, свойства которой зависят от координат.

Примером таких объектов являются упругие включения с постоянными или переменными параметрами, а в электромагнитной среде – диэлектрические структуры. Волновые движения в упругих телах описаны в [36, 106, 176, 177].

Исторически исследования задач дифракции упругих волн на полостях и включениях были основаны на методе разложения в ряд по собственным функциям. Рассматривались случаи гармонических воздействий на неоднородности круговой или сферической формы. Решения уравнений

Гельмгольца раскладывались в ряд по цилиндрическим или сферическим функциям и, тем самым, краевые задачи сводились к бесконечным СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов разложений [39-41]. С помощью конформных отображений этот метод был обобщен на случай некруговых (треугольных, квадратных, эллиптических) цилиндрических рассеивателей [52, 130, 131]. Детальный обзор литературы и описание метода разложения в ряд по собственным функциям в случае неоднородностей канонической формы содержится в [40, 176].

Широкое применение теории дифракции в исследовательской и производственной практике требует разработки все более точных математических моделей, описывающих дифракционные процессы с учетом конфигурации тел и реальных свойств материалов рассеивателей [67]. Однако не существует общего метода решения дифракционных задач для тел произвольной формы с учетом разнообразных свойств материала тела и окружающей среды и при различной геометрии поля падающей волны.

Дифракция звука на идеальных (абсолютно жестких и акустически мягких), проницаемых (жидких) и упругих эллиптических цилиндрах и сфероидах изучалась в ряде работ Андебурга В.А., Клещева А.А., Рождественского К.Н., Толоконникова Л.А., Burke J.E., Einspruch N.G., Graunard G., Flax L., Hackman R.H., Pillai T.A.K., Sénior T.B., Spence R.D., Varadan V.K., Varadan V.V., Werby M.F. и др.

Методы теории потенциала [43, 60, 105], позволяющие сводить краевые задачи для уравнений в частных производных в многомерных областях к интегральным уравнениям на многообразиях меньшей размерности, давно стали классическими в математической физике. Они находят широкое применение при построении математических моделей различных явлений, для доказательства однозначной разрешимости полученных задач, а также служат теоретической основой разработки алгоритмов исследования этих задач, в частности численными методами.

Теория потенциала, являясь фундаментальным разделом математической

физики [43, 113], предполагает как аналитическое решение при помощи функций Грина [29, 72, 73, 162], так и численное решение методом граничных элементов [13]. В [145] с использованием метода граничных элементов и итерационных методов исследуется задача дифракции плоских волн на цилиндрическом круговом упругом включении. Тут использованы смешанные граничные условия с сухим трением некоторых неизвестных участков границы цилиндра относительно матрицы.

В случае дифракции коротких волн на замкнутых неоднородностях применялся лучевой метод [100]. Вопрос о границах применимости лучевого метода исследован в [57]. Он перестает быть применимым, если:

- длина возбуждающей волны становится сравнимой или превосходит длину, на которой изменяются свойства среды;
- длина волны становится сравнимой или превосходит радиусы кривизны поверхностей, на которых происходит отражение или преломление.

Наибольшие математические и вычислительные трудности возникают, если длина возбуждающей волны соизмерима с характерным размером препятствия. В этом случае коротковолновые приближения не применимы [121]. Эффективными методами исследования дифракции волн в среднем диапазоне длин являются методы интегральных уравнений, которые могут быть использованы для неоднородностей произвольной формы. Основное преимущество этих методов заключается в том, что они сводят внешние граничные задачи в неограниченном пространстве к задачам на двумерных поверхностях, а в неограниченной плоскости – к задачам на одномерных контурах, причем обеспечивается выполнение условий излучения на бесконечности [53, 113]. Вопрос существования и единственности решений интегральных уравнений динамических задач для неоднородных сред исследованы в [47].

Метод интегральных уравнений [19, 20, 26, 30, 48, 53, 66, 77, 105] играет центральную роль в изучении граничных задач, связанных с рассеянием акустических и электромагнитных волн ограниченными объектами. Это

обусловлено главным образом тем, что математическая постановка таких задач приводит к уравнениям в неограниченных областях. Следовательно, их формулировка в виде граничных интегральных уравнений не только уменьшает размерность задачи, но и позволяет свести ее к задаче в ограниченной области (на границе рассеивателя). С вычислительной точки зрения оба эти преимущества очень важны. За последние годы инженеры, физики и математики приложили немало усилий для развития и использования метода интегральных уравнений в теории рассеяния.

Анализ рассеяния акустических и электромагнитных волн препятствиями начинается с того, что граничные задачи теории рассеяния сводятся к интегральным уравнениям по границе. Это достигается представлением решения граничной задачи в виде поверхностного потенциала с заданной плотностью [105]. Затем, используя свойства непрерывности подобных потенциалов, получают нужное интегральное уравнение.

Методом интегральных уравнений первого рода были получены аналитические и асимптотические решения целого ряда задач дифракции на плоских экранах. Вместе с тем численные методы для решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода до недавнего времени практически не применялись. Это связано с тем, что интегральные уравнения Фредгольма первого рода относятся к классу некорректно поставленных математических задач и являются неустойчивыми, т. е. сколь угодно малым изменениям входной информации (правой части интегрального уравнения) могут соответствовать сколь угодно большие изменения выходной информации (решения его). Принципиальная возможность численного решения некорректно поставленных задач и, в частности, интегральных уравнений Фредгольма первого рода появилась с созданием теории регуляризируемых алгоритмов, основоположником которой является академик А.Н. Тихонов [113].

Многие задачи теории упругости, электродинамики, математической физики и т.д. сводятся естественным или специальным образом к СИУ, например [18, 49, 94]. До тех пор, пока не было хороших устойчивых методов

решения таких уравнений, задачи старались свести к регулярным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода (например, плоские задачи теории упругости) или к интегральным уравнениям первого рода с логарифмической особенностью (задачи электродинамики). Но получающиеся слабосингулярные уравнения зачастую неоднозначно разрешимы. Это приводит к большим затруднениям, так как при численном решении задач получается неустойчивый счет и приходится применять специальные методы.

Одним из первых плоские задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих цилиндрических телах к одномерным интегральным уравнениям второго рода свел В.Д. Купрадзе [60]. А В.А. Фоком [120] было получено векторное интегральное уравнение для задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящем трехмерном теле относительно плотности электрического тока, наводимого на тело падающей волной. К. Мюллером [163] та же задача была сведена к векторному интегральному уравнению по поверхности тела относительно плотности магнитного тока. Им же были сформулированы условия однозначной разрешимости интегральных уравнений и доказаны теоремы существования и единственности.

Интегральные уравнения оказались весьма удобными для построения численных методов решения задач дифракции. В частности, для трехмерных тел, обладающих симметрией вращения, соответствующие методы и алгоритмы были развиты Е.Н. Васильевым [16, 17].

Оригинальный подход к решению задач дифракции плоских гармонических волн на криволинейных трещинах предложен Л.А. Фильштинским [116-119]. Им построены интегральные представления для производных амплитуд перемещений, которые обеспечивают необходимые скачки на контурах трещин и сводят краевую задачу к СИУ первого рода, численная реализация которых не вызывает затруднений [119].

Монография [88] содержит приложения метода СИУ к решению скалярных задач дифракции электромагнитных волн на некоординатных

цилиндрических поверхностях. Одним из способов сокращения объема вычислений и повышения точности результатов при изучении дифракции волн на ребристых структурах в резонансном частотном диапазоне является учет особенности решения в окрестности геометрических сингулярностей. Все известные подходы к решению задачи дифракции E -волны на ребристых структурах, игнорирующие сингулярность решения или учитывающие ее неточно, дают возможность получать достоверные значения поля (как интегральной характеристики решения) в ближней или дальней зонах, однако приведут к существенным в окрестности изломов погрешностям. Большой цикл работ, посвященных математическому обоснованию динамических задач, сводящихся к решению СИУ, выполнили Неганов В.А. и его ученики [89].

Важным преимуществом методов интегральных уравнений по сравнению с другими методами является возможность использования разных эффективных численных методов [10, 17, 48, 88, 94], что в сочетании с современными вычислительными кластерными методами [22, 97, 99, 122] приводит к значительной экономии времени получения результата и повышению точности вычислений.

Одним из первых методов интегральных уравнений применительно к задачам дифракции стационарных упругих волн на неоднородностях произвольной формы использовали Р. Банаф и В. Голдсмит [5, 134]. В условиях плоской деформации ими были рассмотрены случаи полости, абсолютно твердого и упругого включения. Задача рассеяния на абсолютно твердом теле реализована численно. Возникающие сингулярные и регулярные интегралы аппроксимировались по правилу трапеций, что позволило записать уравнения в конечных разностях.

В работе [95] (в 1995 году) эта идея была развита в задаче о дифракции стационарных плоских гармонических волн на упругом включении произвольного поперечного сечения. Тут была использована система СИУ 1-го рода, а численная реализация проводилась с учетом дополнительно условия, моделирующего поведение включения. Совпадение некоторых тестовых

результатов с [134, 171, 172] показало достоверность предложенного в [95] алгоритма. В [78, 84] (в 2005 и 2015 годах) эти же результаты были продублированы. А в [116] эта важная базовая задача дифракции исследована путем сведения к СИУ 2-го рода, т.е. без учета свойства упругого включения, которое несет дополнительное условие. Вопрос совпадения результатов этих двух подходов пока не исследован.

Методами регуляризации [19, 33, 77] можно сводить СИУ к уравнениям Фредгольма второго рода, численная реализация которых не вызывает затруднений. Однако при таком переходе значительно усложняются ядра уравнений. Разработанные схемы численной реализации СИУ показали свою эффективность. Поэтому на практике используются прямые методы дискретизации СИУ [48, 94]. Наиболее распространёнными в практических приложениях методами численного решения СИУ являются методы механических квадратур и дискретных особенностей.

Обоснованию метода механических квадратур посвящены работы [26-28]. Вычислительные алгоритмы различаются в основном квадратурными формулами для сингулярного интеграла. Большой список литературы о методе механических квадратур, а также характеристика разных типов уравнений с точки зрения вычислительных алгоритмов содержится в [88, 94]. Здесь также осуществляется вывод основных квадратурных формул и сравнение различных численных схем.

С.М. Белоцерковским был создан метод дискретных особенностей (МДО) [11] для решения задач аэродинамики, где СИУ возникают при моделировании обтекаемой поверхности вихревым слоем. Считается, что начало развития вихревых методов было положено в теоретических работах Гельмгольца [150]. Впервые метод «вихревых частиц» был применен в работе Л. Розенхеда [166] для моделирования развития тангенциального разрыва. В шестидесятых годах XX века началось интенсивное развитие и применение вихревых методов, направленное на изучение вопросов отрывного обтекания двумерного контура. Следующим этапом в развитии вихревых методов стало их применение для

моделирования трехмерных вихревых течений и обтекания тел. Среди работ, посвященных двумерному и трехмерному моделированию переноса завихренности в безграничном объеме, следует отметить работы [135, 141].

Позже Ю.В. Гандель [31, 32] и И.К. Лифанов [66] показали, что МДО может применяться при решении широкого класса задач электростатики и электродинамики, а также задач дифракции электромагнитных волн. Численные исследования показали его эффективность также в плоских задачах теории упругости [11].

Работы западных исследователей наиболее полно представлены в обзоре вихревых методов Т. Сарпкаи [110], а также в работе Г.-Х. Коте и П. Комотсакоса [141]. Также нужно отметить работы Э. Леонарда [152], посвященные детальному изучению обтекания импульсно стартующего цилиндра, с большим количеством моделей и сравнений с экспериментальными данными.

Исследованию дифракции звуковых волн на упругих однородных изотропных телах посвящено большое число работ. Вопросы, связанные с дифракцией звука на упругих однородных изотропных сплошных цилиндрах и цилиндрических оболочках рассматривались, например, в работах [129, 137]. При этом полагалось, что цилиндрические тела находятся в идеальной жидкости. В [154] изучено рассеяние звуковых волн на упругом цилиндре в вязкой жидкости.

К системе интегро-дифференциальных уравнений сведена плоская задача о дифракции акустической волны на неоднородном твердом цилиндрическом теле, находящимся в идеальной жидкости [51], параметры которых зависят от одной координаты, получена в. сведена.

Представляют интерес результаты исследований дифракции волн на отражателях, имеющих форму эллипса или ромба со скруглениями [41]. Такими кривыми могут быть аппроксимированы многие реальные объекты. Поэтому численная реализация многих исследований [38, 52, 96, 97] проведена именно с этими кривыми.

Одним из новых направлений развития математических моделей является разработка высокопроизводительных вычислительных схем и алгоритмов, сочетающих в себе обоснованные математические методы, развитое современное операционное программное обеспечение, достаточные вычислительные ресурсы и т.д. [99].

Это обусловлено, в первую очередь, необходимостью решения широкого спектра задач в реальном режиме времени, понятия которых приводятся в [54]. Такие задачи возникают, например, в аэродинамике [46], климатологии, машинной графике, ядерной физике, физике плазмы, энергетике.

В то же время следует отметить, что существующие математические модели, работающие на высокопроизводительных ЭВМ удовлетворяют пользователей сегодня, но уже в ближайшие годы могут не соответствовать требуемым параметрам из-за постепенного роста сложности решаемых задач [23, 24].

Также следует отметить, что проблему повышения эффективности математических моделей необходимо решать в тесной взаимосвязи с задачей обеспечения заданной точности вычислений. Требование к высокой точности алгоритмов приобретает особую значимость при решении класса плохообусловленных задач, где не допускается накопление ошибок округления [35, 121, 91-93].

Вследствие необходимости привлечения больших объемов вычислений и значительных ресурсов цифровой памяти все описанные задачи исследованы мало в смысле повышения эффективности вычислений и точности результата. В связи с этим особое значение приобретают параллельные кластерные алгоритмы, в основе которых лежат обоснованные аналитические методы.

Особенностью использованного в настоящей работе метода исследования задач дифракции упругих волн на локальных неоднородностях, составленных из полостей и включений, является единый подход, основанный на построении интегральных представлений перемещений рассеянного и проходящего (в случае упругих включений) волновых полей в виде потенциалов типа простого

слоя [96, 97]. Такой подход позволяет избежать гиперсингулярности [30] при удовлетворении граничных условий. А в случае плоской деформации сводить краевые задачи к системе СИУ первого и второго рода. Численная реализация использованных алгоритмов подтверждает высокую эффективность методов СИУ [97].

1.2. Сингулярные интегралы

Приведем некоторые определения.

Гладкой разомкнутой кривой (дугой, контуром) L называется линия [124], которую можно описать параметрически следующим образом:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad s_a \leq s \leq s_b$$

где s_a и s_b — некоторые постоянные, а $x(s)$, $y(s)$ — непрерывно дифференцируемые функции на $[s_a, s_b]$, причем производные $x'(s)$, $y'(s)$ одновременно в нуль не обращаются. Различным значениям параметра $s \in [s_a, s_b]$ соответствуют различные точки кривой L .

Гладким замкнутым контуром L называется гладкая кривая [124], у которой $x(s_b) = x(s_a)$, $y(s_b) = y(s_a)$, причем $x'(s_b-0) = x'(s_a+0)$ и $y'(s_b-0) = y'(s_a+0)$. Таким образом, в этом случае функции $x(s)$, $y(s)$, $x'(s)$, $y'(s)$ можно рассматривать как периодические с периодом $T = s_b - s_a$.

Гладкой линией (простой) называется совокупность конечного числа замкнутых или разомкнутых гладких контуров, не имеющих общих точек (в том числе концов).

Кусочно-гладкой называется кривая, состоящая из конечного числа гладких разомкнутых кривых, не имеющих общих точек, за исключением, быть может, концов, которые не являются точками возврата.

Функция $\varphi(t)$ переменной t (вообще говоря, комплексной) удовлетворяет условию $H(\mu)$ (условию Гельдера степени μ) на данном множестве T значений этой переменной, если для любых значений t_1 и t_2 из этого множества имеем

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^\mu,$$

где A и μ — положительные числа ($0 < \mu \leq 1$), не зависящие от t_1 и t_2 .

Гладкая кривая ($t=x(s)+iy(s)$, s — естественный параметр) называется *ляпуновской*, если производные $x'(s)$, $y'(s)$ удовлетворяют условию Гельдера с некоторым показателем.

Функция $\varphi(t)$, определенная на контуре L , принадлежит классу $H_r(\mu)$, r — натуральное число, $0 < \mu \leq 1$, если $\varphi(t)$ имеет непрерывные производные вплоть до $(r-1)$ -го порядка, а производная r -го порядка $\varphi^{(r)}$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ .

Сингулярным интегралом называется выражение [124]

$$S(\varphi; t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt \quad (t_0 \in L),$$

где L — некоторый заданный контур, а $\varphi(t)$ — заданная на L функция. Его будем рассматривать в смысле главного значения, т.е.

$$S(\varphi; t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi i} \int_{L-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt,$$

где $l = t't''$, $t', t'' \in L$ и $|t' - t_0| = |t'' - t_0| = \varepsilon$.

Сингулярным оператором (с ядром Коши) называется оператор, определенный формулой

$$K\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{K(t_0, t)\varphi(t)}{t - t_0} dt,$$

где t, t_0 — точки на контуре L , а $A(t_0)$, $K(t_0, t)$ — заданные на L функции класса H .

Сингулярным интегральным уравнением (с ядром Коши) называется уравнение вида [124]:

$$A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0, t)\varphi(t) = f(t_0),$$

где $t_0 \in L$, $A(t_0)$, $B(t_0)$, $k(t_0, t)$, $f(t_0)$ — заданные на L функции класса H , причем $A^2(t_0) - B^2(t) \neq 0$ на L .

1.3. Моделирование некоторых задач, решаемых методом СИУ

О компонентах напряжений и смещений. В механике сплошной среды различают два вида сил: объемные силы, относимые к элементам объема (или массы) тела, и силы напряжения, действующие на поверхностные элементы, которые можно мысленно провести внутри тела и выделить на его поверхности. Пусть из рассматриваемого сплошного тела выделена мысленно часть V произвольной формы, ограниченная поверхностью S . Принимаем, что совокупность внешних сил, действующих на выделенную часть V , можно представить состоящей из сил объемных (типичный пример - сила тяжести) и сил поверхностных (пример - давление).

Поверхностные силы действуют на элементы поверхности S выделенной части V . Принимается, что сила, действующая на бесконечно малый элемент поверхности dS , имеет вид FdS , где F — некоторый конечный вектор. Точкой приложения вектора F может считаться любая точка, принадлежащая элементу dS .

Сила FdS называется силой напряжения, или усилием, действующим на элемент dS , а вектор F — усилием, рассчитанным на единицу площади, или напряжением. Часто также мы будем называть F вектором напряжения.

Вектор F зависит, как и объемная сила, от положения элемента dS и (в динамическом случае) от времени. Но, кроме того, он зависит от ориентировки площадки в теле, т.е. от направления нормали n . Поэтому, когда требуется

указать, что напряжение F относится к площадке, нормаль к которой есть n , мы будем писать F_n . Компоненты этого вектора будем обозначать через X_n, Y_n, Z_n .

Для определения компонентов напряжений возьмем какую-либо прямоугольную, прямолинейную систему осей координат $Oxyz$. Пусть M - данная точка, через которую проводится площадка. Достаточно знать напряжения, действующие на три взаимно перпендикулярные площадки, проходящие через M , для того чтобы уметь вычислить напряжение, действующее на площадку, ориентированную любым образом (и проходящую через ту же точку).

За упомянутые три площадки возьмем площадки, перпендикулярные к осям координат Ox, Oy, Oz , причем за положительные направления нормалей к этим площадкам примем положительные направления соответствующих осей.

Введем теперь следующие обозначения, которые будем применять в дальнейшем. Компоненты вектора напряжения, действующего на площадку, нормальную к оси Ox , обозначим через X_x, Y_x, Z_x ; индекс x указывает на то, что рассматриваемая площадка нормальна к оси Ox . X_x измеряет нормальную компоненту напряжения, действующего на нашу площадку, а Y_x, Z_x - компоненты касательного или скальвающего напряжения. Аналогично обозначим компоненты вектора напряжения, действующего на площадку, нормальную к оси Oy , через X_y, Y_y, Z_y , а компоненты напряжения, действующего на площадку, нормальную к Oz , - через X_z, Y_z, Z_z . Величины

$$\left. \begin{array}{l} X_x, Y_x, Z_x \\ X_y, Y_y, Z_y \\ X_z, Y_z, Z_z \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

вполне характеризует напряженное состояние в окрестности рассматриваемой точки. Поэтому они называются компонентами напряжения. Эти компоненты изображены на рис. 1.1.

Величины (1.1) – скалярные. И на рис. 1.1 изображена не сама величина X_x , а вектор, алгебраическое значение которого по оси Ox равно X_x .

Под деформацией сплошной среды понимают изменение положений точек пространства, при котором изменяются взаимные расстояния между ними.

Отнесем рассматриваемое тело к прямоугольной, прямолинейной системе осей $Oxyz$ и будем обозначать через x, y, z координаты какой-либо точки тела до того, как произошла деформация, а через x^*, y^*, z^* - координаты той же точки после деформации.

Пусть V обозначает область, занятую телом деформации. Каждая точка тела, занимавшая до деформации положение (x, y, z) в области V , займет после деформации вполне определенное положение (x^*, y^*, z^*) . Это есть наше основное

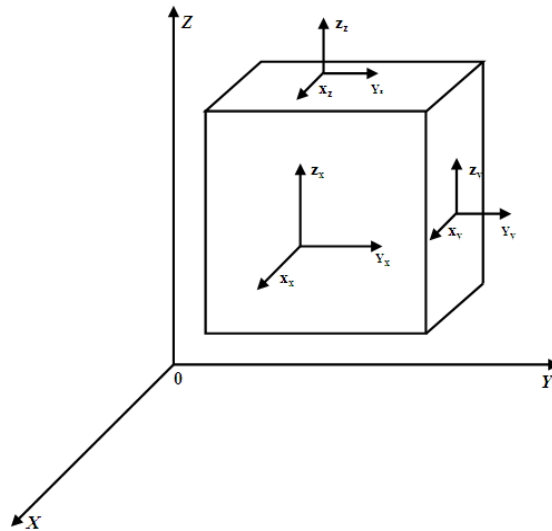


Рис. 1.1 Схема компонент напряжений

предположение. Таким образом, координаты x^*, y^*, z^* должны быть определенными функциями координат x, y, z той же точки деформации тела:

$$x^* = f_1(x, y, z), \quad y^* = f_2(x, y, z), \quad z^* = f_3(x, y, z).$$

Рассмотрим теперь деформацию сплошного тела самого общего вида. Пусть точка M тела, имевшая до деформации координаты x, y, z , переходит вследствие деформации в положение $M^*(x^*, y^*, z^*)$.

Положим

$$x^* = x + u, \quad y^* = y + v, \quad z^* = z + w,$$

где u, v, w обозначают компоненты вектора MM^* , который выражает смещение точки M , происшедшее вследствие деформации. Этот вектор мы приводится к системе интегральных уравнений вида

$$\int_{-l_n}^{l_n} \frac{\mu'_n(t) dt}{t-x} + \sum_{k \neq n} \int_{-l_k}^{l_k} \mu'_k(t) p_{nk}(t, x) dt = \pi \tau_n(x) \quad |x| < l_n \quad (1.2)$$

($n = 1, 2, \dots, N$), где ядра $p_{nk}(t, x)$ даются соотношением

$$p_{nk}(t, x) = \operatorname{Re} \frac{e^{ia_n}}{T_k - X_n}$$

$T_k = te^{ia_k} + z_k^0$, $X_n = xe^{ia_n} + z_k^0$, z_k^0 - центры трещин на плоскости.

В случае двух параллельных ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) разрезов одинаковой ширины ($l_1 = l_2 = l$), нагруженных таким образом, что $\tau_1(x) = \tau_2(-x) = \tau(x)$ система (1.2) преобразуется в одно интегральное уравнение:

$$\int_{-l}^l \left(\frac{1}{t-x} + \frac{t+x+d \cos \beta}{(t+x+d \cos \beta)^2 + d^2 \sin^2 \beta} \right) \mu'(t) dt = \pi \tau(x) \quad |x| < l,$$

где $\mu'(x) = \mu'_1(x) = -\mu'_2(-x)$; β - угол между плоскостью разреза и прямой, проходящей через середины разрезов.

Первая и вторая основные задачи плоской теории упругости. Пусть дано изотропное и однородное тело. Оно занимает область V , а ее границей является S . Основные уравнения статики для таких тел представляют [76] систему уравнений, состоящих из уравнений равновесия связывающих компоненты напряжения и из определенных уравнений, связывающих напряжения с деформацией.

Пусть компоненты напряжений являются $X_x, X_y, Y_y; Z_x, Z_y, Z_z$, а компонентами смещений u, v, w . Тогда упомянутые уравнения статики могут быть записаны в виде [76]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, Y_y = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, Z_z = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \\ Y_z &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), Z_x = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ X_y &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

где $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ ($\lambda > 0, \mu > 0$ - постоянные).

Система девяти уравнений (1.3), (1.4) содержит столько же неизвестных функций $u, v, w, X_x, X_y, Y_y, Z_x, Z_y, Z_z$ и является полной системой уравнений статики упругого тела, т.е. система вполне определяет упругое равновесие тела, если известны те внешние воздействия, которым оно подвергнуто, а кроме того, внутренние объемные силы. В связи с этим возникает следующая *первая* основная граничная задача: найти упругое равновесие тела, если заданы внешние напряжения, действующие на поверхность тела.

По отношению к уравнениям (1.3) (1.4) наша задача сводится к следующей: найти функции u, v, w, X_x, \dots, X_y , удовлетворяющие уравнениям (1.3), (1.4) в области V , занятой телом, и, кроме того, на поверхности (границе) S тела следующим граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) &= f_1, \\ Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) &= f_2, \\ Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z) &= f_3, \end{aligned} \right\}$$

где n обозначает внешнюю нормаль к поверхности тела, а f_1, f_2, f_3 - заданные на поверхности функции (представляющие собой компоненты заданного вектора напряжения, действующего на поверхность тела).

Кроме указанной выше первой основной задачи, представляет значительный интерес *вторая* основная граничная задача: найти упругое равновесие тела, если заданы смещения точек его поверхности.

В отношении же уравнений (1.3), (1.4) это сводится к нахождению такого их решения (имеется в виду указанные 9 неизвестных), которое удовлетворяет на поверхности тела следующим граничным условиям:

$$u = g_1, \quad v = g_2, \quad \omega = g_3,$$

где g_1, g_2, g_3 - заданные на поверхности функции.

Основные задачи плоской теории упругости сводятся к интегральным уравнениям. Для простоты рассмотрим случай конечной области S , ограниченной одним простым замкнутым гладким контуром L ; положительным направлением на L мы будем считать то, которое оставляет область S слева.

Будем рассматривать одновременно первую и вторую основные задачи. Граничные условия для них можно записать так:

$$k\varphi(t) + t\varphi'(t) + \psi(t) = f(t), \quad (1.5)$$

где в случае первой основной задачи $k=1$,

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t) = i \int_0^s (X_n + iY_n) ds, \quad (1.6)$$

а в случае второй основной задачи $k = -\alpha = -\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$,

$$f(t) = -2\mu(g_1 + ig_2),$$

под $\varphi(t), \varphi'(t), \psi(t)$ следует подразумевать соответствующие граничные значения, существование которых предполагается. Искомое решение предполагается регулярным, к правой части (1.6) можно прибавить любую раз навсегда зафиксированную постоянную. Выразим теперь, что правая часть равенства

$$\psi(t) = f(t) - k\varphi(t) - t\varphi'(t) \quad (1.7)$$

эквивалентного граничному условию (1.5), должна представлять собой граничное значение некоторой функции $\psi(z)$ голоморфной в S .

Известно, что необходимым и достаточным условием для этого является равенство [76]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) - k\varphi(t) - t\varphi'(t)}{t - z} dt = 0$$

для всех z , расположенных вне S , или

$$\frac{k}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t\varphi'(t)}{t - z} dt = A(z) \quad (1.8)$$

для всех z вне S , где для краткости через $A(z)$ обозначена заданная функция

$$A(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t - z} dt.$$

Мы получили, таким образом, функциональное уравнение для определения $\varphi(z)$. Если нам тем или иным путем удастся найти функцию $\varphi(z)$, голоморфную в S и удовлетворяющую уравнению (1.8), задача будет решена, так как функция $\psi(t)$ определяется из условия (1.7) формулой Коши:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi(t)}{t - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t - z} dt - \frac{k}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t\varphi'(t)}{t - z} dt$$

(здесь z принадлежит области S).

Уравнение (1.8) при $z \rightarrow t_0 \in L$ (оставаясь в S) на основании формул Сохоцкого-Племеля, предполагая, что $\varphi(t), \varphi'(t), f(t)$ удовлетворяют условию H на L , сводится к виду

$$-\frac{1}{2}k\varphi(t) + \frac{k}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt - \frac{1}{2}t_0\varphi'(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t\varphi'(t)}{t-t_0} dt = A(t_0), \quad (1.9)$$

где

$$A(t_0) = -\frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt = a(t_0) + ib(t_0),$$

через $a(t_0), b(t_0)$ обозначены действительные функции, которые следует считать заданными.

Уравнение (1.9) после преобразования можно свести еще и в виду

$$-k\varphi(t_0) - \frac{k}{2\pi i} \int_L \varphi(t) d \ln \frac{t-t_0}{t-t_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(t) d \frac{t-t_0}{t-t_0} = A(t_0)$$

1.4. Квадратурные формулы для вычисления сингулярного интеграла

Существует два основных способа приближенного вычисления сингулярных интегралов [94]. Первый способ состоит в аппроксимации плотности интеграла различными интерполяционными полиномами и в последующем точном вычислении интеграла. Согласно второму способу можно получить квадратурную формулу для сингулярного интеграла, аппроксимировав подынтегральное выражение в целом, а затем точно вычислить интеграл. Подробный обзор работ, посвященных получению различных квадратурных формул и оценкам их погрешности, выполнен Б. Г. Габдулхаевым [27, 28]. В дальнейшем понадобятся квадратурные формулы для интегралов

$$I_1(\tau_0) = \int_0^{2\pi} f(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \tau_0}{2} d\tau, \quad (1.10)$$

$$I_2(\tau_0) = \int_{-1}^1 \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - \tau_0)},$$

где плотность $f(\tau)$ — комплексозначная непрерывная 2π -периодическая функция; $\varphi(\tau) \in H$. Для их получения воспользуемся первым из указанных подходов.

Вычисление интеграла I_1 . Пусть $f_n(\tau)$ означает тригонометрический полином порядка $n=[N/2]$, интерполирующий непрерывную 2π -периодическую функцию $f(\tau)$ в N узлах:

$$\tau_k = \frac{2\pi k}{N} + \frac{\omega}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (1.11)$$

где ω — произвольная постоянная, квадратные скобки в таком контексте означают целую часть числа. В случае нечетного числа узлов ($N = 2n+1$) полином $f_n(\tau)$ имеет вид [48]

$$f_n(\tau) \approx \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(\tau_k) \sin\left(\frac{2n+1}{2}(\tau_k - \tau)\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{\tau_k - \tau}{2}\right), \quad (1.12)$$

и тригонометрическая точность представления (1.12) равна n .

В случае четного числа узлов ($N = 2n$) имеем формулу [26]

$$f_n(\tau) \approx \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(\tau_k) \sin(n(\tau - \tau_k)) \operatorname{ctg}\left(\frac{\tau - \tau_k}{2}\right), \quad (1.13)$$

которая точна для любого тригонометрического полинома степени не выше $n-1$. Замечая, что

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}(\tau_k - \tau)\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{\tau_k - \tau}{2}\right) = 1 + 2 \sum_{m=1}^n \cos(m(\tau_k - \tau)),$$

$$\sin(n(\tau_k - \tau)) \operatorname{ctg}\left(\frac{\tau_k - \tau}{2}\right) = 1 + \cos(n(\tau_k - \tau)) + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \cos(m(\tau_k - \tau)),$$

соотношения (1.12), (1.13) запишем в виде

$$f_n(\tau) \approx \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(\tau_k) \left(1 + 2 \sum_{m=1}^n \cos(m(\tau_k - \tau))\right), \quad (1.14)$$

$$f_n(\tau) \approx \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(\tau_k) \left(1 + \cos(n(\tau_k - \tau)) + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \cos(m(\tau_k - \tau))\right), \quad (1.15)$$

Подставляя выражение (1.15) в соотношение (1.10) и учитывая равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m(\tau_k - \tau)) \operatorname{ctg}\left(\frac{\tau - \tau_0}{2}\right) d\tau = \sin(m(\tau_k - \tau)),$$

приходим к квадратурной формуле

$$l_1(\tau) \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(\tau_k) \sin^2\left(n \frac{\tau_k - \tau}{2}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\tau_k - \tau}{2}\right), \quad (1.16)$$

для сингулярного интеграла в случае четного числа узлов. Производя аналогичные выкладки с соотношениями (1.10), (1.14), получаем квадратурную формулу для нечетного числа узлов

$$l_1(\tau) \approx \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(\tau_k) \sin\left((n+1) \frac{\tau_k - \tau}{2}\right) \sin\left(n \frac{\tau_k - \tau}{2}\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{\tau_k - \tau}{2}\right), \quad (1.17)$$

Формула (1.16) при $\omega=0$ получена в [55]. В приведенном виде соотношения (1.16), (1.17) имеются в [27]. Поскольку для вывода квадратурных формул (1.16), (1.17) использованы представления (1.12), (1.13), точные, если функция $f(\tau)$ полином, степени не выше $m=[(N-1)/2]$, то тригонометрическая степень точности вычисления функции $l_1(\tau)$ также равна m [27]. С другой стороны, исходя из формулы (1.16) имеем

$$l_1(\tau) \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(\tau_k) \operatorname{ctg} \left(\frac{\tau_k - \tau}{2} \right) + 2\pi A,$$

$$A = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(\tau_k) \operatorname{ctg} \left(\frac{\tau_k - \tau}{2} \right) \sin(n(\tau_k - \tau)) \operatorname{ctg}(n(\tau - \tau_k)) =$$

$$= \operatorname{ctg}(n\tau) \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(\tau_k) \operatorname{ctg} \left(\frac{\tau_k - \tau}{2} \right) \sin(n(\tau_k - \tau)),$$

откуда с учетом представления (1.13) приходим к квадратурной формуле

$$l_1(\tau) \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(\tau_k) \operatorname{ctg} \left(\frac{\tau_k - \tau}{2} \right) + 2\pi f(\tau) \operatorname{ctg}(n\tau), \quad (1.18)$$

В качестве внешних узлов квадратурной формулы (1.18) выберем систему

$$\tau = \tau_l^0 = \frac{2l-1}{2n} \pi + \frac{\omega}{2n}, \quad l = 1, 2, \dots, 2n. \text{ Тогда}$$

$$l_1(\tau_l^0) = \int_0^{2\pi} f(\tau) \operatorname{ctg} \left(\frac{\tau - \tau_l^0}{2} \right) d\tau \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(\tau_k) \operatorname{ctg} \left(\frac{\tau_k - \tau_l^0}{2} \right). \quad (1.19)$$

Полученная формула аналогична известному правилу для вычисления регулярных интегралов от периодических функций

$$\int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(\tau_k), \quad (1.20)$$

точному для многочленов степени $2n$. Система узлов в равенстве (1.20) определена соотношением (1.11).

Предположим, что в формуле (1.18) в качестве внешних узлов выбрана система значений $\tau = \tau_l = \frac{\pi}{n} l + \frac{\omega}{2n}$. В этом случае

$$\begin{aligned}
l_1(\tau) &\approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(\tau_k) \operatorname{ctg} \left(\frac{\tau_k - \tau_l}{2} \right) + \frac{\pi}{n} \lim_{\tau \rightarrow \tau_l} \left(f(\tau_l) \operatorname{ctg} \left(\frac{\tau_l - \tau}{2} \right) + 2nf(\tau) \operatorname{ctg}(n\tau) \right) = \\
&= \frac{\pi}{n} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{2n-1} f(\tau_k) \operatorname{ctg} \left(\frac{\tau_k - \tau_l}{2} \right) + 2 \frac{\pi}{n} f'(\tau_l).
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Таким образом, для получения $N=2n$ значений сингулярного интеграла $l_1(\tau)$ по квадратурной формуле (1.20) необходимо знать N значений его плотности. При использовании квадратурной формулы (1.21) помимо указанной информации необходимо иметь N значений производной плотности в узловых точках. Значения функции $f'(\tau)$ могут быть найдены при помощи интерполяционного полинома (1.13), имеющего тригонометрическую точность $N/2-1$ точность формулы (1.21) станет не выше $N/2-1$. Практические расчеты подтверждают преимущество квадратурной формулы (1.20) перед аналогичным соотношением (1.21).

1.5. Об одном важном свойстве СИУ 1 рода

Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} \varphi(\theta) d\theta = f(\theta_0) \tag{1.22}$$

Выберем на единичной окружности L – на отрезке $[0, 2\pi]$ – точки θ_k , $k=1, \dots, n$, которые разбивают ее на n равных частей, а θ_{0k} , $k=1, \dots, n$, делит пополам дугу $\theta_k \theta_{k+1}$.

Известно [33, 77], что уравнение (1.22) имеет решение, принадлежащее классу H при $f \in H$ только при условии

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0 \tag{1.23}$$

Для выделения единственного решения необходимо задать значение решения в некоторой точке, либо значение интеграла от решения (последнее более часто встречается в приложениях). Поэтому, если применить к численному решению уравнения (1.22) тот подход, который был проведен для характеристического уравнения на отрезке в § 17.1, то уравнение (1.22) надо заменить следующей системой линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} &= f(\theta_{0m}), \quad m = 1, \dots, n, \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} &= C. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Система (1.24) переопределена. В силу выбора точек θ_k и θ_{0k} и нечетности функции $\operatorname{ctg}\theta$ получаем

$$\sum_{m=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.25)$$

Следовательно, сложив первые n уравнений в системе (1.24) и учитывая равенство (1.25), получим

$$0 = \sum_{m=1}^n f(\theta_{0m}).$$

Поэтому система первых n уравнений из системы (1.24) вырождена и в общем случае несовместна. Это же относится и ко всей системе (1.24).

Мультиоп в [164] предложил отбросить одно из первых уравнений (или вообще любое) в системе (1.24). Тогда получаем невырожденную определенную систему, дающую устойчивый вычислительный процесс. Однако к системе (1.24) применим метод регуляризирующих факторов, который предложен в [66]

Справедлива следующая **Теорема Лифанова** [66]. Пусть функция $f(\theta) \in H$ на $[0, 2\pi]$, $f(0)=f(2\pi)$, и для нее выполняется равенство (1.23). Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$c_{0n} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} = f(\theta_{0m}), \quad m = 1, \dots, n,$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} = C \quad (1.26)$$

и решением $\varphi(\theta)$ уравнения (1.22), задаваемым формулой [77]

$$\varphi(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} f(\theta_0) d\theta_0 + C,$$

при условии

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta = C,$$

выполняется соотношение

$$|\varphi(\theta_k) - \varphi_n(\theta_k)| \leq O(n^{-\lambda} \ln n)$$

где $\lambda = \alpha \in [0, 1]$, если n — произвольно и $f(\theta) \in H$, $\lambda = r + \alpha$, если n — нечетно и $f^{(r)}(\theta) \in H(\alpha)$.

Просуммировав первые n уравнений в системе (1.26) и учитывая равенство (1.25), получим

$$c_{0n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n f(\theta_{0m}) \frac{2\pi}{n}.$$

Отсюда следует что когда уравнение (1.22) имеет решение (тогда и только тогда), константа $c_{0n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. А этого означает, что добавив к СЛАУ еще одно неизвестное (некую неизвестную константу c_{0n} — в дальнейшем иногда будем называть ее константой Лифанова), получим

невырожденную матрицу только с использованием дополнительного уравнения. И это уравнение замыкает алгоритм. Однако, поскольку при описанных выше условиях константа будет равна нулю, без потери точности может быть применен метод Мультипола [164]. В настоящей работе проведен такой численный эксперимент. В разделах 3 и 5, т.е. там, где использованы СИУ 1-го рода, применялся метод Мультипола и вышеназванная теорема Лифанова [66]. Различий не выявлено. В разделе 3 приведена таблица скорости стремления константы к нулю (Табл. 3.6).

1.6. Элементы теории обусловленности СЛАУ

Нормы векторов и матриц. Нормой вектора $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ называется неотрицательное число $\|\mathbf{x}\|$, удовлетворяющее условиям [122]:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &> 0 && \text{при } \mathbf{x} \neq 0, \quad \|0\| = 0, \\ \|C\mathbf{x}\| &= |C| \|\mathbf{x}\| && \text{при любом числе } C, \\ \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &\leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \end{aligned}$$

Норма вектора может быть введена различными способами, например следующими:

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_i |x_i|$$

или

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

или

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

(евклидова норма).

Возможны и другие виды норм, удовлетворяющие сформулированным выше трем условиям нормы.

Нормой квадратной матрицы \mathbf{A} называется неотрицательное число $\|\mathbf{A}\|$, удовлетворяющее тем же условиям, что и норма векторов. Если, кроме того, норма удовлетворяет условию

$$\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|,$$

то она называется мультипликативной.

Норма матриц может вводиться различными способами. Однако при этом целесообразно, чтобы она была согласована с выбранной нормой векторов, т. е. чтобы для любой матрицы \mathbf{A} и любого вектора \mathbf{x} выполнялось неравенство $\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$.

Если норму матрицы определить с помощью соотношения

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\|,$$

то это будет наименьшая норма матриц, согласованная с данной нормой векторов. Такую норму матриц иногда называют подчиненной данной норме векторов.

Для норм векторов подчиненными нормами матриц будут следующие:

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|, \quad \|\mathbf{A}\|_1 = \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|, \quad \|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mu},$$

где μ – наибольшее собственное число матрицы $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

Если матрица \mathbf{A} симметрична, то $\|\mathbf{A}\| = \max_i (\lambda_i)$, где λ_i – собственные значения матрицы \mathbf{A} . Иногда эту норму называют спектральной. Согласованной с евклидовой нормой векторов является евклидова норма матриц, определяемая выражением

$$\|\mathbf{A}\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

Число обусловленности матрицы. Корректно поставленные задачи решения СЛАУ в зависимости от чувствительности решения к погрешности в исходных данных можно разделить на хорошо и плохо обусловленные. При решении корректно поставленных задач наряду с получением единственного классического решения задачи возникает необходимость в оценке наследственной погрешности или близости математического и физического решений задачи.

Верхнюю границу «относительной» наследственной погрешности точного решения системы можно выразить через «относительные» погрешности заданных матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{b} следующим образом [122]:

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|}{1 - \|\Delta\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|} \left[\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right] \quad (1.27)$$

или

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|}{1 - \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}} \left[\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right] \quad (1.28)$$

при условии $\|\Delta\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| < 1$ и естественном предположении $\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} < 1$. Обе оценки

обычно являются мажорантными. Однако всегда можно построить пример, когда указанная граница достигается [122], т.е. оценки (1.27), (1.28) являются наилучшими на всем классе невырожденных матриц.

Устойчивость решения системы к изменениям исходных данных в значительной степени зависит от величины $\text{cond}\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$, которая называется *числом обусловленности матрицы*.

Пусть ε – машинная точность операций с вещественными числами. Тогда при решении СЛАУ $Ax = b$ результат будет получен с относительной погрешностью порядка $\varepsilon \cdot \text{cond}A$. Поэтому, если $\text{cond}A$ невелико, то матрица A СЛАУ называется хорошо обусловленной. Если $\text{cond}A$ велико, то матрица такой системы называется плохо обусловленной.

Хотя число обусловленности матрицы зависит от выбора нормы, если матрица хорошо обусловлена, то её число обусловленности будет мало при любом выборе нормы, а если она плохо обусловлена, то велико при любом выборе нормы. Таким образом, обычно норму выбирают исходя из соображений удобства. На практике наиболее широко используют 1-норму, 2-норму и ∞ -норму, задающиеся формулами:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i|^2},$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Например, для симметричных матриц

$$\text{cond}A = \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|},$$

где $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, – собственные значения матрицы A , для несимметричных матриц

$$\text{cond}A = \sqrt{\frac{\mu_n}{\mu_1}}.$$

Здесь μ_n и μ_1 наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы $A^T A$.

Из оценок (1.29), (1.28) следует, что достоверность полученного

математического решения определяется не только обусловленностью матрицы системы линейных алгебраических уравнений, но и точностью задания исходных данных. Величину

$$m = \text{cond} \mathbf{A} \left[\frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right] \quad (1.29)$$

будем называть *числом обусловленности СЛАУ*. Формула (1.29) увязывает свойства матрицы системы и погрешность в задании исходных данных. В реальных задачах есть смысл рассматривать те системы, для которых оценки числа m заметно меньше единицы, например $m \leq 0,01$.

Таким образом, рассмотрение устойчивости решения к изменениям исходных данных для систем линейных алгебраических уравнений с квадратной невырожденной матрицей \mathbf{A} , удовлетворяющей условию, позволяет выделить хорошо и плохо обусловленные системы.

Из формулы (1.29) следует, что для уменьшения наследственной погрешности математического решения необходимо стремиться к уменьшению числа m либо за счет увеличения точности задания исходных данных, либо за счет переформулировки изучаемой физической модели относительно других параметров с целью уменьшения числа обусловленности матрицы.

Программное вычисление \mathbf{A}^{-1} для определения точного значения $\text{cond} \mathbf{A}$ примерно удваивает время нахождения решения системы. Но точное значение $\text{cond} \mathbf{A}$ требуется редко. Обычно достаточно оценки числа обусловленности матрицы, которую легко можно получить в процессе треугольного разложения матрицы, например, в гауссовом исключении [122].

В этом случае оценка числа обусловленности вычисляется в процессе разложения матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ следующим образом:

$$\text{cond} \mathbf{A} \approx \|\mathbf{A}\| \frac{\|\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{y}\|},$$

где \mathbf{y} и \mathbf{z} - векторы, определяемые в программе, такие, что

$$\|\mathbf{z}\|/\|\mathbf{y}\| \approx \|\mathbf{A}^{-1}\|.$$

Здесь $\|\mathbf{A}\| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

1.7 Выводы к первому разделу

Обзор позволяет сделать вывод о том, что серия численных экспериментов, позволяющих проанализировать алгоритм численного решения задач дифракции методом СИУ и сделать выводы о его эффективности, является задачей актуальной. Можно сделать следующие выводы.

1. Число обусловленности матрицы СЛАУ – важный объективный показатель устойчивости модели.

2. Сравнение чисел обусловленности СЛАУ для разных однако однотипных задач математической физики, даст возможность построить рейтинг данных моделей.

3. Проверка возможности получения значений искомых характеристик с управляемой точностью даст возможность говорить о произвольной точности модели, когда погрешности вычислений влияют лишь на последующие за ожидаемыми разрядами вычисляемых величин.

4. Формирование таблиц значений максимальных величин искомых функций и их аргументов (локаций) с заданной точностью (например до 10^{-10}) покажет влияние обусловленности СЛАУ на точность вычислений.

РАЗДЕЛ 2.

МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ – СХЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ.

Приводимый в работе анализ волновых полей напряжений охватывает случаи различного типа разрывов в окружающей среде. К типичным препятствиям, рассматриваемым в настоящем исследовании, относятся жесткие включения, пустоты или упругие объекты со свойствами, отличными от свойств окружающей среды.

В качестве нагрузки выбирается излучающаяся из бесконечности волна сдвига, гармонически изменяющаяся во времени, или гармонический источник, сосредоточенный в некоторой точке поля.

2.1. Основные соотношения динамической теории упругости в случае антиплоской деформации.

Под продольным сдвигом или антиплоской деформацией понимают напряженно-деформированное состояние цилиндрического тела, нагруженного по боковой поверхности усилиями, направленными и равномерно распределенными вдоль образующей. В предположении, что ось деформации направлена вдоль оси OZ декартовой прямоугольной системы координат OXYZ, отличными от нуля являются две компоненты тензора напряжений σ_{13} , σ_{23} и одна компонента смещения $w(x,y,t)$, причем

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + f = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \sigma_{13} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{23} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (2.1)$$

здесь ρ – плотность, μ – модуль сдвига среды, t – время, f – объемная сила.

Из (2.1) вытекает, что смещение w удовлетворяет неоднородному волновому уравнению

$$\nabla^2 w - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu} f, \quad c^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (2.2)$$

Рассмотрим в неограниченной изотропной среде бесконечно длинный вдоль оси OZ цилиндр, поперечное сечение которого ограничено замкнутым контуром L типа Ляпунова (кривизна L удовлетворяет условию Гельдера [77]). Предположим, что внутренность цилиндра представляет собой полость. Кривая L разбивает плоскость OXY на две области: внешнюю D_1 и внутреннюю D_2 . Положительным направлением обхода контура L считаем направление обхода, при котором область D_2 остается слева. Пусть также U_0 - внешнее поле перемещений. Считаем, что источники этого поля размещены в области D_1 . В качестве такого источника может быть набегающая на цилиндр из бесконечности монохроматическая волна сдвига, нормаль к фронту которой составляет угол ψ с осью OX ($\tau = \text{const}$)

$$U_0 = \tau e^{-i\gamma_1(x \cos \psi + y \sin \psi) - i\omega t}, \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}. \quad (2.3)$$

или гармонический источник интенсивности q , сосредоточенный в точке $M_0(x_0, y_0)$,

$$f = q \delta(x - x_0, y - y_0) e^{-i\omega t}. \quad (2.4)$$

Здесь ω - частота колебаний, c_1 - скорость распространения волны сдвига в матрице, δ - функция Дирака [4, 113].

В результате взаимодействия проходящей волны U_0 с цилиндром возникает дифрагированное волновое поле. Считаем, что падающая и отраженная волны имеют ту же частоту колебаний, что и источник, т.е. ω . Это позволяет сделать переход к амплитудам смещений. Пусть U_0, U_1 - амплитуды смещений возбуждающего, отраженного и проникающего полей, соответственно. Тогда общее поле смещений U равно $U_0 + U_1$ в матрице.

В случае гармонической зависимости от времени из (2.2) находим, что

амплитуды U и U_1 удовлетворяют уравнениям Гельмгольца [4]

$$\nabla^2 U_m + \gamma_m^2 U_m = 0, \quad m = 1, 2. \quad (2.5)$$

возбуждающее поле U_0 удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 U_0 + \gamma_1^2 U_0 = -\alpha \frac{q}{\mu_1} \delta(x - x_0, y - y_0), \quad (2.6)$$

где значение $\alpha=0$ соответствует (2.3) и $\alpha=1$ отвечает случаю (2.4). В последнем случае, очевидно,

$$U_0 = -\frac{q}{\mu_1} \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_1 r), \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (2.7)$$

Сформулируем теперь краевые условия для разрешающих уравнений Гельмгольца (2.5). Будем предполагать, что сечение цилиндра описывается гладкой замкнутой кривой L , параметрическое уравнение которой $\xi = \xi(s), \eta = \eta(s)$. Пусть $(\xi_0, \eta_0) = (\xi(s_0), \eta(s_0))$ - точка кривой L , в которой мы будем выполнять граничные условия (рис. 2.1).

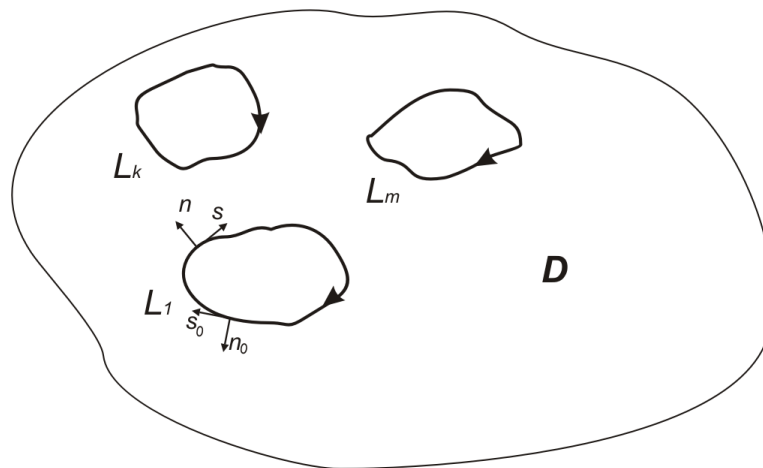


Рис. 2.1 Размещение отверстий в изотропной среде

Выделим также граничный элемент и укажем на нем компоненты результирующего напряжения, действующего на L .

На границе отверстий L нас будут интересовать следующие напряжения $\sigma_{sz} = \tau_s e^{-i\omega t}$, $\sigma_{nz} = \tau_n e^{-i\omega t}$. В случае антиплоской деформации

$$\tau_s = \mu \frac{\partial W}{\partial s}, \quad \tau_n = \mu \frac{\partial W}{\partial n}, \quad (2.8)$$

Приходим к следующим граничным условиям на L .

Поскольку D_2 - полость, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial n_0} (U_1 + U_0) = 0. \quad (2.9)$$

Итак, решение антиплоской задачи динамической теории упругости о дифракции гармонической волны сдвига на системе цилиндрических отверстий сводится к решению уравнений Гельмгольца (2.5) с заданными краевыми условиями на границе отверстия типа (2.9). Отметим, что в области D_1 решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее указанным граничным условиям, неоднозначно [33]. Единственность решения обеспечивается удовлетворением рассеянной волной U_1 условий излучения на бесконечности. В предположении, что зависимость от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$, такими являются условия Зоммерфельда [113]

$$U_1 = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial U_1}{\partial r} - i\gamma_1 U_1 = O\left(\frac{1}{\sqrt{r^3}}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

Условиям (2.10) удовлетворяют, например, функции Ханкеля 1-го рода n -го порядка $H_n^{(1)}(\gamma_1 r)$. Для них справедливы следующие асимптотические представления (при $x \gg n$) [132]

$$H_n^{(1)}(\gamma_1 r) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4})} + \dots$$

Тот факт, что функция $H_0^{(1)}(\gamma_1 r)$ является фундаментальным решением (с точностью до постоянного множителя $l/(4i)$) уравнения Гельмгольца в области

D_1 и наряду с другими функциями Ханкеля 1-го рода удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда (2.10) обычно используют при построении интегральных представлений амплитуды рассеянной волны смещения.

2.2. Сведение задачи дифракции на системе цилиндрических полостей к интегральным уравнениям.

Рассмотрим краевую задачу (2.5), (2.9), (2.10) на системе цилиндрических полостей.

Уравнения Гельмгольца (2.5) и условия излучения (2.10) будут автоматически удовлетворены, если выбрать следующие представления для амплитуды рассеянной U_1 волны в виде потенциала простого слоя

$$U(x, y) = \int_L f(s)G(x, y, \xi, \eta)ds \quad (2.11)$$

$$G = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_1 r), r = |z - \zeta|, z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta \in L.$$

Тут $f(s)$ – неизвестная функция, удовлетворяющая на L условию Гельдера. Интегральное представление (2.11) удовлетворяет уравнению Гельмгольца (2.5) в области D_1 и обеспечивает выполнение условий излучения на бесконечности. Остается выполнить граничное условие (2.9). Для осуществления предельного перехода в (2.9) при $z \rightarrow \zeta_0 \in L$ частные производные $\frac{\partial U}{\partial s_0}$ и $\frac{\partial U}{\partial n_0}$ будем понимать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial s_0} \Big|_L &= \left(e^{i\phi_0} \frac{\partial U}{\partial z} + e^{-i\phi_0} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}, \\ \frac{\partial U}{\partial n_0} \Big|_L &= -i \left(e^{i\phi_0} \frac{\partial U}{\partial z} - e^{-i\phi_0} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}, \\ e^{i\phi_0} &= \frac{d\zeta_0}{ds_0}, \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь и в дальнейшем черточка над функцией означает знак сопряжения: если $w = u + iv$, то $\bar{w} = u - iv$ (u, v - действительные функции); в данном случае $\bar{z} = x - iy$.

Воспользуемся известными соотношениями [118]

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma r) &= -\frac{\gamma}{2} e^{-i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma r) &= -\frac{\gamma}{2} e^{i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r),\end{aligned}\quad (2.13)$$

$$H_1^{(1)}(\gamma r) = \frac{2}{i\pi\gamma r} + H_1(\gamma r), \quad z - \zeta = re^{i\alpha},$$

где $H_1(x)$ - непрерывная функция в точке $x=0$, а так же формулами Сохоцкого-Племеля вычисления предельных значений интегралов типа Коши [33]

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\pi i} \int_L f(s) \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}^{\pm} &= \pm f(\zeta_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L f(s) \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \\ \left(\frac{1}{\pi i} \int_L f(s) \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}^{\pm} &= \mp f(\zeta_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L f(s) \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0}\end{aligned}$$

Осуществляя теперь предельный переход в (2.12) при $z \rightarrow \zeta_0 \in L$, приходим к искомому интегральному уравнению относительно неизвестной функции $f_2(s)$:

$$\frac{1}{2} f(s_0) + \int_L f(s) E(s, s_0) ds = K_n(s_0), \quad n = 1, 2 \quad (2.14)$$

$$E(s, s_0) = \gamma_1 H_1^{(1)}(\gamma_1 r) \sin(\alpha_0 - \varphi_0), \quad \zeta_0 - \zeta = re^{i\alpha_0},$$

$$K_1(s_0) = i\gamma_1 W_0(s_0) \sin(\psi - \varphi_0), \quad K_2(s_0) = -\frac{P}{\mu} \gamma_1 H_1^{(1)}(\gamma_1 \rho_0) \sin(\psi_0 - \varphi_0), \quad \zeta_0 - z_0 = \rho_0 e^{i\psi_0}$$

Здесь функции $K_1(s_0)$ и $K_2(s_0)$ отвечают случаю (2.4). Ядра $E_k(s, s_0)$ - непрерывны. Таким образом, интегральное уравнение в (2.14) является уравнением Фредгольма 2-го рода.

Таким образом, интегральные уравнения, описывающие дифракцию SH-волн на цилиндрических полостях, построены. Запишем эти уравнения в виде, удобном для численной реализации. С этой целью введем параметризацию контура L с помощью соотношений $\zeta = \zeta(\beta)$, $\zeta_0 = \zeta(\beta_0)$, $0 \leq \beta, \beta \leq 2\pi$, причем $\zeta(0) = \zeta(2\pi)$.

Параметризованная форма интегральных уравнений (2.14) приобретает вид ($m=1,2$)

$$\frac{\mu}{2} p(\beta_0) + \int_0^{2\pi} p(\beta) R(\beta, \beta_0) d\beta = T_m(\beta_0),$$

$$R(\beta, \beta_0) = E(\beta, \beta_0) s'(\beta_0),$$

$$p(\beta) = f_k(\beta) s'(\beta_0),$$

$$T_m(\beta_0) = K_m(\beta_0) s'(\beta_0), k = 1, 2.$$

Переходим к численной реализации построенного алгоритма.

2.3. Схема параллельной численной реализации интегральных уравнений

Отметим, что уравнение (2.14) является интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода. Будем предполагать, что плотности $p(\beta)$ - комплекснозначные непрерывные 2π -периодические функции.

Для численной реализации алгоритма в настоящей работе использован метод механических квадратур.

Система N линейных алгебраических уравнений, соответствующая системе интегральных уравнений (2.14), приобретает вид ($l=1,2$)

$$\beta_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad \beta_0^m = \frac{2m-1}{2N} \pi, \quad k, m = 1, 2, \dots, N$$

Здесь, функция f есть \sin или tg в зависимости от нечетности или

четности N .

Таким образом, интегральным уравнением (2.14) соответствует система N алгебраических уравнений с N неизвестными разрешима, причем она имеет единственное решение.

Как известно [77], структура каждого СИУ строго типизирована. Поэтому метод численной реализации [88, 96] позволяет использовать комбинирование типовых вычислительных процедур [96]. Опишем общую схему численной реализации.

Элементы матрицы СЛАУ, к которой, в конечном итоге, сводится система интегральных уравнений, являются результатом дискретизации контуров. Очевидно, что размер матрицы пропорционален числу неоднородностей. Применим распараллеливание алгоритма, в котором каждый элемент матрицы определяется координатами узлов дискретизации.

Как показано в [96], данный метод в вычислительном смысле сводится к обходу каждого контура по точкам коллокации (рис. 2.2) внеинтегральной переменной ζ_{k_0} и одновременному же обходу каждого контура по аналогичным либо иным узлам переменной интегрирования ζ_k .

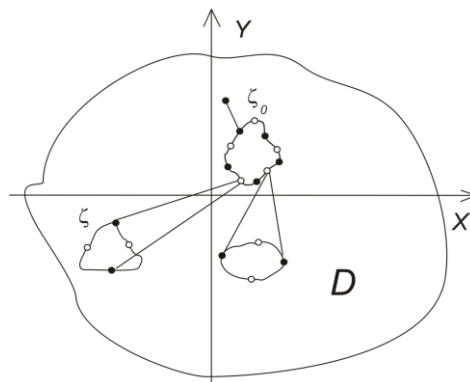


Рис. 2.2 Схема обхода точек по контуру

Важной особенностью алгоритма такого обхода является то, что результирующая матрица строится в соответствии с отношением „многие ко многим” и формально является результатом Декартова произведения этих множеств.

Это означает, что все элементы матрицы формально независимы один от другого, что не строго доказывает возможность применения параллельного вычисления.

Параллельно-конвейерная схема вычислений показана на рис. 2.3. Тут приведена пропорция интервалов времени вычислений на: синтез массивов исходных данных (время t_0 при числе процессов P_1), синтез матрицы СЛАУ (время t_1 при количестве процессов P_1), решение СЛАУ методом Гаусса (t_2 – оптимальное время вычислений при оптимальном числе процессов P_0), синтез массивов итоговых решений (время t_3). Первый, второй и четвертый этапы макроконвейера не требуют пересылок данных, что означает независимость вычислений. На третьем этапе для решения СЛАУ существует оптимальное число процессов, определяемое спецификой матрицы. Это означает, что для 1, 2 и 4 этапов алгоритма оптимальным является число процессов, соответствующее числу коэффициентов СЛАУ. А для решения СЛАУ число оптимальных процессов значительно меньше. Такой несимметричный алгоритм поддерживает операционная система MPI-2 посредством процедуры `spawn` («икрометание»).

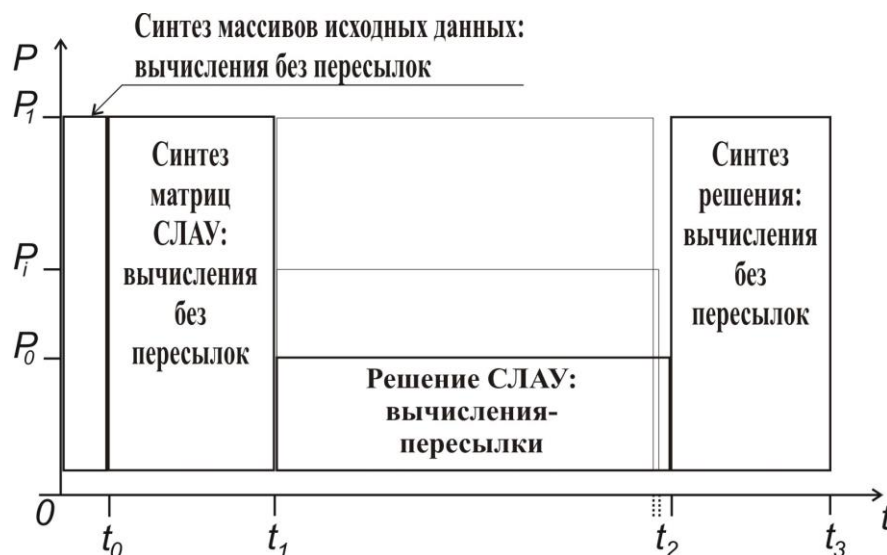


Рис. 2.3 Диаграмма времени работы каждой из частей программы

В данном методе решения всех перечисленных краевых задачи основной

операцией является определение текущего расстояния между точками коллокации и интегрирования, заданного на множестве значений параметрических координат неоднородностей. Указанное расстояние является аргументом функции Грина. И поскольку комбинации самих функций Грина и коэффициентов при них являются элементами матрицы СЛАУ, указанная процедура может быть базовой при разработке серии приложений. Тем более, что, как показано в [96], алгоритм хорошо масштабируется по вычислительным узлам.

Вычислительный процесс решения СЛАУ, в свою очередь, распараллеливается согласно [96, 122, 123]. Параллельное вычисление итоговых искомых характеристик осуществляется путем подстановки массивов значений неизвестных функций $f_k(\beta_p)$ в интегральные представления решений аналогично процедурам формирования матрицы СЛАУ. При этом в зависимости от операционной среды, доступной пользователю, может применяться два типа формирования матрицы – поэлементное и построчное. Более эффективным является поэлементное параллельное формирование матрицы СЛАУ, когда число узлов равно числу элементов матрицы. Однако для решения СЛАУ эффективнее использовать построчное распараллеливание, когда пересылки и вычисления находятся в балансе. Таким образом, наиболее прогрессивной является операционная среда, в которой пользователь имеет возможность сочетать оба механизма, гибко изменяя число используемых узлов в соответствии с этапом вычислений.

Из всего вышесказанного следует, что структурирование всех программных приложений является естественным. Очевидно, что итоговое множество данных – массив значений искомых функций – является результатом взаимодействия всех базовых компонентов: функций Грина со своими аргументами, правых частей, дополнительных условий или внеитнегральных членов, геометрических характеристик исследуемых задач и т.п.

Используем известные [41] параметрические уравнения для задания

основного контура L_0 :

$$\xi(\beta) = a(\sin \beta - \nu \sin 3\beta), \quad \eta(\beta) = -b(\cos \beta + \nu \cos 3\beta), \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi,$$

где при $\nu = 0.14036$ контур имеет вид ромба со скругленными точками возврата. А в случае $\nu = 0$ контур имеет эллиптическую форму. Остальные контуры для простоты будем располагать симметрично относительно оси Y . В этом случае рассматриваемая дифракционная задача обладает свойством симметрии, что позволяет осуществлять первичное самотестирование получаемых результатов. Во всех дальнейших исследованиях в ходе численной реализации вычислялись безразмерные напряжения на контурах неоднородностей. Точность вычислений проверялась путем сравнения результатов при различных значениях N . Проводилось также сравнение полученных результатов с известными результатами. В приложении 2 сформирован список результатов тестовых сравнений.

В работе проводились вычисления контурных напряжений вдоль контуров центральной L_0 и крайней L_k неоднородности (рис. 2.4, 2.5). в случае решеток, состоящих из нечетного числа неоднородностей ($p=k$). Отсчет угла β велся от нуля (теневая точка) до π (лобовая точка) для центральной неоднородности (учитывается симметрия в случае нормального падения волн) и от 0 до 2π – для крайних неоднородностей (в силу симметрии распределения напряжений на контурах L_k и L_{-k} зеркальны).

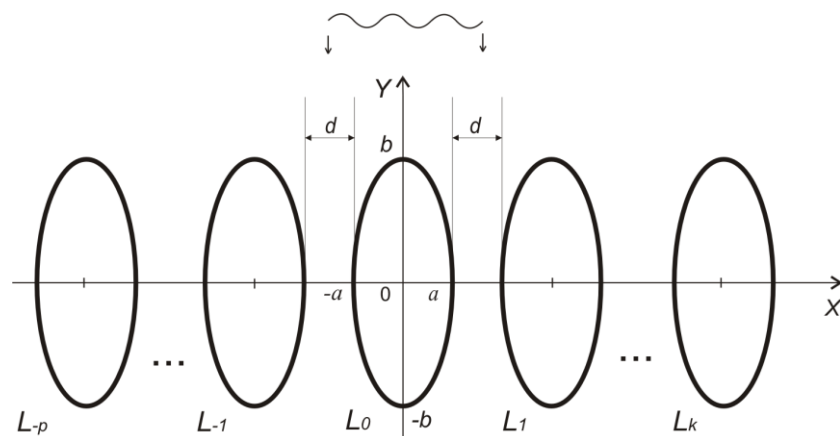


Рис. 2.4 Схема системы отверстий эллиптической формы

С целью исследования сходимости построенного алгоритма рассматривался случай нормального падения ($\psi=\pi/2$) волны сдвига на систему ромбовидных с округлениями или в частном случае эллиптических неоднородностей, расположенных вдоль одной линии на одинаковом расстоянии d друг от друга (рис. 2.5).

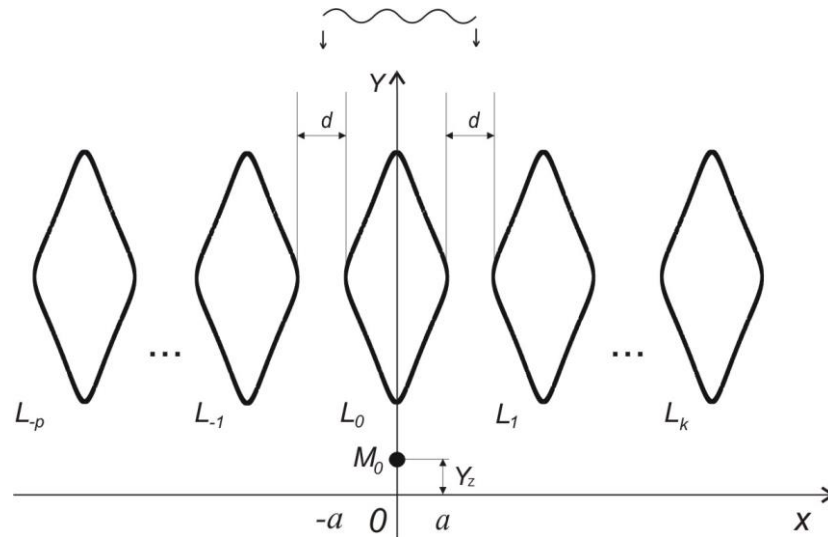


Рис. 2.5 Схема системы отверстий ромбической формы

2.4. Дифракция волн сдвига на периодической системе цилиндрических полостей.

Постановка краевых задач. Рассмотрим бесконечную среду, ось антиплоской деформации которой направлена вдоль оси OZ , с $2d$ -периодической системой цилиндрических полостей, причем в основной полосе периодов имеется только один цилиндр. Пусть D_2 - поперечное сечение такого цилиндра, ограниченное контуром L (L - кривая Ляпунова). Внешнюю область обозначим через D_1 . Предположим, что из бесконечности на данную структуру падает монохроматическая волна

$$U_0 = \tau e^{-i\gamma_1 y}, \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad \tau = const,$$

где c_1 - скорость распространения волны сдвига в области D_1 .

В результате взаимодействия приходящей волны U_0 с решеткой возникает дифрагированное волновое поле. Пусть U_1 - амплитуды смещения отраженного поля. Тогда общее поле U равно $U_0 + U_1$ в матрице. Функции U_1 удовлетворяет уравнениям Гельмгольца (2.5) и граничным условиям на контуре L (2.9). Кроме того, функция U_1 должна удовлетворять условиям излучения на бесконечности, т.е. представлять собой расходящуюся волну или суперпозицию расходящихся волн.

Представим функцию U_1 , характеризующую дифрагированное поле смещений в областях D_1 и D_2 в виде (2.7)

$$U(x, y) = \int_L f(s)G(x, y, \xi, \eta)ds, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L,$$

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\pi(z - z_0)}{2d} \right| + \frac{\ln 2}{2\pi} + \frac{1}{2d} \sum_{l=0}^{\infty} f_l(y - y_0) \cos \alpha_l(x - x_0), \quad (2.15)$$

$$f_0(t) = -\frac{|t|}{2} + \frac{e^{i\gamma_1|t|}}{2i\gamma_1}, \quad f_l(t) = -\frac{e^{i\lambda_l|t|}}{i\lambda_l} + \frac{e^{-\alpha_l|t|}}{\alpha_l}, \quad l \neq 0.$$

Интегральные представления (2.15) автоматически удовлетворяют соответствующим уравнениям Гельмгольца (2.5), обеспечивают периодичность волновых полей и выполнение условий излучения на бесконечности

Остается выполнить граничное условие (2.9). Для осуществления предельного перехода в (2.9) при $z \rightarrow \zeta_0 \in L$ частные производные $\frac{\partial U}{\partial s_0}$ и

$\frac{\partial U}{\partial n_0}$ будем понимать как (2.12)

Осуществляя теперь предельный переход в (2.12) при $z \rightarrow \zeta_0 \in L$, приходим к искомому интегральному уравнению относительно неизвестной функции $f(s)$, аналогичной (2.14):

$$\frac{\mu}{2} f(s_0) + \int_0^{2\pi} (f(s)E(s, s_0))d\beta = K(s_0) \quad (2.16)$$

$$E(s, s_0) = \mu(\operatorname{Im}(u) + a(s, s_0) \sin \varphi_0 - b(s, s_0) \cos \varphi_0)$$

$$a(s, s_0) = \frac{1}{2d} \sum_{l=1}^{\infty} (\alpha_l e^{-|\eta_0 - \eta|} - e^{-\alpha_l |\eta_0 - \eta|}) \sin \alpha_l (\xi_0 - \xi)$$

$$b(s, s_0) = \frac{\operatorname{sign}(\eta_0 - \eta)}{2d} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{l0}} (e^{-|\eta_0 - \eta|} - e^{-\alpha_l |\eta_0 - \eta|}) \cos \alpha_l (\xi_0 - \xi)$$

$$u = \frac{1}{4d} e^{i\varphi_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi(\xi_0 - \xi)}{2d}$$

$$K(s_0) = -\mu i \gamma_2 e^{-i\gamma_2 \eta_0} \sin \varphi_0, \quad e^{i\varphi_0} = \frac{d\xi_0}{ds_0}$$

Искомое интегральное уравнение для периодической системы полостей

$$\frac{\mu}{2} p(\beta_0) + \int_0^{2\pi} p(\beta) R(\beta, \beta_0) d\beta = T(\beta_0),$$

$$R(\beta, \beta_0) = E(\beta, \beta_0) s'(\beta_0), \quad p(\beta) = f(\beta) s'(\beta_0).$$

СЛАУ имеет вид

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N p(\beta_k) C(\beta_k, \beta_0^m) = T(\beta_0^m),$$

$$C(\beta_k, \beta_0^m) = R(\beta_k, \beta_0^m) + \frac{\mu}{4\pi} \frac{(-1)^{m+k}}{f\left(\frac{\beta_0^m - \beta_k}{2}\right)},$$

$$\beta_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad \beta_0^m = \frac{2m-1}{2N} \pi, \quad k, m = 1, 2, \dots, N$$

Здесь функция f есть \sin или tg в зависимости от нечетности или четности N .

Численная реализация систем уравнений (2.16) проводилась для цилиндра эллиптического или ромбического сечения.

2.5. Верификация полученных результатов.

Для проведения численных экспериментов по всем разделам применялся кластер «Инпарком-256», а также операционная система и компилятор языка C++. Указанных вычислительных средств достаточно для получения точности модели до 10^{-10}

Проверка выполнения краевых условий. Для системы отверстий из краевого условия следует то, что нормальные контурные напряжения должны быть равны нулю. В Табл. 2.1 приведены значения нормальных напряжений для соответствующих значений волновых чисел, на некоторых характерных точках контура – лобовая, теневая и точка проскальзывания. Тут $b/a=0.5$, $d=2.0$, $\gamma_2 a=1.7$.

Таблица 2.1

Машинные нули для краевого условия

| Источник | Волновое число | Расположение отверстия | Угол β в радианах | Максимум σ_n |
|----------|----------------|------------------------|-------------------------|------------------------|
| Волна | 1,7 | Центральное | 0 | $6,564 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 1,7 | Центральное | 3,1415469319 | $5,063 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 1,7 | Центральное | 2π | $6,049 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 1,7 | Крайнее справа | 0 | $6,324 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 1,7 | Крайнее справа | 3,1415469319 | $5,562 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 1,7 | Крайнее справа | 2π | $6,525 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 2,5 | Центральное | 0 | $2,205 \cdot 10^{-14}$ |
| Волна | 2,5 | Центральное | 3,1415469319 | $7,301 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 2,5 | Центральное | 2π | $3,108 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 2,5 | Крайнее справа | 0 | $4,645 \cdot 10^{-14}$ |
| Волна | 2,5 | Крайнее справа | 3,1415469319 | $6,251 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 2,5 | Крайнее справа | 2π | $5,258 \cdot 10^{-15}$ |

В табл. 2.2 и 2.3 представлены касательные контурные напряжения, которые отвечают значениям параметра $\gamma_2 a = \{1.7, 2.5\}$ соответственно. Тут $b/a=0.5$, $d=2.0$. Равенство «симметричных» относительно ОУ значений безразмерных контурных напряжений σ_s показывает соответствие результата геометрии нагружения, а также дает возможность определить верхнюю границу

точности алгоритма в данной операционной среде (без применение дополнительных вычислительных средств безошибочной арифметики [35, 91-93]) – до 10^{-12} .

Таблица 2.2.

Равенство симметричных значений σ_β , $\gamma_2 a = 1.7$

| Угол β в радианах | Значение σ_β | Угол β в радианах | Значение σ_β |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 0 | 0.0000000000000007 | | |
| 0.153248 | 0.756223244023323 | 6.129936 | 0.756223244023322 |
| 0.306496 | 1.449317781861137 | 5.976688 | 1.449317781861115 |
| 0.459745 | 2.027788744575615 | 5.823440 | 2.027788744575622 |
| 0.612993 | 2.460142517134694 | 5.670191 | 2.460142517134678 |
| 0.766242 | 2.738297363962117 | 5.516943 | 2.738297363962109 |
| 0.919490 | 2.876845994249121 | 5.363694 | 2.876845994249125 |
| 1.072738 | 2.911339351953779 | 5.210446 | 2.911339351953743 |
| 1.225987 | 2.898381356911701 | 5.057197 | 2.898381356911682 |
| 1.379235 | 2.908622752479515 | 4.903949 | 2.908622752479500 |
| 1.532484 | 2.981547435570532 | 4.750701 | 2.981547435570541 |
| 1.685732 | 3.065013382649809 | 4.597452 | 3.065013382649780 |
| 1.838981 | 3.067097601001009 | 4.444204 | 3.067097601001085 |
| 1.992229 | 2.955012228985977 | 4.290955 | 2.955012228985946 |
| 2.145477 | 2.746391246171177 | 4.137707 | 2.746391246171132 |
| 2.298726 | 2.464335456713680 | 3.984458 | 2.464335456713702 |
| 2.451974 | 2.122112658528570 | 3.831210 | 2.122112658528633 |
| 2.605223 | 1.725397507006127 | 3.677962 | 1.725397507006108 |
| 2.758471 | 1.278004899112498 | 3.524713 | 1.278004899112516 |
| 2.911720 | 0.787061427518417 | 3.371465 | 0.787061427518442 |
| 3.064968 | 0.265969562157412 | 3.218216 | 0.265969562157432 |

Таблица 2.3

Равенство симметричных значений σ_s , $\gamma_2 a = 1.5$

| Угол β в радианах | Значение σ_β | Угол β в радианах | Значение σ_β |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 0 | 0.0000000000000031 | | |
| 0.153248 | 0.381426930167468 | 6.129936 | 0.381426930167488 |
| 0.306496 | 0.725088264474183 | 5.976688 | 0.725088264474062 |
| 0.459745 | 1.011063420693997 | 5.823440 | 1.011063420693987 |
| 0.612993 | 1.252130758260391 | 5.670191 | 1.252130758260433 |
| 0.766242 | 1.501533323985147 | 5.516943 | 1.501533323985386 |
| 0.919490 | 1.842773072605909 | 5.363694 | 1.842773072606063 |
| 1.072738 | 2.350262154441229 | 5.210446 | 2.350262154441292 |
| 1.225987 | 3.034044165925691 | 5.057197 | 3.034044165925709 |
| 1.379235 | 3.784238183755373 | 4.903949 | 3.784238183755338 |
| 1.532484 | 4.340826639196730 | 4.750701 | 4.340826639196899 |

| | | | |
|----------|-------------------|----------|-------------------|
| 1.685732 | 4.417039113461491 | 4.597452 | 4.417039113461608 |
| 1.838981 | 3.951161464541046 | 4.444204 | 3.951161464541335 |
| 1.992229 | 3.121076132074200 | 4.290955 | 3.121076132074388 |
| 2.145477 | 2.148333016487493 | 4.137707 | 2.148333016487207 |
| 2.298726 | 1.203992575102092 | 3.984458 | 1.203992575101803 |
| 2.451974 | 0.419424328450616 | 3.831210 | 0.419424328451206 |
| 2.605223 | 0.177993149290629 | 3.677962 | 0.177993149290877 |
| 2.758471 | 0.412105641973722 | 3.524713 | 0.412105641974182 |
| 2.911720 | 0.383837361145565 | 3.371465 | 0.383837361146869 |
| 3.064968 | 0.152820695097589 | 3.218216 | 0.152820695097678 |

Очевидно, что при использованных вышеназванных типовых вычислительных средств выполнение краевых условий с точностью до 10^{-13} - 10^{-14} позволяет доверять точности результатов до 10^{-10} .

Сравнение с результатами для одиночного отверстия. Проводилось сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [52, 131] для случая одиночного эллиптического отверстия, полученного удалением элементов системы на значительное расстояние друг от друга – до $(10^{+6})a$ – $(10^{+10})a$, где a – размер одной из полуосей неоднородности, т.е. обезразмеривающий параметр задачи. Сравнение с результатами [131] показало хорошую достоверность используемых вычислительных алгоритмов. Для всех разделов настоящей работы для каждого теста верификации в Приложении 2 приведены цитируемые графики и соответствующие ссылка на источник.

Как и в работе [52], кривые 1, 2 и 3 на рис. 2.6а ($a/b=1.4/0.6$) и 2.6б ($a/b=0.6/1.4$) отвечают значениям параметра $\gamma_2 a$, равным 1.5, 0.9 и 0.1 соответственно. Расчеты показывают, что вблизи точки соскальзывания ($\beta=90^\circ$) напряжение σ_S имеет локальный максимум. Если в теневой ($\beta=0$) и лобовой ($\beta=\pi$) точках $\sigma_S=0$, то в зоне соскальзывания с увеличением $\gamma_2 a$ число локальных максимумов σ_S также увеличивается.

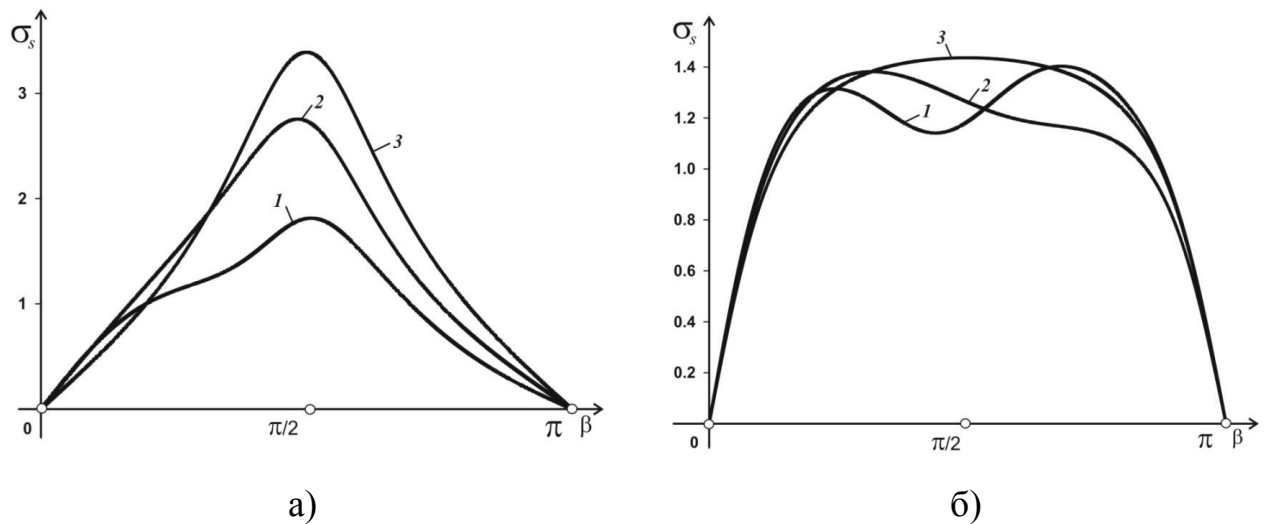


Рис. 2.6 Касательные напряжения для центрального отверстия

Сравнение с результатами для периодической системы отверстий. Численное исследование показало, что при воздействии на локальную систему отверстий SH-волн из бесконечности, в системе наблюдается эффект насыщения [63, 96]. Там под насыщением понимается эффект, при котором значение волнового поля для симметричного случая системы совпадает с соответствующими значениями волнового поля для периодической до нескольких знаков.

Используя тот факт, что при насыщении решетки напряженно-деформированное состояние исследуемой системы стремится к аналогичному состоянию в периодическом случае, в работе проводилось сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [95] для случая периодической системы эллиптических отверстий. Сравнение с результатами [95] также показало хорошую достоверность используемых вычислительных схем.

На рис. 2.7 показано распределение напряжений σ_s на контуре эллиптической полости ($b/a=0.5$), находящийся на оси симметрии системы, состоящей из 13 отверстий. Кривые 1, 2, 3 и 4 приведены для полупериода решетки $d/a=4$ и соответствуют значениям параметра $\gamma_2 a, = \{0.2, 0.4, 0.7, 1.0\}$ соответственно. Как и следовало ожидать, характер изменения кривых аналогичен соответствующим изменениям кривых в случае одиночной полости,

максимальные значения напряжений достигаются в точке соскальзывания ($\beta=90^\circ$), в теневой ($\beta=0^\circ$) и лобовой ($\beta=180^\circ$) точках они обращаются в нуль.

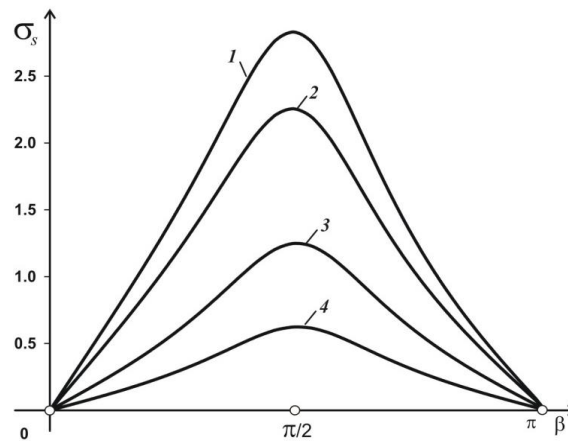


Рис. 2.7 Касательные напряжения центрального отверстия, 13 отверстий

2.6. Вычисление касательных контурных напряжений на локальной системе полостей.

Приведенный алгоритм позволяет провести численное исследование динамической напряженности системы отверстий. Если вычислены узловые значения плотностей $p(\beta)$, то поле смещений, как это вытекает из, может быть определено по формулам

$$U(x, y) = \frac{2p}{N} \frac{1}{4i} \sum_{k=1}^N p(\beta_k) H_0^{(1)}(\gamma_1 r_k) + U_0(x, y), \quad (x, y) \in D_1$$

$$r_k = |z - \zeta(\beta_k)|$$

В настоящей работе вычисляются контурные напряжения на границе цилиндрических полостей (2.8).

$$\tau_s^{(1)}(\beta_0^m) s'(\beta_0^m) = \mu_1 \left[\frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N p(\beta_k) D(\beta_k, \beta_0^m) - F(\beta_0^m) \right]$$

С целью исследования сходимости построенного алгоритма при наличии

системы отверстий в бесконечной матрице рассмотрим случаи нормального падения ($\psi = \frac{\pi}{0}$) волны сдвига (2.3) и действия гармонического источника (2.7) на систему цилиндрических отверстий ромбовидного или эллиптического сечения:

$$\xi(\beta) = a(\sin \beta - \nu \sin 3\beta), \quad \eta(\beta) = -b(\cos \beta + \nu \cos 3\beta), \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi,$$

На рис. 2.8 приведено распределение σ_β вдоль контура центрального отверстия L_0 в случае решетки, состоящей из трех ромбов. Воздействие – волна из бесконечности. Значение безразмерного волнового числа $\gamma_2 a = 1,5$ (рис. 2.8а) и 3,0 (рис. 2.8б). Кривая 1 показывает распределение напряжений центрального отверстия в случае решетки, где $d = 0,5a$. Кривая 2 – для решетки с $d = 2a$. Результаты показывают, что чем ближе отверстия друг к другу, тем выше контурные напряжения. Если в теневой ($\beta = 0$) и лобовой ($\beta = \pi$) точках $\sigma_\beta = 0$, то в зоне соскальзывания с увеличением $\gamma_2 a$ число локальных максимумов также увеличивается, причем растет и максимальное значение. Такой вывод полностью совпадает с результатами работы [95].

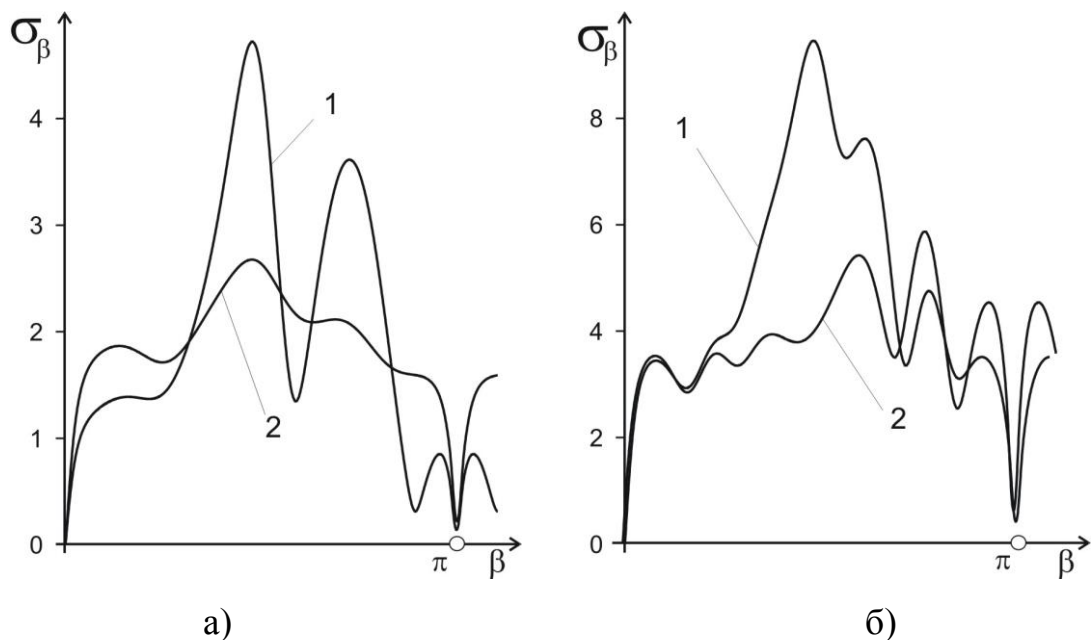


Рис. 2.8 Касательные напряжения центрального отверстия, 3 отверстия

На рис. 2.9 приведено аналогичное распределение σ_β вдоль контура отверстия, крайнего слева. Нумерация кривых имеет тот же смысл. Здесь наблюдаются локальные минимумы в теневой ($\beta = 0$) и лобовой ($\beta = \pi$) точках. Число локальных максимумов в зоне соскальзывания с увеличением γ_{2a} также увеличивается. Максимальное значение σ_β , как и на рис. 2.8, растет с уменьшением периода решетки и с увеличением γ_{2a} . Причем наблюдается две разных по интенсивности зоны соскальзывания - внутренняя и внешняя. Как видно из приведенных графиков, при относительно близком расположении объектов во внутренней зоне соскальзывания наблюдается значительный рост контурных SH-напряжений по сравнению с внешней зоной.

На рис. 2.10 приведено распределение σ_β вдоль контура центрального отверстия L_0 в случае решетки, состоящей из трех ромбов. Воздействие – точечный источник, сосредоточенный на оси OY на расстоянии a от границы. Значение

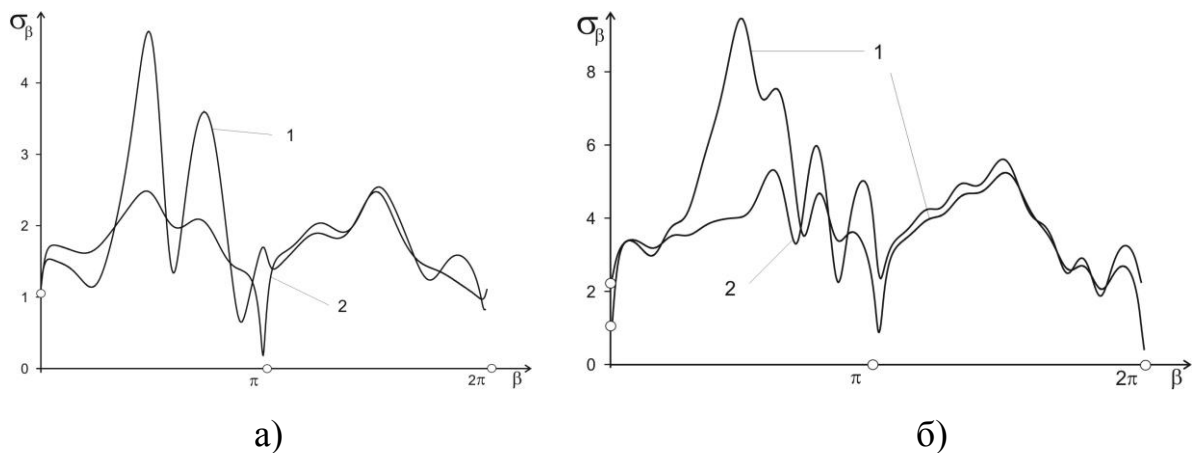


Рис.2.9 Касательные напряжения крайнего левого отверстия, 3 отверстия

безразмерного волнового числа γ_{2a} соответствует 1,5 (2.10а) и 3,0 (2.10б). Кривая 1 показывает распределение напряжений центрального отверстия в случае решетки, где $d = 0,5a$. Кривая 2 - для решетки с $d = 2a$.

Результаты показывают, что характер зависимостей несколько отличается. Наблюдаются явные пульсации зависимости σ_β от d . Итак, для некоторых значений d пик напряжений наблюдается на кривых 2. А для других d - как и в случае воздействия волны из бесконечности, для кривых 1: чем

ближе отверстия друг к другу, тем выше контурные напряжения. При этом очевидно, что чем выше γ_{2a} , тем чаще чередуются такие отрезки d.

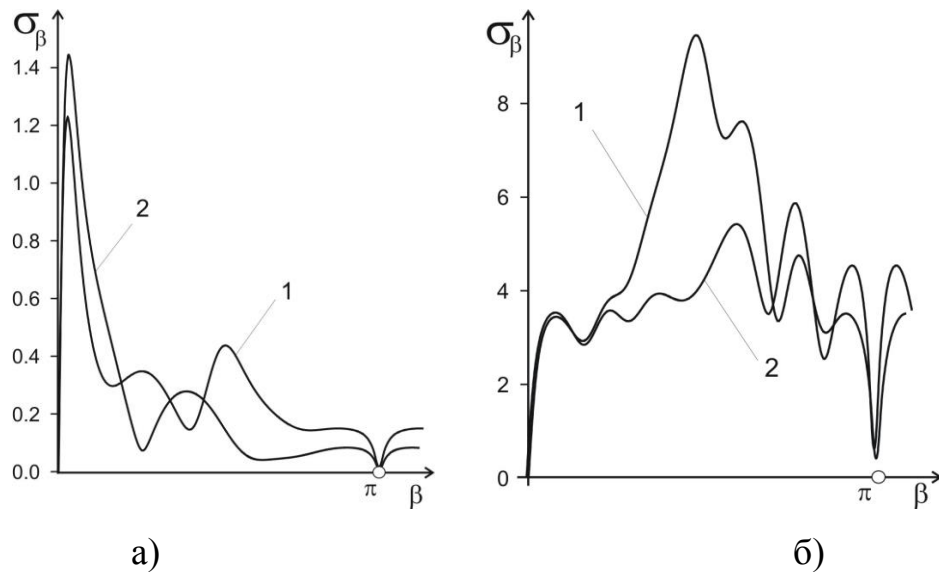


Рис. 2.10 Касательные напряжения центрального отверстия, 3 отверстия

Однако общая тенденция также наблюдается - если в теневой ($\beta = 0$) и лобовой ($\beta = \pi$) точках $\sigma_\beta = 0$, то в зоне соскальзывания с увеличением γ_{2a} число локальных максимумов также увеличивается, причем растет и максимальное значение.

На рис. 2.11 показано аналогичное распределение σ_β вдоль контура отверстия, крайнего слева. Нагрузка - источник. Нумерация кривых имеет тот же смысл. Здесь наблюдаются локальные минимумы в теневой ($\beta = 0$) и лобовой ($\beta = \pi$) точках. Число локальных максимумов в зоне соскальзывания с увеличением γ_{2a} также увеличивается. Максимальное значение, как и на рис. 2.8, растет с уменьшением периода решетки и с увеличением γ_{2a} . Причем наблюдаются две разных по интенсивности зоны соскальзывания - внутренняя и внешняя. Как видно из приведенных графиков, при относительно близком расположении объектов во внутренней зоне соскальзывания наблюдается значительный рост контурных SH-напряжений по сравнению с внешней зоной.

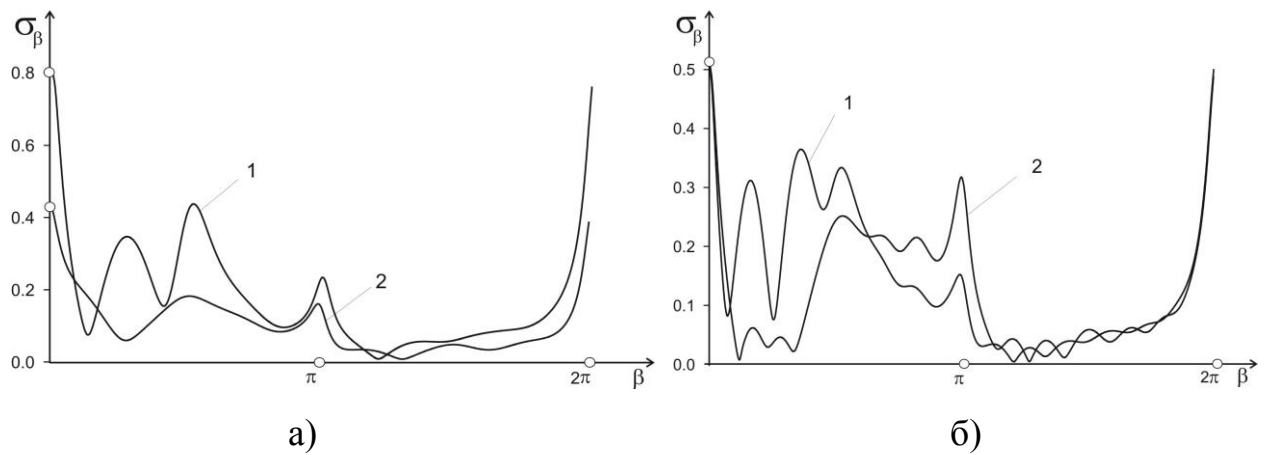


Рис. 2.11 Касательные напряжения крайнего левого отверстия, 3 отверстия

В работе также исследована дифракция волн сдвига на локальных системах отверстий с увеличенным числом отражателей (более 10). С целью экономии места большинство графиков с иными параметрами нагружения приведено в Приложении 4.

2.7. Метод золотого сечения при численном решении СИУ

В связи с тем, что метод СИУ не позволяет находить решения в произвольных точках контура, а только дискретно - в узлах полиномов, для высокоточного определения значения максимума касательного напряжения, а также для определения соответствующего значения угла в радианах, в работе применен алгоритм последовательных приближений сдвига точек коллокации контура.

Для приближенного определения отрезка контура, на котором находится максимум, использован метод сплайнов. Поскольку искомая зависимость контурных напряжений имеет не более чем параболическую кривизну, для снижения погрешности выбирался квадратичный сплайн. После получения начального приближения значение максимума напряжения, исчислялось и начальное приближение отрезка контура, где дислоцированы это значение.

На каждой итерации для вычислений значений функции применялась известная процедура метода «золотого сечения» деления отрезка $[a, b]$ в точках

x_1 и x_2 . Здесь в каждой итерации нужно только одно новое вычисления значения функции. Это приводит к ускорению по сравнению с методом половинного деления. В этом методе длины последовательных отрезков $[x_1, b]$ (рис. 2.12)

должны давать то же число r : $\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a} = r$.

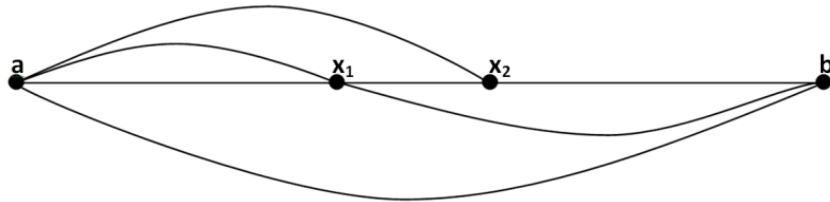


Рис. 2.12 Метод «золотого сечения»

При этом отрезок $[a, b]$ равна сумме отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$, откуда легко получить, что число r удовлетворяет уравнению $r^2=r+1$, то есть

$r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Таким образом: $x_1 = b - \frac{(b-a)}{r}$, $x_2 = a + \frac{(b-a)}{r}$. В силу свойства

«золотого сечения» необходимо искать только одну новую точку. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто заданную точность:

$$\varepsilon > |b - a|.$$

Разработанная схема численного эксперимента позволила сформировать таблицу высокоточных значений максимумов касательных напряжений и соответствующих угловых координат на контуре эллиптических или ромбовидных центральных или крайних отверстий в системе из 3 отражателей. Воздействие – волна из бесконечности или находящийся вблизи источник гармонических SH-волн.

В таблице 2.4 приведены эти значения. В системе из трех эллиптических или ромбовидных отверстий соотношение осей $b/a = 2.5$, а волновые числа γ_{2a} , равны 1.7 и 2.5 соответственно. Координата источника $Y_z = 1.0$. Число точек коллокации каждого контура $N = 2001$.

Таблица 2.4

Высокоточные максимальные касательные напряжения σ_β

| Источник | Тип контура | γ_{2a} | Расположение отверстия | Угол β в радианах | Максимум σ_β |
|-------------|-------------|---------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Волна из/б | Эллипс | 1,7 | Центральное | 3,7759581877 | 2,7434183334 |
| Волна из/б | Эллипс | 1,7 | Крайнее справа | 2,0223429197 | 2,5634431896 |
| Волна из/б | Ромбик | 1,7 | Центральное | 1,5241661202 | 2,8519959464 |
| Волна из/б | Ромбик | 1,7 | Крайнее справа | 4,7330332830 | 2,7685470486 |
| Точ. источ. | Эллипс | 1,7 | Центральное | 0,3493654986 | 0,7138349170 |
| Точ. источ. | Эллипс | 1,7 | Крайнее справа | 4,1669119402 | 0,3022873720 |
| Точ. источ. | Ромбик | 1,7 | Центральное | 0,0953579509 | 1,2697288402 |
| Точ. источ. | Ромбик | 1,7 | Крайнее справа | 3,1676492946 | 0,2446962768 |
| Волна из/б | Эллипс | 2,5 | Центральное | 2,1654776027 | 3,8874602581 |
| Волна из/б | Эллипс | 2,5 | Крайнее справа | 4,1247243899 | 3,7970390118 |
| Волна из/б | Ромбик | 2,5 | Центральное | 3,5880972937 | 4,2768939823 |
| Волна из/б | Ромбик | 2,5 | Крайнее справа | 1,5641853954 | 4,3471409312 |
| Точ. источ. | Эллипс | 2,5 | Центральное | 0,2433410444 | 0,5857393657 |
| Точ. источ. | Эллипс | 2,5 | Крайнее справа | 6,2449639214 | 0,4036738759 |
| Точ. источ. | Ромбик | 2,5 | Центральное | 0,1031154078 | 1,5085150911 |
| Точ. источ. | Ромбик | 2,5 | Крайнее справа | 6,2781079856 | 0,5777780860 |

На рис. 2.13 показана временная зависимость при загрузке узлов кластера «Инпарком-256», показавшая нулевую зависимость алгоритма от числа узлов – снижение времени вычислений от пересылок не наступает вплоть до 250 узлов. Это означает, что алгоритм хорошо распараллеливается и слабо зависит от числа узлов.

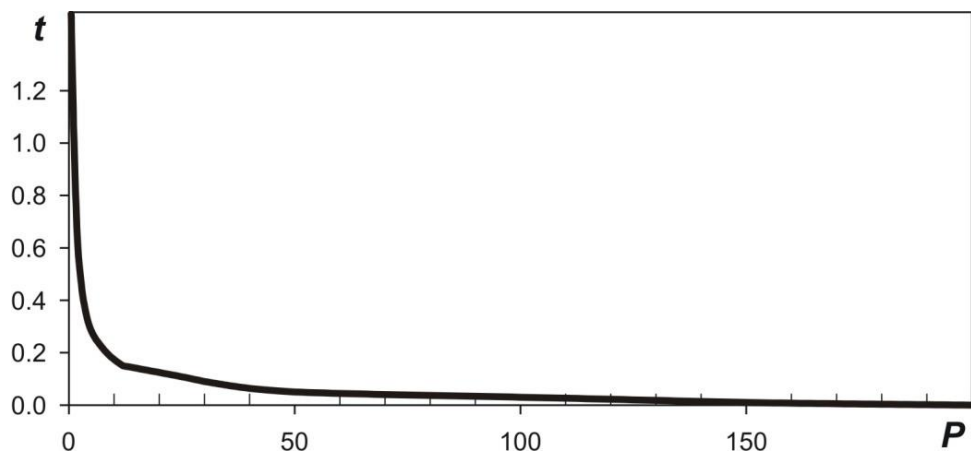


Рис. 2.13 График загрузки узлов кластера «Инпарком-256»

На рис. 2.14 показана зависимость числа обусловленности от $\gamma_2 a$. Сравнение этих кривых показывает, что обусловленность матрицы существенно ухудшается при $\gamma_2 a > 10$.

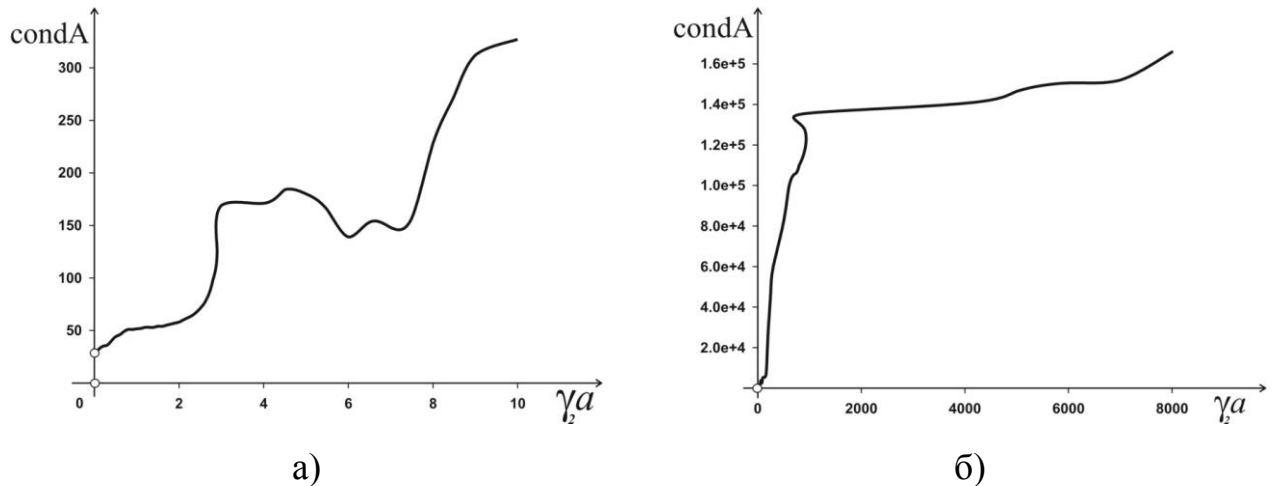


Рис. 2.14 Зависимость числа обусловленности матрицы

2.8. Выводы к 2 разделу.

1. Для задачи дифракции волн сдвига на системе отверстий цилиндрической формы параллельные алгоритмы позволяют значительно сократить время вычислений и более детально проанализировать характеристики волнового поля.

2. Сочетание метода интегральных уравнений и кластерных вычислений позволяет на единицу снизить размерность задачи, а также значительно экономить времени вычислений за счет распараллеливания процедур, что приводит к существенному увеличению эффективности предложенного метода.

3. Полученная зависимость числа обусловленности от $\gamma_2 a$ показала, что при $\gamma_2 a < 10$ модель хорошо обусловлена и тем самым хорошо разрешима, что дает возможности провести численный эксперимент с точностью до 10^{-10} .

4. Для указанных диапазонов числа обусловленности проведенные тесты верификации результатов показали достоверность полученных данных, а так же хорошую сходимость и устойчивость алгоритмов.

5. При решении проблемы высокоточного определения локаций и

максимальных характеристик искомым функций на контурах локальных систем неоднородностей произвольного поперечного сечения (в интерпретации теорий упругости – полей перемещений и напряжений) метод СИУ может быть построен на параллельных вычислениях при последовательных приближениях уточняющего смещения точек коллокации при дискретизации контуров.

6. При гармонических воздействиях на локальные системы неоднородностей с увеличенным числом отражателей возникает эффект насыщения, то есть равенство значений до третьего знака после запятой искомым функций на контуре центральной неоднородности аналогичным значением на контуре неоднородности при решении периодической задачи.

7. Характеристики полей напряжений от гармонических волн, взаимодействующих с локальными системами неоднородностей, а также шкалы высокоточных значений локаций и максимальных напряжений на контурах локальных систем отверстий эллиптического и ромбического сечения подтверждают, что алгоритм позволяет определять высокоточные значение контурных напряжений, поскольку кривые зависимостей – гладкие.

8. Временные закономерности загрузки узлов при параллельном кластерном решении задачи, основанной на интегральном уравнении Фредгольма 2-го рода, показывает, что снижение производительности алгоритма зависит только от объема пересылок при решении СЛАУ.

РАЗДЕЛ 3.

**СХЕМА КЛАСТЕРНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ
ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ ЖЕСТКИХ ИЛИ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ
ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ
ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ SH-ВОЛН.**

3.1. Формулировка краевых задач.

Рассмотрим в неограниченной изотропной среде бесконечно длинный вдоль оси OZ цилиндр, поперечное сечение которого ограничено замкнутыми контурами L_j , $j = \overline{1, m}$ типа Ляпунова (кривизна L_j удовлетворяет условию Гельдера [77]). Предположим, что внутренность цилиндра представляет собой жесткое или упругое включение. Кривая L разбивает плоскость OXY на две области: внешнюю D_1 и внутреннюю D_2 . Положительным направлением обхода контуров L_j считаем направление обхода, при котором область D_2 остается слева. Пусть также U_0 - внешнее поле перемещений. Считаем, что источники этого поля размещены в области D_1 . В качестве такого источника может быть набегающая на цилиндр из бесконечности монохроматическая волна сдвига, нормаль к фронту которой составляет угол ψ с осью OX ($\tau = \text{const}$) (2.3) или гармонический источник интенсивности q , сосредоточенный в точке $M_0(x_0, y_0)$ (2.4).

В результате взаимодействия приходящей волны U_0 с цилиндром возникает дифрагированное волновое поле. Считаем, что отраженная и проникающая внутрь цилиндра (случай упругого включения) волны имеют ту же частоту колебаний, что и источник, т.е. ω . Это позволяет сделать переход к амплитудам смещений. Пусть U_0 , U_1 , U_2 - амплитуды смещений возбуждающего, отраженного и проникающего полей, соответственно. Тогда общее поле смещений U равно $U_0 + U_1$ в матрице и U_2 внутри включения.

Сформулируем теперь краевые условия для разрешающих уравнений

Гельмгольца (2.5). Будем предполагать, что сечение цилиндра описывается гладкими замкнутыми кривыми L_j , параметрическое уравнение которой $\xi = \xi(s), \eta = \eta(s)$. Пусть $(\xi_0, \eta_0) = (\xi(s_0), \eta(s_0))$ - точка кривой L_j , в которой мы будем выполнять граничные условия (рис. 3.1).

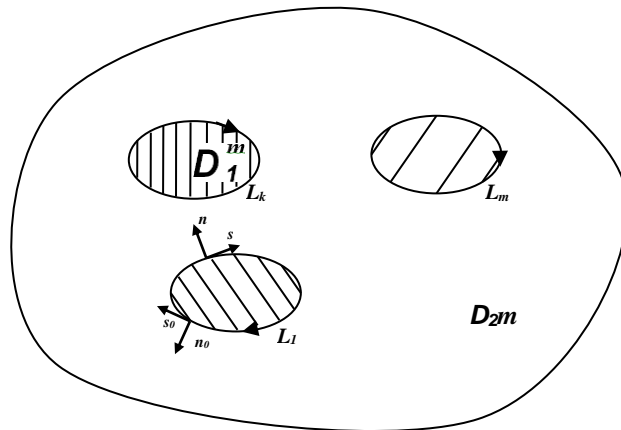


Рис. 3.1 Размещение включений в изотропной среде

Выделим также граничный элемент и укажем на нем компоненты результирующего напряжения, действующего на L .

Пусть $\sigma_{nz} = \tau_n e^{-i\omega t}$, $\sigma_{sz} = \tau_s e^{-i\omega t}$. Тогда, очевидно, если L - граница D_1 , то

$$\begin{aligned} \tau_n &= \mu_1 \frac{\partial U}{\partial n}, & \tau_s &= \mu_1 \frac{\partial U}{\partial s} \\ \tau_n &= \mu_2 \frac{\partial U}{\partial n}, & \tau_s &= \mu_2 \frac{\partial U}{\partial s} \end{aligned} \quad (3.1)$$

- со стороны включения.

Приходим к следующим граничным условиям на L :

1. Если D_2 - жесткое включение, то на L должно быть

$$U_1 + U_0 = C. \quad (3.2)$$

Здесь $C=0$ в случае неподвижного включения и C - неизвестная комплексная постоянная, если включение перемещается как абсолютно жесткое

тело. Уравнение движения включения здесь приобретает вид

$$\mu_1 \int_L \frac{\partial}{\partial n_0} (U_1 + U_0) ds_0 = -\rho_2 S \omega^2 C, \quad (3.3)$$

где S - площадь, ρ_2 - плотность включения.

2. На границе раздела двух сред условия типа склейки дают

$$U_2 = U_1 + U_0, \quad \mu_2 \frac{\partial U_2}{\partial n_0} = \mu_1 \frac{\partial}{\partial n_0} (U_1 + U_0). \quad (3.4)$$

Соотношения (3.4) следует понимать как равенства граничных значений соответствующих величин при стремлении точки наблюдения $z=x+iy$ к точке $\zeta_0=\xi_0+i\eta_0 \in L$ из областей D_1 и D_2 .

Сделаем следующее замечание. Удовлетворение граничного условия (3.2) и первого из условий (3.4) приводит к интегральному уравнению 1-го рода с логарифмическим ядром. С целью получения СИУ с ядром типа Коши эти равенства дифференцировались по дуговой координате s_0 . Например, в случае жесткого включения граничное условие на L записывалось в виде

$$\frac{d}{ds_0} (U_1 + U_0) = 0. \quad (3.5)$$

Дополнительное условие (3.3) приобретало вид (l - длина контура L)

$$\mu_1 \int_L \frac{\partial}{\partial n_0} (U_1 + U_0) ds_0 = -\rho_2 S \omega^2 \frac{1}{l} \int_L (U_1 + U_0) ds_0. \quad (3.6)$$

Итак, решение антиплоской задачи динамической теории упругости о дифракции гармонической волны сдвига на системе цилиндрических включений сводится к решению уравнений Гельмгольца (2.5) с заданными краевыми условиями на границе включения типа (3.4) или (3.5). Отметим, что в области D_1 решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее указанным граничным условиям, неоднозначно. Единственность решения обеспечивается

удовлетворением рассеянной волной U_1 условий излучения на бесконечности, т.е., условию Зоммерфельда (2.10)

3.2. Сведение задачи дифракции на системе упругих цилиндрических включений к СИУ.

Рассмотрим краевую задачу (2.5), (3.4), (2.10). Уравнения Гельмгольца (2.5) и условия излучения (2.10) будут автоматически удовлетворены, если выбрать следующие представления для амплитуд рассеянной U_1 и проникающей U_2 волны

$$U_m(x, y) = \int_L \left(f_m(s) G_m(x, y, \xi, \eta) - t_m(s) \frac{\partial G_m}{\partial n} \right) ds$$

$$G_m = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_m r), \quad r = |z - \zeta|, \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L, \quad m = 1, 2. \quad (3.7)$$

Условия сопряжения (2.10) на контуре L упругого включения запишем в виде

$$\frac{dU_2}{ds_0} = \frac{d}{ds_0} (U_1 + U_0), \quad \mu_2 \frac{\partial U_2}{\partial n_0} = \mu_1 \frac{\partial}{\partial n_0} (U_1 + U_0),$$

$$\frac{dU}{ds_0} = (e^{i\phi_0} \frac{\partial U}{\partial z} + e^{-i\phi_0} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}})_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad (3.8)$$

$$\frac{dU}{dn_0} = -i(e^{i\phi_0} \frac{\partial U}{\partial z} - e^{-i\phi_0} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}})_{z \rightarrow \zeta_0},$$

Подстановка интегральных представлений (3.7) в граничные условия (3.8) или (3.4) позволяет получить два интегральных уравнения, которые дают возможность определить лишь две из четырех неизвестных функций $f_m(s)$ и $t_m(s)$. В действительности имеется две неизвестные функции. Таким образом, представления (3.7) переопределены. На практике обычно рассматривают три

случая: а) $t_1(s) = t_2(s) = 0$; б) $f_2(s) = t_1(s) = 0$ в) $f_1(s) = f_2(s), t_1(s) = t_2(s)$. Как отмечено в [94], в каждом из этих случаев при исследовании дифракции электромагнитных волн установлена единственность решения возникающих интегральных уравнений, причем единственное решение необходимо искать в классе непрерывных (вместе со своими производными) по Гельдеру функций.

Условие $t_1(s) = t_2(s) = 0$ приводит к наиболее простой схеме алгоритма. Кроме того, в этом случае модифицированное краевое условие – первое из условий (3.8) позволяет получить СИУ 1-го рода, для численного решения которого разработаны эффективные численные схемы.

Итак, здесь вновь (и в дальнейшем) интегральные представления амплитуд смещений выбираются в виде потенциалов типа простого слоя

$$U_m(x, y) = \int_L f_m(s) G_m(x, y, \xi, \eta) ds, \quad m = 1, 2,$$

$$G_m = \frac{1}{4\pi} \ln r + g_m, \quad (3.9)$$

где g_m - регулярные функции своих аргументов.

Воспользуемся известными соотношениями (2.13), а так же формулами Сохоцкого-Племеля, осуществляем предельный переход в (3.8) при $z \rightarrow \zeta_0 \in L$, приходим к искомому интегральному уравнению относительно неизвестной функции $f_1(s)$ и $f_2(s)$. Имеем ($m=1, 2$)

$$\int_L (f_1(s) B_1(s, s_0) - f_2(s) B_2(s, s_0)) ds = N_m(s_0),$$

$$\frac{\mu_1}{2} f_1(s_0) + \frac{\mu_2}{2} f_2(s_0) + \int_L (f_1(s) E_1(s, s_0) - f_2(s) E_2(s, s_0)) ds = K_m(s_0), \quad (3.10)$$

$$B_k(s, s_0) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\phi_0}}{\zeta - \zeta_0} \right) + \frac{\gamma_k}{4i} H_1(\gamma_k r) \cos(\varphi_0 - \alpha_0),$$

$$E_k(s, s_0) = \frac{\mu_k \gamma_k}{4i} H_1^{(1)}(\gamma_k r_0) \sin(\varphi_0 - \alpha_0), \quad \zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0},$$

$$\begin{aligned}
N_1(s_0) &= i\gamma_1 U_0(s_0) \cos(\varphi_0 - \psi), & N_2(s_0) &= i\gamma_2 U_{10}(s_0) \cos(\varphi_0 - \alpha_{10}), \\
K_1(s_0) &= i\mu_1 \gamma_1 U_0(s_0) \sin(\varphi_0 - \psi), & K_2(s_0) &= i\mu_1 \gamma_1 U_{10}(s_0) \sin(\varphi_0 - \alpha_{10}), \\
U_{10}(s_0) &= -\frac{q}{4\mu_1 i} H_1^{(1)}(\gamma_1 r_{10}), & \zeta_0 - z_0 &= r_{10} e^{i\alpha_0}, \quad z_0 = x_0 + iy_0.
\end{aligned}$$

Здесь функции $N_1(s_0)$ и $N_2(s_0)$, $K_1(s_0)$ и $K_2(s_0)$ отвечают случаю (2.3) и (2.4) соответственно. В ядрах $V_k(s, s_0)$ первые слагаемые сингулярны, ядра $E_k(s, s_0)$ - непрерывны. Таким образом, интегральное уравнение в (3.10) является СИУ 1-го рода, второе – уравнением Фредгольма 2-го рода.

Отметим, что СИУ получено из модифицированного краевого условия на L – условия непрерывности производной по дуговой координате амплитуды смещения U (3.8). Вместе с тем, постановка задачи дифракции волны сдвига на упругих включениях (3.4) требует непрерывности амплитуды смещения на L . Чтобы из решения краевой задачи (3.8) вытекало решение краевой задачи (3.4) необходимо выполнение условия сопряжения смещений U_2 и $U_1 + U_0$ в одной из точек контура. Это условие может быть заменено интегральным соотношением [88], вытекающим из (3.4)

$$\frac{1}{l} \int_L U_2 ds_0 = \frac{1}{l} \int_L (U_1 + U_0) ds_0 \quad (3.11)$$

и отражающим равенство средних амплитуд смещений при переходе через контур L . При наличии дополнительного условия (3.11) СИУ 1-го рода в (3.10) становится разрешимым, а система интегральных уравнений (3.10) имеет единственное решение, совпадающее с решением системы интегральных уравнений, вытекающей из исходной краевой задачи (3.4).

Таким образом, интегральные уравнения, описывающие дифракцию SH-волн на системе цилиндрических упругих включениях, построены. Запишем эти уравнения в виде, удобном для численной реализации. С этой целью введем параметризацию контуров L с помощью соотношений $\zeta = \zeta(\beta)$, $\zeta_0 = \zeta(\beta_0)$, $0 \leq \beta, \beta_0 \leq 2\pi$, причем $\zeta(0) = \zeta(2\pi)$.

Теперь, используя поведение функций $H_0^{(1)}(\gamma r)$ в нуле (формулы (3.9) и (2.13) соответственно), получаем ($k=1,2$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_k r_0) &= \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0}{2} \right| + W_k(\beta, \beta_0), \\ \frac{\gamma_k}{4i} H_1^{(1)}(\gamma_k r_0) s'(\beta_0) \cos(\varphi_0 - \alpha_0) &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{ctg} \frac{\beta - \beta_0}{2} + V_k(\beta, \beta_0), \\ W_k(\beta, \beta_0) &= G_k(\beta, \beta_0) - \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0}{2} \right|, \\ V_k(\beta, \beta_0) &= B_k(\beta, \beta_0) s'(\beta_0) - \frac{1}{4\pi} \operatorname{ctg} \frac{\beta - \beta_0}{2}, \quad s'(\beta_0) = \frac{ds_0}{d\beta_0}.\end{aligned}$$

Параметризованная форма интегральных уравнений (3.10) приобретает вид ($m=1,2$)

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (p_1(\beta) D_1(\beta, \beta_0) - p_2(\beta) D_2(\beta, \beta_0)) d\beta &= F_m(\beta_0), \quad (3.12) \\ \frac{\mu_1}{2} p_1(\beta_0) + \frac{\mu_2}{2} p_2(\beta_0) + \int_0^{2\pi} (p_1(\beta) R_1(\beta, \beta_0) - p_2(\beta) R_2(\beta, \beta_0)) d\beta &= T_m(\beta_0), \\ D_k(\beta, \beta_0) &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{ctg} \frac{\beta - \beta_0}{2} + V_k(\beta, \beta_0), \\ R_k(\beta, \beta_0) &= E_k(\beta, \beta_0) s'(\beta_0), \\ p_k(\beta) &= f_k(\beta) s'(\beta), \quad F_m(\beta_0) = N_m(\beta_0) s'(\beta_0) \\ T_m(\beta_0) &= K_m(\beta_0) s'(\beta_0), \quad k=1,2.\end{aligned}$$

Здесь в ядре СИУ в явном виде выделено ядро Гильберта.

Рассмотрим теперь дополнительное условие (3.11). Запишем его в виде

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} U_2(\beta_0) d\beta_0 &= \int_0^{2\pi} (U_0(\beta_0) + U_1(\beta_0)) d\beta_0, \\ U_k(\beta_0) &= \int_0^{2\pi} p_k(\beta) G_k(\beta, \beta_0) d\beta, \quad k=1,2.\end{aligned}$$

Поскольку [94]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0}{2} \right| d\beta_0 = -\ln 2,$$

окончательно получаем

$$\int_0^{2\pi} (p_1(\beta)L_1(\beta) - p_2(\beta)L_2(\beta))d\beta = F_0,$$

$$L_k(\beta) = -\ln 2 + \int_0^{2\pi} W_k(\beta, \beta_0)d\beta_0, \quad k=1,2, \quad (3.13)$$

$$F_0 = -\int_0^{2\pi} U_0(\beta_0)d\beta_0.$$

Переходим к численной реализации построенного алгоритма.

3.3. Численная реализация СИУ на системе упругих цилиндрических включений.

С целью исследования сходимости построенного алгоритма рассмотрим случай нормального падения ($\psi = \pi/2$) волны сдвига на систему однородных эллиптических или ромбических включений, расположенных вдоль одной линии на одинаковом расстоянии d один от другого (рис. 3.2).

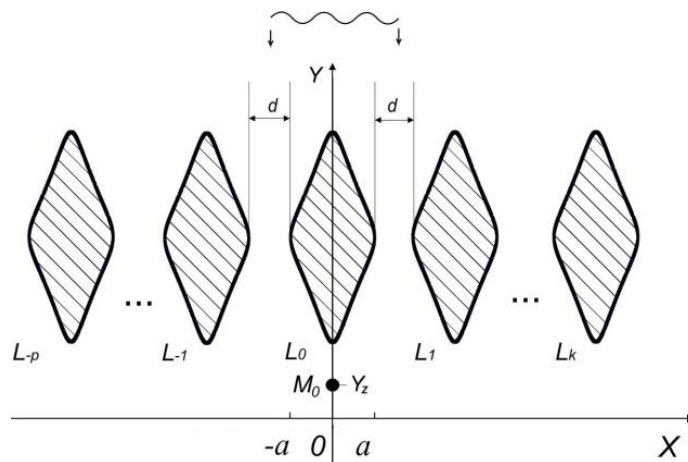


Рис. 3.2 Схема системы включений ромбической формы

Отметим, что первое из уравнений (3.10) является СИУ 1-го рода, второе – интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода. Будем предполагать, что плотности $p_1(\beta)$ и $p_2(\beta)$ – комплекснозначные непрерывные 2π -периодические функции.

После использования метода основанного на приближении плотностей интегральных уравнений тригонометрическими многочленами и в последующем точном вычислении интегралов, описанного в разделе 2.3, мы приходим к системе $2N$ линейных алгебраических уравнений, соответствующих системе интегральных уравнений (3.12), имеем ($l=1,2$)

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N (p_1(\beta_k) D_1(\beta_k, \beta_0^m) - p_2(\beta_k) D_2(\beta_k, \beta_0^m)) &= F_l(\beta_0^m), \\ \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N (p_1(\beta_k) C_1(\beta_k, \beta_0^m) - p_2(\beta_k) C_2(\beta_k, \beta_0^m)) &= T_l(\beta_0^m), \\ C_1(\beta_k, \beta_0^m) &= R_1(\beta_k, \beta_0^m) + \frac{\mu_1}{4\pi} \frac{(-1)^{m+k}}{f\left(\frac{\beta_0^m - \beta_k}{2}\right)}, \\ C_2(\beta_k, \beta_0^m) &= R_2(\beta_k, \beta_0^m) + \frac{\mu_2}{4\pi} \frac{(-1)^{m+k}}{f\left(\frac{\beta_0^m - \beta_k}{2}\right)}, \\ \beta_k &= \frac{2\pi k}{N}, \quad \beta_0^m = \frac{2m-1}{2N} \pi, \quad k, m = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.14)$$

Дополнительному условию (3.13) соответствует линейное алгебраическое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N (p_1(\beta_k) L_1(\beta_k) - p_2(\beta_k) L_2(\beta_k)) &= F_0, \\ L_j(\beta_k) &= -\ln 2 + \frac{2\pi}{N} \sum_{m=1}^N W_j(\beta_k, \beta_0^m), \quad j=1,2 \\ F_0 &= -\frac{2\pi}{N} \sum_{m=1}^N U_0(\beta_0^m). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Таким образом, при каждом виде внешнего воздействия ($l=1,2$) интегральным уравнением (3.12) и условию (3.13) соответствует система $2N+1$ алгебраических уравнений с $2N$ неизвестными. Можно показать, что эта система уравнений несовместна [88], т.е. в результате интерполирования нарушаются условия разрешимости. Ранг системы уравнений (3.14) равен $2N$, добавление к ней уравнения (3.15) увеличивает ранг на 1.

Как указывалось выше, существует 2 подхода – подход Мультипола [164] и МДО [66]. Следовательно, если отбросить одно из $2N$ уравнений системы (3.14), то возникающая новая система $2N$ уравнений с $2N$ неизвестными становится разрешимой, причем она имеет единственное решение. Либо, если в соответствии с теоремой Лифанова добавить к системе неизвестную константу, то внесение нового линейного уравнения, соответствующего дополнительному условию, сделает СЛАУ совместной. В §3.7 приведена табл. 3.6 с результатами соответствующего вычислительного эксперимента.

3.4. Сведение задачи дифракции на системе цилиндрических подвижных и неподвижных жестких включений к СИУ.

Для случая опуская все промежуточные выкладки имеем СИУ:

$$\int_L f(s)B(s, s_0)ds = N_m(s_0), \quad (3.16)$$

$$B(s, s_0) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\phi_0}}{\zeta - \zeta_0} \right) + \frac{\gamma_1}{4i} H_1(\gamma_1 r) \cos(\varphi_0 - \alpha_0), \quad \zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0},$$

$$N_1(s_0) = i\gamma_1 U_0(s_0) \cos(\varphi_0 - \psi), \quad N_2(s_0) = i\gamma_2 U_{10}(s_0) \cos(\varphi_0 - \alpha_{10}),$$

$$U_{10}(s_0) = -\frac{q}{4\mu_1 i} H_1^{(1)}(\gamma_1 r_{10}), \quad \zeta_0 - z_0 = r_{10} e^{i\alpha_0}, \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

Здесь функции $N_1(s_0)$ и $N_2(s_0)$, отвечают случаю (2.3) и (2.4) соответственно. В ядрах $B(s, s_0)$ первые слагаемые сингулярны. Таким образом, интегральное

уравнение в (3.16) является сингулярным интегральным уравнением 1-го рода.

Вопросы существования и единственности решения системы уравнений, аналогичных (3.16), исследовались многими авторами [33, 77, 94]. При этом установлено, что единственное решение необходимо искать в классе непрерывных (вместе со своими производными) по Гельдеру функций. Установлено также, что для выделения единственного решения сингулярного интегрального уравнения типа (3.16) необходимо присовокупить дополнительное условие (3.6).

Таким образом, интегральные уравнения, описывающие дифракцию SH-волн на системе цилиндрических жестких включений, построены. Запишем эти уравнения в виде, удобном для численной реализации. С этой целью введем параметризацию контуров L . Используя поведение функций $H_0^{(1)}(\gamma r)$ в нуле (формула (2.13) соответственно), получаем ($k=1,2$)

$$H_0^{(1)}(\gamma r_0) = \frac{2i}{\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0}{2} \right| + \left[H_0^{(1)}(\gamma r_0) - \frac{2i}{\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0}{2} \right| \right],$$

$$\frac{\gamma_k}{4i} H_1^{(1)}(\gamma_k r) s'(\beta_0) \cos(\varphi_0 - \alpha_0) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{ctg} \frac{\beta - \beta_0}{2} + V_k(\beta, \beta_0),$$

$$V_k(\beta, \beta_0) = \frac{\gamma_k}{4i} H_1^{(1)}(\gamma_k r) s'(\beta_0) \cos(\varphi_0 - \alpha_0) - \frac{1}{4\pi} \operatorname{ctg} \frac{\beta - \beta_0}{2},$$

$$s'(\beta_0) = \frac{ds_0}{d\beta_0}.$$

Параметризованная форма интегральных уравнений (3.16) приобретает вид ($m=1,2$)

$$\int_0^{2\pi} [p(\beta)(\alpha(\beta, \beta_0) + V_2(\beta, \beta_0))] d\beta = s'(\beta_0) N_m(\beta_0)$$

$$m, k = 1, 2, \quad p(\beta) = f(\beta) s'(\beta), \quad \alpha(\beta, \beta_0) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{ctg} \frac{\beta - \beta_0}{2}.$$

Отметим, что одно из линейных алгебраических уравнений, соответствующих СИУ, необходимо заменить уравнением, соответствующим дополнительному условию (3.6).

Численная реализации построенного алгоритма аналогична §3.4.

3.5. Периодическая задача для упругих и жестких включений.

Постановка задачи. Рассмотрим бесконечное тело, ось антиплоской деформации которого направлена вдоль оси OZ , с $2d$ -периодической системой цилиндрических жестких или упругих включений, причем в основной полосе периодов имеется только один цилиндр. Пусть D_2 – поперечное сечение такого цилиндра, ограниченное контуром L (L - кривая Ляпунова). Внешнюю область обозначим через D_1 . Предположим, что из бесконечности на данную структуру падает монохроматическая волна

$$U_0 = \tau e^{-i\gamma_1 y}, \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad \tau = const,$$

где c_1 - скорость распространения волны сдвига в области D_1 .

В результате взаимодействия приходящей волны U_0 с решеткой возникает дифрагированное волновое поле. Пусть U_1 и U_2 – амплитуды смещений отраженного и проникающего (в случае упругого включения) полей соответственно. Тогда общее поле U равно $U_0 + U_1$ в матрице и U_2 внутри включения. Функции U_1 и U_2 удовлетворяют уравнениям Гельмгольца (2.5) и граничным условиям на контуре L (3.4), (3.3) в случае жесткого или упругого включения соответственно. Кроме того, функция U_1 должна удовлетворять условиям излучения на бесконечности, т.е. представлять собой расходящуюся волну или суперпозицию расходящихся волн.

Сведение задачи к СИУ. Представим функцию U_1 и U_2 , характеризующую дифрагированное поле смещений в областях D_1 и D_2 в виде (3.4)

$$U_m(x, y) = \int_L f_m(s) G_m(x, y, \xi, \eta) ds, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L, \quad m = 1, 2,$$

$$G_m = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\pi(z - z_0)}{2d} \right| + \frac{\ln 2}{2\pi} + \frac{1}{2d} \sum_{l=0}^{\infty} f_l(y - y_0) \cos \alpha_l(x - x_0), \quad (3.17)$$

$$f_0(t) = -\frac{|t|}{2} + \frac{e^{i\gamma_m|t|}}{2i\gamma_1}, \quad f_l(t) = -\frac{e^{i\lambda_l|t|}}{i\lambda_l} + \frac{e^{-\alpha_l|t|}}{\alpha_l}, \quad l \neq 0.$$

Интегральные представления (3.17) автоматически удовлетворяют соответствующим уравнениям Гельмгольца (2.5), обеспечивают периодичность волновых полей и выполнение условий излучения на бесконечности.

Непосредственное использование первого из граничных условий (3.4) на контуре упругого включения приводит, очевидно, к интегральному уравнению с логарифмическим ядром. С целью получения СИУ будем использовать модифицированное граничное условие, вытекающее из исходного дифференцированием по дуговой координате s_0 (3.8). Осуществляя теперь предельный переход в (3.8) при $z \rightarrow \zeta_0 \in L$, приходим к искомой СИУ относительно неизвестных функций $f_1(s)$ и $f_2(s)$:

$$\int_L f_1(s) B_1(s, s_0) - f_2(s) B_2(s, s_0) ds = N(s_0), \quad (3.18)$$

$$\frac{\mu_1}{2} f_1(s_0) + \frac{\mu_2}{2} f_2(s_0) + \int_L f_1(s) E_1(s, s_0) - f_2(s) E_2(s, s_0) ds = K(s_0),$$

$$B_k(s, s_0) = \operatorname{Re}(u) + a_k(s, s_0) \cos \varphi_0 + b_k(s, s_0) \sin \varphi_0,$$

$$E_k(s, s_0) = \mu_k (\operatorname{Im}(u) + a_k(s, s_0) \sin(\varphi_0 - \alpha_0) - b_k(s, s_0) \cos \varphi_0),$$

$$a_k(s, s_0) = \frac{1}{2d} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_l}{t_l^{(k)}} e^{-t_l^{(k)}|\eta_0 - \eta|} - e^{-\alpha_l|\eta_0 - \eta|} \right) \sin \alpha_l(\xi_0 - \xi),$$

$$b_k(s, s_0) = \frac{\operatorname{sign}(\eta_0 - \eta)}{2d} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{l0}} \left(e^{-t_l^{(k)}|\eta_0 - \eta|} - e^{-\alpha_l|\eta_0 - \eta|} \right) \cos \alpha_l(\xi_0 - \xi),$$

$$N(s_0) = i\gamma_1 e^{-i\gamma_1 \eta_0} \sin \varphi_0, \quad K(s_0) = -\mu_1 N(s_0)$$

Для выделения единственного решения систему СИУ присовокупим к

ней дополнительное условие, аналогичное (3.4). Параметризованная форма интегральных уравнений (3.18) приобретает вид

$$\int_0^{2\pi} (p_1(\beta)D_1(\beta, \beta_0) - p_2(\beta)D_2(\beta, \beta_0))d\beta = F(\beta_0), \quad (3.19)$$

$$\frac{\mu_1}{2} p_1(\beta_0) + \frac{\mu_2}{2} p_2(\beta_0) + \int_0^{2\pi} (p_1(\beta)R_1(\beta, \beta_0) - p_2(\beta)R_2(\beta, \beta_0))d\beta = T(\beta_0),$$

$$D_k(\beta, \beta_0) = B_k(\beta, \beta_0)s'(\beta_0), \quad R_k(\beta, \beta_0) = E_k(\beta, \beta_0)s'(\beta_0),$$

$$p_k(\beta) = f_k(\beta)s'(\beta), \quad F(\beta_0) = N(\beta_0)s'(\beta_0), \quad T(\beta_0) = K(\beta_0)s'(\beta_0), \quad k = 1, 2.$$

Замыкающее алгоритм дополнительное условие, записанное в виде (3.4), в данном случае приобретает вид (3.15)

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N (p_1(\beta_k)L_1(\beta_k) - p_2(\beta_k)L_2(\beta_k)) = F_0, \quad (3.20)$$

$$L_j(\beta_k) = -\ln 2 + \frac{2\pi}{N} \sum_{m=1}^N W_j(\beta_k, \beta_0^m), \quad j = 1, 2$$

$$F_0 = -\frac{2\pi}{N} \sum_{m=1}^N U_0(\beta_0^m).$$

СЛАУ, соответствующая интегральным уравнениям (3.19) такова (3.14)

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N (p_1(\beta_k)D_1(\beta_k, \beta_0^m) - p_2(\beta_k)D_2(\beta_k, \beta_0^m)) = F(\beta_0^m), \quad (3.21)$$

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N (p_1(\beta_k)C_1(\beta_k, \beta_0^m) - p_2(\beta_k)C_2(\beta_k, \beta_0^m)) = T(\beta_0^m),$$

$$C_j(\beta_k, \beta_0^m) = R_j(\beta_k, \beta_0^m) + \frac{\mu_j}{4\pi} \frac{(-1)^{m+k}}{f\left(\frac{\beta_0^m - \beta_k}{2}\right)},$$

$$\beta_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad \beta_0^m = \frac{2m-1}{2N} \pi, \quad k, m = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2.$$

Система уравнений (3.21) совместно с дискретным аналогом

дополнительного условия (3.20), который имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N (p_1(\beta_k)L_1(\beta_k) - p_2(\beta_k)L_2(\beta_k)) &= F_0, \\ L_j(\beta_k) &= -\ln 2 + \frac{2\pi}{N} \sum_{m=1}^N \left(G_j(\beta_k, \beta_0^m) - \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta_k - \beta_0^m}{2} \right| \right), \\ F_0 &= -\frac{2\pi}{N} \sum_{m=1}^N U_0(\beta_0^m), \quad j=1,2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

является несовместной, поэтому одно из уравнений системы (3.21) заменялось уравнением (3.22). Полученная таким образом система $2N$ уравнений с $2N$ неизвестными имеет единственное решение.

В случае дифракции волн сдвига на периодической системе подвижных жестких включений имеем искомое СИУ относительно неизвестной функции $f(s)$:

$$\begin{aligned} \int_L f(s)B(s, s_0)ds &= N(s_0), \\ B(s, s_0) &= \operatorname{Re}(u) + a(s, s_0) \cos \varphi_0 + b(s, s_0) \sin \varphi_0, \\ a(s, s_0) &= \frac{1}{2d} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_l}{t_l^{(k)}} e^{-t_l^{(1)}|\eta_0 - \eta|} - e^{-a_l|\eta_0 - \eta|} \right) \sin \alpha_l (\xi_0 - \xi), \\ b(s, s_0) &= \frac{\operatorname{sign}(\eta_0 - \eta)}{2d} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{l0}} \left(e^{-t_l^{(1)}|\eta_0 - \eta|} - e^{-a_l|\eta_0 - \eta|} \right) \cos \alpha_l (\xi_0 - \xi), \\ N(s_0) &= i\gamma_1 e^{-i\gamma_1 \eta_0} \sin \varphi_0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Для выделения единственного решения СИУ присовокупим к нему дополнительное условие, аналогичное (3.3). Параметризованная форма интегральных уравнений (3.23) приобретает вид

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} p(\beta)D(\beta, \beta_0)d\beta &= F(\beta_0), \\ D_k(\beta, \beta_0) &= B_k(\beta, \beta_0)s'(\beta_0), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$p_k(\beta) = f_k(\beta)s'(\beta), \quad F(\beta_0) = N(\beta_0)s'(\beta_0), \quad k = 1, 2.$$

Замыкающее алгоритм дополнительное условие, записанное в виде (3.3), в данном случае приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N p(\beta_k) \left(\sum_{m=1}^N C(\beta_k, \beta_0^m) + \frac{\rho_2 S \omega^2}{2\pi} L_1(\beta_k) \right) &= \sum_{m=1}^N T_l(\beta_0^m) + F_0, \\ L_1(\beta_k) &= -\ln 2 + \frac{2\pi}{N} \sum_{m=1}^N W_1(\beta_k, \beta_0^m), \\ F_0 &= -\frac{2\pi}{N} \sum_{m=1}^N U_0(\beta_0^m). \end{aligned} \quad (3.25)$$

СЛАУ, соответствующая интегральным уравнениям (3.24) такова

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N p(\beta_k) D(\beta_k, \beta_0^m) &= F_l(\beta_0^m), \quad m = 1, 2, \dots, N \\ \beta_k &= \frac{2\pi k}{N}, \quad \beta_0^m = \frac{2m-1}{2N} \pi, \quad k, m = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Здесь функция f есть \sin или tg в зависимости от нечетности или четности N .

Система уравнений (3.26) совместно с дискретным аналогом дополнительного условия (3.25), который имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N p(\beta_k) \left(\sum_{m=1}^N C(\beta_k, \beta_0^m) + \frac{\rho_2 S \omega^2}{2\pi} L_1(\beta_k) \right) &= \sum_{m=1}^N T_l(\beta_0^m) + F_0, \\ L_1(\beta_k) &= -\ln 2 + \frac{2\pi}{N} \sum_{m=1}^N \left(G_1(\beta_k, \beta_0^m) - \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta_k - \beta_0^m}{2} \right| \right), \\ F_0 &= -\frac{2\pi}{N} \sum_{m=1}^N U_0(\beta_0^m). \end{aligned} \quad (3.27)$$

является несовместной, поэтому одно из уравнений системы (3.26) заменялось уравнением (3.27). Полученная таким образом система N уравнений с N неизвестными имеет единственное решение.

3.7. Верификация полученных результатов.

Проверка выполнения краевых условий. Для системы неподвижных жестких включений из краевого условия следует то, что касательные напряжения равные нулю. В Табл. 3.1 приведены значения машинных нулей касательных напряжений в данном алгоритме для некоторых характерных точек контура – лобовой, теневой и точке проскальзывания. Значения волновых чисел показаны в таблице. Тут $b/a=0.5$, $d=2.0$, $\mu_1/\mu_2=2.0$, $\rho_1/\rho_2=2.0$

Таблица 3.1

Машинные нули краевых условий

| Источник | Волновое число | Расположение отключения | Угол β в радианах | Максимум σ_s |
|----------|----------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|
| Волна | 1,7 | Центральное | 0 | $5,675 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 1,7 | Центральное | 3,1415469319 | $1,535 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 1,7 | Центральное | 2π | $0,347 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 1,7 | Крайнее справа | 0 | $2,765 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 1,7 | Крайнее справа | 3,1415469319 | $5,557 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 1,7 | Крайнее справа | 2π | $3,819 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 2,5 | Центральное | 0 | $8,218 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 2,5 | Центральное | 3,1415469319 | $2,525 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 2,5 | Центральное | 2π | $3,527 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 2,5 | Крайнее справа | 0 | $7,288 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 2,5 | Крайнее справа | 3,1415469319 | $3,115 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 2,5 | Крайнее справа | 2π | $4,992 \cdot 10^{-15}$ |

В таблицах 3.2 и 3.3 представлены значения нормальных контурных напряжений для центрального неподвижного жесткого включения в системе, состоящей из 3 неоднородностей, отвечающие значениям параметра $\gamma_2 a = \{1.7, 2.5\}$. Тут $b/a=0.5$, $d=2.0$. Равенство симметричных относительно оси OY значений безразмерный нормальных контурных напряжений показывает соответствие результата геометрии нагружения, а также дает возможность определить верхнюю границу точности алгоритма в данной операционной

среде (без применение дополнительных вычислительных средств безошибочной арифметики [35, 91-93]) – до 10^{-12} .

Таблица 3.2

Равенство симметричных значений σ_n , $\gamma_2 a = 1.7$

| Угол β в радианах | Значение σ_n | Угол β в радианах | Значение σ_n |
|-------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|
| 0 | 1.495089351930878 | | |
| 0.153248 | 1.507899794521438 | 6.129936 | 1.507899794521483 |
| 0.306496 | 1.542963954572747 | 5.976688 | 1.542963954572728 |
| 0.459745 | 1.589971124573242 | 5.823440 | 1.589971124573224 |
| 0.612993 | 1.631307510790158 | 5.670191 | 1.631307510790150 |
| 0.766242 | 1.641875313436911 | 5.516943 | 1.641875313436901 |
| 0.919490 | 1.589217759997341 | 5.363694 | 1.589217759997281 |
| 1.072738 | 1.436115204725739 | 5.210446 | 1.436115204725716 |
| 1.225987 | 1.159888242349617 | 5.057197 | 1.159888242349569 |
| 1.379235 | 0.857463691986715 | 4.903949 | 0.857463691986687 |
| 1.532484 | 0.965227105921449 | 4.750701 | 0.965227105921484 |
| 1.685732 | 1.509041754230085 | 4.597452 | 1.509041754230147 |
| 1.838981 | 2.028295770175866 | 4.444204 | 2.028295770175908 |
| 1.992229 | 2.359024436911917 | 4.290955 | 2.359024436911933 |
| 2.145477 | 2.518778339209526 | 4.137707 | 2.518778339209567 |
| 2.298726 | 2.570613057584510 | 3.984458 | 2.570613057584548 |
| 2.451974 | 2.571832452195458 | 3.831210 | 2.571832452195466 |
| 2.605223 | 2.561317967906427 | 3.677962 | 2.561317967906404 |
| 2.758471 | 2.557630147926201 | 3.524713 | 2.557630147926223 |
| 2.911720 | 2.562321091992180 | 3.371465 | 2.562321091992165 |
| 3.064968 | 2.568041684657675 | 3.218216 | 2.568041684657687 |

Таблица 3.3

Равенство симметричных значений σ_n , $\gamma_2 a = 2.5$

| Угол β в радианах | Значение σ_n | Угол β в радианах | Значение σ_n |
|-------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|
| 0 | 1.032448614886690 | | |
| 0.153248 | 1.087543954514081 | 6.129936 | 1.087543954513462 |
| 0.306496 | 1.246424352305942 | 5.976688 | 1.246424352305972 |
| 0.459745 | 1.486329771381189 | 5.823440 | 1.486329771380860 |
| 0.612993 | 1.767613395555580 | 5.670191 | 1.767613395555263 |
| 0.766242 | 2.041608465874725 | 5.516943 | 2.041608465874268 |
| 0.919490 | 2.258959086925713 | 5.363694 | 2.258959086925319 |
| 1.072738 | 2.374755954399663 | 5.210446 | 2.374755954399088 |
| 1.225987 | 2.356018446125929 | 5.057197 | 2.356018446125458 |
| 1.379235 | 2.207906294092176 | 4.903949 | 2.207906294091961 |
| 1.532484 | 2.028016563451560 | 4.750701 | 2.028016563451429 |

| | | | |
|----------|-------------------|----------|-------------------|
| 1.685732 | 1.993650381532921 | 4.597452 | 1.993650381533334 |
| 1.838981 | 2.176991254745225 | 4.444204 | 2.176991254745503 |
| 1.992229 | 2.514161050710354 | 4.290955 | 2.514161050710815 |
| 2.145477 | 2.950239493553403 | 4.137707 | 2.950239493553841 |
| 2.298726 | 3.447253234253620 | 3.984458 | 3.447253234253845 |
| 2.451974 | 3.955183323212778 | 3.831210 | 3.955183323213032 |
| 2.605223 | 4.419138724486727 | 3.677962 | 4.419138724486585 |
| 2.758471 | 4.794960201595139 | 3.524713 | 4.794960201594992 |
| 2.911720 | 5.055494080179329 | 3.371465 | 5.055494080179320 |
| 3.064968 | 5.187929464494649 | 3.218216 | 5.187929464495133 |

В таблицах 3.4 и 3.5 представлены касательные (таб. 3.4) и нормальные (таб. 3.5) напряжения на контуре центрального упругого включения в системе, состоящей из 3 неоднородностей, отвечающие значению параметра $\gamma_2 a = \{1.7, 2.5\}$. Тут $b/a=0.5$, $d=2.0$. Равенство симметричных относительно оси значений безразмерных напряжений также показывает соответствие результата геометрии нагружения. И дает возможность определить верхнюю границу точности алгоритма в данной операционной среде (без применение дополнительных вычислительных средств безошибочной арифметики [35, 91-93]) – до 10^{-12} .

Таблица 3.4

Равенство симметричных значений σ_n , $\gamma_2 a = 1.7$

| Угол β в радианах | Значение σ_n | Угол β в радианах | Значение σ_n |
|-------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|
| 0 | 1.568623209242106 | | |
| 0.153248 | 1.548946934419758 | 6.129936 | 1.548946934419766 |
| 0.306496 | 1.489736043597869 | 5.976688 | 1.489736043597867 |
| 0.459745 | 1.389929775593783 | 5.823440 | 1.389929775593779 |
| 0.612993 | 1.246063481772201 | 5.670191 | 1.246063481772211 |
| 0.766242 | 1.049824199064250 | 5.516943 | 1.049824199064247 |
| 0.919490 | 0.785092276118236 | 5.363694 | 0.785092276118220 |
| 1.072738 | 0.426199260947000 | 5.210446 | 0.426199260947005 |
| 1.225987 | 0.058579592348426 | 5.057197 | 0.058579592348440 |
| 1.379235 | 0.673169743777464 | 4.903949 | 0.673169743777444 |
| 1.532484 | 1.357922036157937 | 4.750701 | 1.357922036157931 |
| 1.685732 | 1.966519867876015 | 4.597452 | 1.966519867876020 |
| 1.838981 | 2.381578775883776 | 4.444204 | 2.381578775883761 |
| 1.992229 | 2.601944414012205 | 4.290955 | 2.601944414012203 |
| 2.145477 | 2.693084132487928 | 4.137707 | 2.693084132487916 |
| 2.298726 | 2.719007471344106 | 3.984458 | 2.719007471344115 |

| | | | |
|----------|-------------------|----------|-------------------|
| 2.451974 | 2.721658307780222 | 3.831210 | 2.721658307780244 |
| 2.605223 | 2.722796484856191 | 3.677962 | 2.722796484856191 |
| 2.758471 | 2.729360651077515 | 3.524713 | 2.729360651077526 |
| 2.911720 | 2.739047242660547 | 3.371465 | 2.739047242660551 |
| 3.064968 | 2.746057194468270 | 3.218216 | 2.746057194468291 |

Таблица 3.5

Равенство симметричных значений σ_n , $\gamma_2 a = 2.5$

| Угол β в радианах | Значение σ_n | Угол β в радианах | Значение σ_n |
|-------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|
| 0 | 2.186938195307002 | | |
| 0.153248 | 2.193821822001373 | 6.129936 | 2.193821822001210 |
| 0.306496 | 2.212249473392757 | 5.976688 | 2.212249473392733 |
| 0.459745 | 2.234217418560951 | 5.823440 | 2.234217418560903 |
| 0.612993 | 2.243667519953498 | 5.670191 | 2.243667519953469 |
| 0.766242 | 2.215929655035747 | 5.516943 | 2.215929655035594 |
| 0.919490 | 2.118882687973986 | 5.363694 | 2.118882687973811 |
| 1.072738 | 1.914368969066846 | 5.210446 | 1.914368969066743 |
| 1.225987 | 1.564105877328305 | 5.057197 | 1.564105877328029 |
| 1.379235 | 1.069127917560274 | 4.903949 | 1.069127917560221 |
| 1.532484 | 0.687802886062350 | 4.750701 | 0.687802886062252 |
| 1.685732 | 1.044069115976869 | 4.597452 | 1.044069115976887 |
| 1.838981 | 1.685348851350011 | 4.444204 | 1.685348851350184 |
| 1.992229 | 2.253848848900268 | 4.290955 | 2.253848848900397 |
| 2.145477 | 2.712493889210455 | 4.137707 | 2.712493889210511 |
| 2.298726 | 3.075615163578476 | 3.984458 | 3.075615163578683 |
| 2.451974 | 3.353808521180437 | 3.831210 | 3.353808521180611 |
| 2.605223 | 3.553657015098167 | 3.677962 | 3.553657015098131 |
| 2.758471 | 3.684567856652816 | 3.524713 | 3.684567856652708 |
| 2.911720 | 3.760011739738030 | 3.371465 | 3.760011739737966 |
| 3.064968 | 3.793534729620312 | 3.218216 | 3.793534729620603 |

Очевидно, что вычислительная точность модели колеблется между 10^{-15} и 10^{-13} , что дает уверенность в результатах до 10^{-10} .

Сравнение с результатами для одиночного включения. Проводилось сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [130] для случая одиночного эллиптического упругого включения (Приложение 2), также полученного удалением элементов системы на значительное расстояние друг от друга – до 10^6 . Сравнение с результатами [130] показали хорошую достоверность используемых вычислительных алгоритмов.

Как и в работе [130], кривые 1, 2 и 3 на рис. 3.3, для параметров $b/a=0.6/1.4$, $\mu_1/\mu_2=20$, $\rho_1/\rho_2=2.0$, отвечают значениям параметра $\gamma_2 a$, равным 1.5,

0.9 и 0.1 соответственно. Расчеты показывают, что вблизи точки соскальзывания ($\beta=90^\circ$) напряжение σ_n имеет локальный минимум, а σ_s имеет локальный максимум. Если в теневой ($\beta=0$) и лобовой ($\beta=\pi$) точках $\sigma_s=0$, то в зоне соскальзывания с увеличением $\gamma_2 a$ число локальных максимумов σ_s также увеличивается.

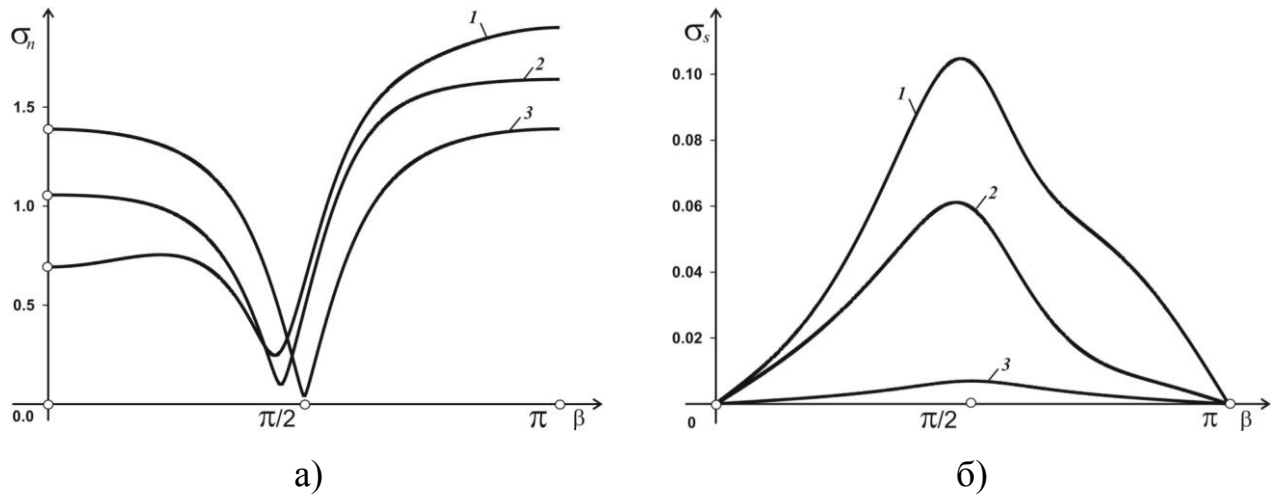


Рис. 3.3 Напряжения σ_n и σ_s для центральной неоднородности

Сравнение с результатами для периодической системы упругих включений. На рис. 3.4 показано распределение напряжений σ_s (рис. 3.4а) и σ_n (рис. 3.4б) на контуре эллиптических упругих включений, находящийся на оси симметрии системы, состоящей из 13 неоднородностей. Кривые 1, 2, 3 и 4 приведены для $d/a=4$, $\mu_1/\mu_2=2$, $\rho_1/\rho_2=2$, $b/a=0.5$ и соответствуют значениям параметра $\gamma_2 a$, равным 0.2, 0.4, 0.7 и 1.0 соответственно, где d (расстояние между неоднородностями) соответствует периоду решетки в [95]. Как и следовало ожидать, характер изменения кривых аналогичен соответствующим изменениям кривых в случае одиночного упругого включения, максимальные значения напряжений достигаются в точке соскальзывания ($\beta=90^\circ$), в теневой ($\beta=0^\circ$) и лобовой ($\beta=180^\circ$) точках они обращаются в нуль для σ_s . И для σ_n наоборот - максимальные значения напряжений достигаются в теневой ($\beta=0^\circ$) и лобовой ($\beta=180^\circ$) точках, а минимальное значение напряжений вблизи точки соскальзывания ($\beta=90^\circ$).

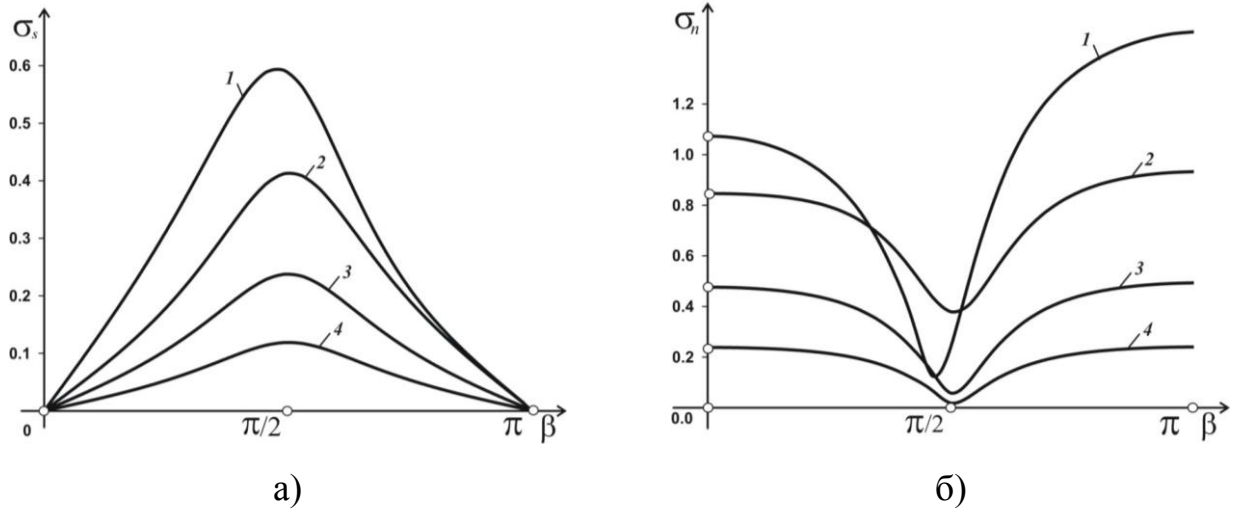


Рис. 3.4 Напряжения σ_s и σ_n для центральной неоднородности, 13 включений

В табл. 3.6 приведены значения неизвестной константы при добавлении дополнительного условия для упругого включения в СЛАУ по МДО в соответствии с теоремой Лифанова [66]. Видно, что уже при $N=15$ практического влияния на вычислительный процесс константа Лифанова не оказывает.

Таблица 3.6

Стремление к нулю константы Лифанова

| | | | | | | | |
|----------|------|-------|---------|---------------------|-----------|----------------------|----------------------|
| N | 3 | 7 | 11 | 15 | 25 | 35 | 55 |
| C_{0n} | 2.61 | 0.035 | 0.00087 | $3.3 \cdot 10^{-5}$ | 10^{-8} | $2.8 \cdot 10^{-12}$ | $3.9 \cdot 10^{-14}$ |

Это говорит о том, что для данного алгоритма схема Мультипола является наиболее предпочтительной с точки зрения затрат на написания исходного кода программного приложения, работающего на кластере в параллельном режиме. Временные затраты на сопровождение каждой дополнительной переменной СЛАУ существенно увеличивают вероятность появления дополнительных ошибок в программных приложениях.

Моделирование приведения системы полостей или жестких включений поведением упругих включений (тест алгоритма и программного приложения на

«физичность»). Как показали теоретические разделы работы, СИУ для отверстий или неподвижных жестких включений принципиально разные – задачи существенно отличаются. А значит отличаются краевые условия и все соответствующие составляющие СИУ. Как видно, система СИУ, моделирующая поведение локальных систем упругих включений, не имеет явного предельного перехода при стремлении соответствующих параметров к своим предельным значениям. Т.е., когда отношения жесткости и плотности упругих включений и соответствующих параметров матрицы стремятся к нулю в случае отверстия или большому значению в случае неподвижной жесткой шайбы. Данный переход не очевиден. И его исследование является отдельной нетривиальной математической задачей.

Однако, исходя из основных соотношений механики сплошных сред отверстие и жесткое неподвижное включение является предельным состоянием упругого включения при стремлении соответствующих параметров к значениям, указанным выше. Таким образом, значения контурных напряжений на упругих включениях являются неким приближением для соответствующих значений для отверстий и неподвижных жестких включений. Значит, численное решение соответствующих задач в произвольной точке коллокации контуров должно показывать равенство этих значений с некоторой точностью. Для такого исследования точность до 10^{-5} будет вполне удовлетворительной.

Поскольку теоретически доказано [77, 88, 94], что решения описанных в работе систем СИУ единственны и устойчивы, в сочетании с иными описанными выше тестами такой результат будет говорить о том, что алгоритм полностью верифицирован.

В Приложении 3 приведена коллекция соответствующих таблиц. Для всех вариантов тестов там параметры неоднородностей такие: $b/a=0.5$, $\gamma a = 1$, $d=4$, $\nu = 0,3$, $\rho_0/\rho = \{10^{-5}, 10^5\}$, $\mu_0/\mu = \{10^{-5}, 10^5\}$. Последние параметры – это соотношение плотности и жесткости включений к плотности и жесткости матрицы, которое для моделирования отверстий мало (в смысле среднего значения диапазона точности данного исследования – 10^{-5}), а для модели

неподвижных жестких включений велико (10^5). В данном исследовании число точек коллокации $N=201$ обеспечило точность всех таблиц до 10^{-5} , что достаточно для такой проверки.

3.8. Вычисление контурных напряжений локальной системы упругих и жестких включений.

Приведенный алгоритм позволяет провести численное исследование динамической напряженности матрицы и включения. Если вычислены узловые значения плотностей $p_1(\beta)$ и $p_2(\beta)$, то поле смещений, как это вытекает из (3.9), может быть определено по формулам

$$U(x, y) = \frac{2p}{N} \frac{1}{4i} \sum_{k=1}^N p_1(\beta_k) H_0^{(1)}(\gamma_1 r_k) + U_0(x, y), \quad (x, y) \in D_1$$

$$U(x, y) = \frac{2p}{N} \frac{1}{4i} \sum_{k=1}^N p_2(\beta_k) H_0^{(1)}(\gamma_2 r_k) + U_0(x, y), \quad (x, y) \in D_2$$

$$r_k = |z - \zeta(\beta_k)|$$

Аналогично можно записать формулы, характеризующие поле напряжений в произвольной точке матрицы или включения. В настоящей работе вычисляются контурные напряжения на границе упругих включений (3.1). Из постановки задачи дифракции волны сдвига на упругих включениях (3.8) вытекает, что напряжение τ_n непрерывно при переходе через L , а напряжение τ_s претерпевает скачок, причем, если известно напряжение $\tau_s^{(1)}$, то $\tau_s^{(2)}$ определяется формулой

$$\tau_s^{(2)} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \tau_s^{(1)}$$

В дальнейшем будем вычислять контурные напряжения со стороны матрицы, т.е. $\tau_n^{(1)}$ и $\tau_s^{(1)}$. Поскольку эти напряжения непосредственно

задействованы в граничных условиях (3.8), из которых получены интегральные уравнения (3.12), то численные значения этих напряжений в узловых точках β_0^m ($m=1,2,\dots,N$) могут быть получены из дискретного аналога (3.14) интегральных уравнений (3.12) по формулам

$$\begin{aligned}\tau_n^{(1)}(\beta_0^m)s'(\beta_0^m) &= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N p_1(\beta_k)C_1(\beta_k, \beta_0^m) - T_l(\beta_0^m) \\ \tau_s^{(1)}(\beta_0^m)s'(\beta_0^m) &= \mu_1 \left[\frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N p_1(\beta_k)D_1(\beta_k, \beta_0^m) - F_l(\beta_0^m) \right]\end{aligned}$$

С целью исследования сходимости построенного алгоритма при наличии упругого включения в бесконечной матрице рассмотрим случаи нормального падения ($\psi = \frac{\pi}{0}$) волны сдвига (2.3) и действия гармонического источника (2.4) на цилиндрическое упругое включение ромбовидного со скруглениями или эллиптического сечения:

$$\xi(\beta) = a(\sin \beta - \nu \sin 3\beta), \quad \eta(\beta) = -b(\cos \beta + \nu \cos 3\beta), \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi,$$

При соответствующем выборе точки (x_0, y_0) приложения сосредоточенного источника (2.4) рассматриваемые дифракционные задачи обладают симметрией относительно координатных осей, что позволяет уменьшить число решаемых алгебраических уравнений. Здесь целесообразно разбиение контуров L на нечетное число точек так, чтобы одна из точек, в которых удовлетворяются уравнения системы, попадала на ось симметрии. Тогда алгебраическое уравнение (3.14), соответствующее этой точке, удобно заменить на дополнительное условие (3.15), что увеличивает эффективность численной схемы.

На рис. 3.5 и 3.6 показана зависимость безразмерных нормальных контурных напряжений для системы из трех упругих эллиптических включений, где соотношение коэффициентов жесткости равно $\mu_1 / \mu_2 = 5.0$, плотность $\rho_1 / \rho_2 = 2.0$ и $b/a = 2.5$. Тут на рис. 3.5, а – крайнее включение, б –

центральное включение, показан случай для волны из бесконечности, где для кривой 1 $\gamma_2 a = 0.9$, а для кривой 2 – $\gamma_2 a = 1.5$. На рис. 3.6, а – крайнее включение, б – центральное включение, показан случай точечного источника, де так же для кривой 1 $\gamma_2 a = 0.9$, а для кривой 2 – $\gamma_2 a = 1.5$.

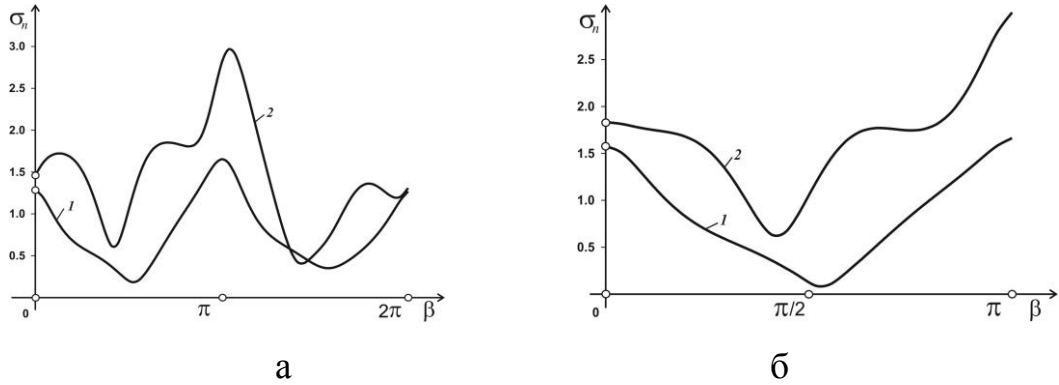


Рис. 3.5 Напряжения σ_n для системы из 3 включений, волна

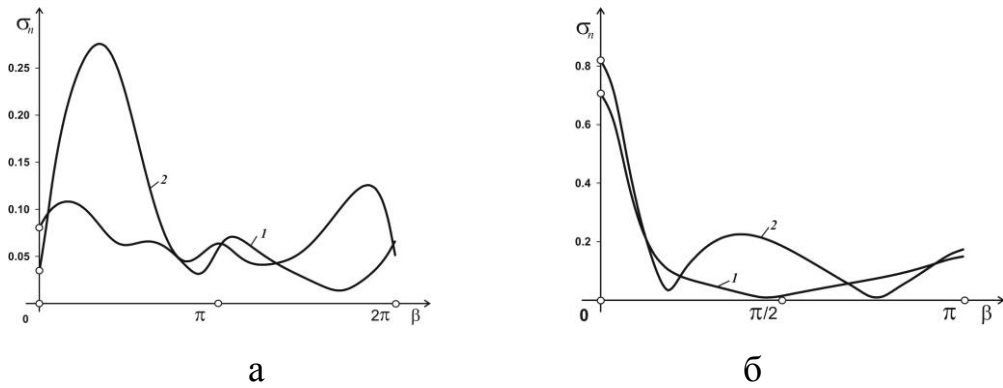


Рис. 3.6 Напряжения σ_n для системы из 3 включений, источник

На рис. 3.7 приведены распределения σ_β и σ_n вдоль контура центрального (рис. 3.7а) и крайнего справа (рис. 3.7б) упругого включения L_0 в случае решетки, состоящей из трех цилиндрических включений, на которую набегают волна из бесконечности. Значение безразмерного волнового числа $\gamma_2 a$ равно 0,9. Кривая 1 показывает распределение σ_β упругого включения. Кривая 2 - распределение σ_n . Результаты показывают, что, чем выше частота колебаний, тем больший вклад в напряженно-деформированное состояние контура волокна вносит именно нормальное напряжение. Это говорит о том, что разрушение, например, в композиционном материале может происходить вследствие отрыва

по границам раздела фаз.

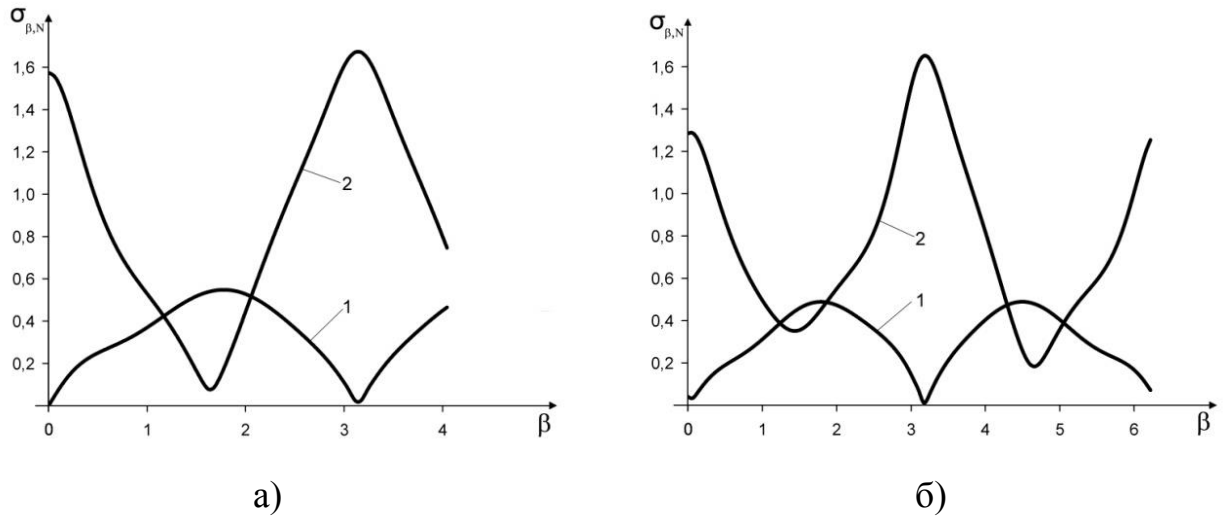


Рис. 3.7 Напряжения σ_n и σ_s для системы из 3 включений, волна

На рис. 3.8 приведено распределение максимумов касательных и нормальных напряжений относительно модуля упругости крайнего левого (рис. 3.8а) и центрального (рис. 3.8б) упругого включения ромбической формы. На систему набегают волна из бесконечности. Кривая 1 показывает максимумы касательных напряжений при значении безразмерного волнового числа $\gamma_2 a$, равного 0,9. Кривая 2 – максимумы нормальных напряжений, при $\gamma_2 a$ равном 0,9. Кривая 3 и 4 показывают максимуму касательных и нормальных напряжений, соответственно, при $\gamma_2 a$ равном 1,5.

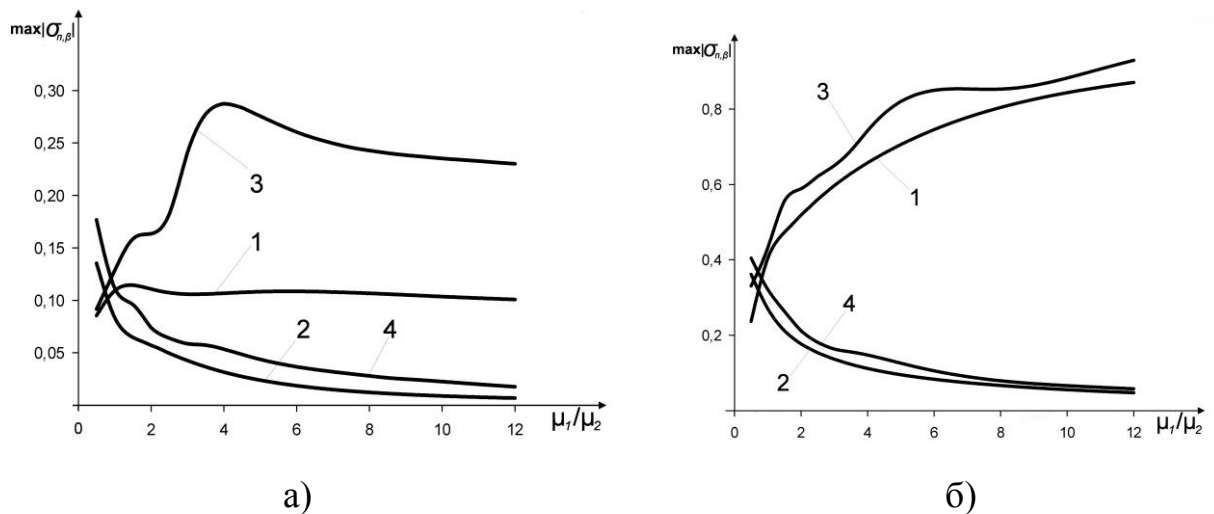


Рис. 3.8 Максимальные σ_n и σ_s , 3 включения

На рис. 3.9 приведено распределение максимумов касательных и нормальных напряжений относительно модуля упругости крайнего левого (рис. 3.9а) и центрального (рис. 3.9б) упругого включения ромбической формы. На систему набегают волна из бесконечности. Кривая 1 показывает максимумы касательных напряжений при значении безразмерного волнового числа $\gamma_2 a$, равного 0,9. Кривая 2 – максимумы нормальных напряжений, при $\gamma_2 a$ равном 0,9. Кривая 3 и 4 показывают максимуму касательных и нормальных напряжений, соответственно, при $\gamma_2 a$ равном 1,5.

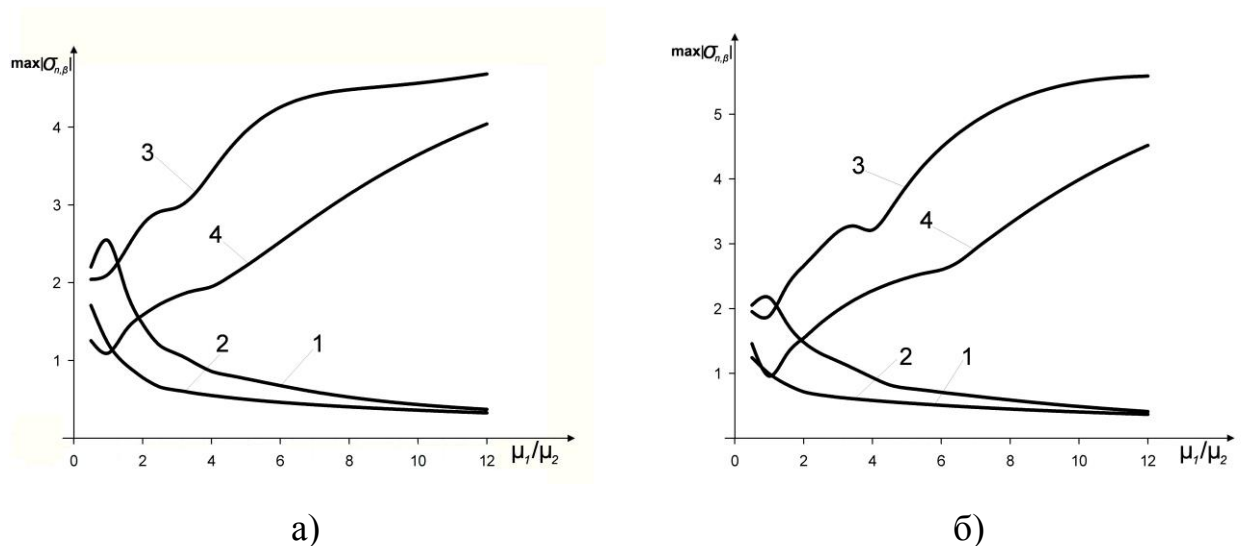


Рис. 3.9 Максимальные σ_n и σ_s , β включения

На рис. 3.10 приведены графики распределения нормальных напряжений σ_n на контуре крайнего (рис. 3.10а) и центрального (рис. 3.10б) жесткого включения эллиптической формы, при $a/b=1.0$; $b/a=2.5$. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям $\gamma_2 a = 0.7, 1.5$ и 2.0 .

В работе также исследована дифракция волн сдвига на локальных системы упругих и жестких включений с увеличенным числом отражателей (более 10). С целью экономии места большинство графиков с иными параметрами нагружения приведено в Приложениях 5 (неподвижные включения), 6 (подвижные жесткие), 7-8 (упругие включения).

Для высокоточного определения значения максимума нормального

напряжения, а также для определения соответствующего значения угла в ради-

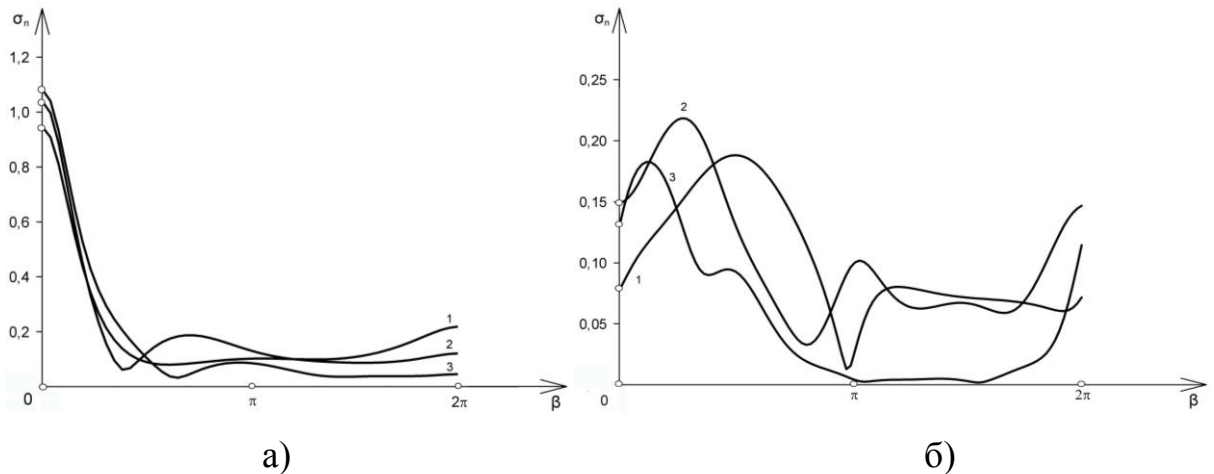


Рис. 3.10 Нормальные контурные напряжения для системы из трех жестких включений

нах, применялся алгоритм последовательных приближений сдвига точек коллокации контура, как и в Разделе 2.

Разработанная схема численного эксперимента позволила сформировать табл. 3.7 высокоточных значений максимумов нормальных напряжений и соответствующих угловых координат на контуре эллиптических или ромбовидных центральных или крайних упругих включений (в системе из 3 объектов). Тут $b/a=2.5$, $\gamma_2 a = \{0.9, 1.5\}$, а координата источника $Y_z=1.0$. Вычисления проводились при $N=1201$.

Таблица 3.7

Высокоточные значения максимумов напряжений σ_n

| Источник | Тип контура | $\gamma_2 a$ | Расположение | Угол β в радианах | Максимум σ_n |
|------------|-------------|--------------|----------------|-------------------------|---------------------|
| Волна из/б | Эллипс | 0,9 | Центральное | π | 1,6747824073 |
| Волна из/б | Эллипс | 0,9 | Крайнее справа | 3,0944752149 | 1,6533337438 |
| Волна из/б | Ромбик | 0,9 | Центральное | 0 | 2,4739599268 |
| Волна из/б | Ромбик | 0,9 | Крайнее справа | 3,1365270214 | 2,2691972991 |
| Точ. источ | Эллипс | 0,9 | Центральное | 0 | 0,7059083987 |
| Точ. источ | Эллипс | 0,9 | Крайнее справа | 0,4928451552 | 0,1082660715 |
| Точ. источ | Ромбик | 0,9 | Центральное | 0 | 2,3775352117 |
| Точ. источ | Ромбик | 0,9 | Крайнее справа | 0,0401691566 | 0,1088472244 |

| | | | | | |
|------------|--------|-----|----------------|--------------|--------------|
| Волна из/б | Эллипс | 1,5 | Центральное | π | 3,0339859672 |
| Волна из/б | Эллипс | 1,5 | Крайнее справа | 3,0626385740 | 2,9707735965 |
| Волна из/б | Ромбик | 1,5 | Центральное | π | 4,0477641562 |
| Волна из/б | Ромбик | 1,5 | Крайнее справа | 3,1306622778 | 4,0027219211 |
| Точ. источ | Эллипс | 1,5 | Центральное | 0 | 0,8201559325 |
| Точ. источ | Эллипс | 1,5 | Крайнее справа | 1,0432975319 | 0,2757879948 |
| Точ. источ | Ромбик | 1,5 | Центральное | 0 | 2,3370609705 |
| Точ. источ | Ромбик | 1,5 | Крайнее справа | 1,2515190287 | 0,2682754997 |

В таблице 3.8 приведен результат для системы из трех эллиптических или ромбических неподвижных жестких включений. Тут $b/a=2.5$, $\gamma_2 a = \{1.0, 1.7\}$, а координата источника $Y_z=1,0$. Вычисления проводились также при $N=1201$.

Таблица 3.8

Высокоточные значения максимумов напряжений σ_n

| Источник | Тип контура | $\gamma_2 a$ | Расположение | Угол β в рад | Максимум σ_n |
|------------|-------------|--------------|----------------|--------------------|---------------------|
| Точ. источ | Эллипс | 1,0 | Центральное | 0 | 0,9896526648 |
| Точ. источ | Эллипс | 1,0 | Крайнее справа | 5,9023427443 | 0,0919636539 |
| Точ. источ | Ромбик | 1,0 | Центральное | 0 | 3,6915514124 |
| Точ. источ | Ромбик | 1,0 | Крайнее справа | 4,7248588535 | 0,1443477199 |
| Волна из/б | Эллипс | 1,0 | Центральное | 3,1408547138 | 3,9214396348 |
| Волна из/б | Эллипс | 1,0 | Крайнее справа | 3,1948374366 | 3,4957127894 |
| Волна из/б | Ромбик | 1,0 | Центральное | 3,1415926837 | 8,2144288522 |
| Волна из/б | Ромбик | 1,0 | Крайнее справа | 3,1470778985 | 7,0822693448 |
| Точ. источ | Эллипс | 1,7 | Центральное | 0 | 1,0791428665 |
| Точ. источ | Эллипс | 1,7 | Крайнее справа | 5,7933235768 | 0,1869988602 |
| Точ. источ | Ромбик | 1,7 | Центральное | 0 | 3,5537963616 |
| Точ. источ | Ромбик | 1,7 | Крайнее справа | 6,2627834892 | 0,2886187426 |
| Волна из/б | Эллипс | 1,7 | Центральное | 3,1415927813 | 4,6735005767 |
| Волна из/б | Эллипс | 1,7 | Крайнее справа | 3,1948476857 | 3,4957127893 |
| Волна из/б | Ромбик | 1,7 | Центральное | 3,1415926832 | 9,8191793350 |
| Волна из/б | Ромбик | 1,7 | Крайнее справа | 3,1386176915 | 7,7442610437 |

На рис. 3.11 кривая временной зависимости загрузки узлов кластера имеет некоторые отличия от кривой рис. 2.9 (раздел 2).

На рис. 3.12 показана зависимость числа обусловленности матрицы СЛАУ от $\gamma_2 a$. В этой модели также наблюдается существенное ухудшение

обусловленности матрицы при $\gamma_2 a > 10$.

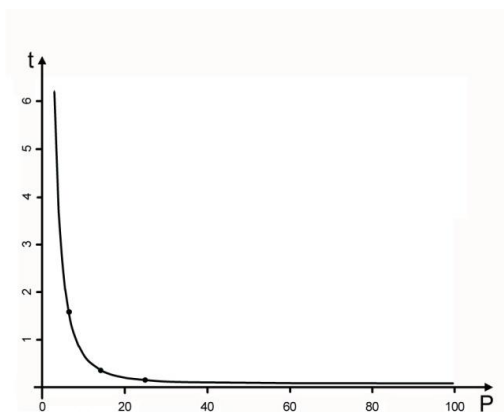
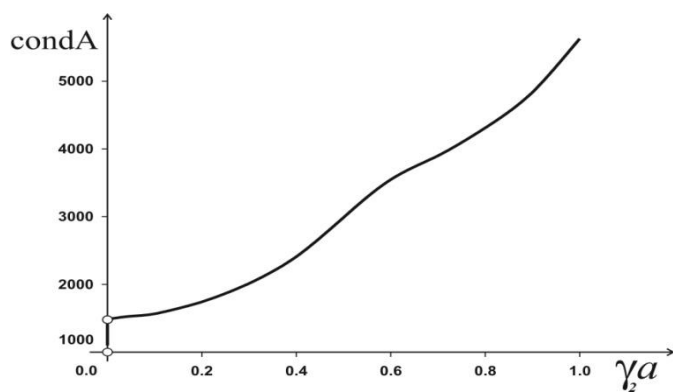
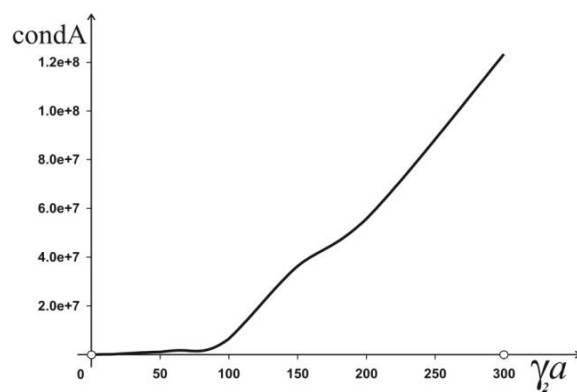


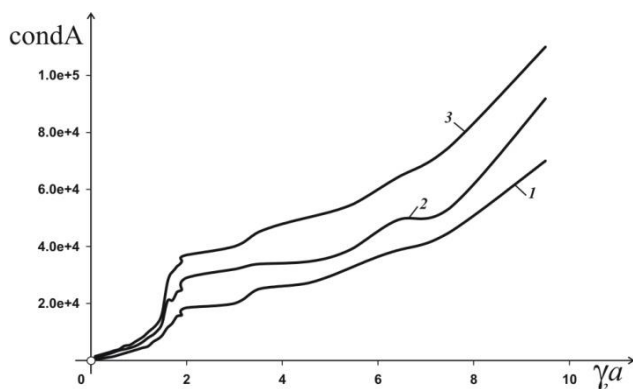
Рис. 3.11 Загрузка узлов кластера «Инпарком-256»



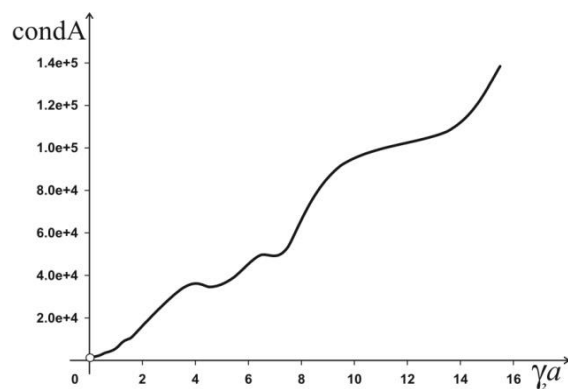
а)



б)



в)



г)

Рис. 3.12 Зависимость числа обусловленности матрицы от $\gamma_2 a$

3.9. Выводы к 3 разделу.

1. Для задачи дифракции волн сдвига на системе упругих включений

некруговой цилиндрической формы параллельные алгоритмы также позволяют значительно сократить время вычислений и более детально проанализировать характеристики волнового поля.

2. Полученная зависимость числа обусловленности от $\gamma_2 a$ для задачи дифракции волн сдвига на системе упругих включений некруговой цилиндрической формы также показала, что при $\gamma_2 a < 10$ модель хорошо обусловлена и тем самым хорошо разрешима, что дает возможность провести численные исследования с точностью до 10^{-10} .

3. Для указанного диапазона числа обусловленности проведенные тесты верификации результатов показали достоверность полученных данных, а так же хорошую сходимость и устойчивость алгоритмов.

4. При решении проблемы высокоточного определения локаций и максимальных характеристик искомым функций на контурах локальных систем упругих включений произвольного поперечного сечения (в интерпретации теорий упругости – полей перемещений и напряжений) метод СИУ также может быть построен на параллельных вычислениях при последовательных приближениях уточняющего смещения точек коллокации при дискретизации контуров.

5. При гармонических воздействиях на локальные системы упругих включений произвольного поперечного сечения с увеличенным числом отражателей также возникает эффект насыщения.

6. Характеристики полей напряжений от гармонических волн, взаимодействующих с локальными системами упругих включений, а также шкалы высокоточных значений локаций и максимальных напряжений на контурах локальных систем упругих включений эллиптического и ромбического сечения подтверждают, что алгоритм позволяет определять высокоточные значение контурных напряжений, поскольку кривые зависимостей – также гладкие.

7. Временные закономерности загрузки узлов при параллельном кластерном решении задачи, основанной на СИУ 1-го рода с дополнительным

условием, показывает, что производительность алгоритма также зависит только от объема пересылок при решении СЛАУ.

8. Использование дополнительного условия для каждого отражателя должно осуществляться пакетом для всей матрицы СЛАУ. В противном случае СЛАУ будет не совместна.

9. В случае численного исследования дифракции волн сдвига локальных систем упругих включений с помощью СИУ 1-го рода использование схемы Мультота для интеграции пакета дополнительных условий в СЛАУ (пакетной замены нескольких линейных уравнений) не приводит к избыточному накоплению погрешностей или какому-либо ухудшению вычислительного процесса по сравнению с методом МДО (теоремой Лифанова).

РАЗДЕЛ 4.

МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГИХ ВОЛН С СИСТЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ БЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ.

4.1. Основные соотношения динамической теории упругости в условиях плоской деформации

Под плоской деформацией понимают [103] напряженно-деформированное состояние цилиндрического тела, нагруженного по боковой поверхности усилиями, лежащими в плоскости поперечного сечения. В предположении, что ось цилиндра направлена вдоль оси OZ декартовой прямоугольной системы координат, перемещение вдоль этой оси u_3 равно нулю, а компоненты перемещения u_1 и u_2 , а также компоненты тензора напряжений σ_{ij} ($i, j=1, 2$) зависят только от координат x и y . Отсюда немедленно следует, что для изотропного тела $\sigma_{13}=\sigma_{23}=0$, а компоненты напряжения $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, где ν - коэффициент Пуассона среды.

В качестве основной характеристики, знание которой позволяет воссоздать полную картину напряженно-деформированного состояния, выберем вектор смещения частиц среды. В случае установившихся волновых движений упругого тела (зависимость от времени выражается множителем $e^{j\omega t}$) амплитудные значения перемещений U_1 и U_2 удовлетворяют соотношениям [25, 71, 119]

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 U_1 &= 0, \\ \mu \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 U_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где λ и μ - постоянные Лямэ, ρ - плотность среды, ω - частота колебаний.

Амплитудные значения напряжений связаны с амплитудами перемещений с помощью формул

$$\begin{aligned}\tau_{11} + \tau_{22} &= 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial(U_1 + iU_2)}{\partial z} + \frac{\partial(U_1 - iU_2)}{\partial \bar{z}} \right), \\ \tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12} &= -4\mu \frac{\partial(U_1 - iU_2)}{\partial z}, \\ \tau_{22} - \tau_{11} - 2i\tau_{12} &= -4\mu \frac{\partial(U_1 + iU_2)}{\partial \bar{z}}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Пусть L - некоторая кривая в поперечном сечении цилиндра. Обозначим через S_1 и S_2 амплитуды тангенциальной и нормальной компонент вектора напряжений на L . Тогда в произвольной точке кривой $\zeta_0 \in L$ эти напряжения выражаются через компоненты тензора напряжений следующим образом [76]

$$\begin{aligned}2i(S_1 + iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22})e^{i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} - 2i\tau_{12})e^{-i\varphi_0}, \\ -2i(S_1 - iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22})e^{-i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12})e^{i\varphi_0},\end{aligned}\tag{4.3}$$

где φ_0 - угол положительной касательной к L в точке $\zeta_0 \in L$ с осью X .

Введем в рассмотрение дифференциальные операторы

$$\begin{aligned}L_{11} &= \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \rho\omega^2, \\ L_{22} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \rho\omega^2, \\ L_{12} &= L_{21} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

Тогда уравнения движения (4.1) приобретают вид

$$L_{mk}U_k = 0 \quad (m, k = 1, 2)\tag{4.4}$$

Если положить теперь

$$U_1 = L_{11}\Psi, \quad U_2 = -L_{12}\Psi,\tag{4.5}$$

где Ψ - некоторая неизвестная функция, то получим, что функция $\Psi(x,y)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$(\nabla^2 + \gamma_1^2)(\nabla^2 + \gamma_2^2)\Psi = 0, \quad \gamma_k = \frac{\omega}{c_k}, \quad k = 1, 2, \quad (4.6)$$

где c_1 и c_2 - скорости распространения продольной и поперечной волн соответственно. Отметим, что к уравнению (4.5) можно прийти, положив также

$$U_1 = -L_{12}\Psi, \quad U_2 = L_{22}\Psi, \quad (4.7)$$

Уравнение (4.6) легко сводится к двум уравнениям Гельмгольца ($k=1,2$)

$$\nabla^2\Psi_k + \gamma_k^2\Psi_k = 0, \quad \Psi = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}. \quad (4.8)$$

Таким образом, изучение процесса распространения упругих волн в изотропной среде в условиях плоской деформации сводится к интегрированию двух уравнений Гельмгольца (4.8). Если функции Ψ_1 и Ψ_2 найдены, то компоненты смещения U_1 и U_2 могут быть получены по формулам (4.5) или (4.7), в зависимости от того, какие из них приняты за основу. Компоненты тензора напряжений определяются с помощью соотношений (4.2).

4.2. Гармонические функции источника в условиях плоской деформации

Рассмотрим колебания плоскости под действием гармонической сосредоточенной силы, приложенной в точке $\zeta = \xi + i\eta$ и направленной вдоль оси x (1-ое состояние) или вдоль оси y (2-ое состояние). Пусть $G_1^{(1)}, G_2^{(1)}$ и $G_1^{(2)}, G_2^{(2)}$ - компоненты смещения 1-го и 2-го состояний соответственно. Аналогично (4.4), запишем уравнения n -го состояния ($n = 1, 2$) в виде

$$L_{mk}G_k^{(n)} = -\delta_{mn}\delta(x - \xi, y - \eta), \quad m, k, n = 1, 2,$$

где δ_{mn} - символ Кронекера.

Следуя (4.5), (4.7), положим

$$\begin{aligned} G_1^{(1)} &= L_{11}G, & G_2^{(1)} &= -L_{12}G, \\ G_1^{(2)} &= -L_{12}G, & G_2^{(2)} &= L_{22}G, \end{aligned} \quad (4.9)$$

Тогда функция G удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + \gamma_1^2)(\nabla^2 + \gamma_2^2)G &= c\delta(x - \xi, y - \eta), \\ c &= -\frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Если ввести в рассмотрение новые функции g_1 и g_2 , аналогично (4.8), получаем ($k=1,2$)

$$\nabla^2 g_k + \gamma_k^2 g_k = c\delta(x - \xi, y - \eta), \quad G = \frac{g_1 - g_2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}. \quad (4.11)$$

Уравнения вида (4.11) нам уже встречались в разделе 2.1 (2.6). Согласно (2.7)

$$g_k = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_k r), \quad r = |z - \zeta|, z = x + iy.$$

Тогда фундаментальное решение уравнения (4.10) приобретает вид

$$G = \frac{c}{4i} \frac{H_0^{(1)}(\gamma_1 r) - H_0^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}. \quad (4.12)$$

Отметим здесь, что поведение функции G (4.12) в нуле также характеризуется разложением [132]

$$G = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r + \dots$$

Если известна функция G , то компоненты матрицы Грина могут быть вычислены по формулам (4.9). Непосредственные вычисления дают

$$\begin{aligned}
G_1^{(1)} + iG_2^{(1)} &= 2(\lambda + 3\mu) \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \bar{z}} + \rho\omega^2 G, \\
G_1^{(1)} - iG_2^{(1)} &= -2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}, \\
G_1^{(2)} - iG_2^{(2)} &= 2(\lambda + 3\mu) \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \bar{z}} + \rho\omega^2 G, \\
G_1^{(2)} + iG_2^{(2)} &= -2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}^2}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Используя явный вид функции G (4.12), находим

$$\begin{aligned}
G_1^{(1)} + iG_2^{(1)} &= d_1 \left(\frac{k}{4} \Phi_{20} - k_1 \Phi_{00} \right), \quad G_1^{(1)} - iG_2^{(1)} = \frac{d_1}{4} e^{-2i\alpha} \Phi_{22}, \\
G_1^{(2)} - iG_2^{(2)} &= d_1 \left(\frac{k}{4} \Phi_{20} - k_1 \Phi_{00} \right), \quad G_1^{(2)} + iG_2^{(2)} = \frac{d_1}{4} e^{2i\alpha} \Phi_{22}, \\
k = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} &= 3 - 4\nu, \quad d_1 = \frac{2(\lambda + \mu)c}{4i} = \frac{i}{4\mu(1-\nu)}, \\
k_1 &= \frac{\rho\omega^2}{2(\lambda + \mu)} = \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \gamma_2^2.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Здесь и в дальнейшем

$$\Phi_{km} = \frac{\gamma_1^k H_m^{(1)}(\gamma_1 r) - \gamma_2^k H_m^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}. \tag{4.15}$$

Анализ формул (4.13) показывает, что функции $G_1^{(1)} - iG_2^{(1)}$ и $G_1^{(2)} + iG_2^{(2)}$ - непрерывны в нуле, а функции $G_1^{(1)} + iG_2^{(1)}$ и $G_1^{(2)} - iG_2^{(2)}$ обладают логарифмической особенностью

$$G_1^{(1)} + iG_2^{(1)} = G_1^{(2)} - iG_2^{(2)} = \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi} \ln r + \dots$$

Вычислим напряженное состояние n -го состояния ($n = 1, 2$). Согласно (4.2) и (4.13) имеем

$$\begin{aligned}
\tau_{11}^{(1)} + \tau_{22}^{(1)} &= 2(\lambda + \mu) \left(4\mu \frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial \bar{z}} + \rho \omega^2 \frac{\partial G}{\partial z} \right), \\
\tau_{22}^{(1)} - \tau_{11}^{(1)} + 2i \tau_{12}^{(1)} &= 8\mu(\lambda + \mu) \frac{\partial^3 G}{\partial z^3}, \\
\tau_{22}^{(1)} - \tau_{11}^{(1)} - 2i \tau_{12}^{(1)} &= -4\mu \left(2(\lambda + 3\mu) \frac{\partial^3 G}{\partial z \partial \bar{z}^2} + \rho \omega^2 \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right), \\
\tau_{11}^{(2)} + \tau_{22}^{(2)} &= 2(\lambda + \mu) \left(4\mu \frac{\partial^3 G}{\partial z \partial \bar{z}^2} + \rho \omega^2 \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right), \\
\tau_{22}^{(2)} - \tau_{11}^{(2)} + 2i \tau_{12}^{(2)} &= -4\mu \left(2(\lambda + 3\mu) \frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial \bar{z}} + \rho \omega^2 \frac{\partial G}{\partial z} \right), \\
\tau_{22}^{(2)} - \tau_{11}^{(2)} - 2i \tau_{12}^{(2)} &= 8\mu(\lambda + \mu) \frac{\partial^3 G}{\partial \bar{z}^3}.
\end{aligned}$$

Используя явный вид функции G (4.12), находим

$$\begin{aligned}
\tau_{11}^{(1)} + \tau_{22}^{(1)} &= -\frac{d_2}{4} (\Phi_{31} - \gamma_2^2 \Phi_{11}) e^{-i\alpha}, \\
\tau_{22}^{(1)} - \tau_{11}^{(1)} + 2i \tau_{12}^{(1)} &= \frac{d_2}{4} \Phi_{33} e^{3i\alpha}, \\
\tau_{22}^{(1)} - \tau_{11}^{(1)} - 2i \tau_{12}^{(1)} &= \frac{d_2}{4} (k\Phi_{31} - 4k_1\Phi_{11}) e^{i\alpha}, \\
\tau_{11}^{(2)} + \tau_{22}^{(2)} &= -\frac{d_2}{4} (\Phi_{31} - \gamma_2^2 \Phi_{11}) e^{i\alpha}, \\
\tau_{22}^{(2)} - \tau_{11}^{(2)} + 2i \tau_{12}^{(2)} &= \frac{d_2}{4} (k\Phi_{31} - 4k_1\Phi_{11}) e^{-i\alpha}, \\
\tau_{22}^{(2)} - \tau_{11}^{(2)} - 2i \tau_{12}^{(2)} &= \frac{d_2}{4} \Phi_{33} e^{-3i\alpha}, \quad d_2 = 2\mu d_1.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

При выводе формул (4.14), (4.16) использованы соотношения [118]

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} H_0^{(1)}(\gamma r) = \left(-\frac{\gamma}{2} \right)^n e^{-in\alpha} H_n^{(1)}(\gamma r),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma^2}{4} H_0^{(1)}(\gamma r), \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} H_0^{(1)}(\gamma r) = \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^n e^{in\alpha} H_n^{(1)}(\gamma r), \quad z - \zeta = re^{i\alpha}.$$

Дадим характеристику присутствующих в (4.16) ядер. Можно показать, что ядро Φ_{11} является непрерывным, ядра Φ_{31} и Φ_{33} - сингулярны. Имеем

$$\Phi_{31} = \frac{2i}{\pi r} + F_{31}, \quad \Phi_{33} = \frac{2i}{\pi r} + F_{33}, \quad (4.18)$$

где F_{31} и F_{33} - непрерывные функции.

Вычислим также необходимые в дальнейшем производные

$$\frac{\partial}{\partial z} (G_1^{(1)} + iG_2^{(1)}) = 2(\lambda + 3\mu) \frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial \bar{z}} + \rho\omega^2 \frac{\partial G}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (G_1^{(1)} - iG_2^{(1)}) = -2(\lambda + \mu) \frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial \bar{z}},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (G_1^{(2)} + iG_2^{(2)}) = -2(\lambda + \mu) \frac{\partial^3 G}{\partial z \partial \bar{z}^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (G_1^{(2)} - iG_2^{(2)}) = 2(\lambda + 3\mu) \frac{\partial^3 G}{\partial z \partial \bar{z}^2} + \rho\omega^2 \frac{\partial G}{\partial \bar{z}}.$$

Используя (4.12), (4.17), находим

$$\frac{\partial}{\partial z} (G_1^{(1)} + iG_2^{(1)}) = -\frac{d_1}{8} (k\Phi_{31} - 4k_1\Phi_{11})e^{-i\alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (G_1^{(1)} - iG_2^{(1)}) = \frac{d_1}{8} \Phi_{31}e^{-i\alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (G_1^{(2)} + iG_2^{(2)}) = \frac{d_1}{8} \Phi_{31}e^{i\alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (G_1^{(2)} - iG_2^{(2)}) = -\frac{d_1}{8} (k\Phi_{31} - 4k_1\Phi_{11})e^{i\alpha}. \quad (4.19)$$

Учитывая (4.18), заключаем, что все правые части соотношений (4.19) являются сингулярными.

4.3. Постановка краевых задач.

Рассмотрим в неограниченной изотропной среде m бесконечно длинных вдоль оси OZ цилиндрических включений, поперечное сечение, которого ограничено замкнутыми контурами L_j , $j=1,1$ типа Ляпунова. Пусть L – совокупность указанных контуров.

Кривая L разбивает плоскость OXY на две области: внешнюю D_1 и внутреннюю D_2 . Будем предполагать, что внутренность цилиндров представляет собой полость. Пусть также внешнее поле перемещений действует перпендикулярно оси OZ . При таких предположениях мы находимся в условиях плоской деформации. В качестве внешнего воздействия будем рассматривать набегающую на цилиндр из бесконечности монохроматическую волну расширения-сжатия ($\tau = \text{const}$)

$$U_1^{(0)} = 0, \quad U_2^{(0)} = \tau e^{-i\gamma_1^{(1)}y}, \quad \gamma_1^{(1)} = \frac{\omega}{c_1^{(1)}}, \quad c_1^{(1)} = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}} \quad (4.20)$$

или волну сдвига ($\tau = \text{const}$)

$$U_1^{(0)} = \tau e^{-i\gamma_2^{(1)}y}, \quad U_2^{(0)} = 0, \quad \gamma_2^{(1)} = \frac{\omega}{c_2^{(1)}}, \quad c_2^{(1)} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}. \quad (4.21)$$

Здесь $c_1^{(1)}$ и $c_2^{(1)}$ - скорость продольной и поперечной волн в матрице. Аналогичные скорости в волокне будем обозначать через $c_1^{(2)}$ и $c_2^{(2)}$. Они соответственно равны

$$c_1^{(2)} = \sqrt{(\lambda_2 + 2\mu_2)/\rho_2}, \quad c_2^{(2)} = \sqrt{\mu_2/\rho_2}$$

(λ_1, μ_1, ρ_1 и λ_2, μ_2, ρ_2 - коэффициенты Лямэ и плотности матрицы и включения соответственно).

При взаимодействии приходящей волны с цилиндром возникают отраженные, причем другие типы волн не образуются. Пусть $U_1^{(1)}$ и $U_2^{(1)}$ -

амплитуды смещений отраженного поля. Тогда общее поле смещений равно

$$\begin{aligned} U_1(x, y) &= U_1^{(1)} + U_1^{(0)}, \\ U_2(x, y) &= U_2^{(1)} + U_2^{(0)}, \quad (x, y) \in D_1. \end{aligned}$$

В случае гармонической зависимости от времени ($e^{-j\omega t}$) компоненты вектора смещений $U^{(1)} = (U_1^{(1)}, U_2^{(1)})$ удовлетворяет уравнению состояния (4.1) при соответствующем задании параметров матрицы и включения. На бесконечности ($y \rightarrow +\infty$) поле $U^{(1)}$ должно выполнять условия излучения, которые заключаются в выполнении этих условий каждой компонентой поля в отдельности, т.е. смещения $U_1^{(1)}$ и $U_2^{(1)}$ должны представлять собой расходящиеся волны [36].

Сформулируем теперь граничное условие для рассматриваемой дифракционной задачи. Будем предполагать, что поперечное сечение цилиндра описывается гладкой замкнутой кривой, параметрическое уравнение которой $\xi = \xi(s), \eta = \eta(s)$. Пусть $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ - точка кривой L, в которой мы будем удовлетворять граничные условия.

Граничные условия на L будем задавать в виде

$$(S_1 + iS_2)_{z \rightarrow \zeta_0} = (S_1 - iS_2)_{z \rightarrow \zeta_0} = 0. \quad (4.22)$$

Приступаем к решению сформулированной краевой задачи.

4.4. Система СИУ в случае дифракции на системе цилиндрических полостей некруговой формы

Рассмотрим краевую задачу (4.1), (4.22) при условии, что функции $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ удовлетворяют условиям излучения на бесконечности, т.е. представляют собой расходящиеся волны. Следуя, выбранной нами методике, представим указанные функции в каждой из областей D_1 и D_2 в виде

потенциалов типа простого слоя

$$U_1(x, y) = \int_L (f_1(s)G_1^{(1)} + f_2(s)G_1^{(2)})ds,$$

$$U_2(x, y) = \int_L (f_1(s)G_2^{(1)} + f_2(s)G_2^{(2)})ds.$$

Здесь ядра интегральных представлений есть компоненты матрицы Грина (4.9) для матрицы. Очевидно, представления (3.4,1) удовлетворяют уравнениям движения (4.1) в матрице. Остается удовлетворить граничному условию на контуре полостей (4.22).

Подставляя в (4.22) значения напряжений (4.16) с помощью соотношений (4.3) и, осуществляя в полученных интегралах предельный переход $z \rightarrow \zeta_0$, получаем

$$S_1 + iS_2 = \frac{1}{2}f_1(s_0) + \int_L (f_1(s)E_1(s, s_0) + f_2(s)E_2(s, s_0))ds, \quad (4.23)$$

$$S_1 - iS_2 = \frac{1}{2}f_2(s_0) + \int_L (f_1(s)E_3(s, s_0) + f_2(s)E_4(s, s_0))ds.$$

$$E_1(s, s_0) = d_3 \left(\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{e^{i\varphi_0}}{\zeta - \zeta_0} - k \frac{e^{-i\varphi_0}}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} \right) + \frac{1}{4} F_{31}^{(1)} (e^{i(\varphi_0 - \alpha_0)} - ke^{-i(\varphi_0 - \alpha_0)}) - \Phi_{11}^{(1)} (K_2 e^{i(\varphi_0 - \alpha_0)} - K_1 e^{-i(\varphi_0 - \alpha_0)}) \right),$$

$$E_2(s, s_0) = d_3 \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{i\varphi_0} - e^{-i(2\alpha_0 - \varphi_0)}}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} + \frac{1}{4} F_{31}^{(1)} e^{i(\varphi_0 + \alpha_0)} - \Phi_{11}^{(1)} K_2 e^{i(\varphi_0 + \alpha_0)} - \frac{1}{4} F_{33} e^{i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right),$$

$$E_3(s, s_0) = d_3 \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-i\varphi_0} - e^{-i(2\alpha_0 - \varphi_0)}}{\zeta - \zeta_0} + \frac{1}{4} F_{31}^{(1)} e^{-i(\varphi_0 + \alpha_0)} - \Phi_{11}^{(1)} K_2 e^{-i(\varphi_0 + \alpha_0)} - \frac{1}{4} F_{33} e^{-i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right),$$

$$E_4(s, s_0) = d_3 \left(\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{e^{-i\varphi_0}}{\zeta - \zeta_0} - k \frac{e^{i\varphi_0}}{\zeta - \zeta_0} \right) + \frac{1}{4} F_{31}^{(1)} (e^{-i(\varphi_0 - \alpha_0)} - k e^{i(\varphi_0 - \alpha_0)}) - \Phi_{11}^{(1)} (K_2 e^{-i(\varphi_0 - \alpha_0)} - K_1 e^{i(\varphi_0 - \alpha_0)}) \right), \quad d_3 = \frac{1}{4(1 - \nu_k)}.$$

Здесь функции $\Phi_{11}^{(1)}$, $F_{31}^{(1)}$ и $F_{33}^{(1)}$ заданы соотношениями (4.15), (4.18) при условии, что в них вместо волновых чисел γ_1 и γ_2 волновые числа $\gamma_1^{(1)}$ и $\gamma_2^{(1)}$ для матрицы.

Анализ формул (4.23), показывает, что ядра $E_1(s, s_0)$, $E_4(s, s_0)$ являются сингулярными, ядра $E_2(s, s_0)$, $E_3(s, s_0)$ - непрерывными.

Вычислим теперь необходимые для (4.22) комбинации, соответствующие внешнему воздействию (4.20) или (4.21). В случае набегания на цилиндр продольной волны (4.20) имеем

$$K_1(s_0) = -K_2(s_0) = S_1 + iS_2 = -\frac{\mu_1 \gamma_1^{(1)} \tau}{\frac{1}{2} - \nu_1} e^{-i\gamma_1^{(1)} \eta_0} (+ (1 - \nu_1) \cos \varphi_0 + i \nu_1 \sin \varphi_0). \quad (4.24)$$

Если излучается из бесконечности волна сдвига (4.21), то

$$K_1(s_0) = +K_2(s_0) = S_1 + iS_2 = i\gamma_2^{(1)} \mu_1 \tau e^{-i\gamma_2^{(1)} \eta_0} e^{-i\varphi_0}. \quad (4.25)$$

Подставляя (4.23)-(4.25) в граничные условия на контуре системы полостей (4.22) приходим к следующей системе СИУ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f_1(s_0) + \int_L (f_1(s) E_1(s, s_0) - f_2(s) E_2(s, s_0)) ds &= -K_1(s_0), \\ \frac{1}{2} f_2(s_0) + \int_L (f_1(s) E_3(s, s_0) - f_2(s) E_4(s, s_0)) ds &= -K_2(s_0). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Здесь уравнения есть СИУ 2-го рода. Параметризованная форма интегральных уравнений (4.26) приобретает вид

$$\frac{1}{2} p_1(\beta_0) + \int_0^{2\pi} (p_1(\beta)R_1(\beta, \beta_0) - p_2(\beta)R_2(\beta, \beta_0))d\beta = -T_1(\beta_0),$$

$$\frac{1}{2} p_2(\beta_0) + \int_0^{2\pi} (p_1(\beta)R_3(\beta, \beta_0) - p_2(\beta)R_4(\beta, \beta_0))d\beta = -T_2(\beta_0),$$

$$p_j(\beta) = f_j(s)s'(\beta), \quad R_l(\beta, \beta_0) = E_l(\beta, \beta_0)s'(\beta_0),$$

$$T_j(\beta_0) = -K_j(\beta_0)s'(\beta_0), \quad j = 1, 2, \quad l = 1, 2, 3, 4.$$

Численная реализация построенных СИУ осуществляются методом механических квадратур по схеме, описанной в разделе 2.3.

4.4. Верификация полученных результатов.

Проверка выполнения краевых условий. Для системы отверстий из краевого условия следует то, что нормальные контурные напряжения равные нули. В Табл. 4.1 приведены нормальные напряжения для разного волнового числа, на некоторых характерных точках контура - лобовая, теневая и точка проскальзывания. Тут $b/a=0.5$, $d=2.0$.

Таблица 4.1

Машинные нули для краевого условия

| Источник | Волновое число | Расположение отверстия | Угол β в радианах | Максимум σ_n |
|----------|----------------|------------------------|-------------------------|------------------------|
| Волна | 1,7 | Центральное | 0 | $7,564 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 1,7 | Центральное | 3,1415469319 | $4,063 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 1,7 | Центральное | 2π | $6,049 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 1,7 | Крайнее справа | 0 | $7,205 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 1,7 | Крайнее справа | 3,1415469319 | $7,301 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 1,7 | Крайнее справа | 2π | $8,108 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 2,5 | Центральное | 0 | $2,152 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 2,5 | Центральное | 3,1415469319 | $5,675 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 2,5 | Центральное | 2π | $3,438 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 2,5 | Крайнее справа | 0 | $8,614 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 2,5 | Крайнее справа | 3,1415469319 | $2,598 \cdot 10^{-15}$ |
| Волна | 2,5 | Крайнее справа | 2π | $1,753 \cdot 10^{-15}$ |

В таблицах 4.2 (Р-волна) и 4.3 (SV-волна) представлены касательные контурные напряжения для центрального отверстия в системе, состоящей из 3 неоднородностей. Тут $b/a=0.5$, $d=2.0$, $\gamma_2 a = 1.7$. Равенство симметричных относительно оси ОУ значений и в этой задаче также показывает соответствие результата геометрии нагружения. И также дает возможность определить верхнюю границу точности алгоритма в данной операционной среде (без применение дополнительных вычислительных средств безошибочной арифметики [35, 91-93]) – до 10^{-12} .

Таблица 4.2

Равенство симметричных значений σ_β для Р-волны

| Угол β в радианах | Значение σ_β | Угол β в радианах | Значение σ_β |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 0 | 0.8657821300291 | | |
| 0.153248 | 0.7958108429333 | 6.129936 | 0.7958108429330 |
| 0.306496 | 0.6572131336249 | 5.976688 | 0.6572131336251 |
| 0.459745 | 0.5869069867357 | 5.823440 | 0.5869069867360 |
| 0.612993 | 0.5645541638620 | 5.670191 | 0.5645541638617 |
| 0.766242 | 0.4440061033177 | 5.516943 | 0.4440061033175 |
| 0.919490 | 0.2722695564071 | 5.363694 | 0.2722695564072 |
| 1.072738 | 0.6180819727840 | 5.210446 | 0.6180819727840 |
| 1.225987 | 1.2566134632795 | 5.057197 | 1.2566134632797 |
| 1.379235 | 1.8497895894036 | 4.903949 | 1.8497895894036 |
| 1.532484 | 2.0864126503468 | 4.750701 | 2.0864126503468 |
| 1.685732 | 1.8015875324805 | 4.597452 | 1.8015875324804 |
| 1.838981 | 1.2406762958547 | 4.444204 | 1.2406762958551 |
| 1.992229 | 0.8596568112382 | 4.290955 | 0.8596568112383 |
| 2.145477 | 0.8359243820587 | 4.137707 | 0.8359243820584 |
| 2.298726 | 0.8443246662364 | 3.984458 | 0.8443246662363 |
| 2.451974 | 0.6413279199239 | 3.831210 | 0.6413279199241 |
| 2.605223 | 0.2076219682829 | 3.677962 | 0.2076219682827 |
| 2.758471 | 0.4566441045279 | 3.524713 | 0.4566441045274 |
| 2.911720 | 1.0413221863141 | 3.371465 | 1.0413221863144 |
| 3.064968 | 1.4040163777149 | 3.218216 | 1.4040163777143 |

Таблица 4.3

Равенство симметричных значений σ_β для SV-волны

| Угол β в радианах | Значение σ_β | Угол β в радианах | Значение σ_β |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 0 | 0.00000000000004 | | |
| 0.153248 | 1.8761223355769 | 6.129936 | 1.8761223355762 |

| | | | |
|----------|-----------------|----------|-----------------|
| 0.306496 | 3.4423106373089 | 5.976688 | 3.4423106373093 |
| 0.459745 | 4.4548330857192 | 5.823440 | 4.4548330857186 |
| 0.612993 | 4.7941593988503 | 5.670191 | 4.7941593988509 |
| 0.766242 | 4.5311741824294 | 5.516943 | 4.5311741824296 |
| 0.919490 | 4.0695526437094 | 5.363694 | 4.0695526437093 |
| 1.072738 | 4.2570060587590 | 5.210446 | 4.2570060587594 |
| 1.225987 | 5.4386843474341 | 5.057197 | 5.4386843474338 |
| 1.379235 | 6.5438563048302 | 4.903949 | 6.5438563048299 |
| 1.532484 | 6.1760052963299 | 4.750701 | 6.1760052963308 |
| 1.685732 | 4.0634307683333 | 4.597452 | 4.0634307683316 |
| 1.838981 | 1.7466921555705 | 4.444204 | 1.7466921555706 |
| 1.992229 | 1.8760603512509 | 4.290955 | 1.8760603512521 |
| 2.145477 | 2.8028297925058 | 4.137707 | 2.8028297925050 |
| 2.298726 | 3.1621165196033 | 3.984458 | 3.1621165196030 |
| 2.451974 | 3.0400006004651 | 3.831210 | 3.0400006004649 |
| 2.605223 | 2.5999689661606 | 3.677962 | 2.5999689661604 |
| 2.758471 | 1.9642973050300 | 3.524713 | 1.9642973050301 |
| 2.911720 | 1.2161014888022 | 3.371465 | 1.2161014888024 |
| 3.064968 | 0.4110913139091 | 3.218216 | 0.4110913139092 |

Очевидно, что вычислительная точность контурных напряжений модели находится в пределах 10^{-14} - 10^{-15} , что дает уверенность в результатах до 10^{-10} .

Сравнение с результатами для одиночного отверстия. Проводилось сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [95] для случая одиночного эллиптического отверстия, полученного удалением элементов системы на значительное расстояние друг от друга – до 10^{+6} . Сравнение с результатами [95] показали хорошую достоверность используемых вычислительных алгоритмов.

Как и в работе [95], кривые 1, 2 и 3 на рис. 4.1, а (SV-волна) и 4.1, б (P-волна) отвечают значениям параметра b/a , равным 0.5, 2.0 и 5.0 соответственно, при $\gamma_2 a = 1.0$.

Сравнение с результатами для периодической системы отверстий. Численное исследование показало, что при воздействии из бесконечности P и SV-волн в описанной системе также наблюдается эффект насыщения [63, 96]. Используя тот факт, что при насыщении решетки напряженно-деформированное состояние исследуемой системы стремится к аналогичному состоянию в периодическом случае [68], в работе проводилось сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [68] для случая

периодической системы эл-

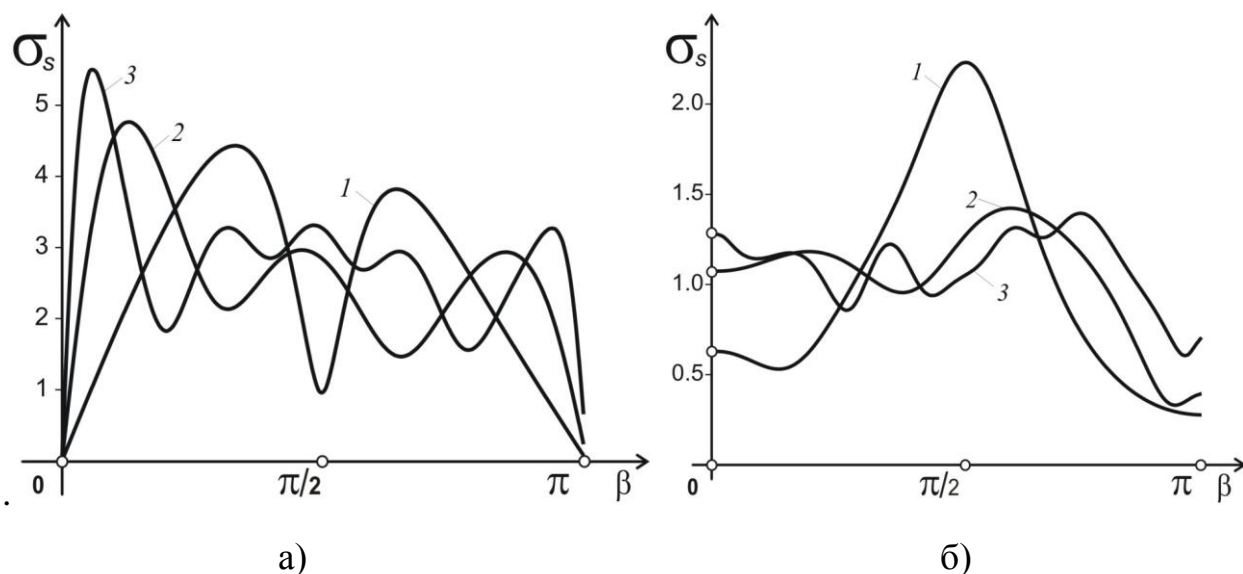


Рис. 4.1 Напряжения σ_β для одиночного отверстия

ллиптических отверстий. Сравнение с результатами [68] (Приложение 2) также показало хорошую достоверность используемых вычислительных схем.

На рис. 4.2 показано распределение напряжений σ_β на контуре эллиптической полости, находящийся на оси симметрии системы, состоящей из 17 отверстий, в случае P -волны (рис. 4.2а) и SV -волны (рис. 4.2б). Кривые 1, 2 и 3 приведены для $\nu=0.3$, $\gamma_{1,2}a=1.0$ и соответствуют значениям $a/d = 0,3; 0,5$ и $0,7$ при $b/a= 0,5$, где d (расстояние между отверстиями) соответствует периоду решетки в [68].

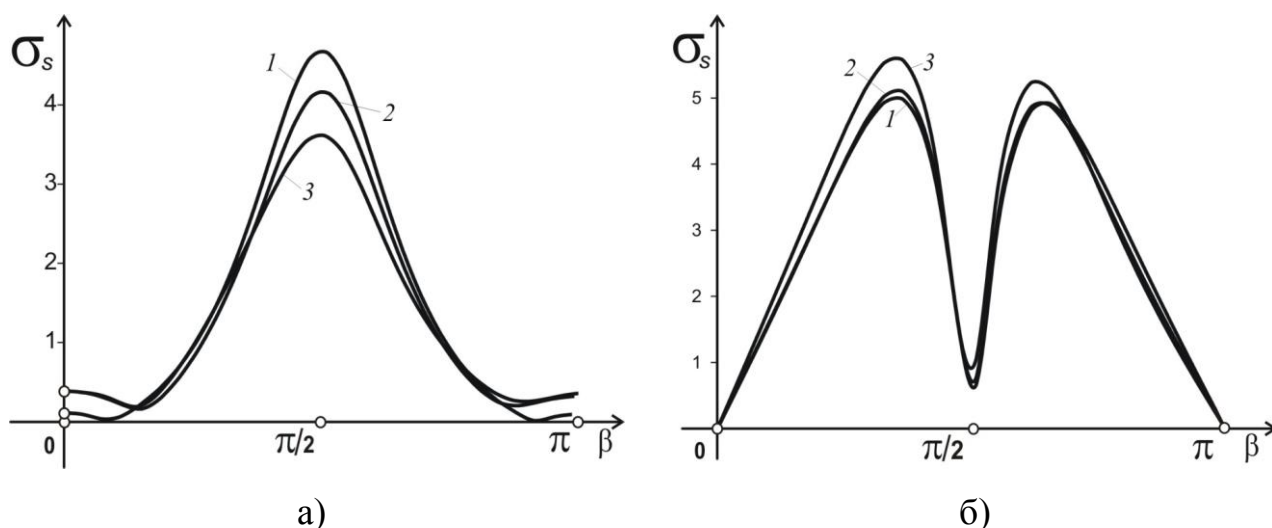


Рис. 4.2 Напряжения σ_β для центрального отверстия, 13 отверстий

Анализ полученных результатов свидетельствует, что распределение контурных напряжений в P - и SV -случаях принципиально отличается один от другого. Так, при $b/a < 1$ вблизи точки соскальзывания $\beta = 90^\circ$ напряжение σ_β имеет максимум при излучении P -волны и локальный минимум в случае SV -волны. С увеличением параметра b/a ($b/a > 1$) характер распределения σ_β усложняется, причем число точек максимума и минимума растет. В SV -случае напряжение σ_β в лобовой $\beta = 180^\circ$ и теневой $\beta = 0^\circ$ точках ровняются нулю. Это полностью совпадает с результатами аналогичных исследований, приведенными в работе [68].

Тест на «физичность». Для получения значений напряжений на контуре одиночного упругого включения или локальной системы упругих включений, находящихся под воздействием гармонических волн плоской деформации, использовано программное приложение, разработанное в рамках исследования [95]. Для экономии места отчет о проведенных исследованиях приведен в Приложении 3.

Проведенный тест позволили обнаружить некоторую неточность одного из графиков работы [87]. Тут на рис. 1 приведены касательные напряжения на контуре одиночно эллиптического отверстия в условиях P -волн. Очевидно, что в лобовой и теневой точках эти значения не могут быть нулевыми, так как известно, что нулевыми в этих точках они становятся в условиях воздействия SV -волн. Этот же результат для SV -волн приведен в [87] на рис. 2. И он совпадает с результатом настоящей работы, рис. 4.1 а, что и показано в Приложении 3 на рис. ПЗ.1, в. Там же, на рис. ПЗ.1, б, приведен корректный график данной зависимости. Как показывает тестовая проверка, в соответствии с таблицей пункта 5 Приложения 3 значения касательных напряжений в теневой и лобовой точке отличны от нуля и соответствуют графику на рис. 4.1, б (ПЗ.1, б). Таким образом, предложенная верификация позволяет избежать подобных неточностей.

4.6. Вычисление контурных напряжений на локальной системе полостей.

Будем рассматривать компоненты тензора напряжений $\tau_{n_0}, \tau_{s_0}, \tau_{n_0s_0}$ в системе осей n_0, s_0 . Они связаны с компонентами $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12}$ следующими соотношениями [76]

$$\begin{aligned}\tau_{s_0} &= \tau_{11} \cos^2 \varphi_0 + \tau_{22} \sin^2 \varphi_0 + \tau_{12} \sin 2\varphi_0, \\ \tau_{n_0} &= \tau_{11} \sin^2 \varphi_0 + \tau_{22} \cos^2 \varphi_0 - \tau_{12} \sin 2\varphi_0, \\ \tau_{n_0s_0} &= \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2} \sin 2\varphi_0 - \tau_{12} \cos 2\varphi_0.\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\tau_{s_0} + \tau_{n_0} &= \tau_{11} + \tau_{22}, \\ \tau_{n_0} - \tau_{s_0} - 2i\tau_{n_0s_0} &= (\tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12})e^{2i\varphi_0}.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Поскольку нормальная S_2 и тангенциальная составляющая S_1 вектора напряжений на границе связаны с компонентами $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12}$ формулами [76]

$$S_1 = \tau_{11} \sin \varphi_0 - \tau_{12} \cos \varphi_0, \quad S_2 = \tau_{12} \sin \varphi_0 - \tau_{22} \cos \varphi_0,$$

то, очевидно,

$$\tau_{n_0} = S_1 \sin \varphi_0 - S_2 \cos \varphi_0, \quad \tau_{n_0s_0} = S_1 \cos \varphi_0 + S_2 \sin \varphi_0.$$

или после несложных преобразований

$$\begin{aligned}\tau_{n_0} &= \frac{i}{2}(Ae^{-i\varphi_0} - Be^{i\varphi_0}), \quad \tau_{n_0s_0} = \frac{1}{2}(Ae^{-i\varphi_0} + Be^{i\varphi_0}), \\ A &= S_1 + iS_2, \quad B = S_1 - iS_2.\end{aligned}\tag{4.28}$$

Если напряжение τ_{n_0} известно, то напряжение $\tau_{n_0s_0}$ может быть найдено из (4.27):

$$\tau_{s_0} = (\tau_{11} + \tau_{22}) - \tau_{n_0}, \quad (4.29)$$

где инвариант $\tau_{11} + \tau_{22}$ определяется, например, формулой (4.2).

Таким образом, алгоритм вычисления компонент тензора напряжений $\tau_{n_0}, \tau_{s_0}, \tau_{n_0 s_0}$ найден. Осуществим построение такого алгоритма в данном случае. Будем вычислять напряжения со стороны матрицы, т.е. S_1 и S_2 . Поскольку эти напряжения непосредственно задействованы в граничных условиях (4.22), из которых получены СИУ (4.26) и (4.4.6), то находим

$$\begin{aligned} A = S_1 + iS_2 &= \frac{1}{2} p_1(\beta_0) + \int_0^{2\pi} p_1(\beta) E_1(\beta, \beta_0) d\beta - T_1(\beta_0), \\ B = S_1 - iS_2 &= \frac{1}{2} p_2(\beta_0) + \int_0^{2\pi} p_2(\beta) E_3(\beta, \beta_0) ds - T_2(\beta_0). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Подставляя в (4.28) вычисленные по формулам (4.30) функции $A(\beta_0)$ и $B(\beta_0)$, получаем напряжения $\tau_{n_0}, \tau_{n_0 s_0}$.

Напряжения τ_{s_0} будем находить по формуле (4.29):

$$\tau_{s_0} = (\tau_{11} + \tau_{22}) - \tau_{n_0},$$

где для инварианта $\tau_{11} + \tau_{22}$ получено следующее выражение

$$\begin{aligned} \tau_{11} + \tau_{22} &= -id_3 \left(\frac{p_1(\beta_0)}{\zeta'(\beta_0)} - \frac{p_2(\beta_0)}{\zeta'(\beta_0)} \right) - \\ &- \frac{id_3}{2} \int_0^{2\pi} (\Phi_{31} - \gamma_2^2 \Phi_{11}) (p_1(\beta) e^{-i\alpha_0} + p_2(\beta) e^{i\alpha_0}) d\beta + T_0(\beta_0), \\ T_0(\beta_0) &= -\frac{i\gamma_1}{\frac{1}{2} - \nu_1} e^{-i\gamma_1 \eta_0}, l=1; \quad T_0(\beta_0) = 0, \quad l=2. \end{aligned}$$

Здесь $l = 1$ в случае набегания на цилиндр продольной волны (4.20) и $l = 2$, если из бесконечности излучается волна сдвига (4.21). Сингулярный член (4.18) в ядре Φ_{31} не выделен.

Алгоритм нахождения напряжений $\tau_{n_0}, \tau_{s_0}, \tau_{n_0s_0}$ построен.

В качестве примера рассматривалось пространство, содержащее эллиптическую полость поперечного сечения

$$\xi(\beta) = a(\sin \beta - \nu \sin 3\beta), \quad \eta(\beta) = -b(\cos \beta + \nu \cos 3\beta), \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi,$$

На контуре полости проводилось вычисление следующих напряжений

$$\sigma_n = |\tau_{n_0}|/p, \quad \sigma_\beta = |\tau_{s_0}|/p, \quad \sigma_{n\beta} = |\tau_{n_0s_0}|/p,$$

где p - максимальное значение напряжения в падающей волне, равное $\gamma_1^{(2)}\tau(\lambda_1+2\mu_1)$ - в случае излучения продольной волны и $\gamma_2^{(1)}\tau\mu_1$ - в случае излучения волны сдвига.

На рис. 4.3-4.4 приведены графики распределения касательных напряжений σ_β на контуре крайнего и центрального (рис. 4.3 - случай SV-волны, рис. 4.4 - P-волны) отверстий эллиптической формы. Соотношение осей вытянутых вдоль оси ординат (и набегающей волны) эллипсов $b/a = 2,0$; значение безразмерного волнового числа $\gamma_{1,2}a$ равны соответственно: 1- 0,5; 2 - 1,0; 3 - 2,0

Расчеты показывают, что в случае $b/a \leq 1$, т. е. когда фокусы эллипса находятся на оси, параллельной фронту падающей волны, вблизи точки соскальзывания ($\beta=90^\circ$) напряжение σ_β имеет локальный максимум, при излучении P-волны и локальный минимум - в случае SV-волны. При значениях $b/a \geq 1$, т.е. когда эллиптические полости вытянуты вдоль оси, перпендикулярной фронту падающей волны, с увеличением параметра b/a характер изменения σ_β усложняется, причем число точек максимума и минимума увеличивается.

На рис. 4.5-4.8 приведены графики распределения также касательных напряжений σ_β на контуре крайнего (а) и центрального (б) (рис. 4.5,4.6 - случай P-волн, рис. 4.7,4.8 - случай SV-волн) отверстий эллиптической (4.5 - 4.6) и ромбической (4.7-4.8) формы. Соотношение осей вытянутых вдоль оси ординат

(и набегающей волны) эллипсов $b/a = 2.0$ для 1,2 кривых и $b/a = 0.5$ для 3,4 кривых; значение безразмерного волнового числа $\gamma_{1,2}a=1.5$ для 1,3 кривых и $\gamma_{1,2}a=2.5$ для 2,4 кривых.

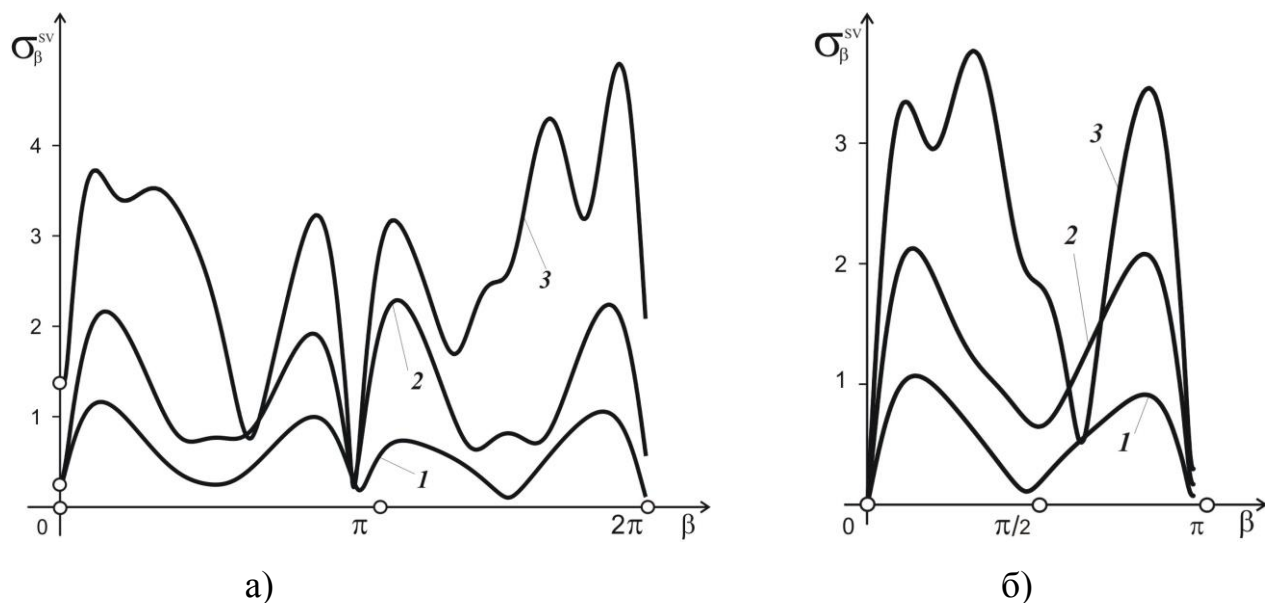


Рис. 4.3 Напряжения σ_{β} для 3 эллиптических отверстий, SV-волна

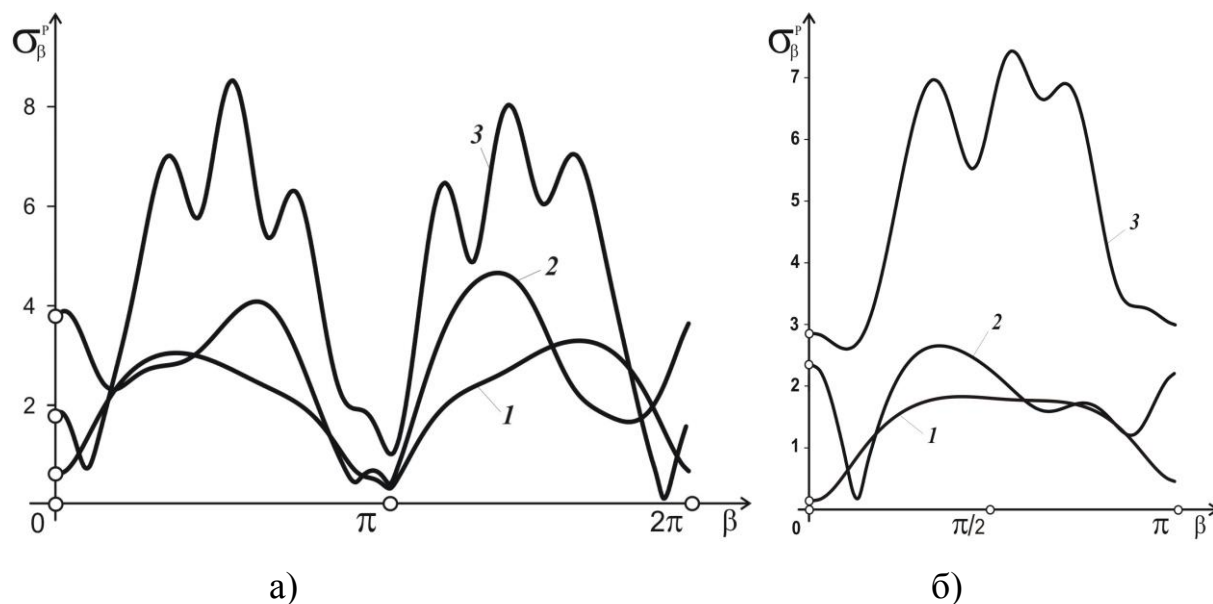


Рис. 4.4 Напряжения σ_{β} для 3 эллиптических отверстий, P-волна

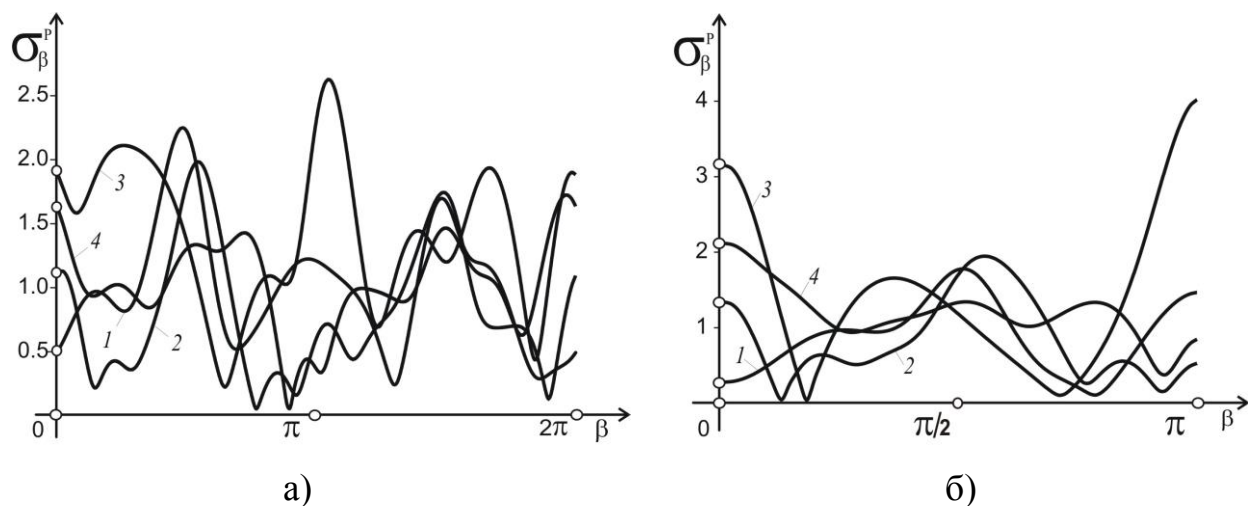


Рис. 4.5 Напряжения σ_{β} для 3 эллиптических отверстий, Р-волна

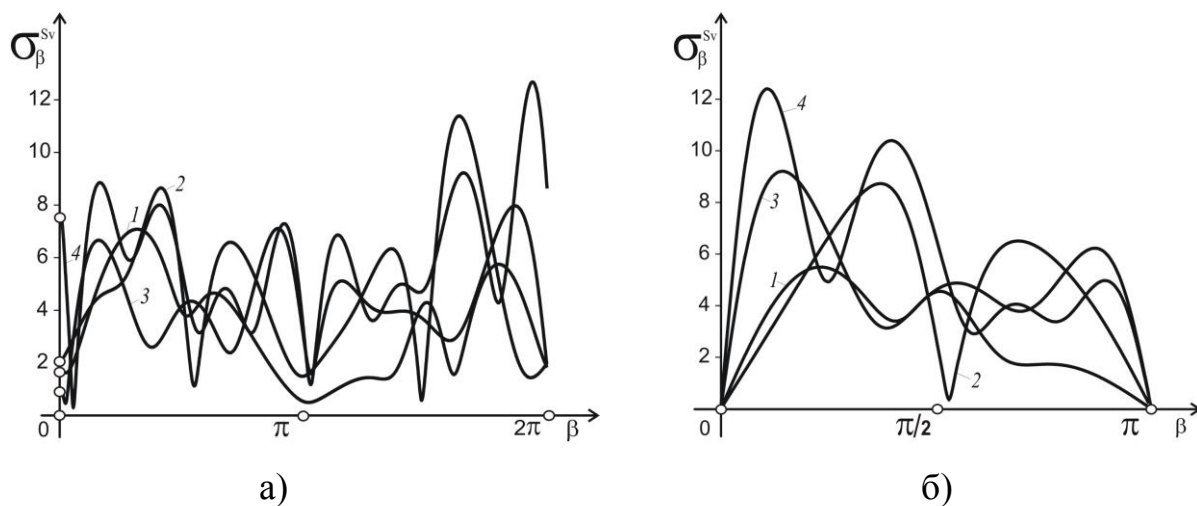


Рис. 4.6 Напряжения σ_{β} для 3 эллиптических отверстий, SV-волна

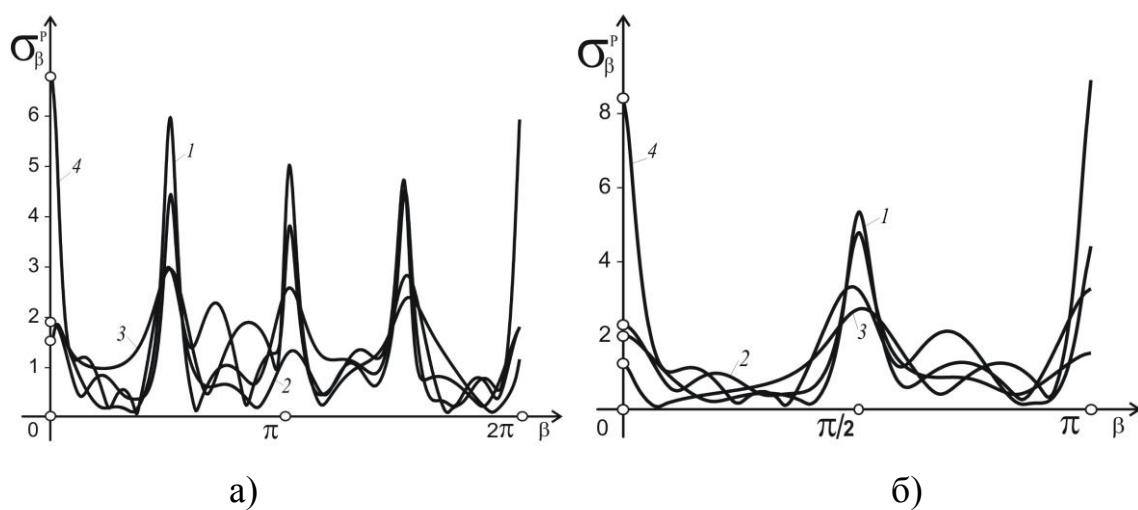


Рис. 4.7 Напряжения σ_{β} для 3 ромбических отверстий, Р-волна

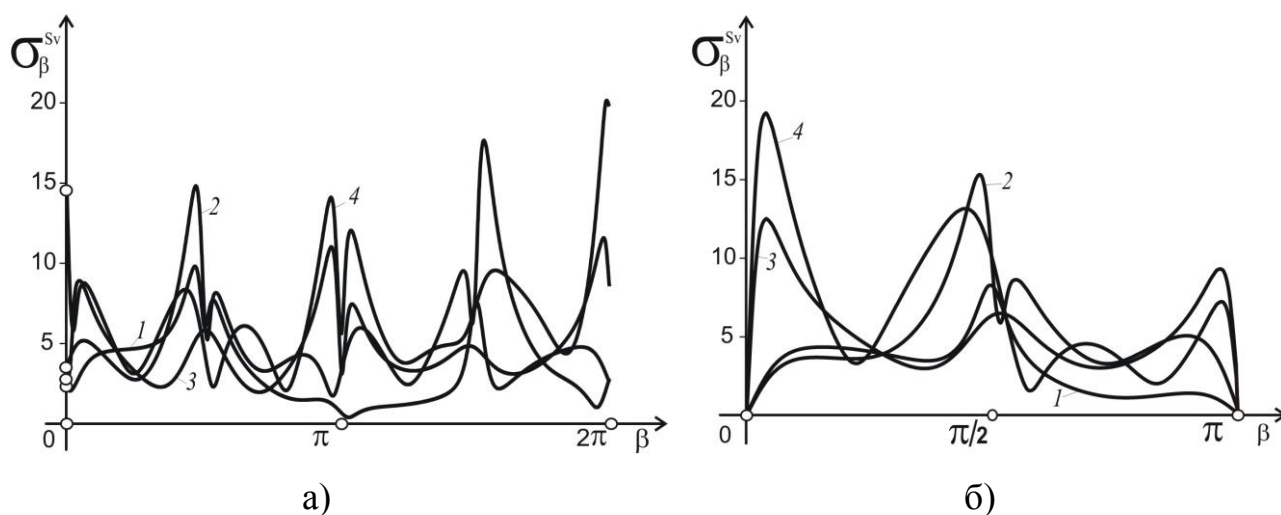


Рис. 4.8 Напряжения σ_β для 3 ромбических отверстий, SV-волн

В работе также исследована дифракция плоских волн на локальных системах отверстий с увеличенным числом отражателей (более 10). С целью экономии места большинство графиков с иными параметрами нагружения приведено в Приложении 9.

Разработанная схема численного эксперимента позволила сформировать Табл. 4.4 высокоточных значений максимумов касательных напряжений и соответствующих угловых координат на контуре эллиптических или ромбических центральных или крайних отверстий в системе из 3 отражателей [97]. Тут $b/a = 2.0$, $\gamma_{1,2}a = \{1.5, 2.5\}$.

Таблица 4.4

Высокоточные значения касательных напряжений σ_β

| Тип волны | Тип контура | $\gamma_{1,2}a$ | Расположение отверстия | Угол β в радианах | Максимум σ_β |
|-----------|-------------|-----------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| SV | Эллипс | 1,5 | Центральное | 0,45046764 | 9,20952152 |
| SV | Эллипс | 1,5 | Крайнее справа | 0,45139920 | 7,95555354 |
| SV | Ромбик | 1,5 | Центральное | 6,15793145 | 12,4801410 |
| SV | Ромбик | 1,5 | Крайнее справа | 0,10875301 | 11,5506288 |
| P | Эллипс | 1,5 | Центральное | 3,14085470 | 4.02922054 |
| P | Эллипс | 1,5 | Крайнее справа | 3,03160079 | 2.62768336 |
| P | Ромбик | 1,5 | Центральное | 3,14085470 | 9.15393000 |
| P | Ромбик | 1,5 | Крайнее справа | 3,11755021 | 4.98452764 |
| SV | Эллипс | 2,5 | Центральное | 0,34062599 | 12,4065623 |

| | | | | | |
|----|--------|-----|----------------|------------|------------|
| SV | Эллипс | 2,5 | Крайнее справа | 0,22919939 | 12,6857039 |
| SV | Ромбик | 2,5 | Центральное | 6,16310674 | 19,2198103 |
| SV | Ромбик | 2,5 | Крайнее справа | 0,06393689 | 20,4286911 |
| P | Эллипс | 2,5 | Центральное | 0 | 2.11521672 |
| P | Эллипс | 2,5 | Крайнее справа | 0,15629814 | 1.72461236 |
| P | Ромбик | 2,5 | Центральное | 0 | 8.51053409 |
| P | Ромбик | 2,5 | Крайнее справа | 0 | 6.56620420 |

На рис. 4.9 показана кривая временной зависимости загрузки узлов кластера.

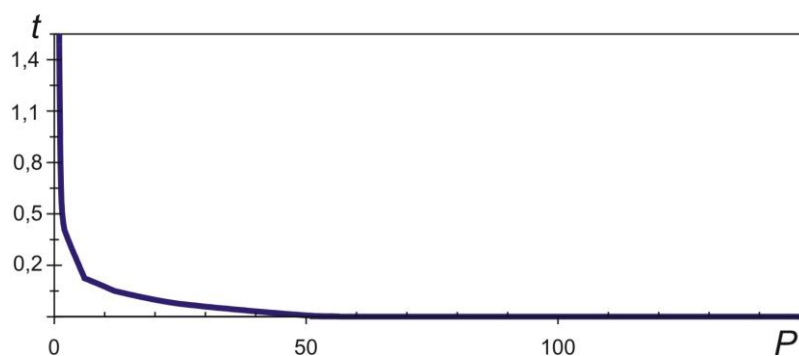


Рис. 4.9 График загрузки узлов кластера «Инпарк-256»

На рис. 4.10 показана зависимость числа обусловленности матрицы СЛАУ от $\gamma_2 a$. В этой модели также наблюдается существенное ухудшение обусловленности матрицы при $\gamma_2 a > 10$.

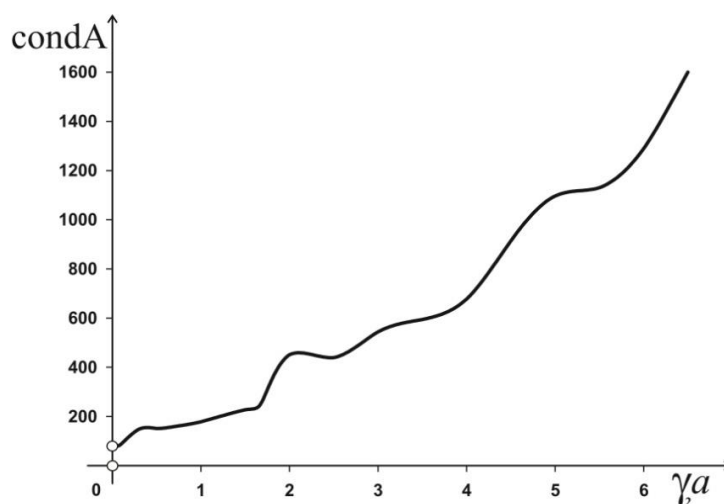


Рис 4.10 Зависимость числа обусловленность матрицы от $\gamma_2 a$

4.7. Выводы к 4 разделу.

1. Для задачи дифракции волн плоской деформации на системе отверстий некруговой цилиндрической формы параллельные алгоритмы также позволяют значительно сократить время вычислений и более детально проанализировать характеристики волнового поля.

2. Полученная зависимость числа обусловленности от γ_{2a} для задачи дифракции волн плоской деформации на системе отверстий некруговой цилиндрической формы также показала, что при $\gamma_{2a} < 10$ модель хорошо обусловлена и тем самым хорошо разрешима, что дает возможность провести численные исследования также с точностью до 10^{-10} .

3. Для указанного диапазона числа обусловленности проведенные тесты верификации результатов показали достоверность полученных данных, а так же хорошую сходимость и устойчивость алгоритмов.

4. При решении проблемы высокоточного определения локаций и максимальных характеристик искомым функций на контурах локальных систем отверстий произвольного поперечного сечения в условиях плоской деформации также может быть эффективно использован метод СИУ. Алгоритм также может быть построен на параллельных вычислениях при последовательных приближениях уточняющего смещения точек коллокации при дискретизации контуров.

5. При плоских гармонических воздействиях на локальные системы отверстий произвольного поперечного сечения с увеличенным числом отражателей также возникает эффект насыщения.

6. Характеристики полей напряжений от плоских гармонических волн, взаимодействующих с локальными системами отверстий, а также шкалы высокоточных значений локаций и максимальных напряжений на контурах локальных систем отверстий эллиптического и ромбовидного сечения подтверждают, что и в случае плоской деформации алгоритм позволяет определять высокоточные значение контурных напряжений, поскольку кривые зависимостей – также гладкие.

7. Временные закономерности загрузки узлов при параллельном кластерном решении плоской задачи, основанной на системе СИУ также показывает, что производительность алгоритма зависит только от объема пересылок при решении СЛАУ. Удвоение сложности решаемой задачи, а также многократное увеличение обрабатываемых программным приложением данных существенно не влияет на статистику загрузки узлов.

РАЗДЕЛ 5.

**КЛАСТЕРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ
СИСТЕМЫ НЕПОДВИЖНЫХ ЖЕСТКИХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО
ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ
СРЕДЕ ОТ ВОЗДЕЙСТВИЯ УПРУГИХ ВОЛН.**

5.1. Формулировка краевой задачи

Рассмотрим в неограниченной изотропной среде m бесконечно длинных вдоль оси OZ цилиндрических включений, поперечное сечение, которого ограничено замкнутыми контурами L_j , $j=1, l$ типа Ляпунова. Пусть L – совокупность указанных контуров. Кривая L разбивает плоскость OXY на две области: внешнюю D_1 и внутреннюю D_2 . Будем предполагать, что внутренность цилиндра представляет собой жесткое неподвижное включение. Пусть также внешнее поле перемещений действует перпендикулярно оси OZ .

При таких предположениях мы находимся в условиях плоской деформации. В качестве внешнего воздействия будем рассматривать набегающую на цилиндр из бесконечности монохроматическую волну расширения-сжатия (4.20) или волну сдвига (4.21)

Взаимодействуя с включениями, падающая волна порождает отраженные продольные и поперечные волны. Их совокупность определяет напряженно-деформированное состояние среды, которое требуется определить. Следуя принципу суперпозиции, общее поле амплитуд перемещений и компонент тензора напряжений будем искать в виде:

$$\begin{aligned} U_1(x, y) &= U_1^{(1)} + U_1^{(0)}, \\ U_2(x, y) &= U_2^{(1)} + U_2^{(0)}, \quad (x, y) \in D_1. \end{aligned}$$

Сформулируем теперь граничное условие для рассматриваемой

дифракционной задачи. Будем предполагать, что поперечное сечение цилиндра описывается гладкой замкнутой кривой, тогда равенство нулю смещений на L запишем в виде

$$(U_1 + iU_2)_{z \rightarrow \zeta_0} = (U_1 - iU_2)_{z \rightarrow \zeta_0} = 0 \quad (5.1)$$

или, следуя принятой нами методике, в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds_0} (U_1 + iU_2) &= \frac{d}{ds_0} (U_1 - iU_2) = 0, \\ \frac{dU}{ds_0} &= \left(\frac{\partial U}{\partial z} e^{i\varphi_0} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} e^{-i\varphi_0} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Эквивалентность краевых задач (5.1) и (5.2) будет соблюдаться, если к (5.2) присовокупить два дополнительных условия, вытекающих, например, из равенства смещений при переходе через L в некоторой фиксированной точке контура L или, как это принято в работе, из равенства нулю средних смещений на L , т.е.

$$\frac{1}{l} \int_L (U_1 + iU_2)_{z \rightarrow \zeta_0} ds_0 = \frac{1}{l} \int_L (U_1 - iU_2)_{z \rightarrow \zeta_0} ds_0 = 0. \quad (5.3)$$

Здесь l - длина контура L .

Приступаем к решению сформулированных краевых задач.

5.2. Система СИУ в случае дифракции на системе жестких неподвижных включений

Рассмотрим краевую задачу (4.1), (5.1), (5.2), (5.3) при условии, что функции $U_1(x,y)$ и $U_2(x,y)$ удовлетворяют условиям излучения на бесконечности, т.е. представляют собой расходящиеся волны. Следуя, выбранной нами методике, представим указанные функции в каждой из областей D_1 и D_2 в виде потенциалов типа простого слоя

$$U_1(x, y) = \int_L (f_1(s)G_1^{(1)} + f_2(s)G_1^{(2)})ds, \quad (5.4)$$

$$U_2(x, y) = \int_L (f_1(s)G_2^{(1)} + f_2(s)G_2^{(2)})ds.$$

Здесь ядра интегральных представлений есть компоненты матрицы Грина (4.9) для матрицы. Очевидно, представления (5.4) удовлетворяют уравнениям движения (4.1) в матрице. Кроме того, за счет выбора функций $G_1^{(n)}$ ($n=1,2$), они выполняют условия излучения на бесконечности. Остается удовлетворить граничному условию на контуре неподвижных включений (5.2).

Подставляя в (5.2) значения производных (4.16) и осуществляя в полученных интегралах предельный переход $z \rightarrow \zeta_0$ находим

$$\frac{d}{ds_0}(U_1 + iU_2) = \int_L (f_1(s)B_1(s, s_0) + f_2(s)B_2(s, s_0))ds, \quad (5.5)$$

$$\frac{d}{ds_0}(U_1 - iU_2) = \int_L (f_1(s)B_3(s, s_0) + f_2(s)B_4(s, s_0))ds.$$

$$B_1(s, s_0) = -d_1 \left(\frac{k}{2\pi i} \frac{\cos(\varphi_0 - \alpha_0)}{r_0} + \left(\frac{k}{4} F_{31}^{(2)} - K_1 \Phi_{11}^{(2)} \right) \cos(\varphi_0 - \alpha_0) \right),$$

$$B_2(s, s_0) = d_1 \left(\frac{1}{4\pi i} \frac{e^{i\varphi_0} - e^{-i(2\alpha_0 - \varphi_0)}}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} + \frac{1}{8} F_{31}^{(2)} e^{i(\varphi_0 + \alpha_0)} - \frac{1}{8} F_{33}^{(2)} e^{i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right),$$

$$B_3(s, s_0) = d_1 \left(\frac{1}{4\pi i} \frac{e^{-i\varphi_0} - e^{i(\varphi_0 - 2\alpha_0)}}{\zeta - \zeta_0} + \frac{1}{8} F_{31}^{(2)} e^{-i(\varphi_0 + \alpha_0)} - \frac{1}{8} F_{33}^{(2)} e^{-i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right),$$

$$B_4(s, s_0) = -d_1 \left(\frac{k}{2\pi i} \frac{\cos(\varphi_0 - \alpha_0)}{r_0} + \left(\frac{k}{4} F_{31}^{(2)} - K_1 \Phi_{11}^{(2)} \right) \cos(\varphi_0 - \alpha_0) \right),$$

$$k = \frac{\lambda_2 + 3\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}, \quad d_1 = \frac{i}{4\mu_2(1 - \nu_2)}, \quad K_1 = (1 - \nu_2)\gamma_2^2.$$

Здесь функции $\Phi_{11}^{(2)}$, $F_{31}^{(2)}$ и $F_{33}^{(2)}$ заданы соотношениями (4.15), (4.18) при условии, что в них вместо волновых чисел γ_1 и γ_2 волновые числа $\gamma_1^{(2)}$ и $\gamma_2^{(2)}$ для матрицы.

Анализ формул (5.5) показывает, то ядра $B_1(s, s_0)$, $B_4(s, s_0)$ являются сингулярными, ядра $B_2(s, s_0)$, $B_3(s, s_0)$ - непрерывны.

Вычислим теперь необходимые для (5.2) комбинации, соответствующие внешнему воздействию (4.20) или (4.21). В случае набегания на цилиндр продольной волны (4.20) имеем

$$N_1(s_0) = -N_2(s_0) = \frac{d}{ds_0}(U_1 + iU_2) = \gamma_1^{(1)} \tau e^{-i\gamma_1^{(1)} \eta_0} \sin \varphi_0. \quad (5.6)$$

Если излучается из бесконечности волна сдвига (4.21), то

$$N_1(s_0) = N_2(s_0) = \frac{d}{ds_0}(U_1 + iU_2) = -i\gamma_2^{(1)} \tau e^{-i\gamma_2^{(1)} \eta_0} \sin \varphi_0. \quad (5.7)$$

Подставляя (5.5)-(5.7) в граничные условия на контуре неподвижного включения (5.1), (5.2) приходим к следующей системе СИУ

$$\begin{aligned} \int_L (f_1(s)B_1(s, s_0) - f_2(s)B_2(s, s_0))ds &= -N_1(s_0), \\ \int_L (f_1(s)B_3(s, s_0) - f_2(s)B_4(s, s_0))ds &= -N_2(s_0). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь уравнения есть СИУ 1-го рода. Параметризованная форма интегральных уравнений (5.8) приобретает вид

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (p_1(\beta)D_1(\beta, \beta_0) - p_2(\beta)D_2(\beta, \beta_0))d\beta &= -F_1(\beta_0), \\ \int_0^{2\pi} (p_1(\beta)D_3(\beta, \beta_0) - p_2(\beta)D_4(\beta, \beta_0))d\beta &= -F_2(\beta_0), \\ p_j(\beta) &= f_j(s)s'(\beta), \quad D_l(\beta, \beta_0) = B_l(\beta, \beta_0)s'(\beta_0), \\ F_j(\beta_0) &= -N_j(\beta_0)s'(\beta_0), \quad j = 1, 2, \quad l = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Дополнительные условия (5.3) запишем в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U_1 + iU_2) d\beta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U_1 - iU_2) d\beta_0 = 0.$$

Численная реализация построенных сингулярных интегральных уравнений осуществляется методом механических квадратур по схеме, описанной в разделе 2.3.

5.3. Верификация полученных результатов.

Проверка выполнения краевых условий. Для системы неподвижных жестких включений из краевого условия следует то, что касательные напряжения равные нули. В табл. 5.1 приведены нормальные напряжения для разного волнового числа, на некоторых характерных точках контура - лобовая, теневая и точка проскальзывания. Тут $b/a=0.5$, $d=2.0$.

Таблица 5.1

Машинные нули краевых условий

| Источник | Волновое число | Расположение отверстия | Угол β в радианах | Максимум σ_s |
|----------|----------------|------------------------|-------------------------|------------------------|
| Волна | 1,7 | Центральное | 0 | $4,717 \cdot 10^{-10}$ |
| Волна | 1,7 | Центральное | 3,1415469319 | $5,537 \cdot 10^{-10}$ |
| Волна | 1,7 | Центральное | 2π | $7,473 \cdot 10^{-10}$ |
| Волна | 1,7 | Крайнее справа | 0 | $1,734 \cdot 10^{-10}$ |
| Волна | 1,7 | Крайнее справа | 3,1415469319 | $2,583 \cdot 10^{-10}$ |
| Волна | 1,7 | Крайнее справа | 2π | $3,116 \cdot 10^{-10}$ |
| Волна | 2,5 | Центральное | 0 | $6,273 \cdot 10^{-10}$ |
| Волна | 2,5 | Центральное | 3,1415469319 | $1,284 \cdot 10^{-10}$ |
| Волна | 2,5 | Центральное | 2π | $8,525 \cdot 10^{-10}$ |
| Волна | 2,5 | Крайнее справа | 0 | $6,858 \cdot 10^{-10}$ |
| Волна | 2,5 | Крайнее справа | 3,1415469319 | $2,165 \cdot 10^{-10}$ |
| Волна | 2,5 | Крайнее справа | 2π | $5,921 \cdot 10^{-10}$ |

В табл. 5.2 (P-волна) и 5.3 (SV-волна) представлены нормальные контурные напряжения на центральном жестком включении в системе,

состоящей из 3 неоднородностей. Тут $b/a=0.5$, $d=2.0$, $\gamma_2 a = 1.5$. Равенство симметричных относительно оси ОУ значений и в этой задаче также показывает соответствие результата геометрии нагружения. И также дает возможность определить верхнюю границу точности алгоритма в данной операционной среде (без применение дополнительных вычислительных средств безошибочной арифметики [35, 91-93]) – до 10^{-12} .

Таблица 5.2

Равенство симметричных значений σ_n

| Угол β в радианах | Значение σ_n | Угол β в радианах | Значение σ_n |
|-------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|
| 0 | 0.2741684342405 | | |
| 0.153248 | 0.2841314696001 | 6.129936 | 0.2841314696019 |
| 0.306496 | 0.3160580949654 | 5.976688 | 0.3160580949648 |
| 0.459745 | 0.3714929739322 | 5.823440 | 0.3714929739324 |
| 0.612993 | 0.4449202969126 | 5.670191 | 0.4449202969116 |
| 0.766242 | 0.5235761747021 | 5.516943 | 0.5235761747025 |
| 0.919490 | 0.5907011839227 | 5.363694 | 0.5907011839222 |
| 1.072738 | 0.6285220983876 | 5.210446 | 0.6285220983877 |
| 1.225987 | 0.6231426585332 | 5.057197 | 0.6231426585330 |
| 1.379235 | 0.5764316410345 | 4.903949 | 0.5764316410347 |
| 1.532484 | 0.5327670397315 | 4.750701 | 0.5327670397314 |
| 1.685732 | 0.6081957972012 | 4.597452 | 0.6081957972011 |
| 1.838981 | 0.8690656776465 | 4.444204 | 0.8690656776465 |
| 1.992229 | 1.2185145322238 | 4.290955 | 1.2185145322239 |
| 2.145477 | 1.5528295130212 | 4.137707 | 1.5528295130212 |
| 2.298726 | 1.8176125044510 | 3.984458 | 1.8176125044510 |
| 2.451974 | 1.9915628159843 | 3.831210 | 1.9915628159842 |
| 2.605223 | 2.0766630139357 | 3.677962 | 2.0766630139356 |
| 2.758471 | 2.0938824547185 | 3.524713 | 2.0938824547185 |
| 2.911720 | 2.0762444535093 | 3.371465 | 2.0762444535092 |
| 3.064968 | 2.0570476147322 | 3.218216 | 2.0570476147323 |

Таблица 5.3

Равенство симметричных значений σ_n

| Угол β в радианах | Значение σ_n | Угол β в радианах | Значение σ_n |
|-------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|
| 0 | 0.0000000000001 | | |
| 0.153248 | 0.2464189319229 | 6.129936 | 0.2464189319229 |
| 0.306496 | 0.4794952411441 | 5.976688 | 0.4794952411441 |
| 0.459745 | 0.6862403226309 | 5.823440 | 0.6862403226310 |

| | | | |
|----------|-----------------|----------|-----------------|
| 0.612993 | 0.8497248060890 | 5.670191 | 0.8497248060890 |
| 0.766242 | 0.9418458172639 | 5.516943 | 0.9418458172639 |
| 0.919490 | 0.9064978866159 | 5.363694 | 0.9064978866159 |
| 1.072738 | 0.6383159109164 | 5.210446 | 0.6383159109164 |
| 1.225987 | 0.0799813942868 | 5.057197 | 0.0799813942870 |
| 1.379235 | 1.2147081324090 | 4.903949 | 1.2147081324087 |
| 1.532484 | 2.6941879853167 | 4.750701 | 2.6941879853173 |
| 1.685732 | 3.7996237174853 | 4.597452 | 3.7996237174854 |
| 1.838981 | 4.0386899670878 | 4.444204 | 4.0386899670876 |
| 1.992229 | 3.5838009157595 | 4.290955 | 3.5838009157592 |
| 2.145477 | 2.8585391725696 | 4.137707 | 2.8585391725692 |
| 2.298726 | 2.1525761879569 | 3.984458 | 2.1525761879569 |
| 2.451974 | 1.5839052883167 | 3.831210 | 1.5839052883165 |
| 2.605223 | 1.1564874878005 | 3.677962 | 1.1564874878005 |
| 2.758471 | 0.8140240774274 | 3.524713 | 0.8140240774274 |
| 2.911720 | 0.4946153475788 | 3.371465 | 0.4946153475787 |
| 3.064968 | 0.1671529884580 | 3.218216 | 0.1671529884579 |

Очевидно, что вычислительная точность контурных напряжений модели находится в пределах 10^{-14} - 10^{-15} , что дает уверенность в результатах до 10^{-10} . Однако, как будет видно ниже, число обусловленности резко возрастает с ростом волнового числа. Поэтому вычисление значений контурных напряжений с такой точность возможно лишь для $\gamma_2 a < 10$. При этом наблюдается и снижение скорости сходимости алгоритма – при $N=1201$ точек коллокации каждого контура (как в предыдущих задачах) точность достигнется лишь 10^{-7} – 10^{-8}

В связи с этим, а также с отсутствием кластерных мощностей формирование таблицы высокоточных значений для этой задачи не проводилось.

Сравнение с результатами для одиночного неподвижного включения и периодической системы. Проведено сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [95] для случая одиночного эллиптического неподвижного жесткого включения, полученного удалением элементов системы на значительное расстояние друг от друга – до 10^{+6} . Сравнение с результатами [95] показали хорошую достоверность используемых вычислительных алгоритмов.

Как и в работе [95], кривые 1, 2, 3 и 4 на рис. 5.1 отвечают случаю Р-

волны, где значениям параметра $b/a = \{0.5, 1.0, 2.0, 5.0\}$, $\nu = 0,3$, $\gamma_2 a = 1$

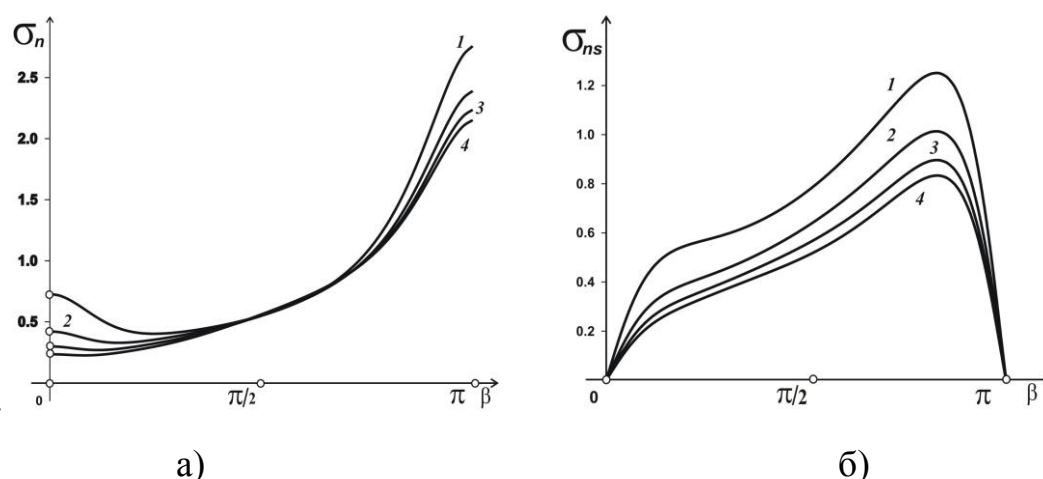


Рис. 5.1 Нормальные напряжения для системы из трех жестких включений

Численное исследование показало, что при воздействии из бесконечности P или SV -волн в системе неоднородностей также наблюдается эффект насыщения [63, 96]. Используя этот факт в работе проводилось косвенное сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [85] для случая периодической системы эллиптических подвижных жестких включений - посредством тестирования программного приложения, моделирующего поведение системы упругих включений из [95]. Результаты сравнения с [85] приведены в Приложении 2. А результаты сравнений теста на «физичность» компьютерной программы из [95] и разработанной для Раздела 5 приведены в Приложении 3.

5.4. Вычисление контурных напряжений системы неподвижных жестких включений.

На рис. 5.2 и 5.3 приведены графики распределения нормальных напряжений σ_n на контуре центрального и крайнего (рис. 5.2 – случай P -волны, рис. 5.3 – SV -волны,) включений эллиптической формы, при $d/a=2.0$; $b/a=2.5$. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям $\gamma_{1,2}a=0.7, 1.5$ и 2.0 . Расчеты

показывают, что существует принципиальное различие в распределении контурных напряжений при набегании на систему жестких включений волны расширения-сжатия (1) или волны сдвига (2).

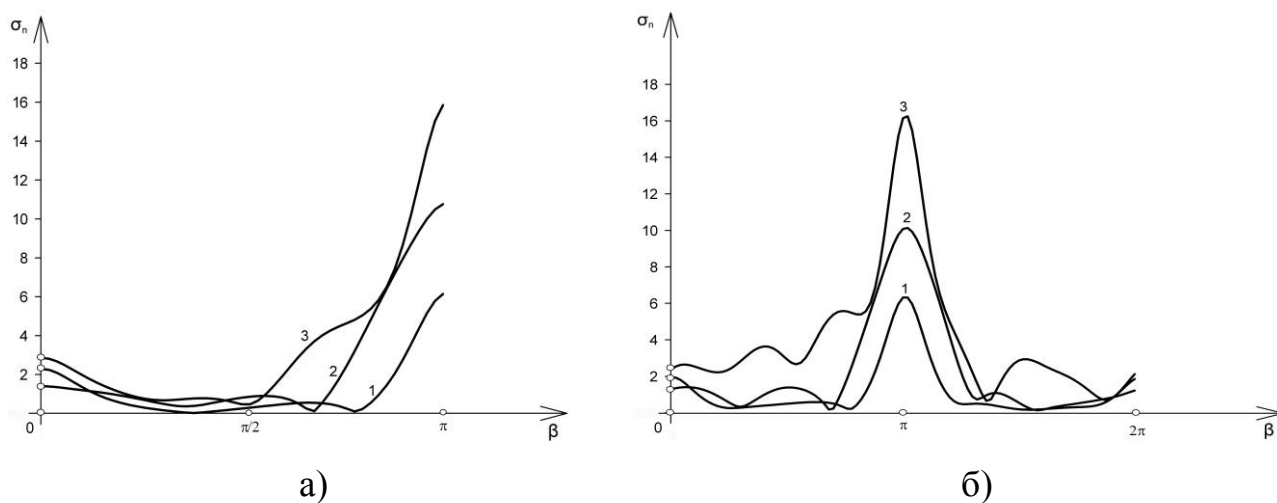


Рис. 5.2 Нормальные напряжений под воздействием Р-волны

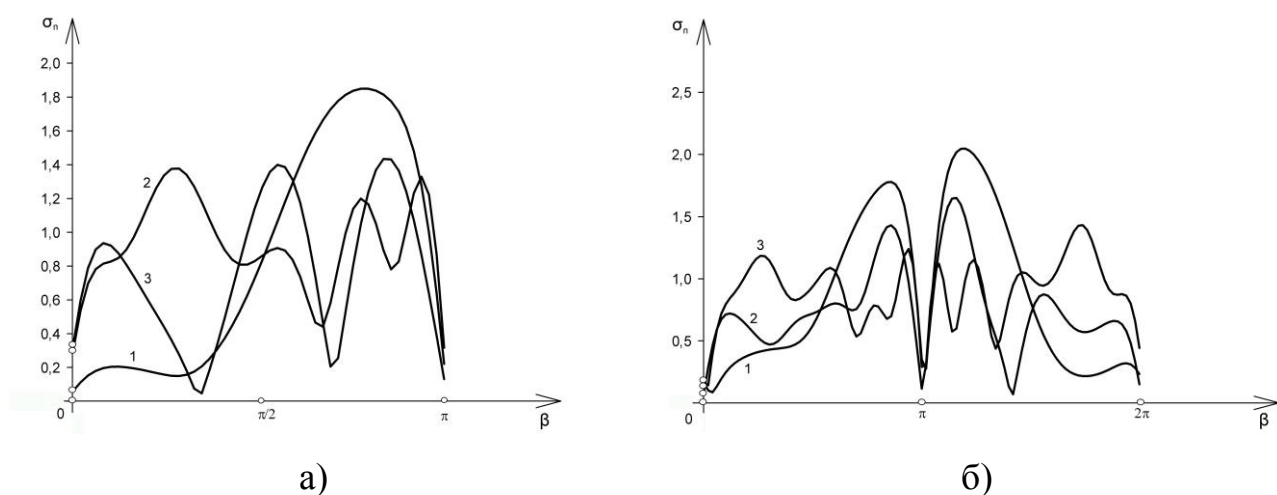


Рис. 5.3 Нормальные напряжений под воздействием SV-волны

В работе также исследована дифракция плоских волн на локальных системах жестких неподвижных включений с увеличенным числом отражателей (более 10). С целью экономии места большинство графиков с иными параметрами нагружения приведено в Приложениях 10-11. Таблицы высокоточных значений максимальных контурных напряжений не формировалась.

На рис. 5.4 показана кривая временной зависимости загрузки узлов

кластера.

На рис. 5.5 показана зависимость числа обусловленности матрицы СЛАУ от $\gamma_2 a$. В этой модели наблюдается еще более существенное ухудшение обусловленности матрицы при $\gamma_2 a > 10$.

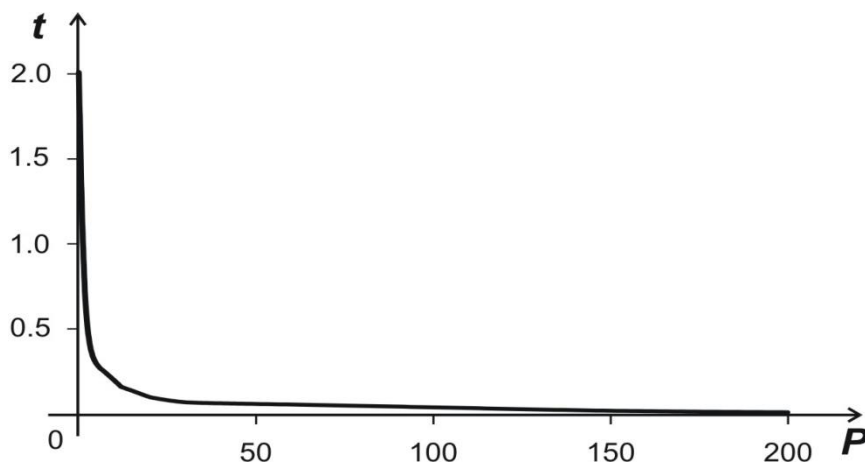


Рис. 5.4 График загрузки узлов кластера «Инпарк-256»

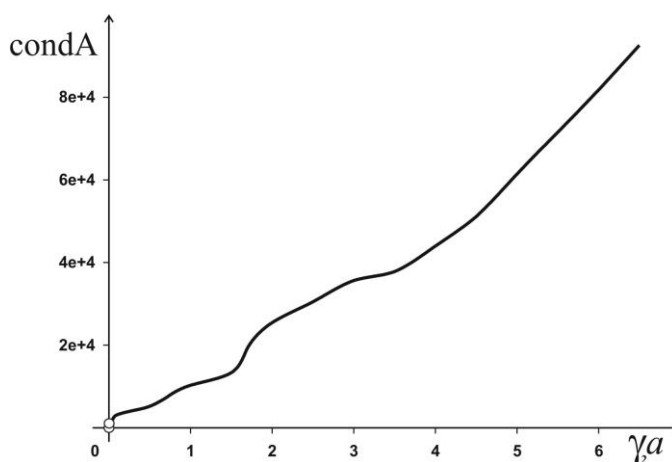


Рис. 5.5 Зависимость числа обусловленности матрицы от $\gamma_2 a$

Приведем важную цитату из [108] «Как известно, точность вычислений рассеянного поля существенно зависит от волнового числа $\gamma a = \pi(2a/\lambda)$, где λ – длина волны падающего поля; $2a$ – максимальный размер рассеивателя (в рассматриваемой задаче это диаметр). Наиболее высокая точность достигается в длинноволновом приближении $\gamma a \ll 1$. С увеличением γa приближаемся к резонансной области $\gamma a \sim 1$ и точность решения в виде рядов снижается. При больших волновых числах $\gamma a \gg 1$ решение в рядах вообще не применимо и

нужно строить асимптотические решения. Согласно приведенным расчетам, предлагаемый метод дает хорошие результаты в пределах $2a/\lambda \ll 1 \dots$.

Данный фундаментальный вывод теории дифракции полностью совпадает с результатами исследований влияния волнового числа γa на число обусловленности матрицы СЛАУ.

Как показали исследования, проведенные во всем описанных задачах, число обусловленности заметно возрастает (обусловленность матриц СЛАУ падает заметно падает) с ростом значения волнового числа. Можно сделать вывод, что число обусловленности матрицы СЛАУ в методе СИУ, позволяющем решить конкретную задачу, и общая обусловленность модели дифракции на базе уравнения Гельмгольца имеют взаимно однозначное соответствие. А это говорит о том, что число обусловленности при численных исследованиях является критерием достоверности получаемых результатов в смысле доверия к точности вычислений.

5.5. Выводы к 5 разделу.

1. Для задачи дифракции волн плоской деформации на системе жестких неподвижных включений некруговой цилиндрической формы параллельные алгоритмы также позволяют значительно сократить время вычислений и более детально проанализировать характеристики волнового поля.

2. Полученная зависимость числа обусловленности от $\gamma_2 a$ для задачи дифракции волн плоской деформации на системе жестких неподвижных включений некруговой цилиндрической формы также показала, что модель хорошо обусловлена при $\gamma_2 a < 10$. Однако дальнейший рост волнового числа приводит к резкому ухудшению обусловленности матрицы СЛАУ. При этом снижается и скорость сходимости алгоритма.

3. Для указанного диапазона числа обусловленности проведенные тесты верификации результатов показали достоверность полученных данных, а так же хорошую сходимость и устойчивость алгоритмов.

5. При плоских гармонических воздействиях на локальные системы жестких неподвижных включений произвольного поперечного сечения с увеличенным числом отражателей также возникает эффект насыщения.

6. Временные закономерности загрузки узлов при параллельном кластерном решении плоской задачи, основанной на системе СИУ также показывает, что производительность алгоритма зависит только от объема пересылок при решении СЛАУ. Удвоение сложности решаемой задачи, а также многократное увеличение обрабатываемых программным приложением данных практически не влияет на статистику загрузки узлов.

Выводы диссертационной работы

В диссертационной работе получены новые обоснованные результаты, решающие важную научно-прикладную проблему, суть которой заключается в повышении эффективности и точности определения характеристик физических полей на системах отражателей, находящихся под воздействием гармонических антиплоской или плоских нагрузок, если эти процессы моделируются СИУ.

Результаты исследований позволяют сделать следующие выводы.

1. Алгоритм высокоточного определения локаций и максимальных характеристик искомым функций на контурах локальных систем неоднородностей произвольного поперечного сечения (в интерпретации теорий упругости – полей перемещений и напряжений) может быть построен с использованием метода СИУ на параллельных вычислениях при последовательных приближениях уточняющего смещения точек коллокации при дискретизации контуров.

2. Определяющим фактором применения математических моделей поведения систем неоднородностей от воздействий стационарных гармонических волн антиплоской или плоской деформации, основанных на СИУ – это зависимость обусловленности матриц СЛАУ от диапазонов волновых чисел (частот) гармонических колебаний.

3. При гармоничных воздействиях на локальные системы неоднородностей с увеличенным числом отражателей возникает эффект насыщения, то есть равенство значений до третьего знака после запятой искомым функций на контуре центральной неоднородности аналогичным значением на контуре неоднородности при решении периодической задачи.

4. Характеристики полей напряжений от гармонических волн, взаимодействующих с локальными системами неоднородностей, а также шкалы высокоточных значений локаций и максимальных напряжений на контурах локальных систем отверстий, жестких и упругих включений эллиптического и ромбического сечения подтверждают, что алгоритм позволяет определять

высокоточные значения контурных напряжений, поскольку кривые зависимостей – гладкие.

5. Временные закономерности загрузки узлов при параллельном кластерном решении четырех разных задач, основанных на СИУ, показывают, что снижение производительности алгоритма зависит только от объема пересылок при решении СЛАУ.

6. Сравнение временных зависимостей загрузки узлов при параллельном кластерном решении описанных задач методом СИУ показывает, что наиболее оптимальным способом разработки приложений является так называемое в MPI-2 «икрометание», когда формирование матрицы СЛАУ осуществляется поэлементно, а решение СЛАУ – построчно.

7. Упорядочение (рейтинг) моделей по возрастанию числа обусловленности матриц СЛАУ следующее:

- модель дифракция волн сдвига на отверстиях на базе уравнения Фредгольма 2-го рода
- модель дифракции волн плоской деформации на отверстиях на базе СИУ 2-го рода
- модель дифракции волн сдвига на упругих и жестких включениях на базе СИУ 1-го рода
- модель дифракции волн плоской деформации на жестких неподвижных включениях на базе СИУ 1-го рода

Данное упорядочение получено благодаря сравнительному анализу числа обусловленности в используемых СИУ 1-го и 2-го рода. Сравнение показывает, что обусловленность снижается с ростом порядка модели, а также с использованием СИУ 1-го рода.

8. В схемах численной реализации СИУ 1-го рода использование способа включения дополнительных условий в СЛАУ согласно схеме Мультота (путем изъятия любого одного линейного уравнения) не приводит к накоплению вычислительных ошибок.

9. Для подтверждения достоверности вычислений эффективными являются тесты валидации алгоритмов, которые учитывают возможность моделирования физических свойств одних отражателей благодаря другим (моделирование поведения отверстий, жестких подвижных или неподвижных включений благодаря частным случаям физических параметров упругих включений). При этом сравниваемые безразмерные значения совпадают с точностью до 10^{-5} .

10. Основные изменения характеристик физических полей на контурах неоднородностей всех исследованных локальных систем заметны при числе неоднородностей от 1 до 5-7. Как видно из рисунков, приведенных в Приложениях 4-11, все зависимости безразмерных контурных напряжений от угловых координат начиная с 5 неоднородностей (в соответствующих конфигурациях) претерпевают лишь незначительные изменения, которые после насыщения системы (начиная с 10 неоднородностей) практически уже не наблюдаются.

Список использованных источников

1. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций / В.П. Агапов. - М.: Изд-во АСВ (Ассоциации строительных вузов), 2000. - 152с.
2. Антоненко М.Н. Численное моделирование распространения упругих волн в неоднородной среде: дис. на соиск степ. к.ф.-м.н.: 05.13.18 / М.Н. Антоненко. - Москва, 2004. - 135с.
3. Арсенин В.Я. Об одном способе регуляризации сингулярных интегральных уравнений первого рода / В.Я. Арсенин, С.М. Белоцерковский, И.К. Лифанов, А.Ф. Матвеев // Дифференциальные уравнения. - 1985. - 21. - №3. - С.455-464.
4. Бабич В.М. Линейные уравнения математической физики / В.М. Бабич, М.Б. Капилевич, С.Г. Михлин и др. - М.: Наука, 1964. - 368с.
5. Банаф (R. P. Vanaugh) Дифракция стационарных упругих волн на препятствиях произвольной формы / Банаф (R. P. Vanaugh), Гольдсмит (W. Goldsmith) // Прикл. механика. - 1963. - 30. - №4. - С.126-134.
6. Бардзокас Д.И. Распространение волн в электромагнитоупругих средах / Д.И. Бардзокас, Б.А. Кудрявцев, Н.А. Сенник. - М.: Едиториал УРСС, 2003. - 336с.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. - М.: Наука, 1987. - 600с.
8. Белов В.С. Информационно-аналитические системы. Основы проектирования и применения / В.С. Белов. - М.: МЭСИ, 2005. - 111с.
9. Белов М.А. Асимптотические методы обращения интегральных преобразований / М.А. Белов, Т.Т. Цирулис. - Рига: Зинатне, 1985. - 287с.
10. Белоцерковский С.М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С.М. Белоцерковский, И.К. Лифанов. - М.: Наука, 1985. - 256с.
11. Белоцерковский С.М. Метод дискретных особенностей в плоских задачах теории упругости / С.М. Белоцерковский, И.К. Лифанов, М.М. Солдатов // ПММ. - 1983. - 47. - Вып. 5. - С.781-789.
12. Белоцерковский С.М. Математическое моделирование нестационарного отрывного обтекания кругового цилиндра / С.М. Белоцерковский, В.Н.

Котовский, М.И. Нигат, Р.М. Федоров // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. - 1983. - №4. - С.138-147.

13. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. - М.: Мир, 1984. - 494с

14. Бойков И.В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных уравнений/ И.В. Бойков. - Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2005. - 359с.

15. Борисковский В.Г. Динамическая механика разрушения / В.Г. Борисковский, В.З. Партон. - Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер.: Механика деформируемого твердого тела, 1983. - 16. - 84 с.

16. Васильев Е.Н. Алгоритмизация задач дифракции на основе интегральных уравнений. -Прикладная электродинамика. Сб. научно- методических статей / Е.Н. Васильев// М.: Высшая школа. - 1977, С.94-128.

17. Васильев Е.Н. Численные методы решения задач дифракции на локальных неоднородностях / Е.Н. Васильев, А.С. Ильинский, А.Г. Свешников// Вычисл. методы и программирование. - 1975. - Вып. 24. - С.3-23.

18. Вайникко Г.М. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г.М. Вайникко, И.К. Лифанов, Л.Н. Полтавский. - М.: Наука, 2001. - 508с.

19. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи / Н.П. Векуа. - М.: Наука, 1970. - 379с.

20. Верлань А.Ф. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. - Киев: Наукова думка, 1978. -292с.

21. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: метод, алгоритмы, программы: Справочное пособие / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. - К.: Наукова думка, 1986. - 544с.

22. Вертгейм И.И. Параллельные технологии вычислений в механике сплошных сред и МДТТ. Учебное пособие / И.И. Вертгейм, В.Н. Терпугов. - Пермь: ИГУ, 2007. - 84с.

23. Воеводин В.В Параллельные вычисления / В.В Воеводин, Вл.В. Воеводин. -

СПб.: БХВ- Петербург, 2002. - 608с.

24. Воеводин В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах / В.В. Воеводин. - М.: «Наука», 1986. - 296с.

25. Волобуева Т.В. Рассеяние плоских гармонических волн на цилиндрической полости эллиптического сечения в ортотропной среде / Т.В. Волобуева, В.И. Сторожев // Теоретическая и прикладная механика. - 1999. - Вып. 29. - С.66-79.

26. Габдулхаев Б.Г. К численному решению интегральных уравнений методом механических квадратур / Б.Г. Габдулхаев // Изв. Вузов. Математика. - 1972. - №12. - С.23-39.

27. Габдулхаев Б.Г. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений / Б.Г. Габдулхаев // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер.: Мат. анализ. - 1980. - Вып.18. - С.251-307.

28. Габдулхаев Б.Г. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур / Б.Г. Габдулхаев // Изв. Вузов. Математика. - 1965. - №5. - С.43-51.

29. Галишникова Т.Н. Численные методы в задачах дифракции / Т.Н. Галишникова, А. С. Ильинский. - М.: Изд-во МГУ, 1987. - 208с.

30. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов: учебное пособие / Ю.В. Гандель. - Харьков: Изд-во ХНУ, 2002. - 92с.

31. Гандель Ю.В. Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей / Ю.В. Гандель, В.Д. Душкин. - Х.: АВВ МВСУ, 2012. - 544с.

32. Гандель Ю.В. Обоснование численного метода решения систем сингулярных интегральных уравнений задач дифракции на решетках / Ю.В. Гандель, Т.С. Полянская // Дифференциальные уравнения. - 2003. - 39. - №9. - С.1229-1239.

33. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. - М.: Физматгиз, 1977. - 640с.

34. Головкин Б.А. Параллельные вычислительные системы / Б.А. Головкин.-

М.: Наука, 1980. - 520с.

35. Грегори Р. Безошибочные вычисления. Методы и приложения / Р. Грегори, Е. Кришнамурти. М.: Мир, 1988. - 207с.

36. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / Гринченко В.Т., Мелешко В.В. - Киев.: Наукова думка, 1981. - 284с.

37. Григолюк Э.И. Периодические кусочно-однородные упругие структуры / Э.И. Григолюк, Л.А. Фильштинский. - М.: Наука, 1992. - 286с.

38. Гузь А.Н. О концентрации напряжений около нескольких отверстий в элементах конструкций / А.Н. Гузь // Прикл. механика. - 1994. - №4. - С.6-13.

39. Гузь А.Н. Дифракция упругих волн в многосвязных телах / А.Н. Гузь, В.Т. Головчан. - К.: Наукова думка, 1972. - 253с.

40. Гузь А.Н. Дифракция упругих волн / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко, М.А. Черевко. - К.: Наукова думка, 1978. - 307с.

41. Гузь А.Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости / А.Н. Гузь, Ю.Н. Немиш. - К.: Вища школа, 1982. - 352с.

42. Гуляев Ю.В. Исследование дифракции упругих волн на пластинах, ослабленных двумя отверстиями произвольной формы / Ю.В. Гуляев, В.Ф. Кравченко, В.Л. Рвачев, Н.Д. Сизова // ДАН. Математическая физика. - 1996. - 349. - №2. - С.175-179.

43. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н.М. Гюнтер. - М.: Гостехиздат, 1953. - 352с.

44. До Дык Тханг Эффективный метод решения задач дифракции волн на рассеивателях, имеющих изломы границы / До Дык Тханг, А. Г. Кюркчан // Акустический журнал. - 2003. - 49. - №1. - С.51-58.

45. Довгий С.А. Методы решения интегральных уравнений. Теория и приложения / С.А. Довгий, И.К. Лифанов. - К.: Наукова думка, 2002. - 343с.

46. Забродин А.В. Численное обследование обтекания летательных аппаратов и их элементов в реальных полетных режимах / А.В. Забродин, А.Е. Луцкий, К.Х. Марбашев, Л.Г. Чернов // Общероссийский научно-техн. журнал «Полет». - 2001. - №7- С.21-29.

47. Захаров Е.В. О единственности и существовании решения интегральных уравнений электродинамики неоднородных сред / Е.В. Захаров // Вычисл. методы и программирование, 1975. – Вып.20. – С.37-49.
48. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В.В. Иванов. - К.: Наукова думка, 1968. - 287с.
49. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости / А.И. Каландия. - М.: Наука, 1973. - 304с.
50. Ковалев Ю.Д. Изгибные колебания толстостенной оболочки конечной длины при скользящей заделке ее торцов / Ю.Д. Ковалев // Мат. методи та фіз.-мех. Поля. - 2014. – 57. - № 2. – С.133-141.
51. Коваленко Г.П. К задаче о дифракции акустической волны на неоднородном твердом теле / Г.П. Коваленко // Акуст. журн. - 1987. - Т.33. - Вып.6. - С.1060-1063.
52. Колодий В.И. Дифракция волн на эллиптической полости / В.И. Колодий // Прикл. механика. - 1979. – 15. - вып.2. - С.102-104.
53. Колтон Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. - М.: Мир, 1987. - 311с.
54. Коляда А.А. Модулярные структуры конвейерной экспресс - обработки цифровой информации в измерительно-вычислительных системах физического эксперимента: диссерт. на соиск. учен. степ. д.т.н./ А.А. Коляда. – Минск. - 1991.
55. Корнейчук А.А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. – М.: Наука. – 1964. – С. 64-74.
56. Костенко А.В. Математическая модель рассеяния волн импедансной решеткой / А.В. Костенко // Кибернетика и системный анализ. - 2015. – 51. - №3. - С.25-43.
57. Кравцов Ю.А. О границах применимости метода геометрической оптики / Ю.А. Кравцов, Ю.И. Орлов // Современные проблемы распространения и

рассеяния волн. – 1979. – С.76-195.

58. Кривонос Ю.Г. О моделировании диагностики включений в упругом теле / Ю.Г. Кривонос, И.Т. Селезов // Доп. НАН України. - 2013. - №7. - С.37-41.

59. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели / П.Д. Крутько. - М.: Наука, 1987. - 304с.

60. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости / В.Д. Купрадзе. – М.: Физматгиз, 1963. – 525с.

61. Кюркчан А.Г. К решению задачи рассеяния волн на нескольких телах / А.Г. Кюркчан // ДАН. - 1996. – 348. - №5. - С.603-607.

62. Кюркчан А. Г. Об одном новом интегральном уравнении в теории дифракции / А. Г. Кюркчан // ДАН. - 1992. – 325. - №2. - С.273-279.

63. Кюркчан А.Г. Решение трехмерной задачи дифракции волн на группе объектов / А.Г. Кюркчан, Е.А. Скородумова // Акустический журнал. - 2007. – 53. - №1. - С.5-14.

64. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. - М.: Физматгиз, 1958. - 678с.

65. Латыпов В.Н. Математические модели возмущенного движения высокого порядка точности: дисс. на соиск. степ. к.ф.-м.н.: 05.13.18 / В.Н. Латыпов. - Санкт-Петербург, 2010. – 133с.

66. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И.К. Лифанов. - М.: ТОО «Янус», 1995. - 520с.

67. Лобанов А.В. Дифракция звуковых волн на неоднородных упругих эллиптических цилиндрах и сфероидах: дисс. на соиск. степ. к.ф.-м.н.: 05.13.18 / А.В. Лобанов. - Тула, 2012. – 148с.

68. Ложкін О.М. Дифракція пружних хвиль на періодичних системах циліндричних порожнин та жорстких включень / О.М. Ложкін, О.М. Назаренко // Акустичний вісник. - 2006. – 9. - №4. - С.35-42.

69. Лерер А.М. Математическое моделирование распространения собственных волн в цилиндрических решетках при помощи импедансных граничных условий / А.М. Лерер, В.В. Махно, А.А. Ячменов // Радиотехника и

электроника. - 2006. -Т. 51. - С. 46-53.

70. Манжиров А.В. Методы решения интегральных уравнений: Справочник / А.В. Манжиров, А.Д. Полянин. - М.: Факториал, 1999. - 272с.

71. May (C.C. Mow) Динамические напряжения и смещения вблизи цилиндрической поверхности разрыва от плоской гармонической волны сдвига / May (C.C. Mow), Менте (L.J.Mente) // "Trans. ASME". – 1963. - E30. - №4. - С. 598 - 604.

72. Мельников Ю.А. Функции и матрицы Грина для систем эллиптического типа / Ю.А. Мельников. - Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1986. - 148с.

73. Митра Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Митра, С. Ли. - М.: Мир, 1974. - 327с.

74. Михлин С.Г. Некоторые вопросы теории погрешностей / С.Г. Михлин. - Л.: Издательство Ленинградского университета, 1988. - 333с.

75. Мищенко В.О. Гибкая модель приближенных вычислений ядер двумерных гиперсингулярных операторов и архитектура программной реализации / В.О. Мищенко // Харків: Вісник ХНУ. Сер.: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. - 2008. - №809. - Вып.9. - С.132-147.

76. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. - М.: Наука, 1966. - 707с.

77. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. - М.: Физматгиз, 1962. - 599с.

78. Назаренко А.М. Дифракция гармонических волн на цилиндрическом упругом включении в условиях плоской деформации / А.М. Назаренко // Динамические системы. – Симферополь, 2005. - Вып.19. - С.54-60.

79. Назаренко А.М. Вынужденные колебания прямоугольной пластинки с тонким криволинейным включением / А.М. Назаренко, В.И. Острик // Механика твердого тела, 1990. - №4. - С.93-98.

80. Назаренко А.М. Дифракция изгибных волн на криволинейной трещине и тонком включении в бесконечной пластинке / А.М. Назаренко, В.И. Острик //

Проблемы машиностроения. – Киев, 1990. - Вып.33. - С.43-48.

81. Назаренко А.М. Математическое и компьютерное моделирование в задачах дифракции P- и SV-волн на системе полостей и включений / А.М. Назаренко // Харків: Вісник ХНУ. Сер.: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. - 2015. - Вып. 28. - С.102-122.

82. Назаренко А.М. Моделирование дифракции SH-волн на неоднородностях методами сингулярных интегральных уравнений / А.М. Назаренко // Харків: Вісник ХНУ. Сер.: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. - 2015. - Вып.27. - С.106-122.

83. Назаренко О.М. Дифракція плоских гармонічних хвиль на періодичній системі циліндричних порожнин / О.М. Назаренко // Харків: Вісник НТУ «ХПІ». Сер.: Математичне моделювання в техніці та технологіях. - 2015. - №41(1150). - С.93-97.

84. Назаренко О.М. Моделювання взаємодії плоских гармонічних хвиль з циліндричними включеннями / О.М. Назаренко // Харків: Вісник НТУ «ХПІ». Сер.: Математичне моделювання в техніці та технологіях. - 2015. - №18(1127). - С.108-115.

85. Назаренко А.М. Дифракция плоских гармонических волн на периодической системе жестких цилиндров / А.М. Назаренко, А.М. Ложкин // Динамические системы. – Симферополь. – 2006. – Вып. 20. – С.59-67.

86. Назаренко А.М. Дифракция волн плоской деформации на жестком цилиндрическом включении произвольного поперечного сечения / А.М. Назаренко, А.М. Ложкин, Б.Е. Панченко // Донецьк: Вісник ДонНУ. Сер. А: Природничі науки. – 2006. – №1. – С.143-147.

87. Назаренко А.М. Взаимодействие упругих волн с цилиндрической полостью в условиях плоской деформации / А.М. Назаренко, А.М. Ложкин, Б.Е. Панченко // Весник НТУ «ХПІ». Тематический выпуск: Динамика и прочность машин. – 2005. – № 47. – С. 112–117.

88. Назарчук З.Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах / З.Т. Назарчук. - К.: Наукова думка, 1989. - 256с.

89. Неганов В.А. Сингулярные интегральные уравнения как метод физической регуляризации некорретных электродинамических задач радиотехники и связи / В.А. Неганов // Успехи современной радиоэлектроники. - 2005. - №12 – С.16-24
90. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков. - СПб.: Питер, 2001.-304с.
91. Оцоков Ш.А. Алгоритм безошибочного суммирования чисел с фиксированной запятой / Ш.А. Оцоков // Новые информационные технологии: Тез докл Всеросс. научн.-техн. конф. - М.:МГАПИ. - 2003 - Т.1. - С.155-158.
92. Оцоков Ш.А. Разрядно-параллельный алгоритм и структура вычислительного устройства безошибочной обработки массивов числовых данных» / Ш.А. Оцоков, Ш-М.А. Исмаилов. // Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации, бизнесе: Сб. трудов международной научной конференции , Украина, Крым, Ялта-Гурзуф .- 2003. - С.37-39.
93. Оцоков Ш.А. Алгоритмическая и структурная организация высокопроизводительных ЭВМ с использованием модели безошибочных вычислений: дисс. на соиск. уч. степ. к.т.н.: 05.13.15/ Ш.А. Оцоков. – Москва. – 2003. – 264с.
94. Панасюк В.В. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, З.Т. Назарчук. - К.: Наукова думка, 1984. - 344с.
95. Панченко Б.Е. Решение двумерных задач дифракции упругих волн на цилиндрических неоднородностях: дисс. на соиск. к.ф.-м.н. / Б.Е. Панченко, Сумы. – 1996. - 125с.
96. Панченко Б.Е. Каркасная модель данных и ее применение к разработке CASE-средств и приложений: дисс. на соиск. д.ф.-м.н. / Б.Е. Панченко, Киев. – 2013. - 380с.
97. Панченко Б.Е. Высокоточные максимальные напряжения в задаче о взаимодействии упругих волн с системой цилиндрических полостей в условиях плоской деформации/ Б.Е. Панченко, И.Н. Сайко // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т.5. – С.139-148.

98. Партон В.З. Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. - М.: Наука, 1981. - 688с.
99. Перевозчикова О.Л. Построение и оптимизация параллельных компьютеров для обработки больших объемов данных / О.Л. Перевозчикова, В.Г. Тульчинский, Р.А. Ющенко // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – №4. – С.117 - 129.
100. Подильчук Ю.Н. Применение лучевых методов в задачах распространения и рассеяния волн (обзор) / Ю.Н. Подильчук, Ю.К. Рубцов // Прикл. механика. - 1996. – 32. - №12. - С.3-27.
101. Полумисков М.А. Разработка математических моделей для расчёта электромагнитного поля с применением сингулярных интегральных уравнений и их численное исследование: дисс. на соиск. к.т.н.: 05.09.05 / М.А. Полумисков. - Иваново, 2007. – 198с.
102. Попов В.Г. Взаимодействие плоских упругих волн с системами радиальных дефектов / В.Г. Попов // Механика твёрдого тела. - 1999. - №4. - С.118-129.
103. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела / Работнов Ю.Н. - М.: Наука, 1979. - 744с.
104. Рвачёв В.Л. Теория Р-функций / В.Л. Рвачёв. - К.: Наукова думка, 1982. - 556с.
105. Романова Е.Г. Численное моделирование задач электродинамики и аэродинамики сингулярными интегральными уравнениями: дисс. на соиск. уч. степ. к.т.н.: 05.13.18 / Е.Г. Романова. - Пенза, 2007. – 224с.
106. Селезов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах / И.Т. Селезов. – К.: Наукова думка, 1989. – 204с.
107. Селезов И.Т. Волновые гиперболические модели распространения возмущений / И.Т. Селезов, Ю.Г. Кривонос. - К.: Наукова думка, 2015. - 172с.
108. Селезов И.Т. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн / И.Т. Селезов, Ю.Г. Кривонос. - К.: Наукова думка, 2012. - 232с.

109. Селезов И.Т. Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах / И.Т. Селезов, Ю.Г. Кривонос, В.В. Яковлев. - К.: Наукова думка, 1985. - 136с.
110. Сарпкая Т. Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) / Т. Сарпкая // Современное машиностроение. Сер. «А». - 1989. - №10. — С.1-60.
111. Сетуха А.В. Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения / А.В. Сетуха. - М.: Изд-во Аргамак – медиа, 2014. - 255с.
112. Станкевич В.З. Решение динамической задачи о взаимодействии компланарных трещин в полупространстве с заземленной поверхностью посредством граничных интегральных уравнений / В.З. Станкевич, Б.М. Стасюк, О.М. Хай // Прикл. механика и техническая физика. - 2005. – 46. - №1. - С.153-159.
113. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 736с.
114. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа / Е.Е. Тыртышников. - М.: Издательский центр «Академия», 2007. - 320с.
115. Туривненко С.Н. Дифракция волн сдвига на эллиптическом цилиндре / С.Н. Туривненко // Теор. и прикл. мех., Киев-Донецк. – 1987. - N18. - С.95-98.
116. Фильштинский Л.А. Исследование упругих волновых полей в неограниченной изотропной среде с включением / Л.А. Фильштинский, Е.А. Москаленко // Теоретическая и прикладная механика. – 2007. – Вып.43. – С.124-129.
117. Фильштинский Л.А. Взаимодействие волн напряжений с криволинейными трещинами продольного сдвига в полупространстве / Л.А. Фильштинский // Прикл. математика и механика. - 1982. – 46. - №3. - С.482-487.
118. Фильштинский Л.А. Динамическая задача теории упругости для области с криволинейными разрезами (деформация продольного сдвига) / Л.А. Фильштинский // Докл. АН СССР. - 1977. – 236. - №6. - С.1327-1330.
119. Фильштинский Л.А. Моделирование физических полей в кусочно-

однородных деформируемых телах / Л.А. Фильштинский. - Сумы: Изд-во СумГУ, 2001. - 450с.

120. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн / В.А. Фок. - М.: Сов. радио, 1970. - 518с.

121. Хенл Х. Теория дифракции / Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. – М.: Мир, 1964. – 428с.

122. Химич А.Н. Численное программное обеспечение интеллектуального MIMD - компьютера «Инпарком» / А.Н. Химич, И.Н. Молчанов, А.В. Попов. - К.: Наукова думка, 2007. - 220с.

123. Химич А.Н. Эффективность двумерных блочноциклических параллельных алгоритмов / А.Н. Химич, В.В. Полянко. // Проблемы программирования– Киев. - 2008. - №3. - С.145-149.

124. Хубежты Ш.С. Сингулярные интегральные уравнения в моделировании и численном решении задач математической физики и теории упругости: дисс. на соиск д.ф.-м.н.: 05.13.18 / Ш.С. Хубежты. - Владикавказ, 2004. – 293с.

125. Хубежты Ш.С. Численное решение некоторых классов сингулярных интегральных уравнений / Ш.С. Хубежты // Исследование по комплексному анализу, теории операторов и математического моделирования, Владикавказ, Изд-во ВНИЦ РАН, - 2004, - С.375-407.

126. Черевко М.А. Дифракция продольной волны на ряде упругих круговых включений / М.А. Черевко // Trans. ASME. - 1972. – 39. - №1. - С.129-132.

127. Черевко М.А. Дифракция SV-волн на ряде упругих круговых волокон / М.А. Черевко // Прикл. механика. – 1989. – 25, №3. – С.117-119.

128. Шендеров Е.Л. Дифракция звука на упругом цилиндре, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства / Е.Л. Шендеров // Акуст. журн. - 2002. - Т.48. - Вып.2. - С.231-242.

129. Шестопалов В.П. Дифракция волн на решетках / В.П. Шестопалов, Л.Н. Литвиненко, С.А. Масалов, В.Т. Сологуб. -Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. - 285с.

130. Шульга Н.А. Дифракция волн сдвига на упругом включении некруговой

цилиндрической формы / Н.А. Шульга, В.И. Колодий // Механика композитных материалов. - 1981. - №1. - С.153-156.

131. Шульга Н.А. Дифракция SH-волн на некруговой цилиндрической полости / Н.А. Шульга, В.И. Колодий // Прикл. механика. - 1981. - 17. - №3. - С.129-131.

132. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. - М.: Наука, 1968. - 344с.

133. Aster R. Parameter Estimation and Inverse Problems / R. Aster, B. Borchers, C. Thurber. - Amsterdam: Elsevier Academic Press, 2004. - 301p.

134. Banaugh R.P. Diffraction of steady elastic waves by surfaces of arbitrary shape / R.P. Banaugh, Goldsmith W. // Trans. ASME: Appl. Mech. - 1963. - V30. - №4. - P.589-596.

135. Beale J.T. Vortex Methods II: Higher Order Accuracy in Two and Three Dimensions / J.T. Beale, A. Majda // Math, of Computation. 1982. - V. 39. - №159. - P.29-52.

136. Bates R.H.T. Analitic Constrains on electromagnetic field compulations / R.H.T. Bates // IEEE Trans. Microwave Theory and Techn. - 1975. - T.23. - V8. - P.605-623.

137. Borovikov V.A. Scattering of sound waves by smooth convex elastic cylindrical shells / V.A. Borovikov, N.D. Veksler // Wave motion. - 1985. - V.7. - P.143-152.

138. Bostrom A. Scattering by a smooth elastic obstacle / Anders Bostrom. // J. Acoust. Soc. Amer. - 1980. - V7. - V6. - P.1904-1913.

139. Burton A.J. The solution of Helmholtz' equation in exterior domains using integral equation / A.J. Burton. -Phys. Lab, Div. Numer. Anal, and Comput s. 1,1973. - 136p.

140. Capobianco M.R. On the Numerical Solution of a Nonlinear Integral Equation of Prandtl's Type/ M.R. Capobianco, G. Criscuolo, P. Junghanns // Birkhauser Verlag. - Vol. 160, 2005, - P.53 79.

141. Cottet G.-H. Vortex methods: theory and practice / G.-H. Cottet, P. Koumoutsakos. - Cambridge University Press, 2000. - 320p.

142. Datta S. K. Diffraction of SH-waves by an elliptic cylinder / S. K. Datta // Int. J.

Solid Struct. - 1974. – 10. - №1. - P.123-133.

143. Delves L.M. Numerical solution of integral equations / L.M. Delves, J. Walsh - Oxford: Clarendon press, 1974. - 339p.

144. Deuffhard P. Scientific Computing with Ordinary Differential Equations / P. Deuffhard, F. Bornemann. - N.Y.: Springer-Verlag, 2000. - 485 p.

145. Erdogan F.E. The numerical solutions of singular integral equations / F.E. Erdogan, G.D. Gupta, T.S. Cook // Mechanics of Fract. Leyden: Int Publ. - 1973. - 1. - P.368-425.

146. Feng Y.D. Time domain BEM analysis of cylinder embedded in soil with frictional slip at the interface / Y.D. Feng, Y. S. Wang, Z. M. Zhang // Soil Dyn. Earthquake Eng. - 2003. – 23. - №4. - P.303-311.

147. Filshynskiy L.A. Harmonic oscillations of a layer excited by concentrated sources / L.A. Filshynskiy, A. Abido // Materials Science. - 2006. – 42. - №5. - P.656-664.

148. Ghosh S. Diffraction of P-wave by crack in an elastic strip at asymmetric position / S. Ghosh, S.C. Mandal // Europ. J. of Mech. A / Solids. - 2006. - №2. - P.299-307.

149. Cottet G.-H. Vortex methods: theory and practice / G.-H. Cottet, P. Koumoutsakos. - Cambridge University Press, 2000. - 320p.

150. Helmholtz H. Über integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen / H. Helmholtz // Zeitschrift fuer reine und angewandte Mathematik. - LV. – 1858. - P.485-512

151. Kit H.S. Analysis of dynamic stress concentration in an infinite body with parallel penny-shaped cracks by BIEM / H.S. Kit, M.V. Khaj, V.V. Mykhaskiv // Eng. Fract. Mech. - 1996. – 55. - №2. - P.191-207.

152. Koumoutsakos P. High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods / P. Koumoutsakos, A. Leonard // J. Fluid Mech. - 1995. - V.296. - P.1-38.

153. Lei J. Analysis of dynamic interaction between an inclusion and nearby moving crack by BEM / J. Lei, Y.S. Wang, D. Gross // Eng. Anal. Bound. Elem. - 2005. – 29.

- №8. - P.802-813.

154. Lin W. H. Acoustic scattering by elastic solid cylinders and spheres in viscous fluids / W. H. Lin, A.S. Raptis // *J. Acoust. Soc. Amer.* - 1983. - V.73. - №3. - P.736-748.

155. Liu Y. Scattering of elastic waves by an elastic or viscoelastic cylinder / Y. Liu, R.S. Wu., C.F. Ying // *Geophys J. Int.* - 2000. - 142. - №27-28. - P.439-460.

156. Ioakimidis N.I. A comparison between the direct and classical numerical methods for the solution of Cauchy type singular integral equations / N.I. Ioakimidis, P.S. Theocaris // *SIAM J. Numer. Anal.* - 1980. - V17. - №1. - P.115-118.

157. Ioakimidis N.I. On convergence of two direct methods for solution of Cauchy type singular integral equation of the first kind / N.I. Ioakimidis, P.S. Theocaris // *BIT.* - 1980. - V20. - №1. - P.83-87.

158. Jain D.L. Scattering of elastic waves by circular cylindrical flaws and inclusion / D.L. Jain, Kanwal R.P. - *J. Appl. Phys.*, 1979. - V50. - №6. - P.80.

159. Jones D.S. Diffraction by a thick semi-infinite plate / D.S. Jones // *Proc. Roy. Soc. A.* - 1953. - V217. - №1129. - P.153-175.

160. Kitahara M. On a method to analyze scattering problems of an inclusion with spring contacts / M. Kitahara, Makagata, D.S. Achenbach // *Boundary Elem. Appl. Mech.: Proc. 1st Joint Jap. US Symp. Boundary Elem. Meth., Tokyo, 3-6 Oct. 1988, Oxford.* -1988. - P.239-244.

161. Mitra R. Some numerically efficient methods / R. Mitra, T. Itoh // *In: Computing technics in electromagnetics.* Oxford. - 1973. - P.305-350.

162. Melnikov Yu.A. Influence Function Approach / Yu.A. Melnikov // *Southampton, Boston: WIT Press.* - 2008. - 369p.

163. Muller C. Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen / C. Muller.-B.-G.-H., 1957, - 344 p.

164. Multhopp H. Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln. Luftfahrtforsch. / H. Multhopp. - Bd. XV, 1938. - №4. - P.153—166.

165. Nazarchuk Z .T. Mathematical modelling of electromagnetic wave scattering by a thin penetrable defect / Z .T. Nazarchuk // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* - 2003. -

39. - №3. - C.97-108.

166. Rosenhead L. The formation of vortices from a surface of discontinuity / L. Rosenhead // P. Roy. Soc. Lond.- A134. - 1931. - P.170-192.

167. Sumbatyan M.A. In-plane wave propagation throu elastic solids with a periodic array of rectangular defects / M.A. Sumbatyan // Trans. ASME. J. Appl. Mech. - 2001. – 69. - №2. - P.179-188.

168. Scarpetta E. The single - mode approximation in the problem of the propagation of a plane longitudinal wave in a elastic medium with a periodic system of rectangular defects / E. Scarpetta, M.A. Sumbatyan // J. Appl. Math. Mech. - 2003. – 67. - №4 - P.601-610.

169. Scarpetta E. Wave propogation throu elastic solids with a periodic array of arbitrarily shaped defects / E. Scarpetta, M.A. Sumbatyan // Math and Comput. Modelling. - 2003. – 37. - №1-2. - P.19-28.

170. Selezov I.T. Numerical solution of the boundary value problems of the wave diffraction by arbitrary revolution surfaces / I.T. Selezov // Numerical Methods. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. - North. - Holland. - 50. - P.473-480.

171. Shibahara M. Diffraction of steady stress waves by arbitrary shaped discintinuities in elastic medium / M. Shibahara, S. Taneto, O. Kuroyanagi // Bull JSME. - 1980. – 23. - №178. - P.493-500.

172. Shibahara M. Application of the integral equation method to the elastodynamic boundary-value problems / M. Shibahara, Y. Taniquchi //. - Bull JSME. - 1983. – 26. - №222. - P.2054-2059.

173. Su J. -H. Acoustic wave scattering by a finite elastic cylinder in water / J. -H. Su, V.V. Varadan, V.K. Varadan // J. Acoust. Soc. Amer. - 1980. – 68. - №2. - P.686-691.

174. Theocaris P.S. Numerical integration methods for the solution of singular integral equations / P.S. Theocaris, N.I. Ioakimidis // Quart. Appl. Math. - 1977. – 35. - №1. - P.173-183.

175. Vimawala A. p-adic Arithmetic Methods for Exact Computation of Rational Numbers / A. Vimawala // Scholl of Electrical Engineering and Computer Science,

Oregon State University. - 2003

176. Pao Y.H., Mow C.C. The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration / Y.H. Pao, C.C. Mow. – New York: Crane Rassak Co, 1973. – 689p.

177. Pao Y.-H. Elastic Waves in Solids / Y.-H. Pao // Transactions of the ASME. – December. - 1983. - Vol.50. - P.1152 -1164.

Приложение 1

Акт внедрения

«Затверджую»
директор ІПФ НАНУ,
акад. НАН України,
засл. діяч науки і техн. України
В.Ю. Сторіжко

Колода



АКТ ВПРОВАДЖЕННЯ
результатів дисертаційної роботи

15.02.2014

Цей акт складено в тому, що результати дисертаційної науково-дослідної роботи «Математичне моделювання поведінки систем відбивачів при гармонічних впливах на основі сингулярних інтегральних рівнянь» в частині глав 3, 4 та 5, виконаної Сайком І.М., впроваджено у науковій діяльності інституту. Методи розпаралелювання алгоритмів числового розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь, та програмні комплекси, що розроблені та відлагоджені дисертантом, використовуються в науково-дослідному центрі ННП, в секторі телекомунікаційних і грид технологій.

Завідуючий НДЦ ННП
ІПФ НАН України

к.ф.-м.н. Р.Ю. Лопаткін

Приложение 2

Результаты тестирования программных приложений

1. SH-волны, эллиптическое одиночное отверстие. На рис. П2.1 приведены цитируемые графики из [131], а на рис. П2.2 – полученные путем отдаления отверстий друг от друга на расстояние 10^{10} . Тут на рис. П2.1, а и рис. П2.2, а – $b/a = 7/3$; $\gamma_2 a = \{0.1, 0.9, 1.5\}$, а также на рис. П2.1, б и рис. П2.2, б $a/b = 7/3$; $\gamma_2 a = \{0.1, 0.9, 1.5\}$

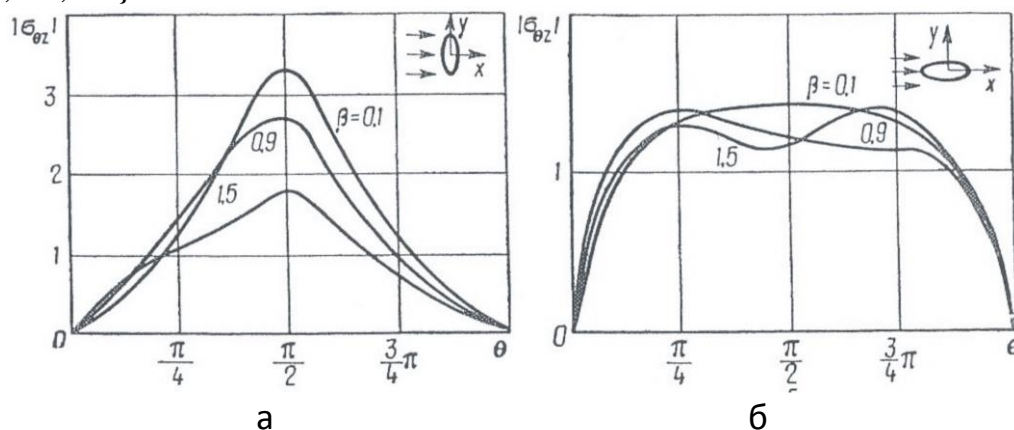


Рис. П2.1

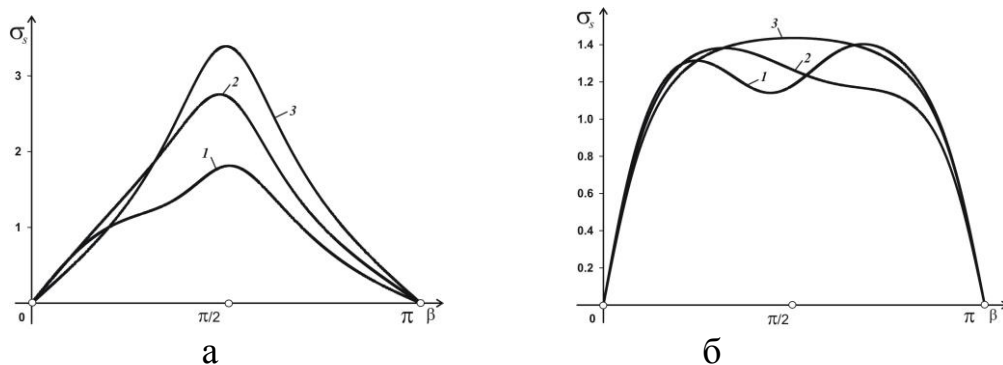


Рис. П2.2

2. SH-волны, эллиптическое одиночное упругое включение. На рис. П2.3, а приведены цитируемые графики из [130], а на рис. П2.3, б – полученные путем отдаления включений друг от друга на расстояние 10^{10} . Тут $b/a = 7/3$; $\gamma_2 a = \{0.1, 0.9, 1.5\}$, $\mu_2 / \mu_1 = 20.0$, $\rho_2 / \rho_1 = 2.0$

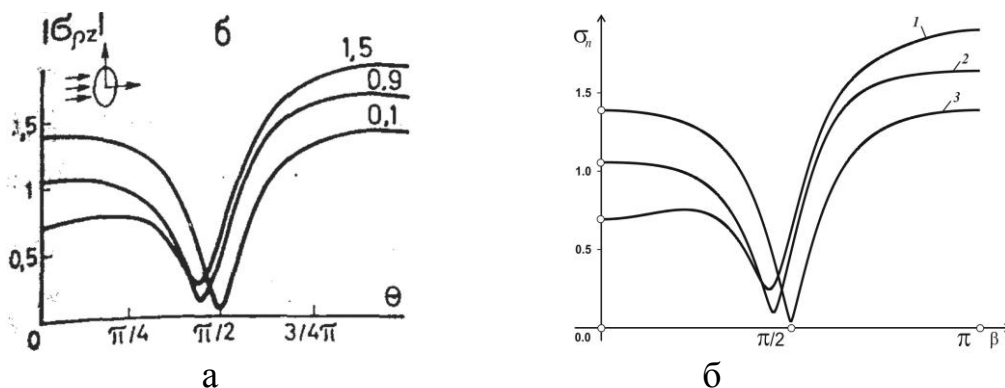


Рис. П2.3

3. SH-волны, эллиптическое одиночное неподвижное или подвижное

включения. На рис. П2.4 приведены цитируемые графики из [95], а на рис. П2.5 – полученные путем отдаления включений друг от друга на расстояние 10^{10} . Тут $b/a = 3/7$; $\gamma_2 a = \{0.9, 0.6, 0.4, 0.06\}$, $\rho_2 / \rho_1 = 2.0$

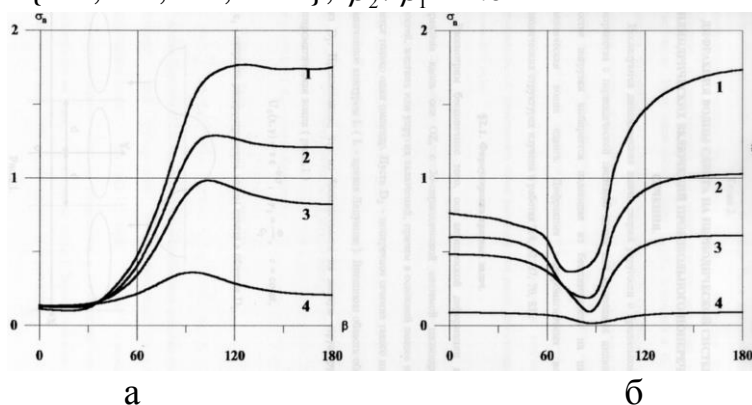


Рис. П2.4

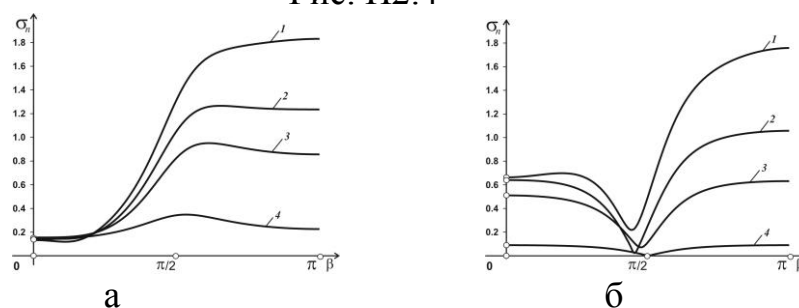


Рис. П2.5

4. SH-волны, эллиптическое отверстие или подвижное включение в периодической задаче. На рис. П2.6 приведены цитируемые графики из [95], а на рис. П2.7 – полученные путем насыщения системы до 13 отражателей. Тут $b/a = 0.5$; $d/a = 4$, $\gamma_2 a = \{0.2, 0.4, 0.7, 1.0\}$, $\rho_2 / \rho_1 = 2.0$

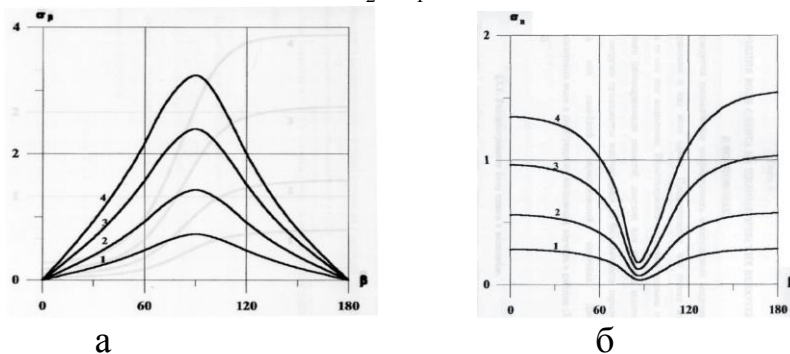


Рис. П2.6

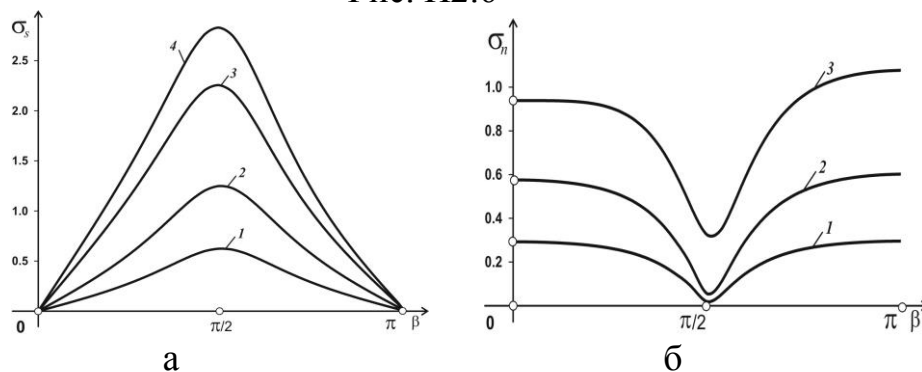


Рис. П2.7

5. SH-волны, эллиптическое неподвижное включение в периодической задаче. На рис. П2.8, а приведены цитируемые графики из [95], а на рис. П2.8, б – полученные путем насыщения системы до 13 отражателей. Тут $b/a = 0.5$; $d/a = 4$, $\gamma_2 a = \{0.2, 0.4, 0.7, 1.0\}$

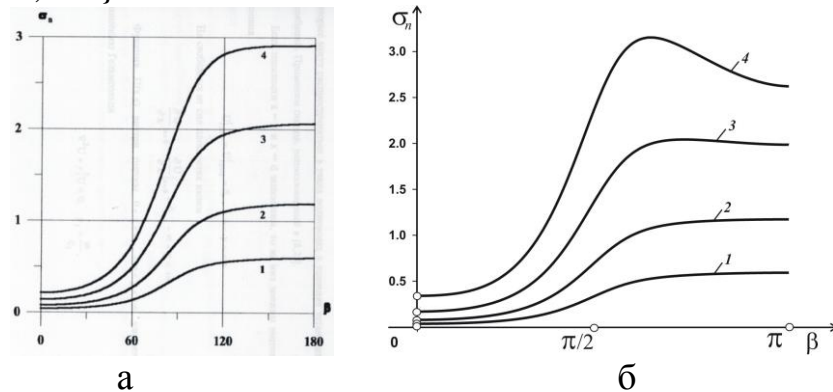


Рис. П2.8

6. SH-волны, эллиптическое упругое включение в периодической задаче. На рис. П2.9 приведены цитируемые графики из [95], а на рис. П2.10 – полученные путем насыщения системы до 13 отражателей. Тут $b/a = 0.5$; $d/a = 4$, $\gamma_2 a = \{0.2, 0.4, 0.7, 1.0\}$, $\mu_2 / \mu_1 = 2.0$, $\rho_2 / \rho_1 = 2.0$

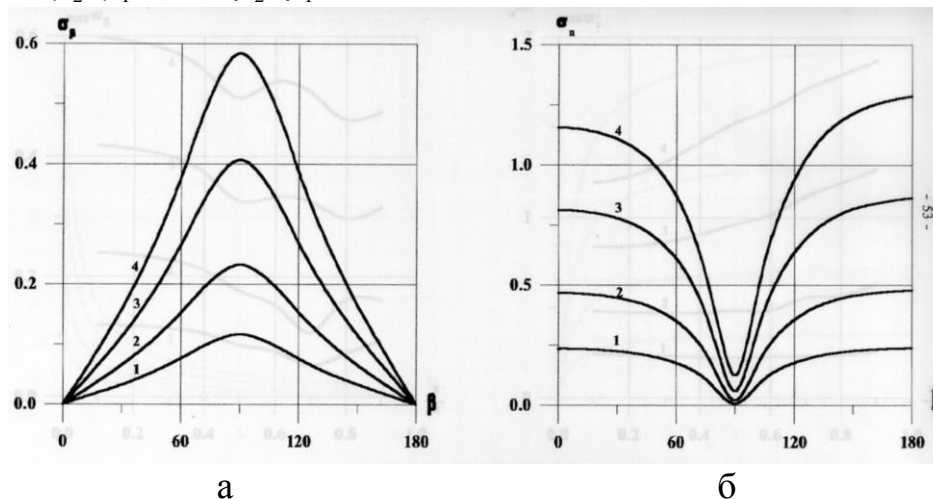


Рис. П2.9

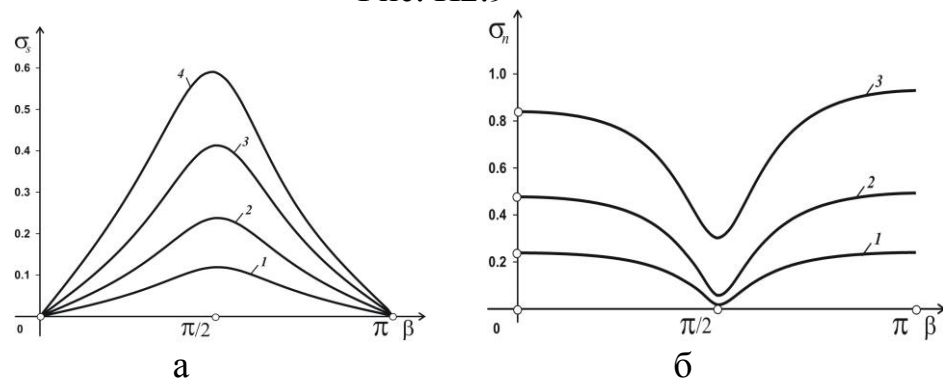


Рис. П2.10

7. Волны плоской деформации, SV-случай, эллиптическое одиночное отверстие. На рис. П2.11, а приведены цитируемые графики из [87], а на рис.

П2.11, б – полученные путем отдаления отверстий друг от друга на расстояние 10^{10} . Тут $b/a = \{0.5, 1.0, 2.0, 5.0\}$, $\nu = 0,3$, $\gamma_2 a = 1$

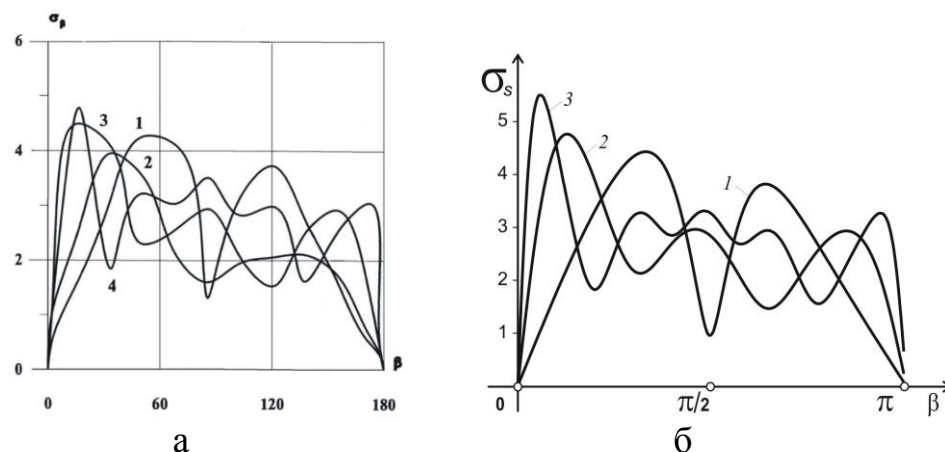


Рис. П2.11

8. Волны плоской деформации, Р-случай, эллиптическое одиночное неподвижное включение. На рис. П2.12 приведены цитируемые графики из [95], а на рис. П2.13 – полученные путем отдаления включений друг от друга на расстояние 10^{10} . Тут $b/a = \{0.5, 1.0, 2.0, 5.0\}$, $\nu = 0,3$, $\gamma_2 a = 1$

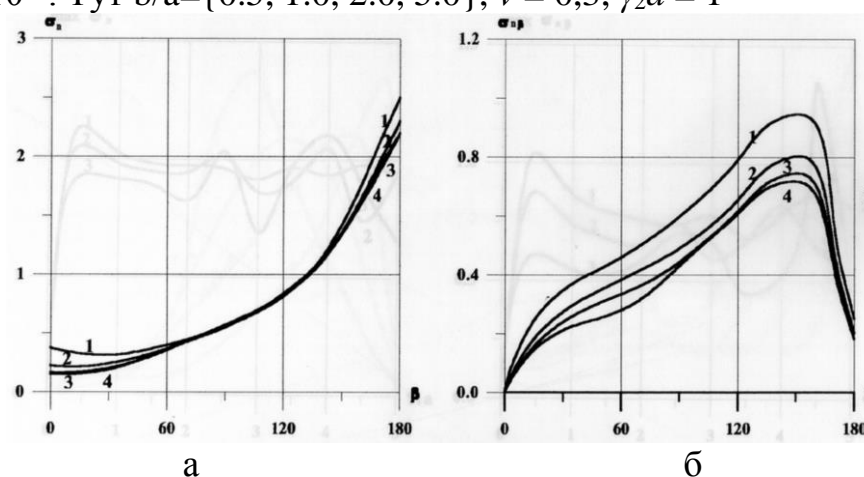


Рис. П2.12

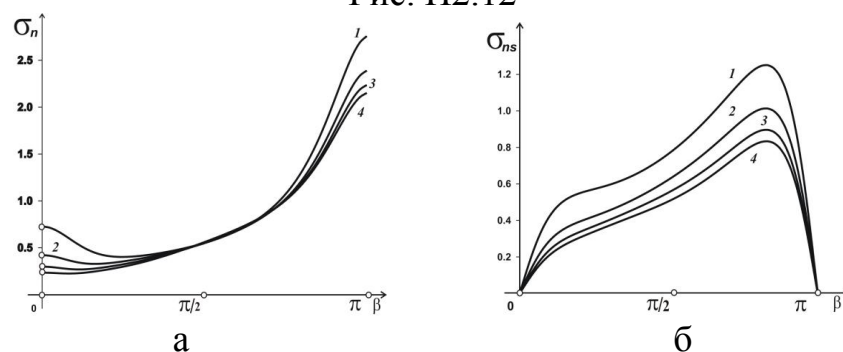


Рис. П2.13

9. Волны плоской деформации, Р-случай, эллиптическое одиночное подвижное включение. На рис. П2.14 приведены цитируемые графики из [86], а на рис. П2.15 – полученные путем отдаления включений друг от друга на расстояние 10^{10} . Тут $a/b = 0.5$, $\nu = 0,3$, $\gamma_2 a = 3.142$, $\rho_0 / \rho = 0.5; 1.0; 2.0; 0.5$

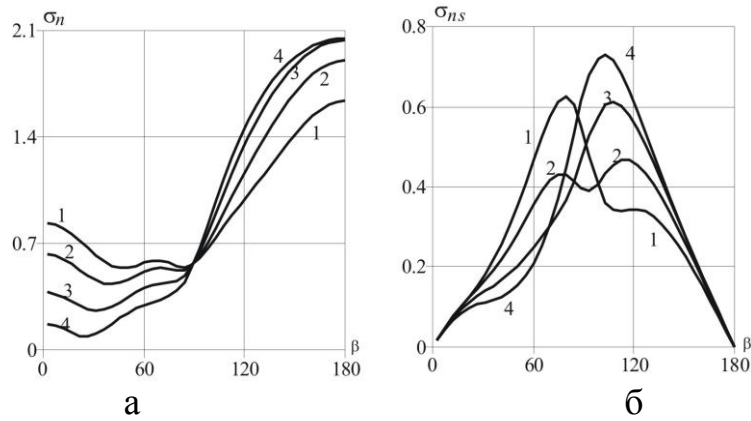


Рис. П2.14

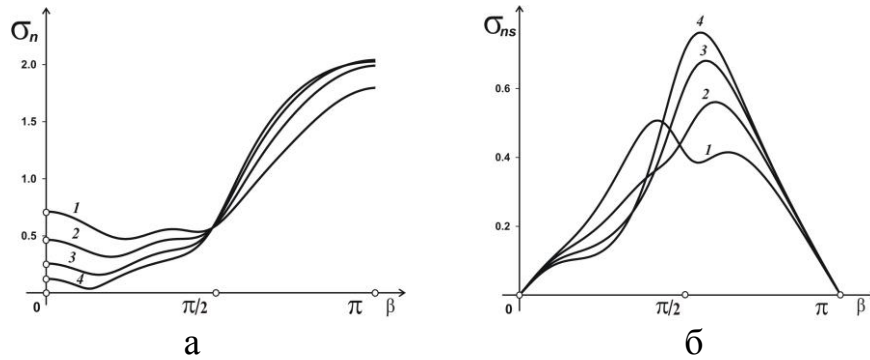


Рис. П2.15

10. Волны плоской деформации, Р-случай, эллиптическое одиночное упругое включение. На рис. П2.16 приведены цитируемые графики из [95], а на рис. П2.17 – полученные путем отдаления включений друг от друга на расстояние 10^{10} . Тут $a/b=2.0$, $\nu = 0,3$, $\rho_2 / \rho_1 = 2.0$, $\mu_2 / \mu_1 = 2.0$, $\gamma_2 a = \{0.4, 0.7, 1.0, 1.3\}$

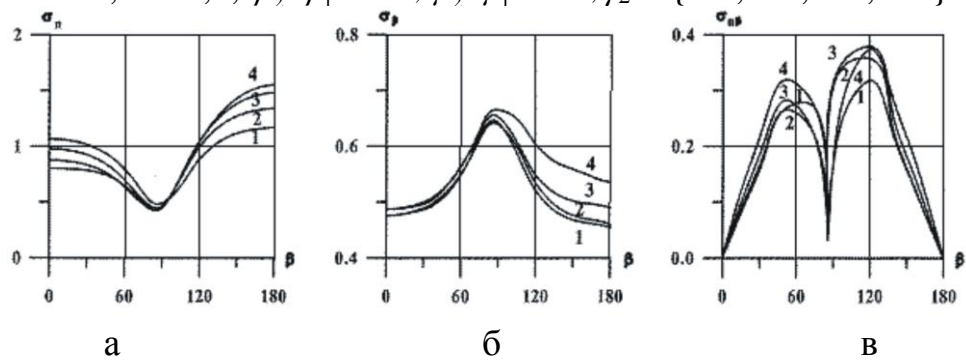


Рис. П2.16

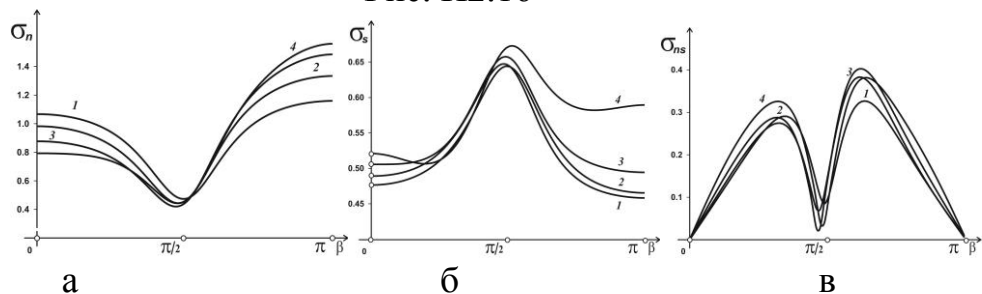


Рис. П2.17

11. Волны плоской деформации, Р-случай, эллиптическое отверстие в периодической задаче. На рис. П2.18 приведены цитируемые графики из [68], а на рис. П2.19 – полученные путем насыщения системы до 13 отражателей. Тут $b/a = 0.5$, $a/d = \{0.3, 0.5, 0.7\}$, $\gamma_1 a = 1.0$

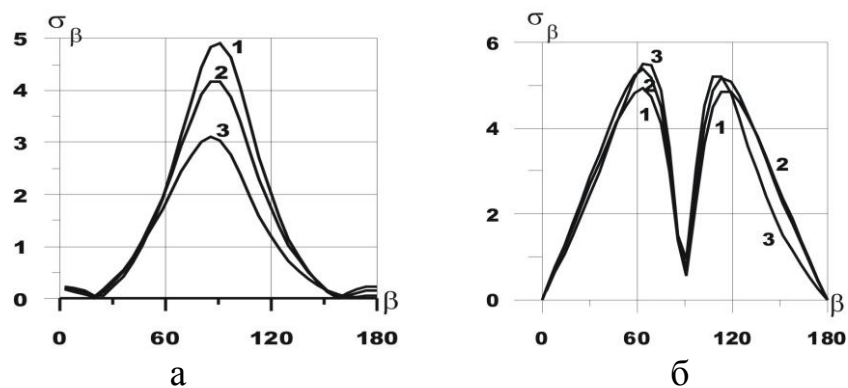


Рис. П2.18

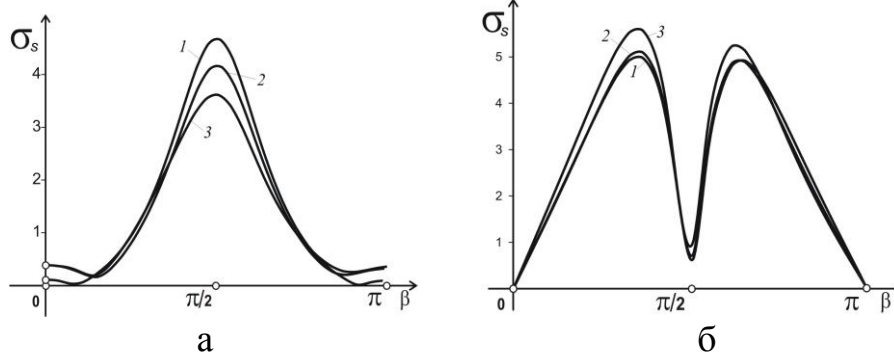


Рис. П2.19

12. Волны плоской деформации, SV-случай, эллиптическое подвижное включение в периодической задаче. На рис. П2.20, а приведены цитируемые графики из [85], а на рис. П2.20, б – полученные путем насыщения системы до 13 отражателей. Тут $a/b = 0.5$, $\nu = 0.3$, $a/d = 0.5$, $\gamma_1 a = 2.62$, $\rho_0 / \rho = 0.5; 1.0; 2.0; 0.5$

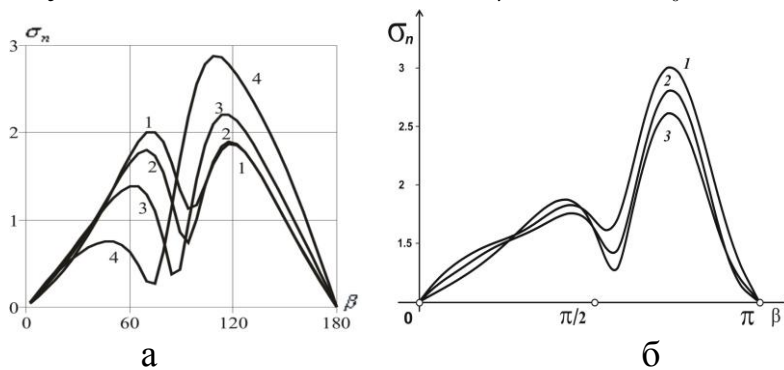


Рис. П2.20

**Результаты тестирования алгоритмов
и программных приложений на «физичность».**

1. SH-волны, модель эллиптического одиночного отверстия.

| Угол β в радианах | Отверстие | Упругое включение |
|-------------------------|--------------|-------------------|
| 0,0312596283 | 0.0614848587 | 0.0614848717 |
| 0,7814907098 | 1.5503215217 | 1.5503218250 |
| 1,5942410480 | 2.8342143306 | 2.8342147522 |
| 2,3444721295 | 1.1510410739 | 1.1510409589 |
| 3,1259628393 | 0.1453685364 | 0.1453685481 |

2. SH-волны, модель системы из 3-х эллиптических отверстий.

| Расположение отверстия | Угол β в радианах | Отверстие | Упругое включение |
|------------------------|-------------------------|--------------|-------------------|
| Центральное | 0,0312596283 | 0.0586070971 | 0.0586070874 |
| Центральное | 0,7814907098 | 1.4994643451 | 1.4994641056 |
| Центральное | 1,5942410480 | 2.5036856091 | 2.5036852801 |
| Центральное | 2,3444721295 | 0.8518637935 | 0.8518637359 |
| Центральное | 3,1259628393 | 0.0151128668 | 0.0151128659 |
| Крайнее справа | 0,0312596283 | 0.0719518527 | 0.0719518256 |
| Крайнее справа | 0,7814907098 | 1.3768184187 | 1.3768181769 |
| Крайнее справа | 1,5942410480 | 2.6988670130 | 2.6988666506 |
| Крайнее справа | 2,3444721295 | 1.1281460099 | 1.1281459074 |
| Крайнее справа | 3,1259628393 | 0.1842013714 | 0.1842013309 |

4. Волны плоской деформации, Р-случай, модель эллиптического одиночного отверстия, напряжение σ_s .

| Угол β в радианах | Отверстие | Упругое включение |
|-------------------------|--------------|-------------------|
| 0,0312596283 | 0.6278644964 | 0.6278631950 |
| 0,7814907098 | 0.8591680368 | 0.8591670707 |
| 1,5942410480 | 2.2306934283 | 2.2306928648 |
| 2,3444721295 | 0.7343932031 | 0.7343938420 |
| 3,1259628393 | 0.2765951481 | 0.2765960032 |

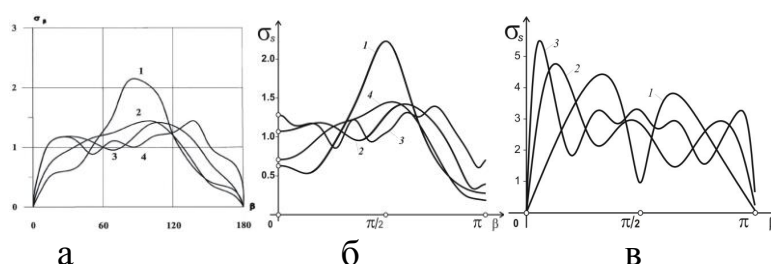


Рис. П3.1

6. Волны плоской деформации, SV-случай, эллиптическое одиночное отверстие, напряжение σ_s .

| Угол β в радианах | Отверстие | Упругое включение |
|-------------------------|--------------|-------------------|
| 0,0312596283 | 0.1798273561 | 0.1798268749 |
| 0,7814907098 | 3.9327559483 | 3.9327469944 |
| 1,5942410480 | 1.1263890119 | 1.1263846476 |
| 2,3444721295 | 2.9836810194 | 2.9836769345 |
| 3,1259628393 | 0.0566657576 | 0.0566656915 |

5. Волны плоской деформации, P-случай, система из 3-х эллиптических отверстий, напряжение σ_s .

| Расположение отверстия | Угол β в радианах | Отверстие | Упругое включение |
|------------------------|-------------------------|--------------|-------------------|
| Центральное | 0,0312596283 | 1.7766862844 | 1.7766795743 |
| Центральное | 0,7814907098 | 0.4455254698 | 0.4455233205 |
| Центральное | 1,5942410480 | 2.6016136685 | 2.6016099787 |
| Центральное | 2,3444721295 | 0.9788602939 | 0.9788605492 |
| Центральное | 3,1259628393 | 1.6354255836 | 1.6354203770 |
| Крайнее справа | 0,0312596283 | 1.1903375933 | 1.1903339583 |
| Крайнее справа | 0,7814907098 | 0.8673136493 | 0.8673118351 |
| Крайнее справа | 1,5942410480 | 2.3950433863 | 2.3950363304 |
| Крайнее справа | 2,3444721295 | 1.1499598046 | 1.1499605431 |
| Крайнее справа | 3,1259628393 | 0.9097849498 | 0.9097832807 |

7. Волны плоской деформации, SV-случай, система из 3-х эллиптических отверстий, напряжение σ_s .

| Расположение включения | Угол β в радианах | Отверстие | Упругое включение |
|------------------------|-------------------------|--------------|-------------------|
| Центральное | 0,0312596283 | 0.2127334233 | 0.2127328229 |
| Центральное | 0,7814907098 | 4.7548926915 | 4.7548806273 |
| Центральное | 1,5942410480 | 1.4629323237 | 1.4629269123 |
| Центральное | 2,3444721295 | 3.2311144839 | 3.2311087430 |
| Центральное | 3,1259628393 | 0.0544926141 | 0.0544925397 |
| Крайнее справа | 0,0312596283 | 0.3120867242 | 0.3120850639 |
| Крайнее справа | 0,7814907098 | 3.6195664123 | 3.6195584097 |
| Крайнее справа | 1,5942410480 | 0.8994996118 | 0.8994960433 |
| Крайнее справа | 2,3444721295 | 3.0433494973 | 3.0433450028 |
| Крайнее справа | 3,1259628393 | 0.5642806760 | 0.5642788720 |

7. Волны плоской деформации, P-случай, эллиптическое одиночное неподвижное включение, напряжение σ_{ns} .

| Угол β в радианах | Неподвижное жесткое | Упругое включение |
|-------------------------|---------------------|-------------------|
| 0,0312596283 | 0.0065931847 | 0.0065927817 |
| 0,7814907098 | 0.2415856819 | 0.2415780902 |
| 1,5942410480 | 1.2308074406 | 1.2307909996 |
| 2,3444721295 | 0.5701540703 | 0.5701468277 |
| 3,1259628393 | 0.0095488966 | 0.0095487650 |

8. Волны плоской деформации, SV-случай, эллиптическое одиночное неподвижное включение, напряжение σ_{ns} .

| Угол β в радианах | Неподвижное жесткое | Упругое включение |
|-------------------------|---------------------|-------------------|
| 0,0312596283 | 0.4447612266 | 0.4447598234 |
| 0,7814907098 | 0.7174571391 | 0.7174554041 |
| 1,5942410480 | 0.4868745875 | 0.4868653424 |
| 2,3444721295 | 2.2585292168 | 2.2585364623 |
| 3,1259628393 | 2.4673054244 | 2.4673132426 |

9. Волны плоской деформации, P-случай, система из 3-х эллиптических неподвижных включений, напряжение σ_{ns} .

| Расположение включения | Угол β в радианах | Жесткое включение | Упругое включение |
|------------------------|-------------------------|-------------------|-------------------|
| Центральное | 0,0312596283 | 0.0538926029 | 0.0538920875 |
| Центральное | 0,7814907098 | 1.0137304129 | 1.0137089823 |
| Центральное | 1,5942410480 | 3.3377206116 | 3.3376731785 |
| Центральное | 2,3444721295 | 0.6598232559 | 0.6598082757 |
| Центральное | 3,1259628393 | 0.0220215302 | 0.0220215513 |
| Крайнее справа | 0,0312596283 | 0.2719770311 | 0.2719782773 |
| Крайнее справа | 0,7814907098 | 0.9055671027 | 0.9055518440 |
| Крайнее справа | 1,5942410480 | 2.4131996547 | 2.4131652359 |
| Крайнее справа | 2,3444721295 | 0.7849514085 | 0.7849468149 |
| Крайнее справа | 3,1259628393 | 0.5327126964 | 0.5327129310 |

10. Волны плоской деформации, SV-случай, система из 3-х эллиптических неподвижных включений, напряжение σ_{ns} .

| Расположение включения | Угол β в радианах | Жесткое включение | Упругое включение |
|------------------------|-------------------------|-------------------|-------------------|
| Центральное | 0,0312596283 | 0.8712786332 | 0.8712784138 |
| Центральное | 0,7814907098 | 0.6506637760 | 0.6506631418 |
| Центральное | 1,5942410480 | 0.3171504604 | 0.3171394482 |
| Центральное | 2,3444721295 | 1.9395609364 | 1.9395668600 |

| | | | |
|----------------|--------------|--------------|--------------|
| Центральное | 3,1259628393 | 2.3331080801 | 2.3331153347 |
| Крайнее справа | 0,0312596283 | 0.6513430493 | 0.6513417698 |
| Крайнее справа | 0,7814907098 | 0.8741152900 | 0.8741138012 |
| Крайнее справа | 1,5942410480 | 0.6169528451 | 0.6169424843 |
| Крайнее справа | 2,3444721295 | 0.6169424843 | 1.9162600948 |
| Крайнее справа | 3,1259628393 | 2.3670692658 | 2.3670766836 |

Приложение 4

Продольный сдвиг, локальная система отверстий

Параметры для эллипса: $a/b=1.4/0.6$, $\gamma_2 a=1.5$, для ромба: $a/b=2$, $\gamma_2 a=0.9$, расстояние между неоднородностями $d_h=2$, координата источника – $Y_z=1.0$. Для сравнительного исследования бесконечного и полубесконечного случая в работе использовано программное приложение из [96]. Тут расстояние от координаты центра центральной неоднородности системы до границы (до оси ОХ рис. 2.5) $h=4.0$. Номера кривых соответствуют: 1 – полубесконечная среда с заземленной границей, 2 – полубесконечная среда с границей, свободна от сил, 3 – бесконечная среда.

В [81, 82] использованы некоторые графики из приведенной тут коллекции. Однако у авторов [97] имеются все подтверждающие приоритетные документы.

1. Воздействие – волна из бесконечности

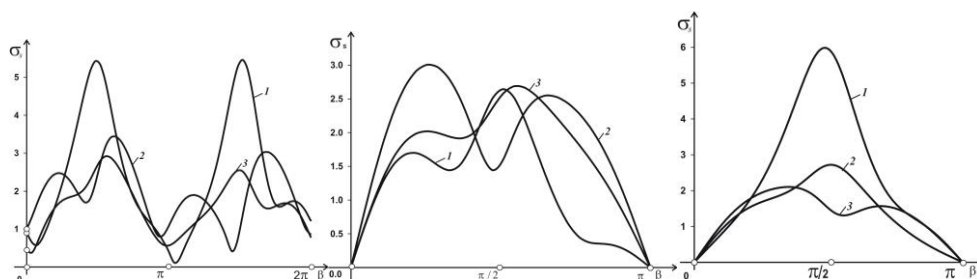


Рис. П4.1. Эллипс, 3 отверстия (крайний график – 1 отверстие)

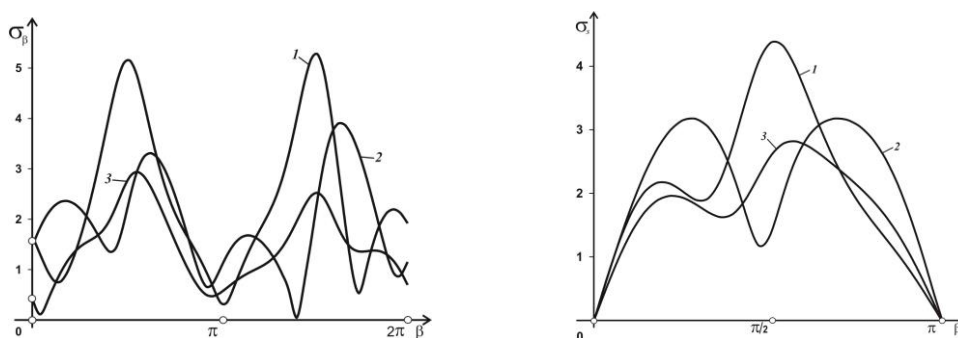


Рис. П4.2. Эллипс, 5 отверстий

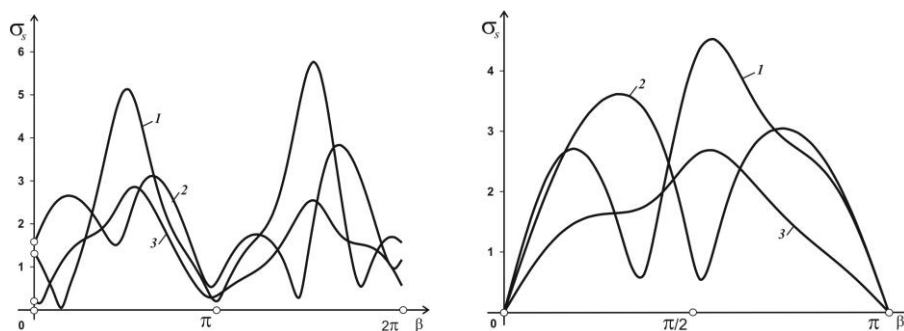


Рис. П4.3. Эллипс, 13 отверстий

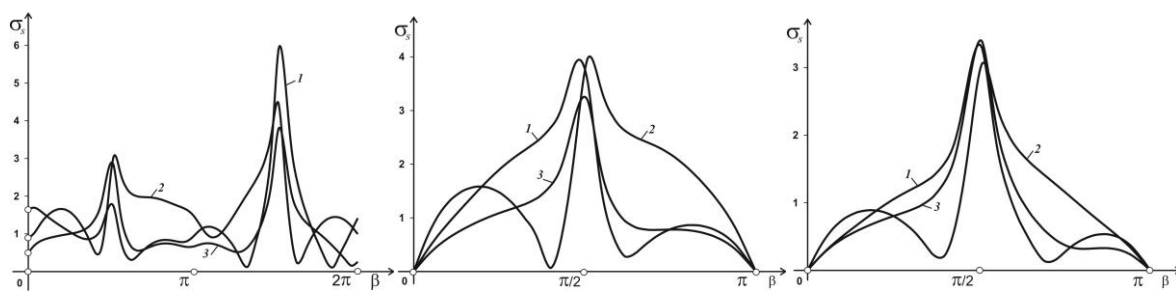


Рис. П4.4. Ромб, 3 отверстия (крайний график – 1 отверстие)

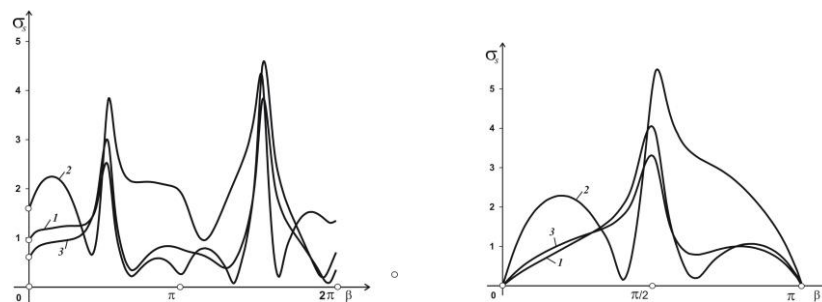


Рис. П4.5. Ромб, 5 отверстий

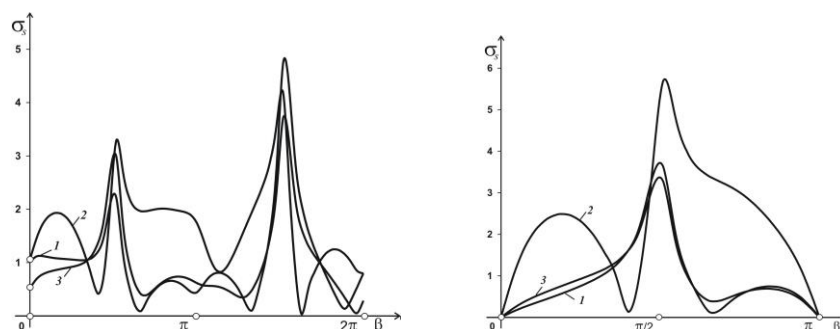


Рис. П4.6. Ромб, 13 отверстий

2. Воздействие – точечный источник

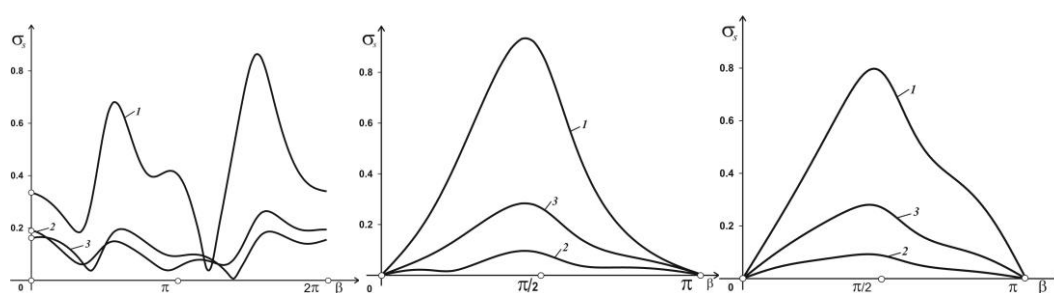


Рис. П4.7. Эллипс, 3 отверстия (крайний график – 1 отверстие)

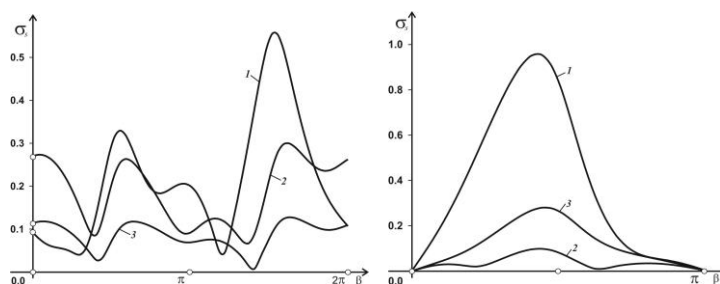


Рис. П4.8. Эллипс, 5 отверстий

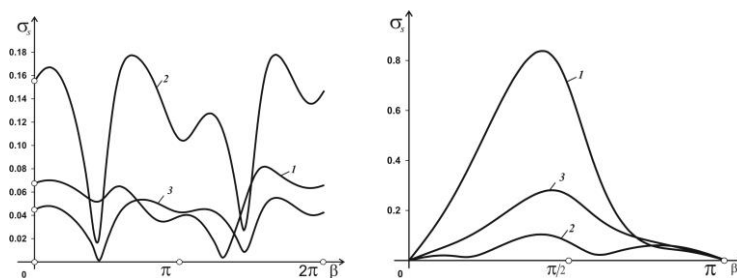


Рис. П4.9. Эллипс, 13 отверстий

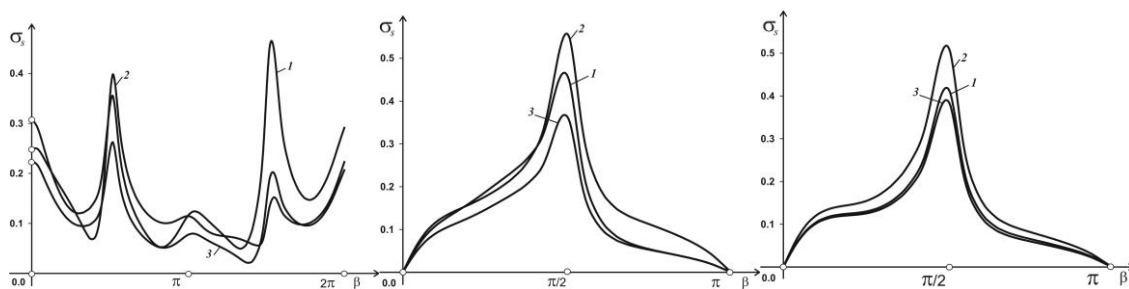


Рис. П4.10. Ромб, 3 отверстия (крайний график – 1 отверстие)

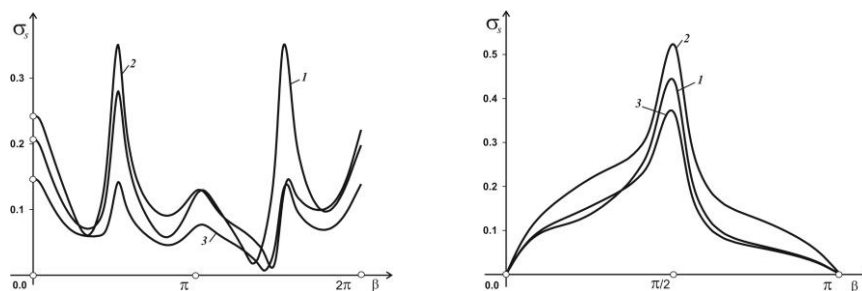


Рис. П4.11. Ромб, 5 отверстий

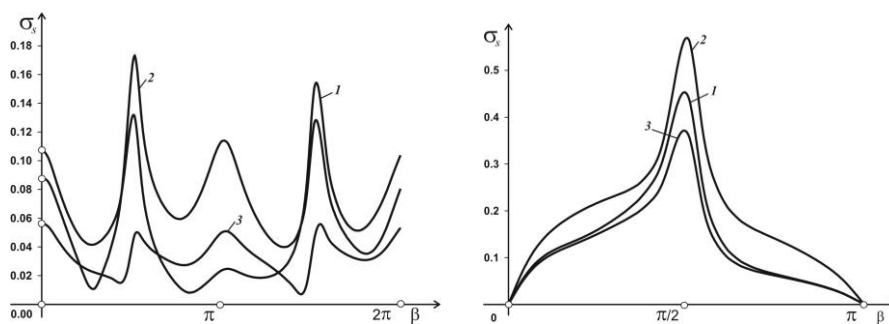


Рис. П4.12. Ромб, 5 отверстий

Продольный сдвиг, локальная система неподвижных включений

Параметры для эллипса: $a/b=1.4/0.6$, $\gamma_2 a=1.5$, для ромба $a/b=2/1$, $\gamma_2 a=0.9$, расстояние между неоднородностями $d_h=2$, расстояние от координаты центра центральной неоднородности системы до границы $h=4.0$, координата источника – $Y_z=1.0$. Номера кривых соответствуют: 1 – полубесконечная среда с защемленной границей, 2 – полубесконечная среда с границей, свободна от сил, 3 – бесконечная среда.

1. Воздействие – волна из бесконечности

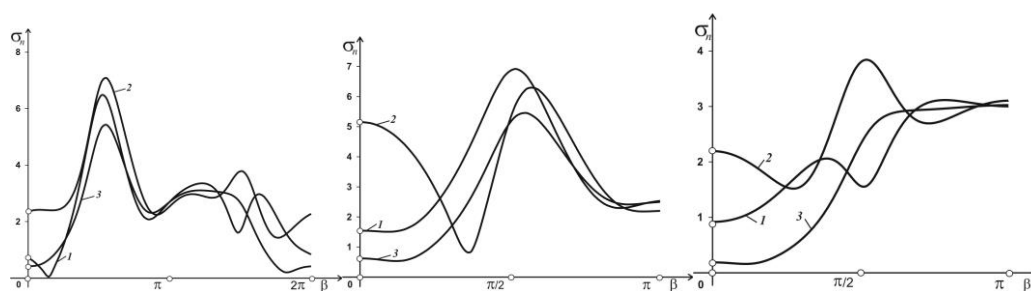


Рис. П5.1. Эллипс, 3 включения (крайний график – 1 включение)

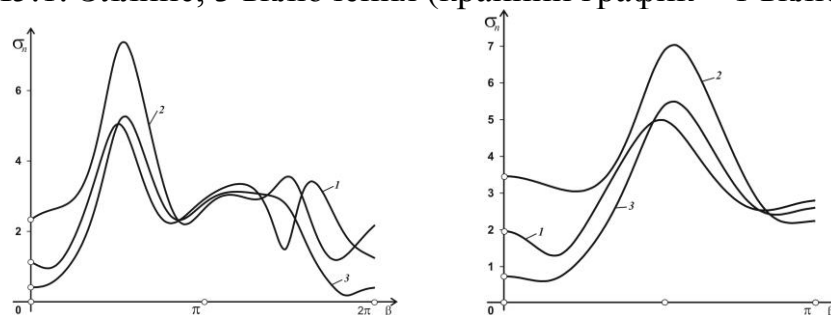


Рис. П5.2. Эллипс, 5 включений

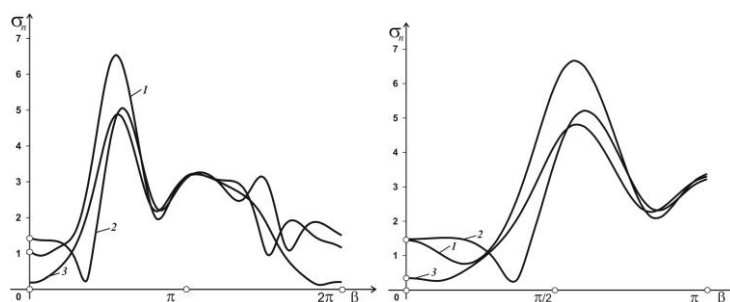


Рис. П5.3. Эллипс, 13 включений

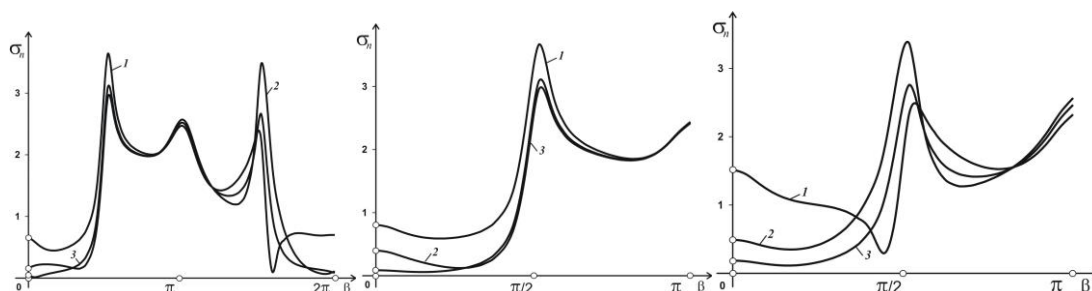


Рис. П5.4. Ромб, 3 включения (крайний график – 1 включение)

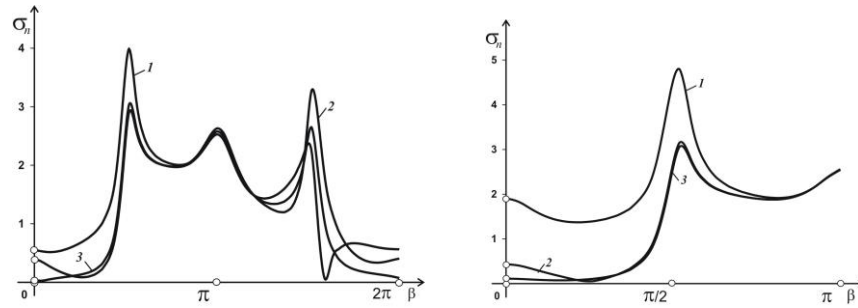


Рис. П5.5. Ромб, 5 включений

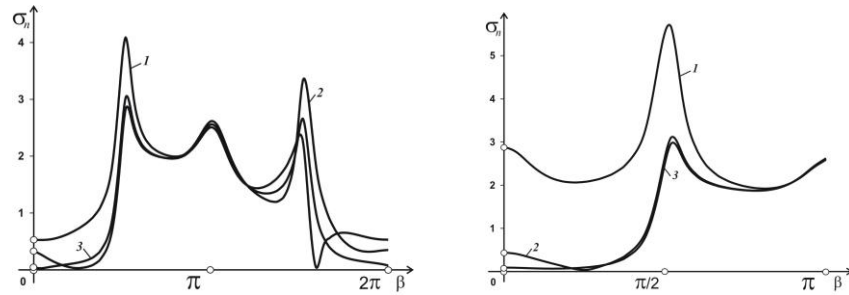


Рис. П5.6. Ромб, 13 включений

2. Воздействие – точечный источник

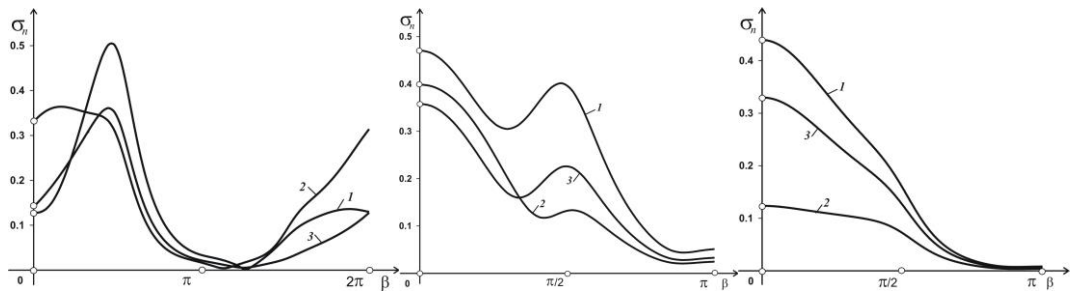


Рис. П5.7. Эллипс, 3 включения (крайний график – 1 включение)

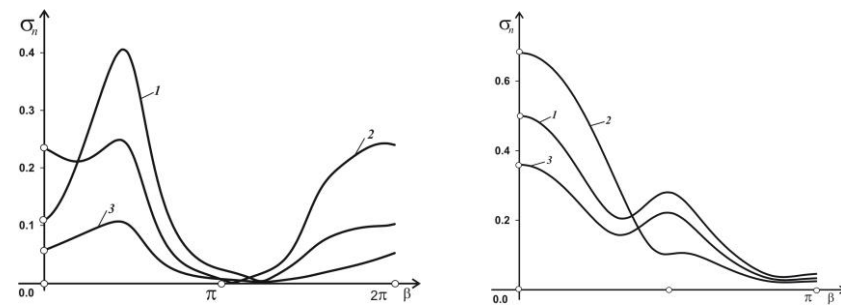


Рис. П5.8. Эллипс, 5 включения

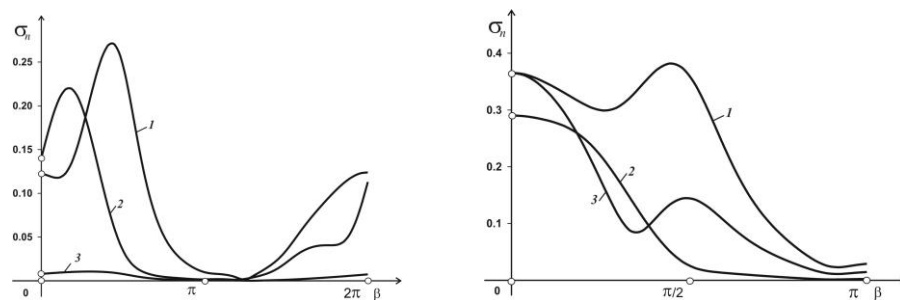


Рис. П5.9. Эллипс, 13 включений

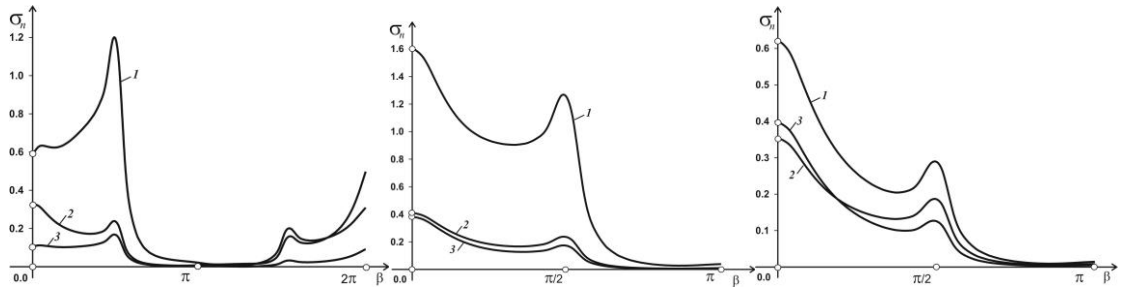


Рис. П5.10. Ромб, 3 включения (крайний график – 1 включение)

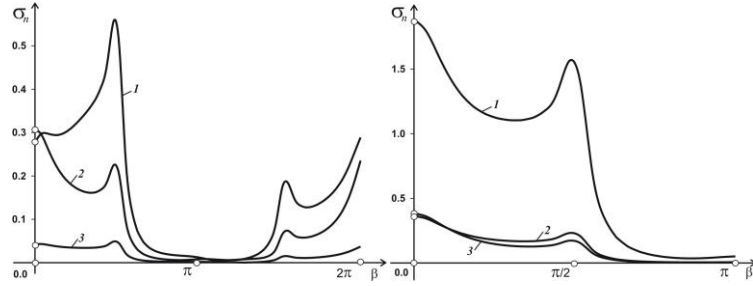


Рис. П5.11. Ромб, 5 включений

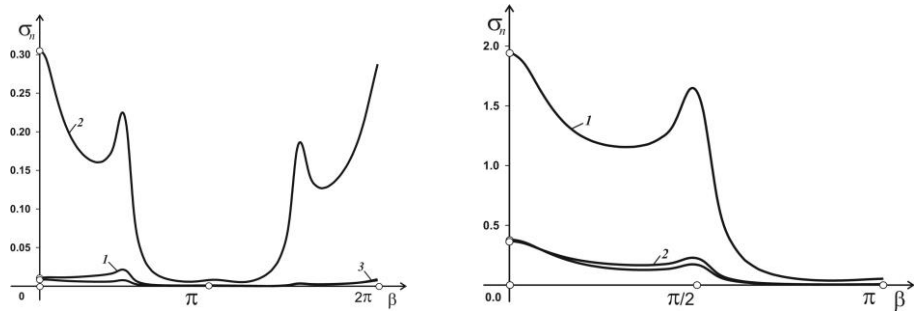


Рис. П5.12. Ромб, 13 включений

Продольный сдвиг, локальная система подвижных жестких включений

Параметры для эллипса: $a/b=1.4/0.6$, $\gamma_2 a=1.5$, для ромба $a/b=2/1$, $\gamma_2 a=0.9$, расстояние между неоднородностями $d_h=2$, отношение плотностей включения и матрицы $\rho_2/\rho_1=2.0$, расстояние от координаты центра центральной неоднородности системы до границы $h=4.0$, координата источника – $Y_z=1.0$. Номера кривых соответствуют: 1 – полубесконечная среда с защемленной границей, 2 – полубесконечная среда с границей, свободна от сил, 3 – бесконечная среда.

1. Воздействие – волна из бесконечности

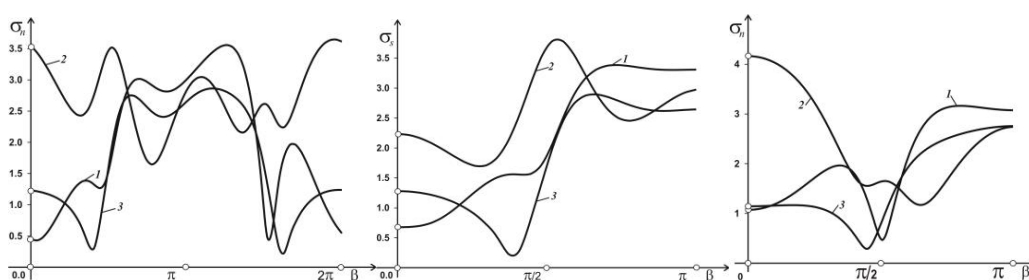


Рис. П6.1 Эллипс, 3 включения (крайний график – 1 включение)

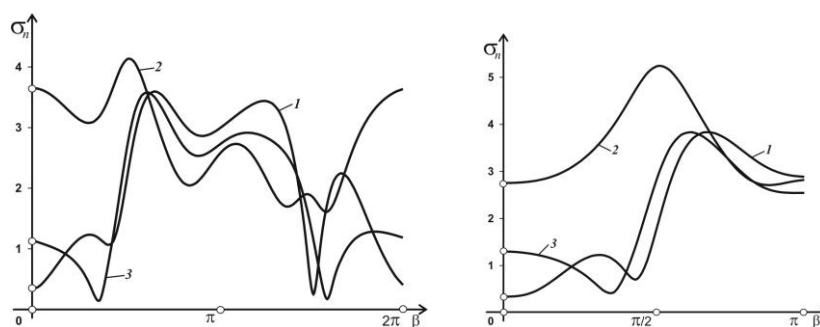


Рис. П6.2 Эллипс, 5 включений

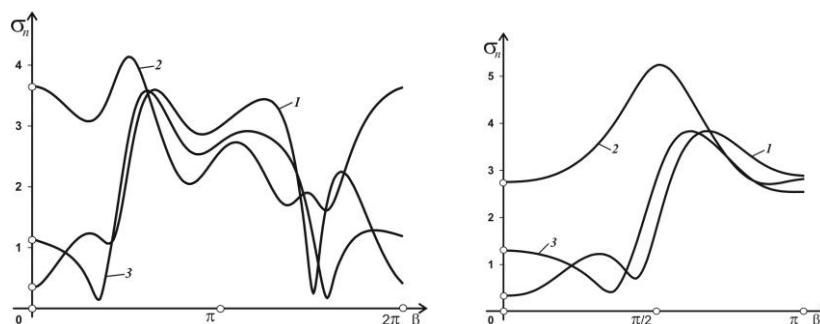


Рис. П6.3 Эллипс, 13 включений

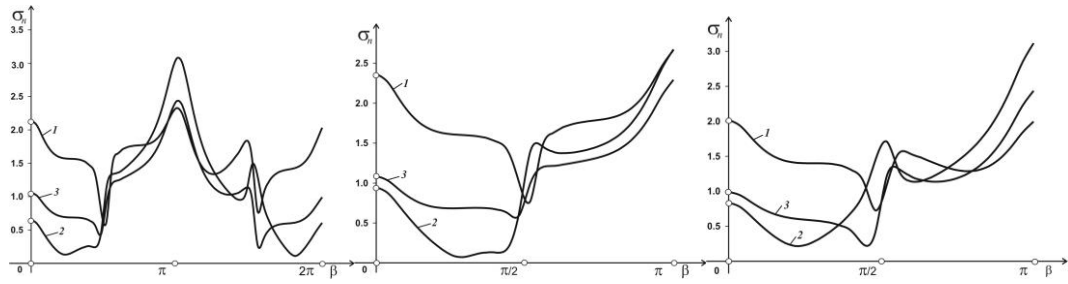


Рис. Пб.4 Ромб, 3 включения (крайний график – 1 включение)

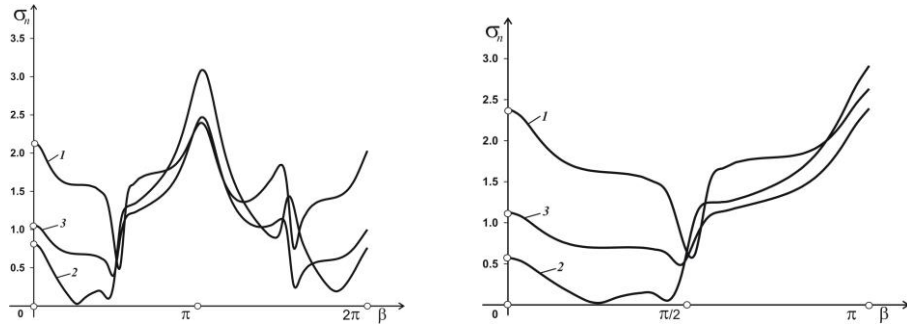


Рис. Пб.5 Ромб, 5 включений

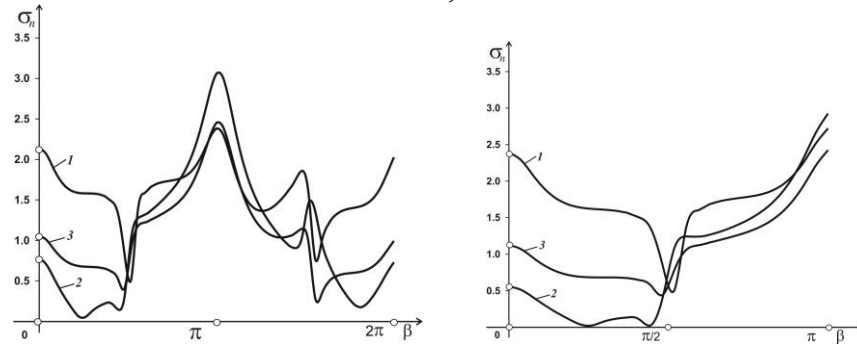


Рис. Пб.6. Ромб, 13 включений

2. Воздействие – точечный источник

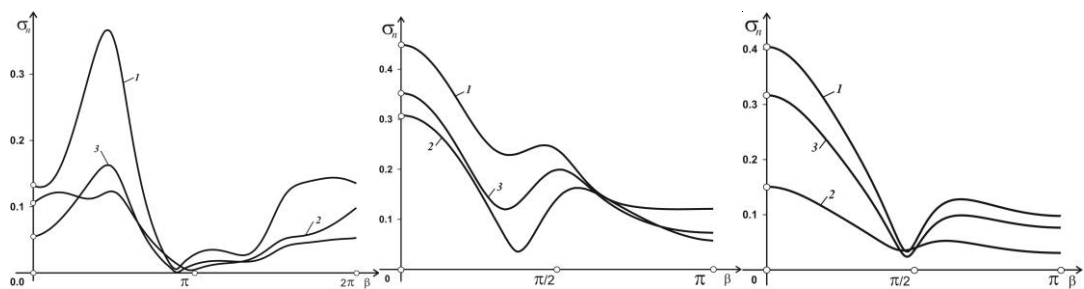


Рис. Пб.7. Эллипс, 3 включения (крайний график – 1 включение)

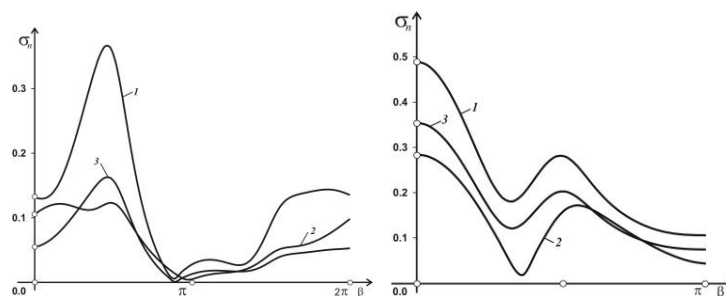


Рис. Пб.8 Эллипс, 5 включений

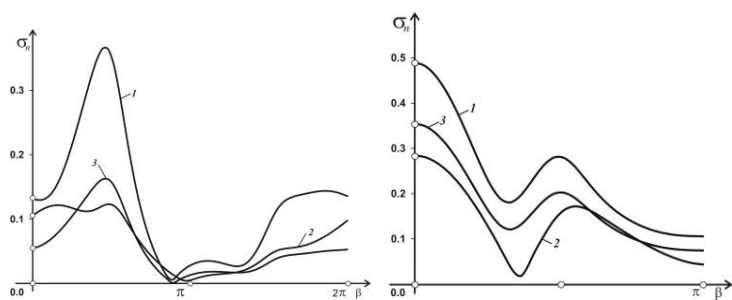


Рис. Пб.9 Эллипс, 13 включений

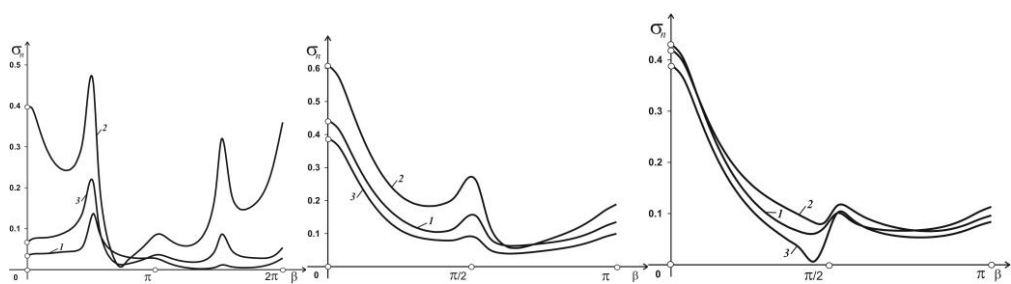


Рис. Пб.10. Ромб, 3 включения (крайний график – 1 включение)

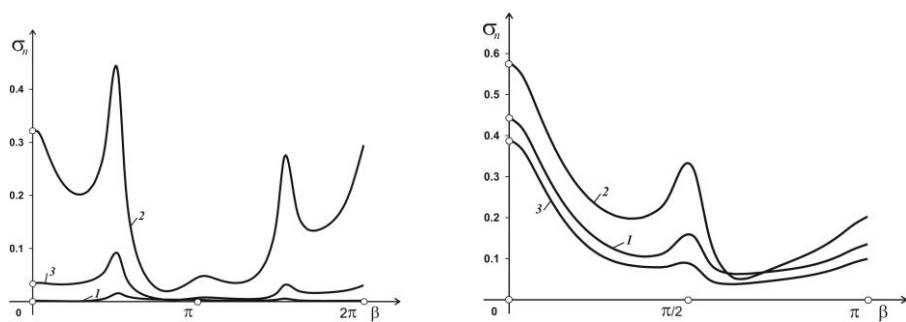


Рис. Пб.11 Ромб, 5 включений

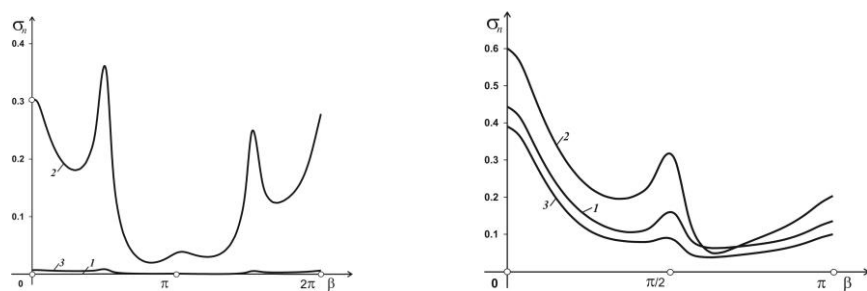


Рис. Пб.12 Ромб, 13 включений

Продольный сдвиг, локальная система упругих включений, нормальные напряжения

Параметры для эллипса: $a/b=1.4/0.6$, $\gamma_2 a=1.5$, для ромба $a/b=2/1$, $\gamma_2 a=0.9$, расстояние между неоднородностями $d_h=2$, отношение коэффициентов жёсткости и плотностей включения и матрицы $\mu_2/\mu_1=5.0$, $\rho_2/\rho_1=2.0$, расстояние от координаты центра центральной неоднородности системы до границы $h=4.0$, координата источника – $Y_z=1.0$. Номера кривых соответствуют: 1 – полубесконечная среда с защемленной границей, 2 – полубесконечная среда с границей, свободна от сил, 3 – бесконечная среда.

1. Воздействие – волна из бесконечности

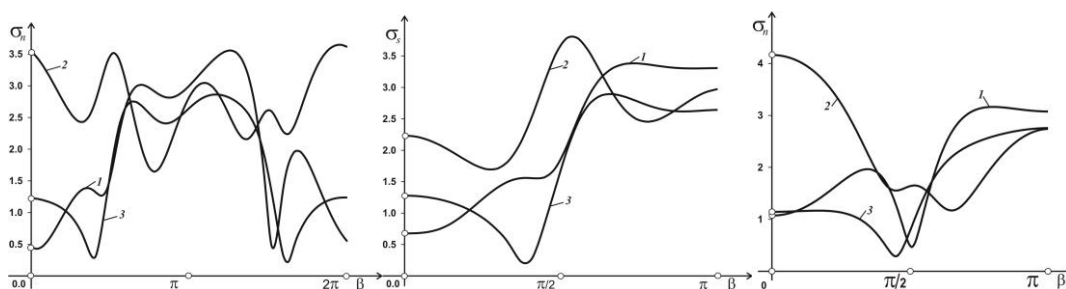


Рис. П7.1 Эллипс, 3 включения (крайний график – 1 включение)

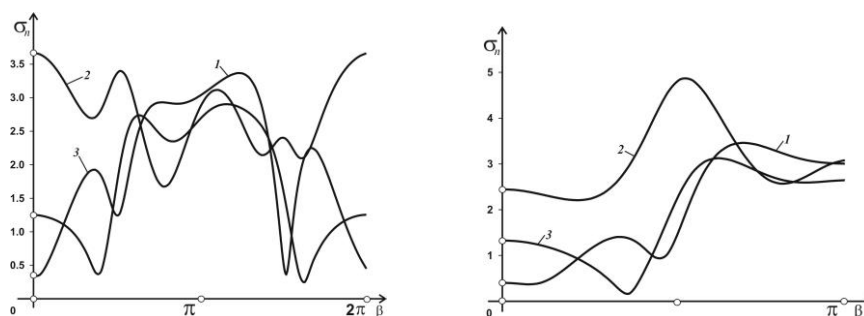


Рис. П7.2 Эллипс, 5 включений

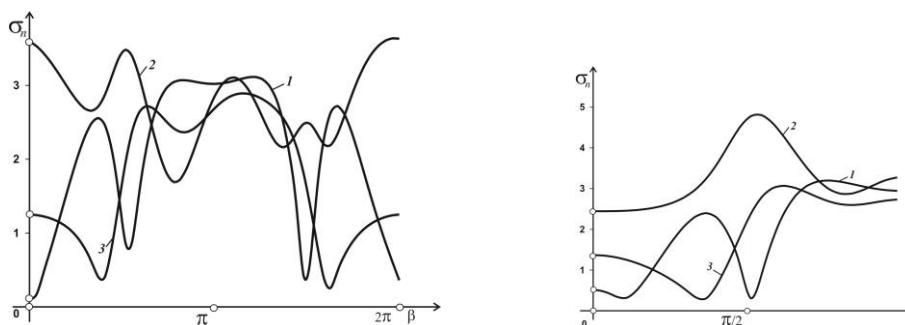


Рис. П7.3 Эллипс, 13 включений

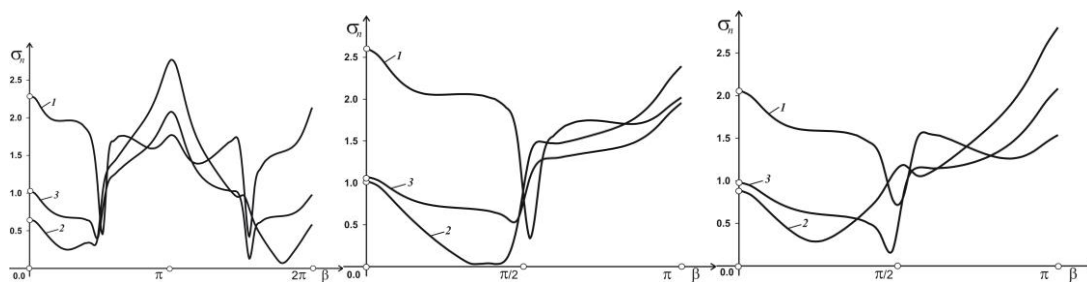


Рис. П7.4 Ромб, 3 включения (крайний график – 1 включение)

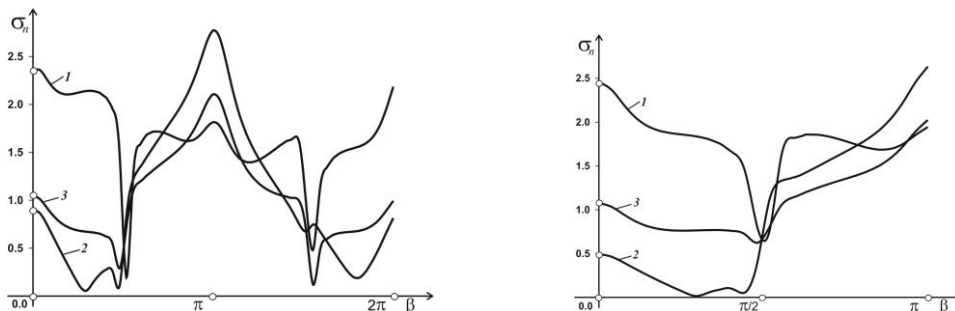


Рис. П7.5 Ромб, 5 включений

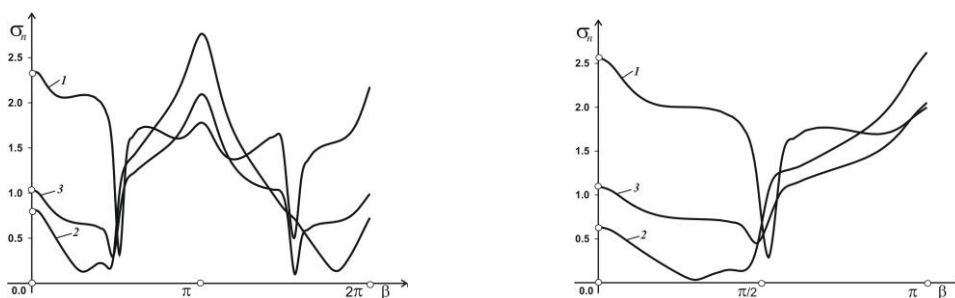


Рис. П7.6. Ромб, 13 включений

2. Воздействие – точечный источник

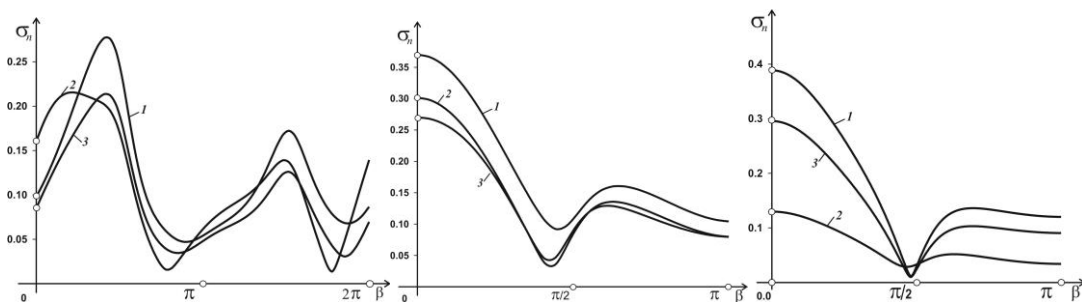


Рис. П7.7. Эллипс, 3 включения (крайний график – 1 включение)

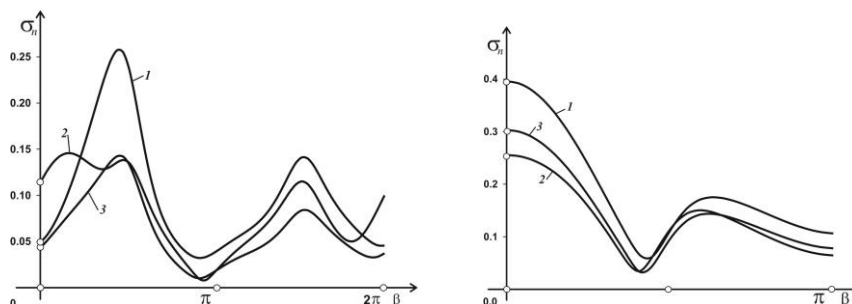


Рис. П7.8 Эллипс, 5 включений

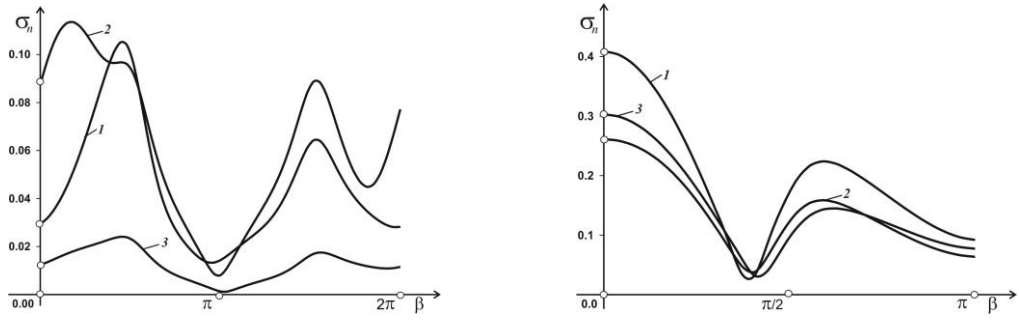


Рис. П7.9 Эллипс, 13 включений

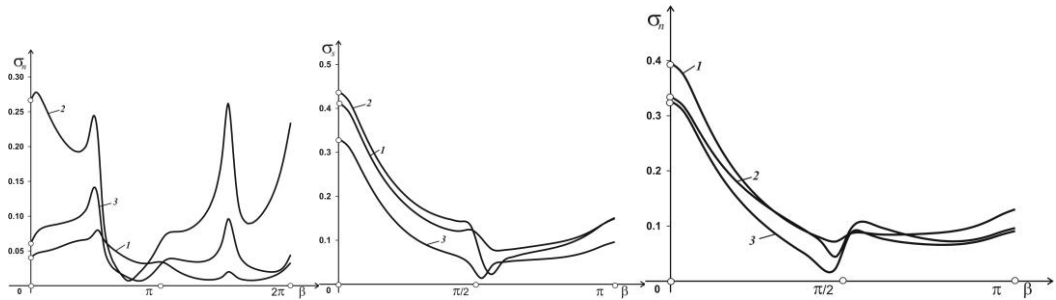


Рис. П7.10. Ромб, 3 включения (крайний график – 1 включение)

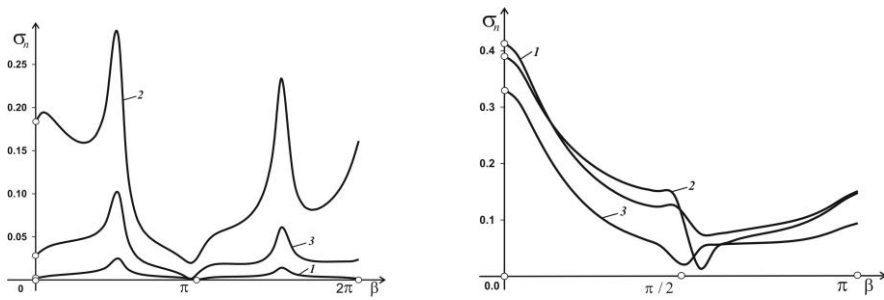


Рис. П7.11 Ромб, 5 включений

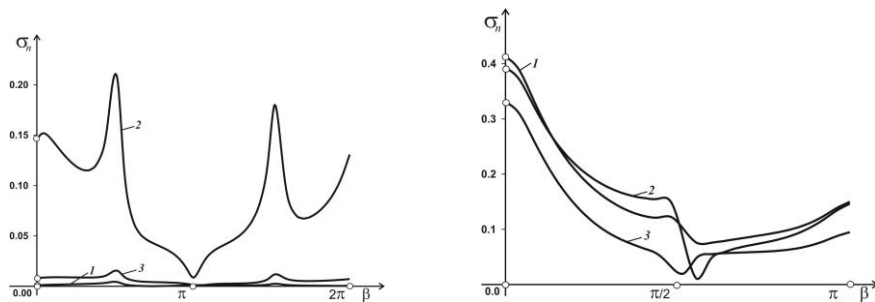


Рис. П7.12 Ромб, 13 включений

Продольный сдвиг, локальная система упругих включений, касательные напряжения

Параметры для эллипса: $a/b=1.4/0.6$, $\gamma_2 a=1.5$, для ромба $a/b=2/1$, $\gamma_2 a=0.9$, расстояние между неоднородностями $d_h=2$, отношение коэффициентов жёсткости и плотностей включения и матрицы $\mu_2/\mu_1=5.0$, $\rho_2/\rho_1=2.0$, расстояние от координаты центра центральной неоднородности системы до границы $h=4.0$, координата источника – $Y_z=1.0$. Номера кривых соответствуют: 1 – полубесконечная среда с защемленной границей, 2 – полубесконечная среда с границей, свободной от сил, 3 – бесконечная среда.

1. Воздействие – волна из бесконечности

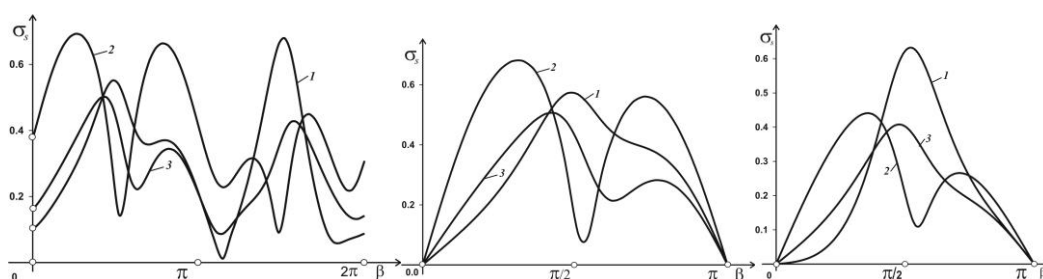


Рис. П8.1 Эллипс, 3 включения (крайний график – 1 включение)

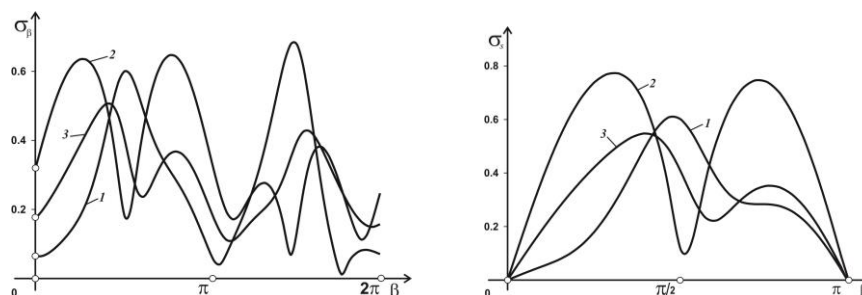


Рис. П8.2 Эллипс, 5 включений

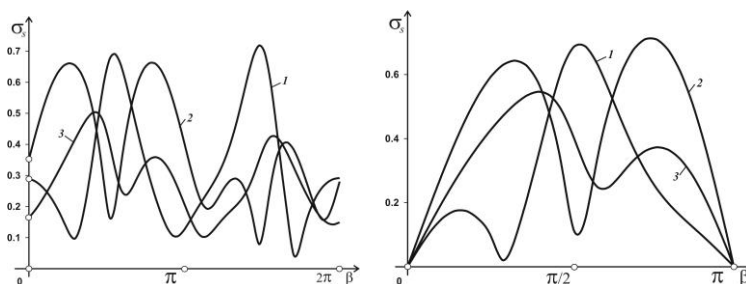


Рис. П8.3 Эллипс, 13 включений

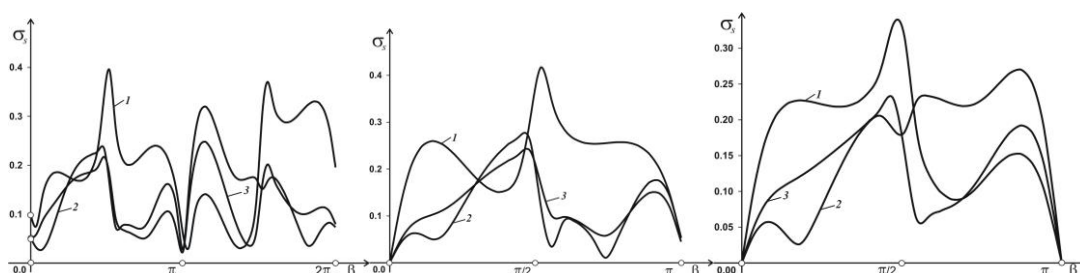


Рис. П8.4 Ромб, 3 включения (крайний график – 1 включение)

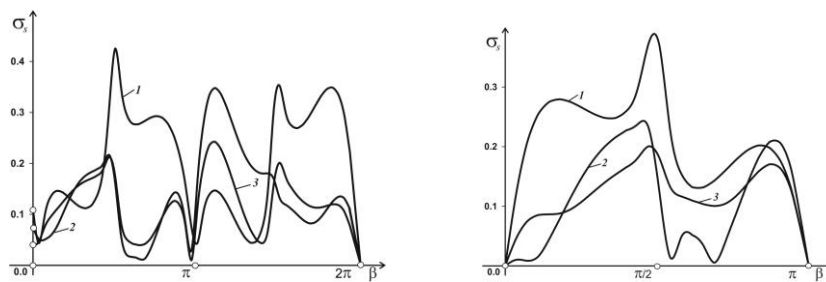


Рис. П8.5 Ромб, 5 включений

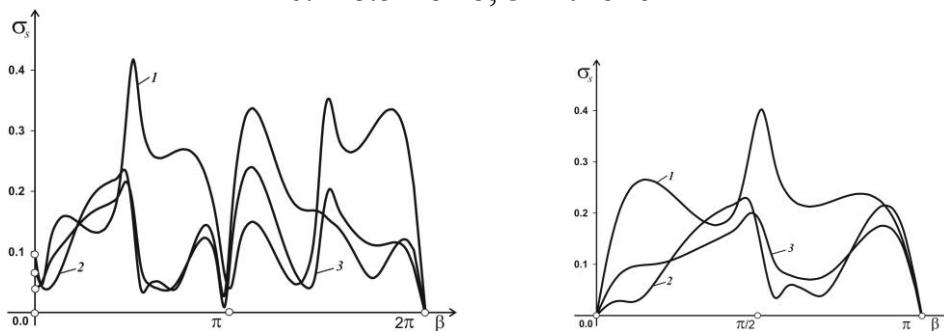


Рис. П8.6. Ромб, 13 включений

2. Воздействие – точечный источник

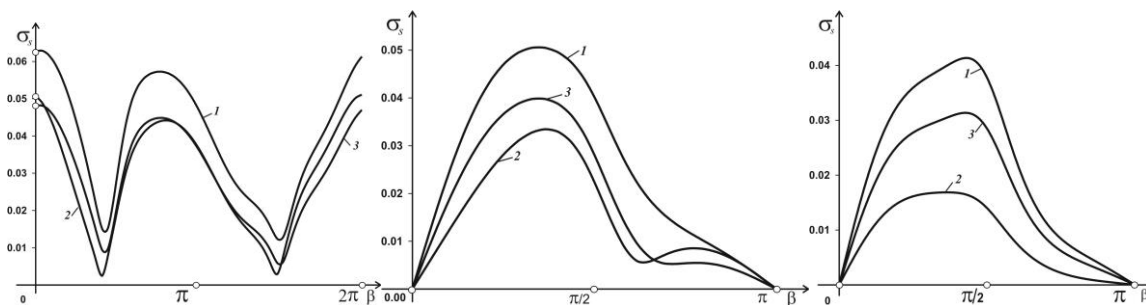


Рис. П8.7. Эллипс, 3 включения (крайний график – 1 включение)

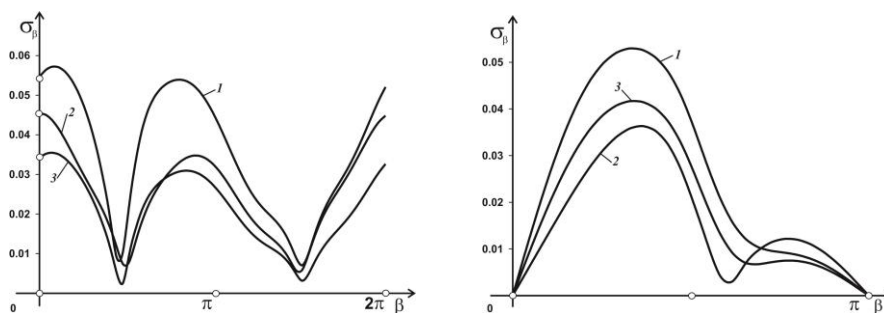


Рис. П8.8 Эллипс, 5 включений

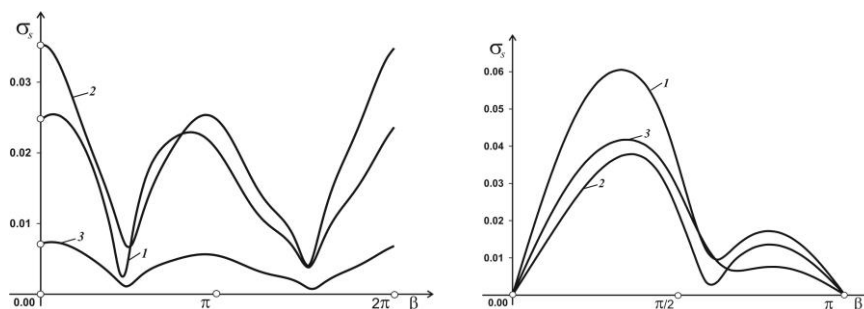


Рис. П8.9 Эллипс, 13 включений

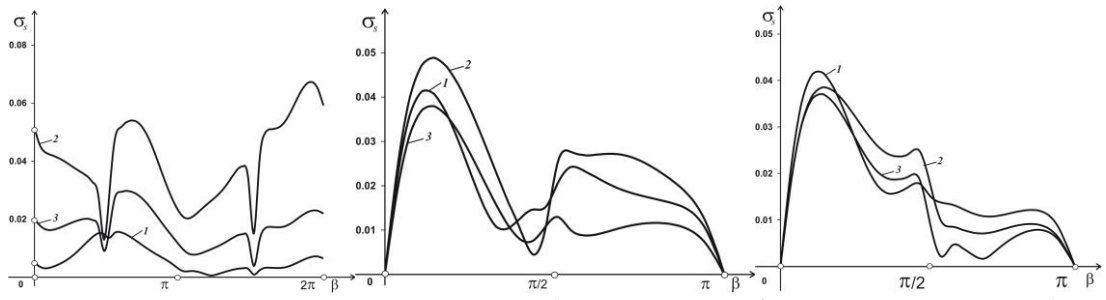


Рис. П8.10. Ромб, 3 включения (крайний график – 1 включение)

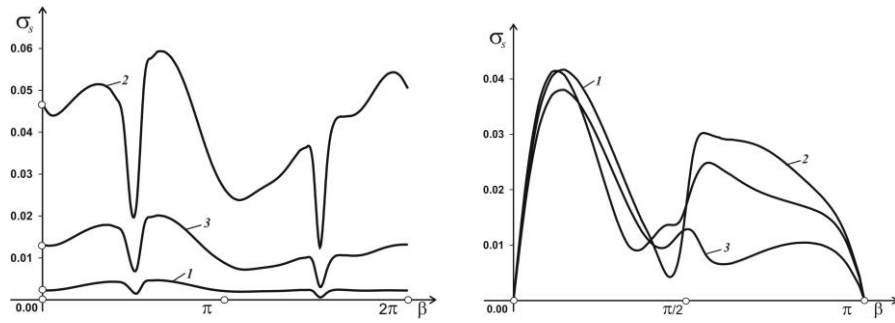


Рис. П8.11 Ромб, 5 включений

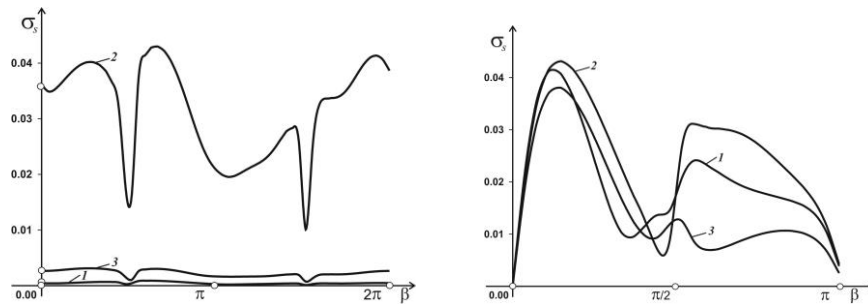


Рис. П8.12 Ромб, 13 включений

Плоская деформация, локальная система отверстий

Номерам кривых соответствуют такие параметры: для 1, 2 $\gamma_1 a = 1.7$, для 3, 4 $\gamma_1 a = 0.9$; для 1, 3 $b/a = 0.5$; для 2, 4 $a/b = 0.5$, для всех вариантов расстояние между неоднородностями $d_h = 3$.

1. Воздействие – Р-волна из бесконечности

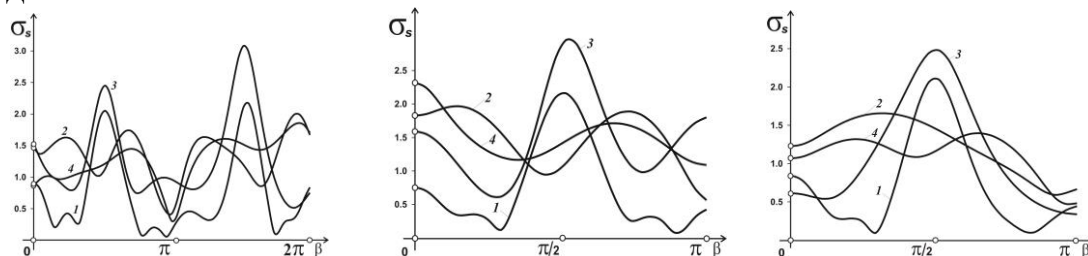


Рис. П9.1 Эллипс, 3 отверстия (крайний график – 1 отверстие)

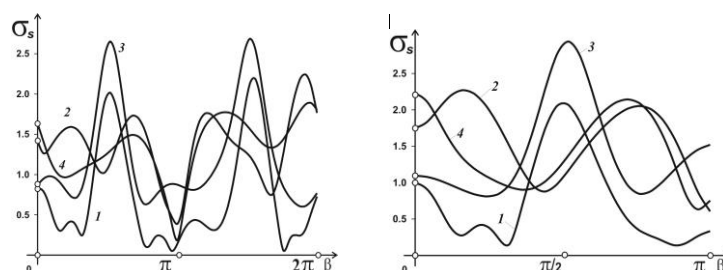


Рис. П9.2 Эллипс, 5 отверстий

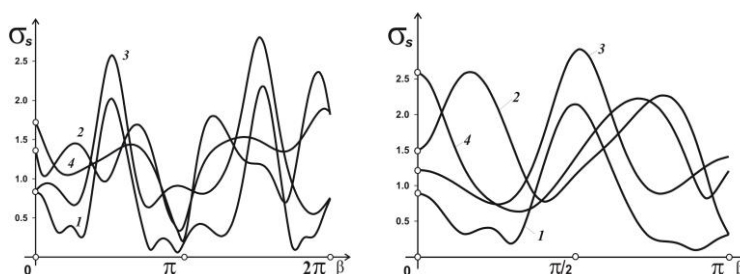


Рис. П9.3 Эллипс, 11 отверстий

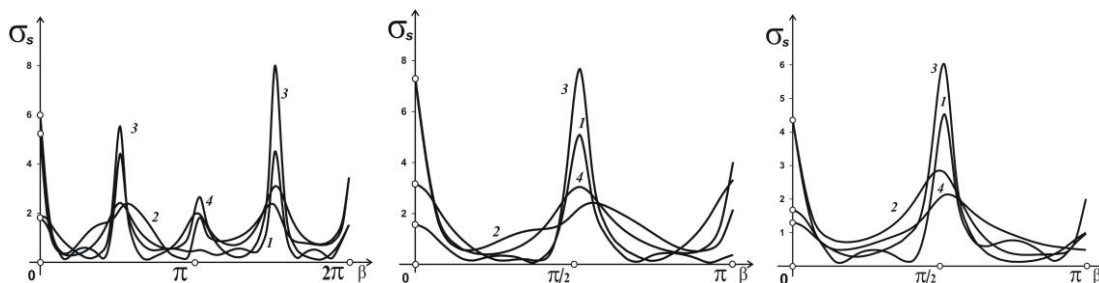


Рис. П9.4 Ромб, 3 отверстия (крайний график – 1 отверстие)

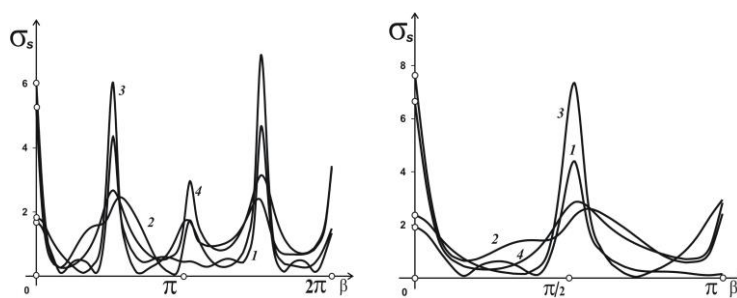


Рис. П9.5 Ромб, 5 отверстий

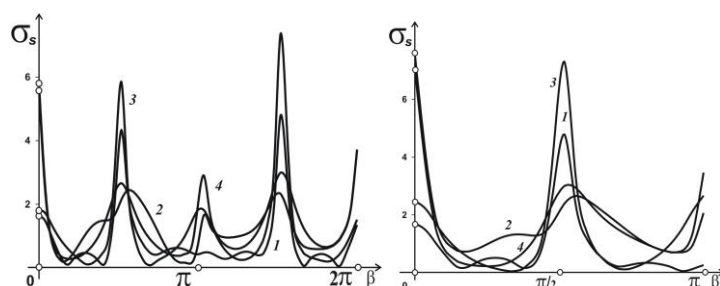


Рис. П9.6 Ромб, 11 отверстий

2. Воздействие – SV-волна из бесконечности

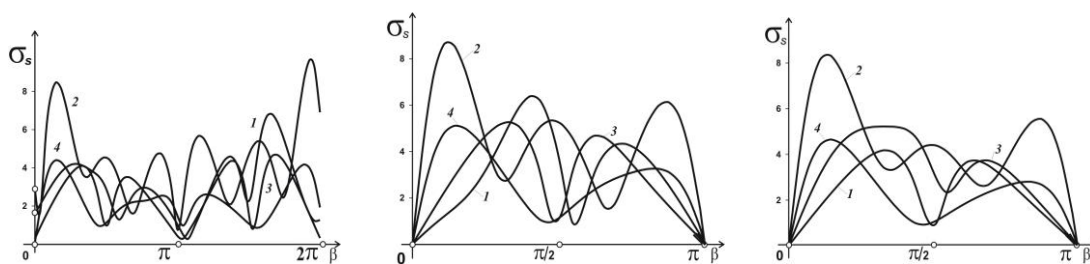


Рис. П9.7 Эллипс, 3 отверстия (крайний график – 1 отверстие)

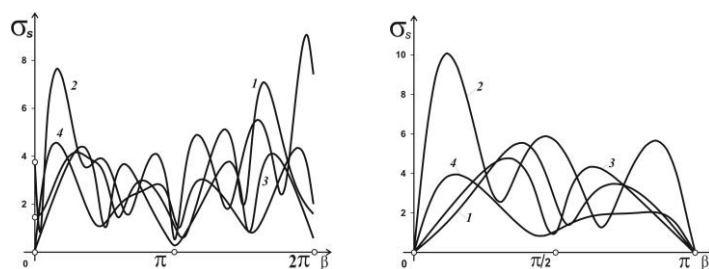


Рис. П9.8 Эллипс, 5 отверстий

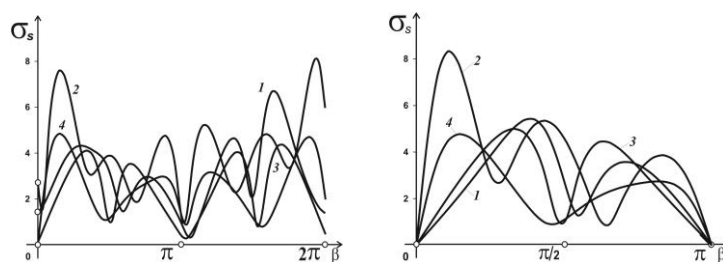


Рис. П9.9 Эллипс, 11 отверстий

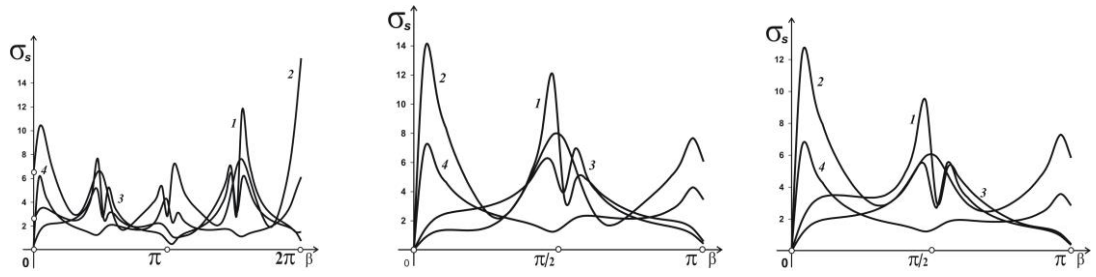


Рис. П9.10 Ромб, 3 отверстия (крайний график – 1 отверстие)

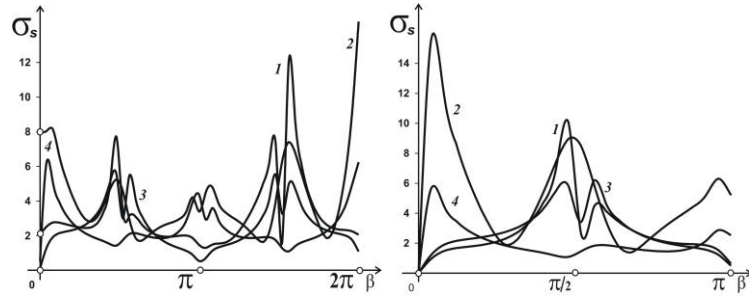


Рис. П9.11 Ромб, 5 отверстий

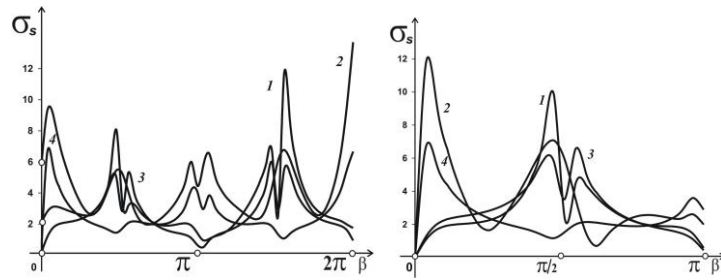


Рис. П9.12 Ромб, 11 отверстий

Приложение 10

**Плоская деформация, локальная система неподвижных включений,
напряжения σ_n**

Номерам кривых соответствуют такие параметры: для 1, 2 $\gamma_1 a = 1.7$, для 3, 4 $\gamma_1 a = 0.9$; для 1, 3 $b/a = 0.5$; для 2, 4 $a/b = 0.5$, для всех вариантов расстояние между неоднородностями $d_h = 3$.

1. Воздействие – Р-волна из бесконечности

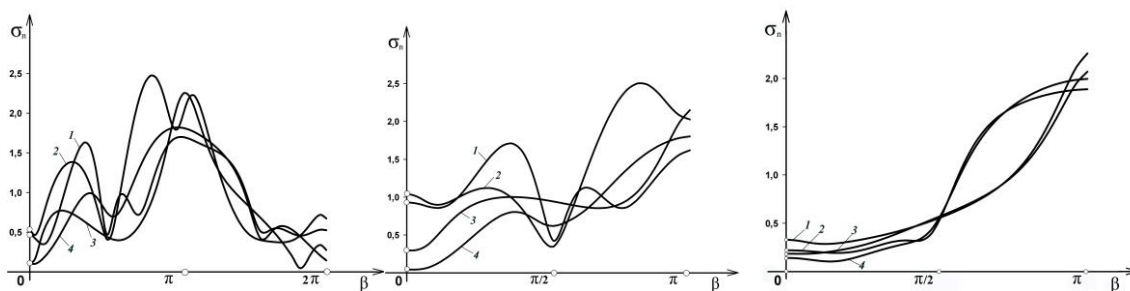


Рис. П10.1 Эллипс, 3 включения (крайний график – 1 включение)

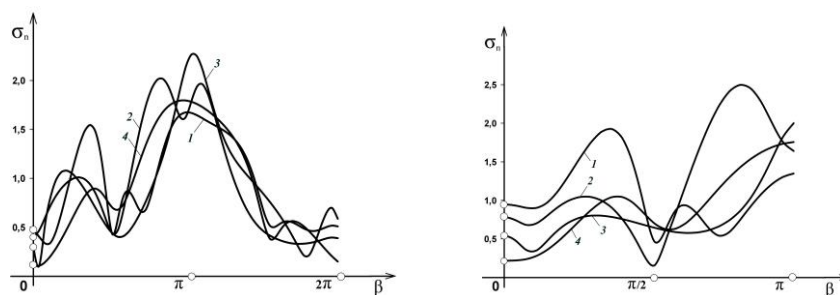


Рис. П10.2 Эллипс, 5 включений

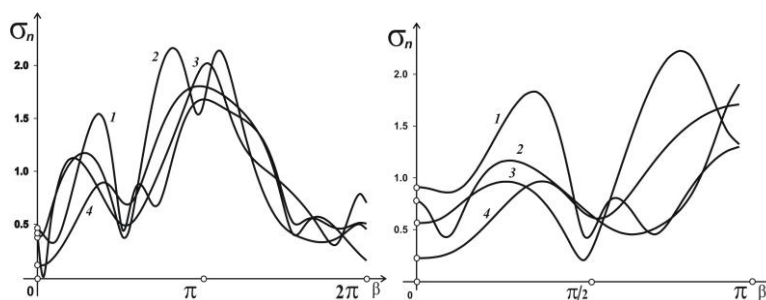


Рис. П10.3 Эллипс, 11 включений

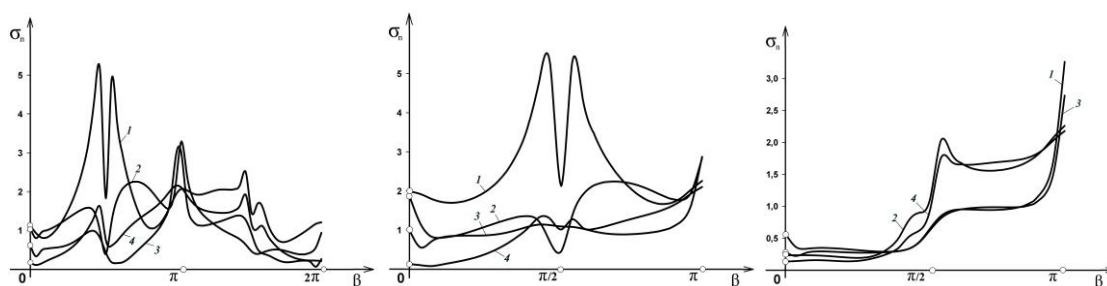


Рис. П10.4 Ромб, 3 включения (крайний график – 1 включение)

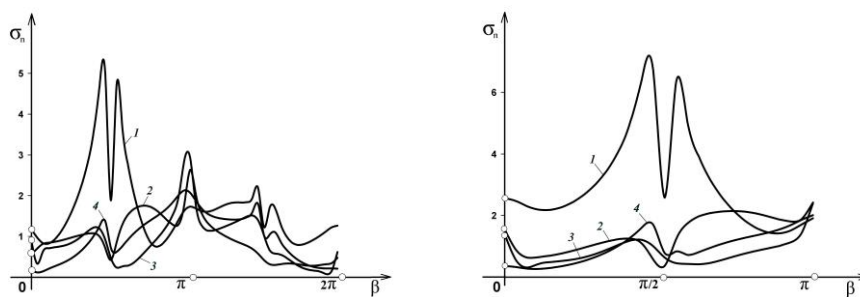


Рис. П10.5 Ромб, 5 включений

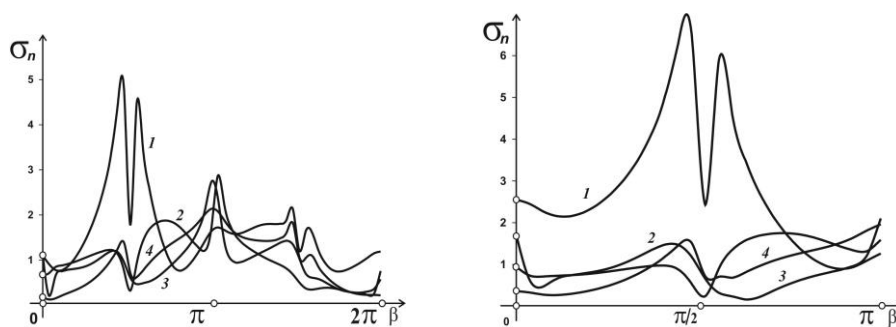


Рис. П10.6 Ромб, 11 включений

2. Воздействие – SV-волна из бесконечности

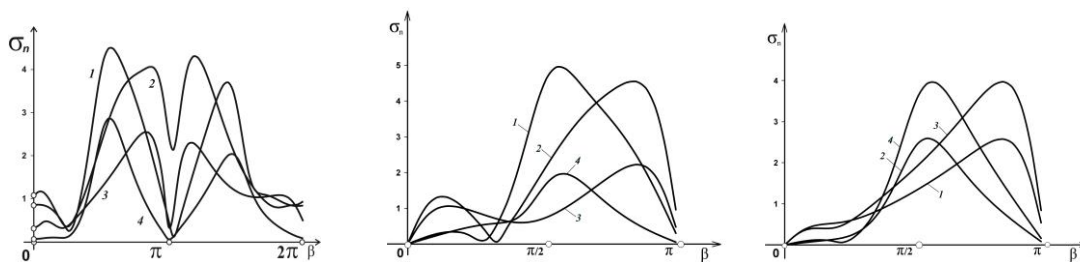


Рис. П10.7 Эллипс, 3 включения (крайний график – 1 включение)

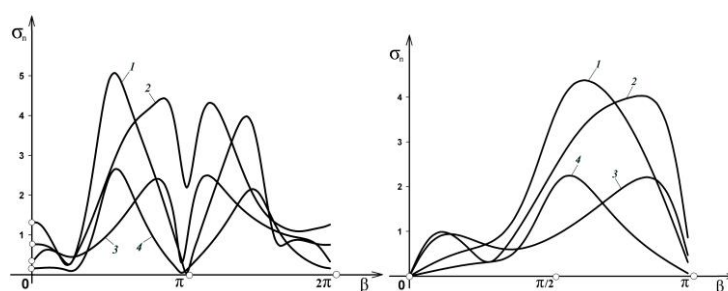


Рис. П10.8 Эллипс, 5 включений

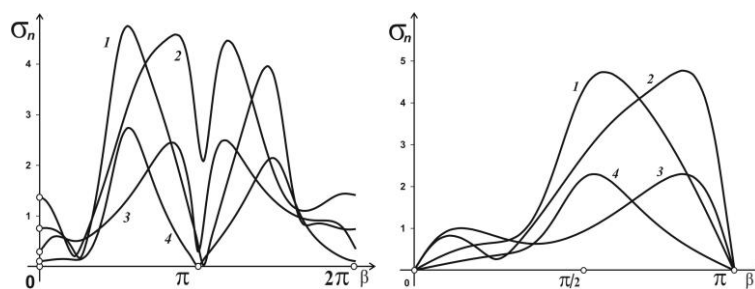


Рис. П10.9 Эллипс, 11 включений

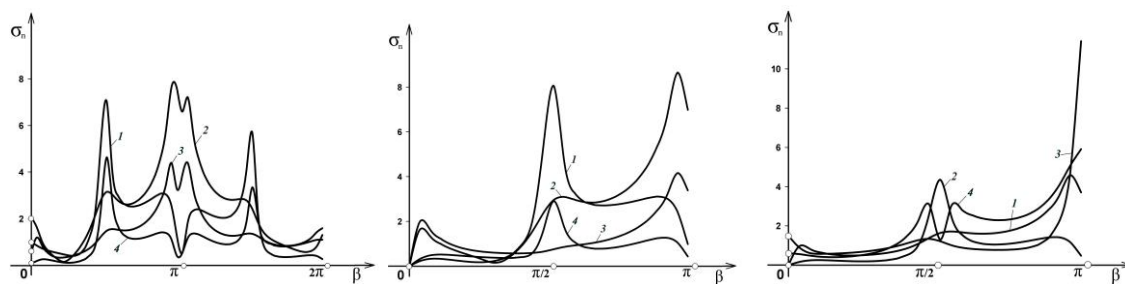


Рис. П10.10 Ромб, 3 включения (крайний график – 1 включение)

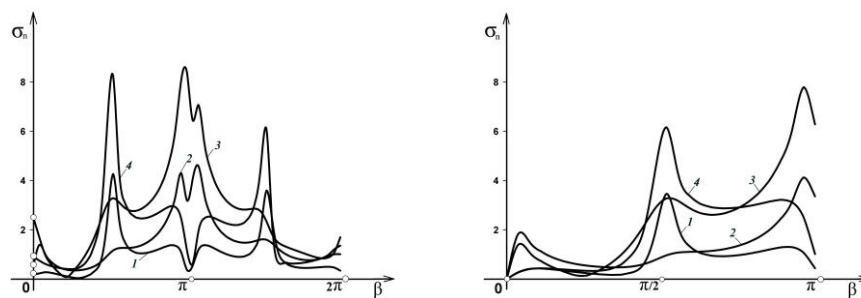


Рис. П10.11 Ромб, 5 включений

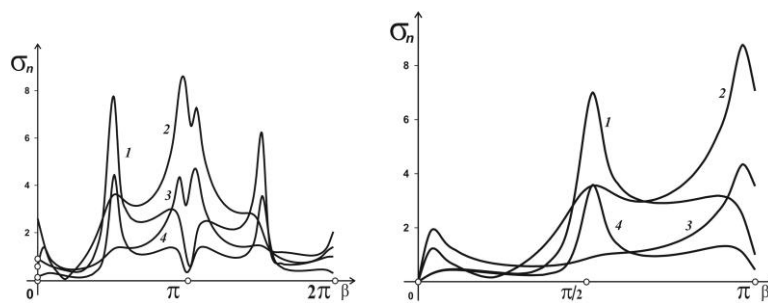


Рис. П10.12 Ромб, 11 включений

Приложение 11

**Плоская деформация, локальная система неподвижных включений,
напряжения σ_{ns}**

Номерам кривых соответствуют такие параметры: для 1, 2 $\gamma_1 a = 1.7$, для 3, 4 $\gamma_1 a = 0.9$; для 1, 3 $b/a = 0.5$; для 2, 4 $a/b = 0.5$, для всех вариантов расстояние между неоднородностями $d_h = 3$.

1. Воздействие – Р-волна из бесконечности

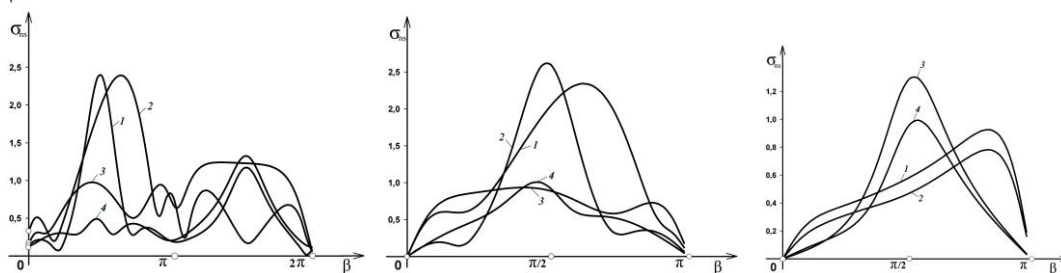


Рис. П11.1 Эллипс, 3 включения (крайний график – 1 включение)

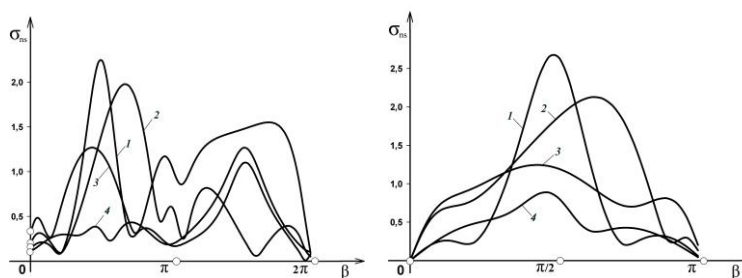


Рис. П11.2 Эллипс, 5 включений

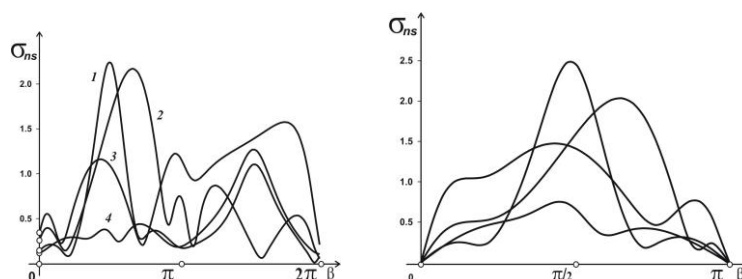


Рис. П11.3 Эллипс, 11 включений

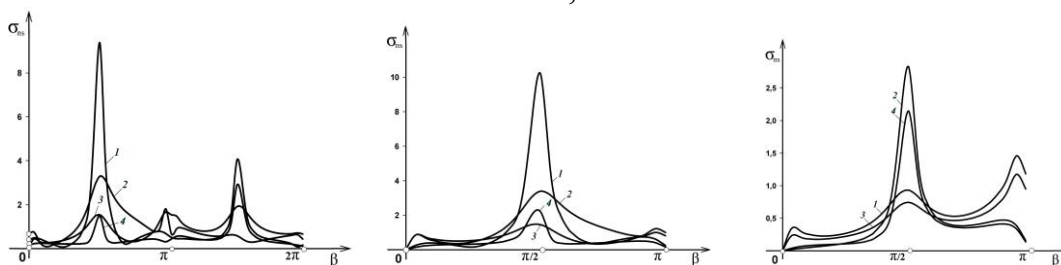


Рис. П11.4 Ромб, 3 включения (крайний график – 1 включение)

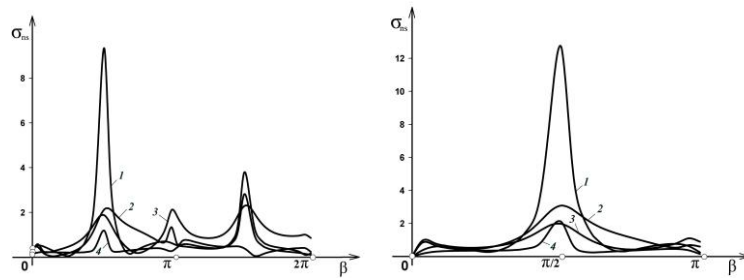


Рис. П11.5 Ромб, 5 включений

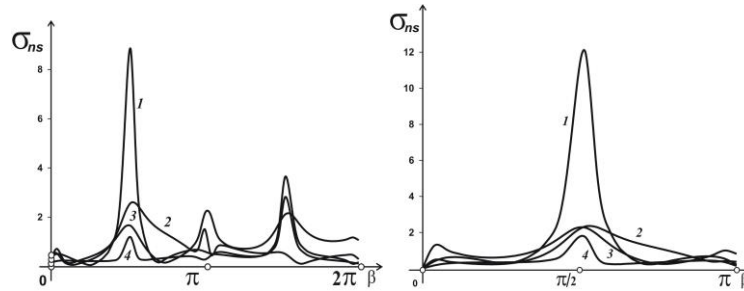


Рис. П11.6 Ромб, 11 включений

2. Воздействие – SV-волна из бесконечности

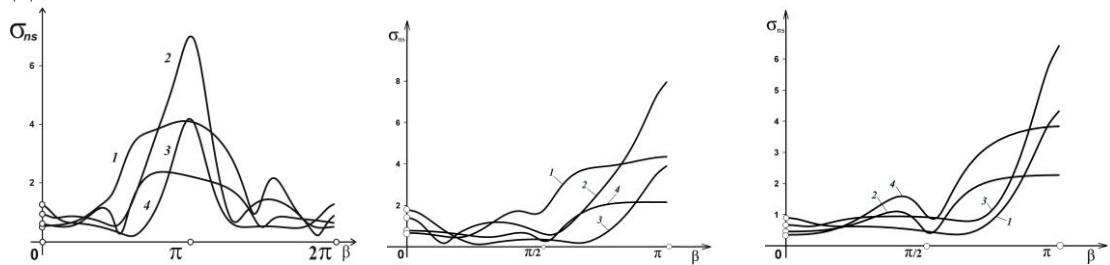


Рис. П11.7 Эллипс, 3 включения (крайний график – 1 включение)

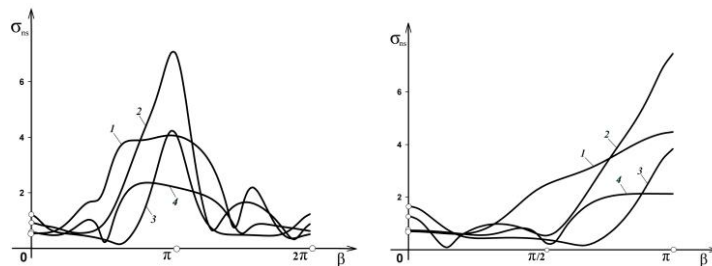


Рис. П11.8 Эллипс, 5 включений

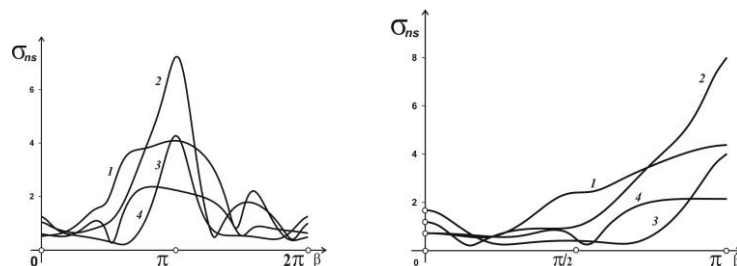


Рис. П11.9 Эллипс, 11 включений

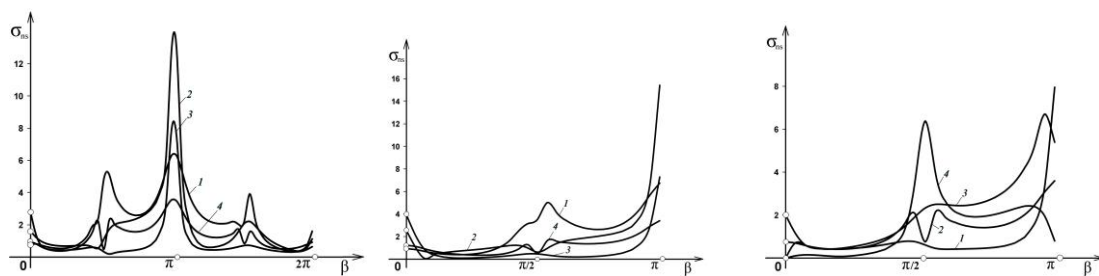


Рис. П11.10 Ромб, 3 включения (крайний график – 1 включение)

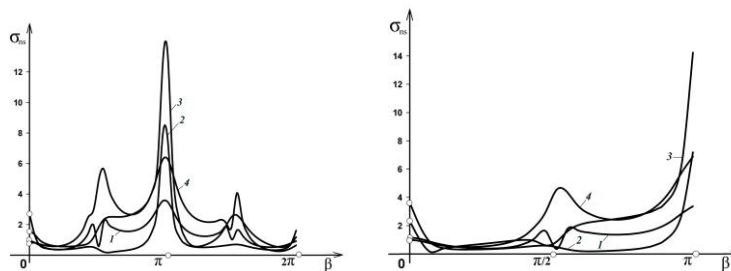


Рис. П11.11 Ромб, 5 включений

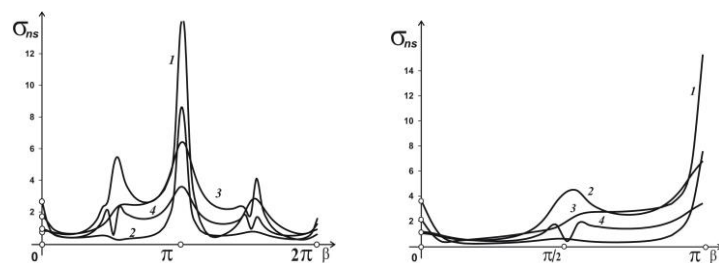


Рис. П11.12 Ромб, 11 включений