

УДК [537.624]  
КП  
N госрегистрації 0109U001379  
Инв. N

Министерство образования и науки Украины  
Сумский государственный университет  
(СумГУ)

40007, г. Сумы, ул. Римского-Корсакова, 2;  
тел. (0542) 33 41 08, факс (0542) 33 40 49

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по научной работе  
д.ф.-м.н.  
\_\_\_\_\_ А.Н. Черноус

2010.12.24

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ  
**ВЫНУЖДЕННАЯ И СПОНТАННАЯ МАГНИТНАЯ ДИНАМИКА  
СИСТЕМ ОДНОСНЫХ НАНОЧАСТИЦ**  
(промежуточный)

Начальник НДЧ

к.т.н., доцент

В.А. Осипов

Руководитель НИР

д.ф.-м.н., профессор

С.И. Денисов

**2010**

Рукопись закончена 16 декабря 2010 г.

Результаты работы рассмотрены научно-техническим советом СумГУ,  
протокол от 23.12.2010, № 6

## СПИСОК АВТОРОВ

Руководитель НИР, главный научный сотрудник, д.ф.-м.н., профессор	2010.12.24	С.И. Денисов (реферат, введение, разделы 1- 2, выводы)
Старший научный сотрудник, к.ф.-м.н.	2010.12.24	Е.С. Денисова (раздел 1)
заведующий лабораторией, к.ф.-м.н.	2010.12.24	Т.В. Лютый (реферат, введение, раздел 1, выводы)
младший научный сотруд- ник	2010.12.24	А.Ю. Поляков (раздел 2, выводы)

## РЕФЕРАТ

Отчет о НИР. 34 с., 6 рис., 56 источников.

Объектом исследования данной работы является ансамбль ферромагнитных однодоменных сферических одноосных частиц, который возбуждается магнитным полем циркулярно-поляризованным в плоскости, перпендикулярной оси легкого намагничивания. Намагниченность, или магнитный момент, каждой такой частицы постоянен по модулю, и под действием внешнего поля изменяет лишь ориентацию в пространстве.

Целью исследования является, во-первых, описание комплекса динамических и термических эффектов в рассматриваемой системе, в частности нахождение зависимостей времени переключения намагниченности от внешних и внутренних параметров системы, а также влияние на него тепловых флуктуаций. И, во-вторых, построение теории сверхмедленной диффузии, элементы которой будут в дальнейшем использованы при построении теории сверхмедленной магнитной релаксации в системах ферромагнитных наночастиц.

Метод исследования. Исследования проводились путем аналитического решения уравнения Ланжевена, а также численного решения детерминистического и стохастического уравнений Ландау Лифшица для магнитного момента наночастицы во внешнем поле и с учетом влияния термостата. Кроме того, использованы методы теории непрерывных во времени случайных блужданий.

Актуальность темы исследования обусловлена значительными перспективами применения ферромагнитных наночастиц в современных технологиях записи, хранения и обработки информации.

Ключевые слова: ФЕРРОМАГНИТНАЯ НАНОЧАСТИЦА, ЦИРКУЛЯРНО-ПОЛЯРИЗОВАННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, УРАВНЕНИЕ ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА ПРЕЦЕССИОННАЯ ДИНАМИКА, ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕ НАМАГНИЧЕННОСТИ, СФЕРХМЕДЛЕННАЯ ДИФФУЗИЯ.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1 СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА НАМАГНИЧЕННОСТИ НАНОЧАСТИЦЫ В ЦИРКУЛЯРНО-ПОЛЯРИЗОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ.....	5
1.1 Актуальность задачи.....	5
1.2 Описание модели.....	6
1.3 Анализ результатов .....	9
1.3.1 Режимы прецессии и тепловые флуктуации .....	9
1.3.2 Среднее время переключения .....	9
1.3.3 Распределение времен переключения .....	13
1.4 Выводы к разделу 1 .....	15
2 ТЕОРИЯ СВЕРХМЕДЛЕННОЙ ДИФфуЗИИ: ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ВО ВРЕМЕНИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ .....	16
2.1 Актуальность задачи.....	16
2.2 Описание модели.....	17
2.3 Законы сверхмедленной диффузии.....	19
2.4 Примеры.....	23
2.5 Выводы к разделу 2.....	25
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	26
ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК.....	28

## ВВЕДЕНИЕ

Многообразие свойств возбужденных систем в состояниях, далеких от равновесного, обуславливают большое значение (в прикладном и фундаментальном смысле) точных аналитических результатов по их описанию. При этом, именно случайные воздействия среды на систему способны приводить к качественным изменениям в поведении систем. Примерами таких изменений могут служить, например, индуцированные внешним шумом фазовые переходы [1], стохастический резонанс [2], резонансная активация [3], направленный транспорт [4]. Поэтому основной идеей, положенной в основу данной НИР является разработка теоретических методов описания ключевых моделей физики, а также исследование основных свойств изучаемых систем при различных внешних воздействиях с учетом флуктуаций среды.

Одним из наиболее ярких и интересных с практической точки зрения примером сложных систем, возбуждаемых как детерминистическими силами, так и подверженных случайным воздействиям, обусловленным термостатом, есть ансамбли магнитных наночастиц, возбуждаемых циркулярно поляризованным магнитным полем, плоскость поляризации которого перпендикулярна осям легкого намагничивания частиц. Актуальность изучения таких систем обусловлена, в первую очередь, перспективами использования наночастиц в качестве магнитных носителей информации [5-8]. Бит информации определяется тем, в каком из двух равновесных состояний, связанных с сильной одноосной анизотропией, находится магнитный момент наночастицы. Поэтому, наиболее важным с точки зрения процесса записи и хранения данных является вопрос термостабильности магнитного момента и управляемого переключения его состояния. С увеличением плотности записи информации размеры наночастиц необходимо уменьшать, и удовлетворить обоим требованиям становится все труднее. Кроме того, достаточно важной характеристикой работы магнитных накопителей является их быстродействие, которое, в конечном счете, ограничивается временем перемагничивания наночастиц в

процессе записи. Поэтому поиск способов быстрого и мало энергоемкого изменения направления магнитного момента является важной прикладной задачей, которая вызывает интерес исследователей [9-13].

Случайные процессы в физических, биологических, социальных, экономических и других системах часто демонстрируют аномальное поведение диффузии в том смысле, что при больших временах дисперсия возрастает нелинейно со временем и тогда говорят об аномальной диффузии. Различают два типа диффузии такого вида: субдиффузия и супердиффузия. Класс систем с таким поведением дисперсии является достаточно широким и перманентно возрастающим. Субдиффузия наблюдалась, например, в аморфных твердых телах [14], перколяционных кластерах [15] и живых клетках [16-17], а супердиффузия в турбулентных потоках [18-19], оптических решетках [20] и животных, ищущих пищу [21-22].

В общем случае зависимость дисперсии от времени не ограничивается степенной функцией. В данной НИР, используя модель непрерывных во времени случайных блужданий, показано, что если распределение времен ожидания имеет сверхтяжелые хвосты тогда диффузия является сверхмедленной и описывается медленно изменяющимися на бесконечности функциями.

# 1 СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА НАМАГНИЧЕННОСТИ НАНОЧАСТИЦЫ В ЦИРКУЛЯРНО-ПОЛЯРИЗОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

## 1.1 Актуальность задачи

Устойчивый рост интереса к ферромагнитным наночастицам (ФНЧ) и их ансамблям в последние десятилетия диктуется огромным потенциалом их практического применения. Упорядоченные ансамбли таких объектов составляют основу перспективных устройств электроники и спинтроники, среди которых стоит отметить новые устройства магнитной записи информации со сверх высокой (свыше  $1 \text{ TB}/\text{cm}^2$ ), записи (т.н. bit patterned media [5-8]), модули энергонезависимой памяти (MRAM) [8] и т.д. Возможность управления ФНЧ с помощью магнитного поля при условии функционализации наночастиц путем нанесения на ее поверхность покрытия с определенными физико-химическими свойствами, открывает новый класс биотехнологий, а также методов терапии и диагностики в медицине [23-26]. Все большее значения ФНЧ приобретают и в сенсорной технике. Так, наличие ФНЧ в исследуемой среде позволяет существенно расширить возможности метода магнитного резонанса при исследовании живых тканей (т.н. MRI-enhancement) [23-25]. Благодаря эффекту гигантского магнитосопротивления комплексные наночастицы могут служить основой сверхчувствительных магнитных датчиков [8, 27]. Большое распространение на сегодня имеют методы детектирования и сепарации бактерий, вирусов, органических молекул [23, 24, 28] основанные на использовании ФНЧ. Такие методы являются одновременно высокочувствительными, надежными и недорогими.

Для всех перечисленных случаев ключевым свойством ФНЧ, обуславливающим их функциональное назначение, есть ее намагниченность. В связи с этим принципиально важность имеют два вопроса. Первый из них связан с характером отклика наночастицы на внешние магнитные поля, а именно с изменением положения наночастицы или с изменением ее намагниченности как по модулю так и

по направлению под действием внешнего поля. Второй обусловлен взаимодействием наночастицы с термостатом и сопряжен с вопросами естественного ограничения управляемостью частицы.

Как показывает ряд полученных недавно теоретических и экспериментальных результатов [29-34], одним из эффективных методов управления намагниченностью наночастицы есть воздействие магнитного поля, которое вращается в плоскости, перпендикулярной к оси магнитной анизотропии. В частности, в работе [34] было показано, что именно такой вид поля обуславливает минимальное время перемагничивания. Основным недостатком теоретических моделей, используемых в указанных работах, является пренебрежение тепловыми флуктуациями, которые играют существенную роль в магнитной динамике достаточно малых ФНЧ. Модель, учитывающая действие термостата была предложена в [35], однако анализ был проведен только для предельных случаев очень большой или очень малой (по сравнению с резонансным значением) частоты. Настоящая же работа посвящена численному изучению магнитной динамики наночастицы под воздействием циркулярно-поляризованного поля и случайного теплового поля, которое моделирует влияние термостата, для частот, близких к резонансным.

## 1.2 Описание модели

Будем полагать, что магнитный момент  $\mathbf{m}$  наночастицы есть постоянным по модулю ( $|\mathbf{m}| = \text{const}$ ), а единственным видом анизотропии является одноосная магнитокристаллическая анизотропия (рис. 1). Такая модель соответствует однодоменной сферической ФНЧ, для которой отсутствие поверхностной анизотропии объясняется ее сферической формой, а постоянство магнитного момента реализуется благодаря сильному обменному взаимодействию спиновых магнитных моментов частицы, при котором реализуется модель когерентного вращения [36]. Тогда для случая взаимодействия с термостатом динамика магнитного момента ФНЧ подчиняется стохастическому уравнению Ландау-Лифшица



$$\dot{\mathbf{m}} = -\gamma \mathbf{m} \times (\mathbf{H}_{eff} + \mathbf{n}) - \frac{\lambda \gamma}{m} \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff}), \quad (1.1)$$

где  $\gamma (> 0)$  – гиромагнитное отношение;  $\lambda (> 0)$  – безразмерный параметр затухания;  $\mathbf{H}_{eff} = \partial W / \partial \mathbf{m}$  – эффективное магнитное поле, действующее на  $\mathbf{m}$ ,  $W$  – магнитная энергия частицы,  $\mathbf{n}$  – случайное магнитное поле, которое моделирует действие термостата.

Как отмечалось выше, в качестве внешнего воздействия рассматривается циркулярно-поляризованное поле вида

$$\mathbf{h}(t) = h \cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \rho h \sin(\omega t) \mathbf{e}_y \quad (1.2)$$

где  $h$  – амплитуда поля,  $\omega$  – его частота,  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  – орты декартовой системы координат,  $\rho = \pm 1$  соответственно для левой и правой поляризации. Магнитная энергия частицы в этом случае будет иметь вид [35]

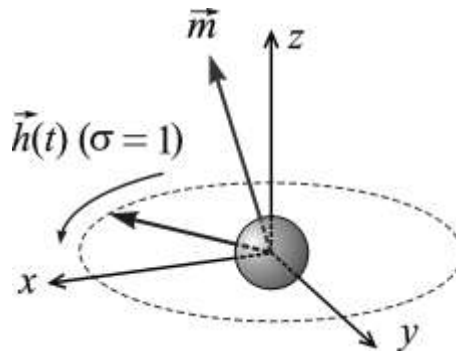


Рисунок 1.1 – Схематическое изображение модели

$$W = \frac{1}{2} m H_a \sin^2 \theta - m h \sin \theta \cos(\varphi - \rho \omega t), \quad (1.3)$$

Здесь  $\theta$  и  $\varphi$  – соответственно полярный и азимутальный углы вектора  $\mathbf{m}$ . Для удобства дальнейших расчетов произведем следующую замену переменных:  $\psi = \varphi - \rho \omega t$ .

При условии, что  $|\mathbf{m}| = \text{const}$ , уравнение (1.1) преобразуется в систему двух уравнений [17]

$$\begin{cases} \dot{\theta} = u(\theta, \psi) - \frac{\lambda}{2a} \operatorname{ctg} \theta + \sqrt{\frac{\lambda}{a}} \eta_{\theta}(\tau), \\ \dot{\psi} = v(\theta, \psi) - \rho \Omega + \sqrt{\frac{\lambda}{a}} \frac{1}{\sin \theta} \eta_{\psi}(\tau). \end{cases} \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} u(\theta, \psi) &= -\lambda \sin \theta \cos \theta + \tilde{h}(\lambda \cos \theta \cos \psi - \sin \psi), \\ v(\theta, \psi) &= \cos \theta - \tilde{h} \frac{\cos \theta \cos \psi + \lambda \sin \psi}{\sin \theta}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В приведенных выше уравнениях  $\tilde{h} = h/H_a$  – безразмерная амплитуда вращающегося поля,  $\tau = \omega_r t$  – безразмерное время,  $\omega_r = \gamma H_a$  – Ларморова частота,  $\Omega = \omega/\omega_r$  – безразмерная частота вращающегося поля. Параметры  $\eta_{\theta}(\tau)$  и  $\eta_{\psi}(\tau)$  обозначают два независимых гауссовских белых шума с нулевым средним значением и корреляционной функцией, пропорциональной  $\delta$ -функции Дирака:  $\langle \eta_i(\tau) \eta_j(\tau') \rangle = 2\Delta \delta_{ij} \delta(\tau - \tau')$ , где  $i, j = \theta, \psi$ ,  $\Delta = \lambda k_B T / \gamma m$  – интенсивность шума  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура.

Тепловые эффекты в магнитной динамике наночастицы целесообразно анализировать с помощью отношения величины потенциального барьера переориентации магнитного момента к тепловой энергии

$$a = mH_a / 2k_B T. \quad (1.6)$$

Поскольку аналитическое решение системы уравнений (1.4) получить крайне сложно, то для её решения необходимо воспользоваться численными методами. Проведенный анализ показал, что из существующих методов численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений [37], для численного решения системы (1.4) оптимальным является метод Эйлера.

## 1.3 Анализ результатов

### 1.3.1 Режимы прецессии и тепловые флуктуации

Детерминистическая магнитная динамика одноосной ФНЧ под действием циркулярно-поляризованного поля характеризуется наличием двух режимов прецессии – однородного и неоднородного (см., например [16]). Однородный режим характеризуется постоянством угла конуса прецессии (см. рис. 1.2а), в то время как для неоднородного этот угол периодически меняется (см. рис. 1.2б). При наличии тепловых флуктуаций переориентация  $\mathbf{m}$  возможна даже без наличия внешнего поля. Поэтому о режимах прецессии под воздействием поля вида (1.2) можно говорить лишь на ограниченных временных интервалах.

Кроме того, неочевидным есть наличие неоднородного режима как такового в присутствии термостата. И если тепловые флуктуации сделают невозможным генерирование неоднородной прецессии, то все особенности процесса перемагничивания ФНЧ в этом случае [16] становятся не более, чем особенностями математической модели без шума безотносительно к реальной физической системе. Как показывают результаты численного моделирования, периодический тренд присутствует на временной зависимости косинуса угла прецессии (см. рис. 1.2в), что позволяет говорить об актуальности неоднородного режима для реальной ситуации с учетом взаимодействия с термостатом.

### 1.3.2 Среднее время переключения

Время переключения магнитного момента из одного состояния в другое является важной с практической точки зрения величиной, поэтому поиск внешних воздействий, при которых эта величина минимальная представляет существенный интерес. Задача о времени переключения, по сути, является разновидностью задачи о достижении случайным процессом заданного уровня. Однако вопрос о том,

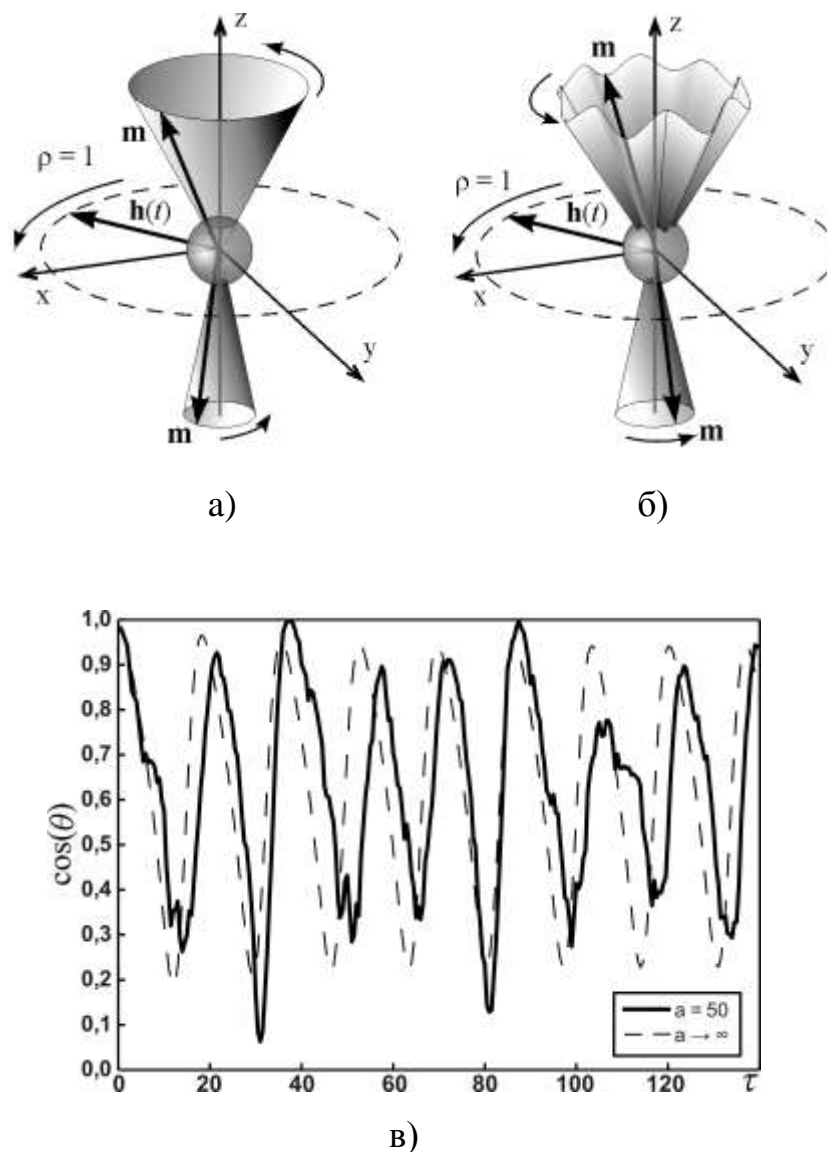


Рисунок 1.2 – Однородная (а) и неоднородная (б) прецессии магнитного момента. Реализация неоднородного режима для модели с тепловым шумом ( $a = 50$ ) и без него ( $a \rightarrow \infty$ ) ( $\Omega = 0,75$ ,  $\lambda = 0,2$ ,  $\tilde{h} = 0,2$ ) (в).

что считать таковым в случае стохастической динамики магнитного момента одноосной наночастицы, как правило, остается открытым. В то же время очевидно, что вектор  $\mathbf{m}$  достаточно долго достигает состояния с максимальной энергией, а затем, преодолев потенциальный барьер, достаточно быстро стремится к новому положению равновесия. Следовательно, в качестве такого заданного уровня можно выбрать положение магнитного момента, которое заведомо существенно отстоит от положения с максимальной энергией. Оказавшись в таком новом состоя-

нии, магнитный момент в дальнейшем будет сравнительно долго флуктуировать в окрестности нового равновесного положения, следовательно, можно считать, что процедура перемагничивания наночастицы завершена. В данной работе мы принимаем значение заданного уровня для азимутального угла  $\theta$  равным  $0,8\pi$ . При моделировании полагалось, что в начальный момент времени внешнее поле скачкообразно изменялось от нуля до заданного значения.

Очевидно, что тепловые флуктуации могут различным образом влиять на процесс переключения магнитного момента из одного устойчивого состояния в другое в зависимости от соотношения между тепловой и магнитной энергиями, см. выражение (1.6). Для малых амплитуд вращающегося поля (рис. 1.3а) с ростом температуры (или с уменьшением значения  $a$ ) время переключения уменьшается. Это связано с тем, что при малом регулярном воздействии, переключение происходит в первую очередь благодаря тепловым флуктуациям. При увеличении амплитуды вращающегося поля наличие тепловых флуктуаций будет как

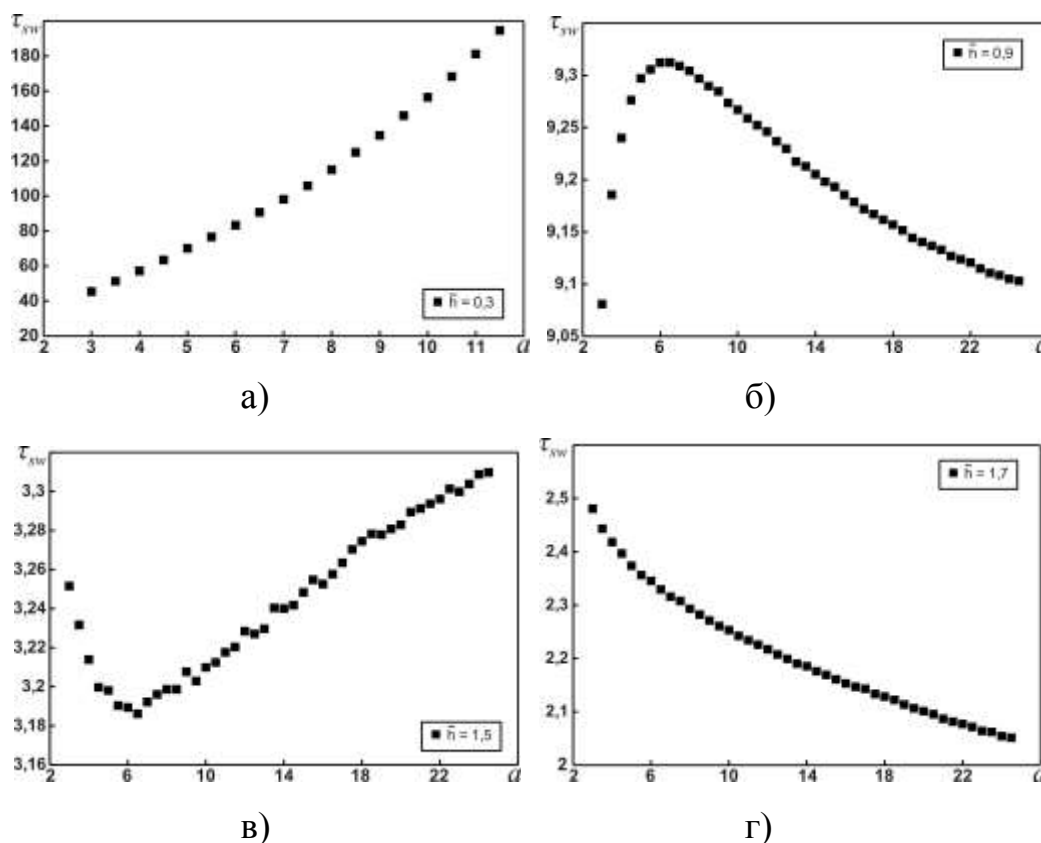


Рисунок 1.3 – Зависимость времени переключения от параметра  $a$  для различных амплитуд вращающегося поля: а)  $\tilde{h} = 0,3$ ; б)  $\tilde{h} = 0,9$ ; в)  $\tilde{h} = 1,5$ ; г)  $\tilde{h} = 1,7$ .

препятствовать так и способствовать процессу перемагничивания (см. рис. 1.3б, в) на фоне существенно снижения времени переориентации по сравнению с предыдущим случаем. Здесь переключение происходит благодаря действию вращающегося поля, а тепловой шум лишь сравнительно незначительно модифицирует время переключения. В конечном итоге, для достаточно больших амплитуд вращающегося поля увеличение температуры незначительно замедляет перемагничивание ФНЧ (рис. 1.3г). Все численные результаты получены для частоты  $\Omega = 1,0$ , и параметра затухания  $\lambda = 0,2$ . Усреднение проводилось по  $5 \cdot 10^5$  независимым реализациям.

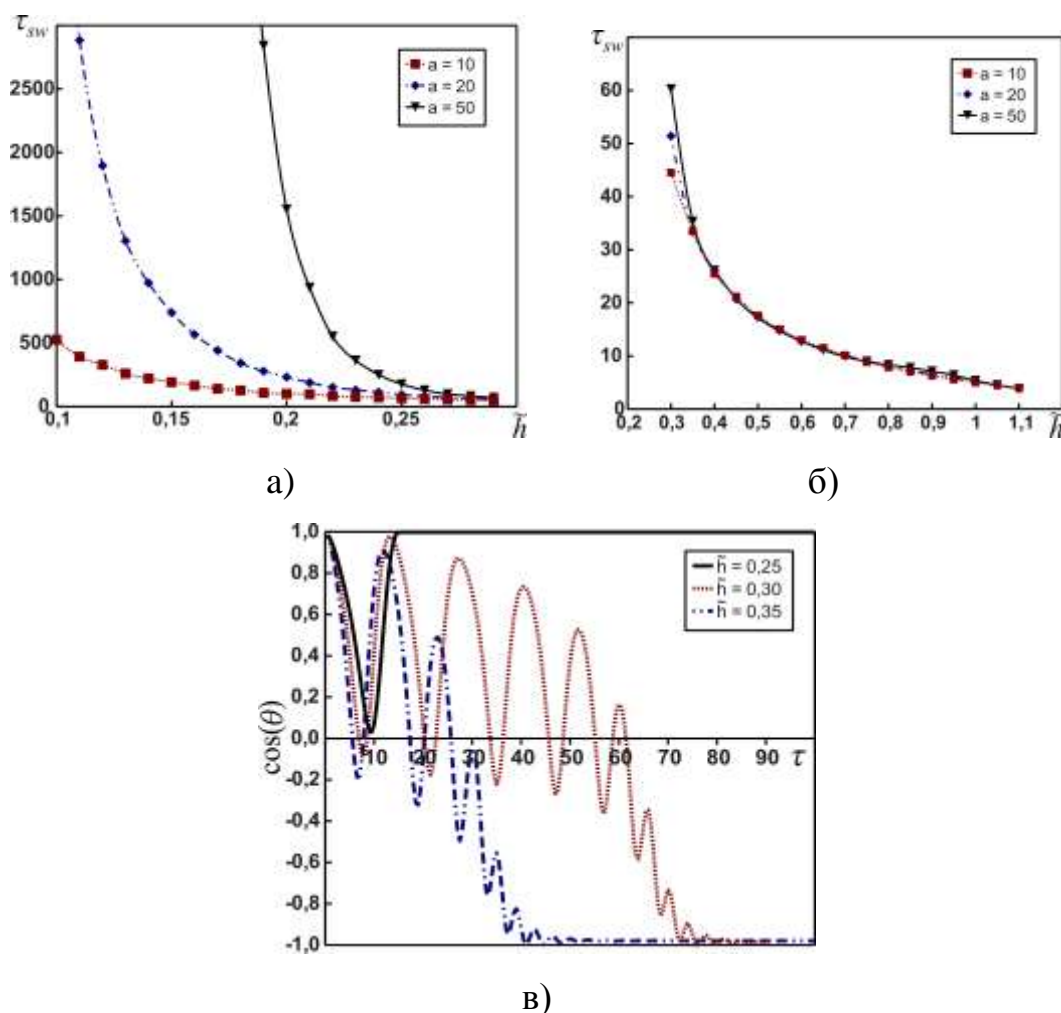


Рисунок 1.4 – Зависимость времени переключения от амплитуды вращающегося поля для различных параметров  $a$ : а) случай малых амплитуд вращающегося поля; б) случай больших амплитуд вращающегося поля; в) временные зависимости  $\cos\theta$  магнитного момента для детерминистического случая при различных амплитудах вращающегося поля.

Соответственно, зависимости времени переключения от амплитуды вращающегося поля (рис. 1.4) можно условно классифицировать на 2 вида. Если амплитуда вращающегося поля достаточно мала (для выбранных условий моделирования  $\tilde{h} = 0 \div 0,29$ ), величина времени переключения будет сравнительно большой и очень чувствительной как изменению  $\tilde{h}$ , так и к изменению температуры (рис. 1.4а). Из рисунка 1.4 (см. кривую  $\tilde{h} = 0,25$ ) очевидно, что в этом случае вращающееся поле самостоятельно не в состоянии перемагнитить наночастицу и наличие флуктуаций играет принципиальную роль.

Если же величина амплитуды поля достаточно велика для того, чтобы переключить магнитный момент, тепловые шумы оказывают лишь незначительное влияние на зависимость  $\tau_{sw}(\tilde{h})$ , см. рис. 1.4б. При этом время переключения существенно меньше, чем в предыдущем случае.

Моделирование проводилось для следующих параметров:  $\Omega = 0,75$ ,  $\lambda = 0,2$ . Усреднение производилось для 2000 независимых реализаций.

### 1.3.3 Распределение времен переключения

Поскольку процесс перемагничивания ФНЧ носит случайный характер, среднее время переключения магнитного момента не является самодостаточной характеристикой, поскольку сами времена переключения могут быть распределены различным образом. Проведенное численное исследование показали, что в случае, когда амплитуда вращающегося поля достаточно велика, и переориентация вектора  $\mathbf{m}$  осуществляется благодаря внешнему полю, функция распределения представляет собой неунимодальную кривую с несколькими минимумами и максимумами (рис. 1.5а). Это связано с тем, что при включении внешнего детерминистического поля за счет динамических процессов в различные моменты времени магнитный момент ФНЧ в различной степени отстоит от положения с максимальной энергией (рис. 1.5 б). И в те промежутки времени, когда  $\mathbf{m}$  имеет наибольшую энергию, вероятность его переориентации в новое состояние достигает максимальных значений.

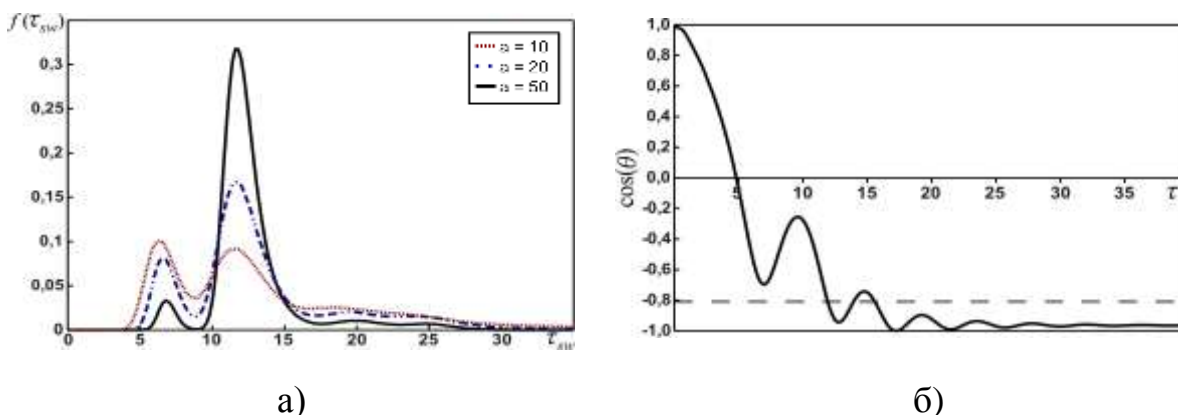


Рисунок 1.5 – Распределение времени переключения ( $\tilde{h} = 0,4$ ): а) функция распределения; б) временная зависимость косинуса полярного угла магнитного момента для детерминистического случая.

При этом относительная разница между минимумами и максимумами распределения тем меньше, чем большей есть температура. Таким образом, реальные времена перемагничивания могут с практически одинаковой вероятностью принимать отличающиеся в несколько раз значения.

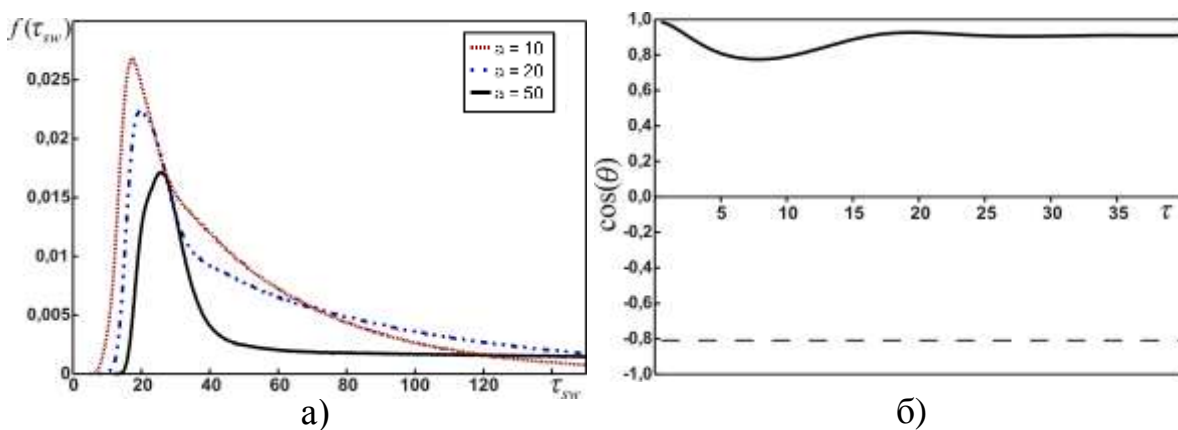


Рисунок 1.6 – Распределение времени переключения ( $\tilde{h} = 0,2$ ): а) функция распределения; б) временная зависимость косинуса полярного угла магнитного момента для детерминистического случая.



В случае же малых амплитуд поля, когда переключение возможно лишь в присутствии тепловых шумов, функция распределения приобретает вид ассиметричной унимодальной кривой, которая достаточно слабо убывает, что особенно выражено для больших температур (см. рис. 6а). Т.е., как и следовало ожидать, распределение есть более «размытым». Наличие максимума распределения связано с максимальным отклонением  $\mathbf{m}$  от положения равновесия, как и в предыдущем случае.

Моделирование проводилось для следующих параметров:  $\Omega = 0,5$ ,  $\lambda = 0,2$ . Для построения каждой кривой распределения было осуществлено  $2,5 \cdot 10^7$  независимых реализаций.

#### 1.4 Выводы к разделу 1

Используя стохастическое уравнение Ландау-Лифшица в данной работе численно изучалось влияние теплового шума на процесс перемагничивания ФНЧ внешним циркулярно-поляризованным полем, частота которого близка к резонансной. В частности, были найдены зависимости времени переключения от температуры, из которых следует, что флуктуации в зависимости от их интенсивности могут как ускорять, так и замедлять процесс переключения магнитного момента между двумя устойчивыми состояниями. Также установлены и проанализированы зависимости времени переключения амплитуды вращающегося поля. Показано, что для малых амплитуд поля время переключения сильно зависит от температуры, в то время как для больших амплитуд такая зависимость очень слабая.

Получены распределения времен переключения  $\mathbf{m}$ , которые в зависимости от амплитуды внешнего поля могут иметь различный характер. Показано, что в случае, когда переключение происходит за счет внешнего поля, реальные времена переключения могут принимать значения, отличающиеся в несколько раз с практически одинаковой вероятностью за счет тепловых флуктуаций. Данная информация имеет принципиальное значение для разработки новых методов магнитной записи с использованием циркулярно-поляризованного поля.

## 2 ТЕОРИЯ СВЕРХМЕДЛЕННОЙ ДИФФУЗИИ: ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ВО ВРЕМЕНИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

### 2.1 Актуальность задачи

Случайные процессы в физических, биологических, социальных, экономических и других системах часто демонстрируют аномальное поведение диффузии в том смысле, что при больших временах дисперсия  $\sigma^2(t)$  возрастает нелинейно со временем [38-40]. Обычно дисперсия подчиняется степенному закону, т.е.  $\sigma^2(t) \propto t^\alpha$ , и различают два типа аномальной диффузии: субдиффузия (когда  $0 < \alpha < 1$ ) и супердиффузия (когда  $\alpha > 0$ ). Класс систем с таким поведением дисперсии является достаточно широким и непрерывно увеличивающимся. Субдиффузия наблюдалась, например, в аморфных твердых телах [14], перколяционных кластерах [15] и живых клетках [16-17], а супердиффузия в турбулентных потоках [18-19], оптических решетках [20] и животных, находящихся в поиске пищи [21-22].

В общем случае зависимость дисперсии от времени не ограничивается степенной функцией. К примеру, при определенных условиях степенной закон может быть модифицирован логарифмической функцией времени (см. [41-43]). Но поскольку логарифмическая функция меняется намного медленнее, чем степенная, эта модификация не столько важна. Напротив, в случае свехмедленной диффузии, которая определена условием  $\sigma^2(t) / t^\alpha \rightarrow 0$ , когда  $t \rightarrow \infty$  для всех  $\alpha > 0$ , дисперсия не подчиняется степенному закону при больших временах. Диффузия Синая, для которой  $\sigma^2(t) \propto \ln^4 t$  [44], представляет наиболее известный пример диффузии этого типа. Некоторые другие примеры свехмедленной диффузии были обнаружены в резистивных цепях [45], непрерывных во времени случайных блужданиях (НВСБ) [46], заряженных полимерах [47], аperiodических средах [48], итерационных отображениях [49], динамике Ланжевена [50], фракционной кинетике [51], и т. д. Общая особенность всех этих примеров состоит в том, что долговременная зависимость дисперсии, т. е. закон свехмедленной диффузии, представлен степенной функцией логарифма времени  $\sigma^2(t) \propto \ln^v t$  ( $v < 0$ ).

Поэтому возникает вопрос о существовании законов сверхмедленной диффузии, которые отличаются от  $\sigma^2(t) \propto \ln^{\nu} t$ . Поскольку определяющее условие  $\sigma^2(t)/t^{\alpha} \rightarrow 0$  выполняется не только для этого частного закона, можно ожидать, что существуют и другие законы сверхмедленной диффузии. Здесь мы используем несвязанную модель НВСБ для того чтобы показать, что если распределение времени ожидания медленно меняется на бесконечности, тогда соответствующие законы сверхмедленной диффузии формируют широкий класс медленной меняющихся функций, которые растут без ограничений со временем.

## 2.2 Описание модели

В рамках формализма НВСБ (см., например, [38-40]), положение  $X(t)$  ( $X(0) = 0$ ) диффундирующей частицы описывается непрерывным во времени скачкообразным процессом

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} x_n, \quad (2.1)$$

где  $N(t) \in (0, 1, 2, \dots)$  – случайное число скачков к моменту времени  $t$  (если  $N(t) = 0$ , то  $X(t) = 0$ ), и  $x_n \in (-\infty; +\infty)$  – случайная амплитуда  $n$ -го скачка. Число скачков  $N(t)$  характеризуется временами ожидания  $\tau_n \in [0; +\infty)$ , т. е. случайными временами между скачками частицы. Эти времена и амплитуды скачков  $x_n$  считаются независимыми и одинаково распределены с плотностью вероятности  $p(\tau)$  и  $w(x)$ , соответственно. В несвязанной модели НВСБ также считается, что два набора переменных  $\tau_n$  и  $x_n$  независимы друг от друга, и значит совместная плотность вероятности этих переменных дается произведением  $p(\tau)w(x)$ .

В пространстве Фурье-Лапласа плотность вероятности  $P(x, t)$  процесса  $X(t)$  удовлетворяет, в несвязанном случае, уравнению Монролла-Вейса [52]

$$P_{ks} = \frac{1 - p_s}{s(1 - p_s w_k)}, \quad (2.2)$$

где преобразования Фурье и Лапласа представлены как  $u_k = F\{u(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} u(x)$  и  $v_s = L\{v(t)\} = \int_0^{\infty} dt e^{-st} v(t)$  ( $\text{Re } s > 0$ ) соответственно. Используя уравнение (2.2), преобразование Лапласа  $m$ -го момента ( $m=1, 2, \dots$ )  $X(t)$  может быть записано в форме

$$\langle X^m(t) \rangle_s = (-i)^m \frac{1 - p_s}{s} \frac{d^m}{dk^m} \frac{1}{1 - p_s w_k} \Big|_{k=0}, \quad (2.3)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по реализациям случайного процесса  $X(t)$ . Применяя к уравнению (2.3) обратное преобразование Лапласа  $v(t) = L^{-1}\{v_s\} = (1/2\pi i) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds e^{st} v_s$ , (считается, что действительный параметр  $c$  превышает действительные части всех сингулярностей  $v_s$ ), можно получить  $\langle X^m(t) \rangle = L^{-1}\{\langle X^m(t) \rangle_s\}$ .

В этой работе мы рассматриваем долговременное поведение дисперсии положения частицы, определенной как

$$\sigma^2(t) = \langle X^2(t) \rangle - \langle X(t) \rangle^2, \quad (2.4)$$

при дополнительном условии, что все дробные моменты распределения времени ожидания бесконечны, т. е.  $T_\rho = \int_0^{\infty} d\tau \tau^\rho p(\tau) = \infty$  при  $\rho > 0$ . По аналогии с [53] мы называем плотности  $p(\tau)$ , удовлетворяющие этому условию, плотностями со сверхтяжелыми хвостами. Следует заметить, что особый класс этих плотностей с  $p(\tau) \sim a / (\tau \ln^{1+\nu} \tau)$  ( $a > 0$ ,  $\tau \rightarrow \infty$ ) уже был рассмотрен Хавлиным и Вейссом [46]. Однако здесь мы рассматриваем намного более широкий класс плотностей вероятности со сверхтяжелыми хвостами, которые характеризуются асимптотическим поведением

$$p(\tau) \sim \frac{h(\tau)}{\tau} \quad (\tau \rightarrow \infty), \quad (2.5)$$

где положительная функция  $h(\tau)$  медленно изменяется на бесконечности в том смысле, что условие  $h(\mu\tau) \sim h(\tau)$  выполняется для всех  $\mu > 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Так как распределения времени ожидания считаются нормированными,  $T_0 = \int_0^\infty d\tau p(\tau) = 1$ , допустимые функции  $h(\tau)$  образуют подкласс медленно изменяющихся функций, которые при  $\tau \rightarrow \infty$  достаточно быстро стремятся к нулю.

### 2.3 Законы сверхмедленной диффузии

Для обеспечения конечности дисперсии  $\sigma^2(t)$  мы примем, что существуют первые два момента  $w(x)$ ,  $l_1 = \int_{-\infty}^\infty dx x w(x)$  и  $l_2 = \int_{-\infty}^\infty dx x^2 w(x)$ . В этом случае, используя определение преобразования Фурье для  $w(x)$ , можно получить

$$w_k = 1 + il_1 k - \frac{1}{2} l_2 k^2 + o(k^2) \quad (k \rightarrow 0), \quad (2.6)$$

и, таким образом, уравнение (2.3) для  $m = 1$  и  $m = 2$  дают

$$\langle X(t) \rangle_s = \frac{l_1 p_s}{s(1-p_s)}, \quad \langle X^2(t) \rangle_s = \frac{2l_1^2 p_s^2}{s(1-p_s)^2} + \frac{l_2 p_s}{s(1-p_s)}. \quad (2.7)$$

Наш следующий шаг – поиск асимптотических выражений для  $\langle X(t) \rangle_s$  и  $\langle X^2(t) \rangle_s$  при положительном параметре  $s$ , стремящемся к нулю. Причина в том, что если эти выражения удовлетворяют определенным условиям, то поведение  $\langle X(t) \rangle$  и  $\langle X^2(t) \rangle$  при больших временах может быть найдено непосредственно из теоремы Таубера для преобразования Лапласа.

Представим преобразование Лапласа  $p(\tau)$  как

$$p_s = 1 - \int_0^\infty d\tau (1 - e^{-s\tau}) p(\tau). \quad (2.8)$$

Тогда, вводя вероятность

$$V(t) = \int_t^\infty d\tau p(\tau) \quad (2.9)$$

того, что время ожидания превышает  $t$ , и используя новую переменную интегрирования  $q = s\tau$ , мы можем упростить уравнение (2.8) к виду

$$p_s = 1 - \int_0^\infty d\tau (1 - e^{-s\tau}) p(\tau). \quad (2.10)$$

Функция  $V(t)$ , известная как дополнительная функция распределения времени ожидания (или вероятность превышения), удовлетворяет начальному условию  $V(0) = 1$  и стремится к нулю медленно изменяющимся способом при  $t \rightarrow \infty$ . Последнее свойство  $V(t)$ , которое является важным в нашем подходе, может быть проверено с использованием асимптотической формулы (2.5) и условия  $h(\mu\tau) \sim h(\tau)$  ( $\tau \rightarrow \infty$ ):

$$V(\mu t) \sim \int_{\mu t}^\infty d\tau \frac{h(\tau)}{\tau} \sim \int_t^\infty dz \frac{h(z)}{z} \sim V(t) \quad (2.11)$$

( $\tau \rightarrow \infty$ ). В этой связи нужно отметить, что дополнительная функция распределения времени ожидания  $F(t) = \int_0^t d\tau p(\tau) = 1 - V(t)$  также медленно изменяется на бесконечности.

Поскольку  $V(t) \sim V(\mu t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , функция  $V(q/s)$  в уравнении (2.10) при  $s \rightarrow \infty$  может быть заменена на  $V(1/s)$ , что дает

$$p_s \sim 1 - V\left(\frac{1}{s}\right) \quad (s \rightarrow 0). \quad (2.12)$$

Используя этот результат в уравнении (2.7), мы находим, в пределе малых  $s$ , что

$$\langle X(t) \rangle_s \sim \frac{l_1}{sV(1/s)}, \quad \langle X^2(t) \rangle_s \sim \frac{2l_1^2}{sV^2(1/s)} \quad (2.13)$$

если  $l_1 \neq 0$  и

$$\langle X(t) \rangle_s = 0, \quad \langle X^2(t) \rangle_s \sim \frac{l_2}{sV(1/s)} \quad (2.14)$$

если  $l_1 = 0$ . Далее, для поиска асимптотического поведения моментов  $\langle X(t) \rangle_s$  и  $\langle X^2(t) \rangle_s$ , мы применяем теорему Таубера для преобразования Лапласа, которая гласит (см., например, [54]), что если с некоторого момента времени функция  $v(t)$  монотонна и  $v_s \sim s^{-\gamma}L(1/s)$  при  $s \rightarrow 0$ , тогда  $v(t) \sim t^{\gamma-1}L(t)/\Gamma(\gamma)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Здесь  $L(t)$  — слабо изменяющаяся на бесконечности функция,  $\Gamma(\gamma)$  — гамма функция, и  $0 < \gamma < \infty$ . В соответствии с этой теоремой, из уравнений (2.13) и (2.14) получается

$$\langle X(t) \rangle \sim \frac{l_1}{V(t)}, \quad \langle X^2(t) \rangle \sim \frac{2l_1^2}{V^2(t)} \quad (2.15)$$

и

$$\langle X(t) \rangle = 0, \quad \langle X^2(t) \rangle \sim \frac{l_2}{V(t)}, \quad (2.16)$$

соответственно. Мы подчеркиваем, что в несимметричном случае, когда  $l_1 \neq 0$ , главные члены асимптотического разложения  $\langle X(t) \rangle^2$  и  $\langle X^2(t) \rangle$  различны, см. уравнения (2.15). Такая же ситуация наблюдается и для несимметричной субдиффузии, в то время, как  $\langle X^2(t) \rangle \sim \langle X(t) \rangle^2$  и  $\langle X^2(t) \rangle \sim \langle X(t) \rangle^2 \propto t$  [41,55]. Эти особенности моментов являются следствием того, что, поскольку в несимметричном случае  $P_{ks} \neq P_{ks}$ , левый и правый хвосты плотности вероятности  $P(x, t)$  разные.

Таким образом, используя уравнения (2.4), (2.15) и (2.16), при больших временах для дисперсии можно получить

$$\sigma^2(t) \sim \begin{cases} l_1^2 / V^2(t), & l_1 \neq 0 \\ l_2 / V(t), & l_1 = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

с

$$V(t) \sim \int_t^\infty d\tau \frac{1}{\tau} h(\tau). \quad (2.18)$$

Асимптотическая формула (2.17), которая описывает как несимметричную ( $l_1 \neq 0$ ) так и симметричную ( $l_1 = 0$ ) диффузию в системах, характеризуемых

сверхтяжелыми хвостами распределений времен ожидания, является основным результатом этого раздела. Наиболее важным является тот факт, что вероятность превышения  $V(t)$  изменяется медленно на бесконечности. Именно эта особенность  $V(t)$  отвечает за сверхмедленный характер диффузии в таких системах. Действительно, хорошо известно [56], что если некая функция, скажем  $V(t)$ , медленно изменяется, то так ведет себя и любая степень этой функции. Отсюда следует, что функция  $\sigma^2(t)$  также медленно изменяется и, значит, условие  $\sigma^2(t)/t^\alpha \rightarrow 0$  выполняется для всех  $\alpha > 0$  при  $t \rightarrow \infty$  [56]. Другими словами, дисперсия  $\sigma^2(t)$  растет до бесконечности ( $\sigma^2(t) \rightarrow \infty$  поскольку  $V(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ) медленнее, чем любая положительная степень времени, т. е., наблюдается сверхмедленная диффузия. Следует отметить, что чем медленнее уменьшается вероятность превышения, тем медленнее диффузия. В то же время, поскольку  $\sigma^2(t)|_{l_1 \neq 0} / \sigma^2(t)|_{l_1=0} \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , сверхмедленная несимметричная диффузия протекает намного быстрее симметричной.

Поскольку вероятность превышения  $V(t)$  медленно изменяется, то, согласно теореме Карамата [56],  $V(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  может быть записана в виде

$$V(t) \sim \nu \exp\left(-\int_{\kappa}^t d\tau \frac{1}{\tau} \epsilon(\tau)\right) \quad (2.19)$$

Здесь  $\nu$  – это положительный параметр, а  $\kappa$  – неотрицательный параметр, который, без потери обобщенности можно принять равным нулю. В общем случае для произвольной медленно меняющейся функции  $V(t)$  требуется, чтобы функция  $\epsilon(\tau)$  стремилась к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$ . Но в нашем случае  $V(t) \rightarrow 0$  в пределе больших времен. Поэтому функция  $\epsilon(\tau)$  должна быть положительной и удовлетворять условиям  $\epsilon(\tau) \rightarrow 0$  и  $\int_{\kappa}^{\tau} d\tau' \epsilon(\tau') / \tau' \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Асимптотическая формула (2.17) с таким образом определенной вероятностью превышения  $V(t)$  представляет наиболее общую форму законов диффузии в данной модели. Если асимптотическое поведение функции  $h(\tau)$  известно, то асимптотическое поведение функции  $\epsilon(\tau)$  и величина параметра  $\nu$  могут быть определены как



$$\tau(\tau) \sim \frac{h(\tau)}{V(\tau)} \quad (\tau \rightarrow \infty) \quad (2.20)$$

и

$$v = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \exp\left(\int_{\kappa}^{\tau} d\tau' \frac{1}{\tau'} \tau(\tau')\right) V(\tau) \quad (2.21)$$

с функцией  $V(\tau)$ , взятой из уравнения (2.18). Следует подчеркнуть, что поскольку функции  $h(\tau)$  и  $V(\tau)$  слабо меняются, их отношение, т. е. функция  $\epsilon(\tau)$ , также медленно меняется. Это свойство сохраняется для всех плотностей вероятности времен ожидания, которые характеризуются асимптотическим поведением (2.5).

Мы завершаем этот раздел замечанием, что законы сверхмедленной диффузии (2.17) были получены для простейшей модели НВСБ. То, что эти законы включают закон диффузии  $\sigma^2(t) \propto \ln^v t$  как частный случай, не означает, конечно, что эта модель детально описывает системы, упомянутые во вводной части. В этом контексте мы отметим, что наша цель состоит не в применении несвязанной модели НВСБ для описания тех систем, а в ее использовании для демонстрации того, что законы сверхмедленной диффузии образуют широкий класс медленно изменяющихся функций.

## 2.4 Примеры

В качестве первого примера распределений времен ожидания с супертяжелыми хвостами, чье асимптотическое поведение описывается уравнением (2.5), рассмотрим двухпараметрический класс таких распределений, характеризующихся плотностью вероятности

$$p(\tau) = \frac{(r-1)\ln^{r-1} \eta}{(\eta + \tau)\ln^r(\eta + \tau)} \quad (2.22)$$

с параметрами  $r > 1$  и  $\eta > 1$  (эти условия гарантируют, что  $p(\tau)$  положительно и

нормализовано). В этом случае вероятность превышения (2.9) рассчитывается точно

$$V(t) = \left( \frac{\ln \eta}{\ln(\eta + t)} \right)^{r-1}, \quad (2.23)$$

и, т.о.,  $V(t) \sim (\ln \eta / \ln t)^{r-1}$  при  $t \rightarrow \infty$ . Подстановка последнего асимптотического результата в уравнение (2.17) приводит к следующей асимптотической формуле:

$$\sigma^2(t) \sim \begin{cases} (l_1 / \ln^{r-1} \eta)^2 \ln^{2(r-1)} t, & l_1 \neq 0 \\ (l_2 / \ln^{r-1} \eta) \ln^{r-1} t, & l_1 = 0, \end{cases} \quad (2.24)$$

которая для  $l_1 = 0$  была впервые получена в [46]. Наконец, поскольку согласно уравнению (2.22)  $h(\tau) \sim (r-1) \ln^{r-1} \eta / \ln^r \tau$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , из уравнений (2.20) и (2.21) мы находим  $\epsilon(\tau) \sim (r-1) / \ln \tau$  и  $v = \ln^{r-1} \eta$ .

Второй пример характеризуется следующей плотностью вероятности времен ожидания:

$$p(\tau) = \frac{(r-1)(\ln \ln \eta)^{r-1}}{(\eta + \tau) \ln(\eta + \tau) [\ln \ln(\eta + \tau)]^r} \quad (2.25)$$

( $r > 1$ ,  $\eta > e$ ). Основная особенность этой плотности состоит в том, что его правый хвост тяжелее, чем в предыдущем случае, т. е.  $p(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$  стремится к нулю медленнее, чем плотность вероятности в уравнении (2.22). Отсюда следует, что вероятность превышения

$$V(t) = \left( \frac{\ln \ln \eta}{\ln \ln(\eta + t)} \right)^{r-1}, \quad (2.26)$$

которая соответствует плотности вероятности (2.25), уменьшается медленнее, чем  $V(t)$  из уравнения (2.23), и, как следствие, дисперсия (2.17) возрастает со временем медленнее, чем в предыдущем случае:

$$\sigma^2(t) \sim \begin{cases} [l_1 / (\ln \ln \eta)^{r-1}]^2 (\ln \ln t)^{2(r-1)}, & l_1 \neq 0 \\ [l_2 / (\ln \ln \eta)^{r-1}] (\ln \ln t)^{r-1}, & l_1 = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Принимая во внимание, что, согласно уравнению (2.25)  $h(\tau) \sim (r-1)(\ln \ln \eta)^{r-1} / [\ln \tau (\ln \ln \tau)^r]$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , для этого случая получим  $\epsilon(\tau) \sim (r-1) / (\ln \tau \ln \ln \tau)$  и  $\nu = (\ln \ln \eta)^{r-1}$ .

## 2.5 Выводы к разделу 2

Используя несвязанную модель непрерывных во времени случайных блужданий, характеризующихся функцией распределения времен ожидания, которая медленно изменяется на бесконечности, мы определили широкий класс законов сверхмедленной диффузии. Этот класс состоит из медленно изменяющихся функций, описывающих дисперсию положения частицы, которая стремится к бесконечности медленнее, чем любая степень времени. Мы нашли связь между поведением дисперсии при больших временах и асимптотическим поведением вероятности превышения. А именно, в случаях несимметричной и симметричной сверхмедленной диффузии дисперсия обратно пропорциональна второй и первой степени вероятности превышения, соответственно. Благодаря этому отличию несимметричная сверхмедленная диффузия при больших временах является более быстрой, чем симметричная. Наконец, мы применили теорему Карамата и нашли наиболее общую форму законов сверхмедленной диффузии в данной модели. Ожидается, что развитый в этом разделе подход может быть обобщен для описания сверхмедленной магнитной релаксации в системах наночастиц.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной НИР получены следующие основные результаты:

1. С помощью численного интегрирования стохастического уравнения Ландау-Лифшица изучено влияние теплового шума на процесс перемагничивания ФНЧ внешним циркулярно-поляризованным полем, частота которого близка к резонансной. В частности, были найдены зависимости времени переключения от температуры, из которых следует, что флуктуации в зависимости от их интенсивности могут как ускорять, так и замедлять процесс переключения магнитного момента между двумя устойчивыми состояниями. Также установлены и проанализированы зависимости времени переключения от амплитуды вращающегося поля. Показано, что для малых амплитуд поля время переключения сильно зависит от температуры, в то время как для больших амплитуд температурная зависимость становится слабой.

2. Были получены распределения времен переключения для магнитного момента, которые в зависимости от амплитуды внешнего поля могут иметь различный характер. Показано, что в случае, когда переключение происходит за счет внешнего поля, реальные времена переключения могут принимать значения, отличающиеся в несколько раз с практически одинаковой вероятностью за счет тепловых флуктуаций. Данная информация имеет принципиальное значение для разработки новых методов магнитной записи с использованием циркулярно-поляризованного поля.

3. В рамках несвязанной модели непрерывных во времени случайных блужданий, характеризующихся функцией распределения времен ожидания, которая медленно изменяется на бесконечности, определен широкий класс законов сверхмедленной диффузии. Этот класс состоит из медленно изменяющихся функций, описывающих дисперсию положения частицы, которая стремится к бесконечности медленнее, чем любая степень времени. Показано, что в случаях несимметричной и симметричной сверхмедленной диффузии дисперсия обратно

пропорциональна второй и первой степени вероятности превышения, соответственно. Благодаря этому отличию несимметричная сверхмедленная диффузия при больших временах является более быстрой, чем симметричная. Ожидается, что развитый здесь подход может быть обобщен для описания сверхмедленной магнитной релаксации в системах ферромагнитных наночастиц.

**ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК**

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. – М.: Мир, 1990.
2. Benzi R., Sutera A., and Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance // J. Phys. A – 1981 – Vol. 14 – P. L 453.
3. Doering C.R. and Gadoua J.C. Resonant activation over a fluctuating barrier // Phys. Rev. Lett. – 1992 – Vol. 69 – P. 2318-2321.
4. Magnasco M.O. Forced thermal ratchets // Phys. Rev. Lett. – 1993 – Vol. 71 – P. 1477-1481.
5. S.N. Piramanayagam, K. Srinivasan, Recording media research for future hard disk drives, J. Magn. Magn. Mat. – 2009. – Vol.321, 485-494.
6. A. Kikitsu, Prospects for bit patterned media for high-density magnetic recording. J. Magn. Magn. Mat. – 2009. – Vol.321, 526-530.
7. H.J. Richter, The transition from longitudinal to perpendicular recording J. Phys. D: Appl. Phys. – 2007. – Vol.40, R149-R161.
8. Ph. Moriarty Nanostructured materials // Rep. Prog. Phys. – 2001. – Vol.64. – P.297–381.
9. M. Bauer, J. Fassbender, B. Hillebrands Switching behavior of a Stoner particle beyond the relaxation time limit // Phys. Rev. B. – 2000. – Vol.61. – P.3410 –3416.
10. S. Kaka, S. E. Russek Precessional switching of submicrometer spin valves // J. Appl. Phys. – 2002. – Vol.80, №12. – P.2958 –2960.
11. C. Serpico, I. D. Mayergoyz, G. Bertotti Analytical solutions of Landau–Lifshitz equation for precessional switching // J. Appl. Phys. – 2003. – Vol.93, №10. – P.6909-6911.
12. E. B. Myers, F. J. Albert, J. C. Sankey, E. Bonet, R. A. Buhrman, and D. C. Ralph Thermally Activated Magnetic Reversal Induced by a Spin-Polarized Current // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol.89, №19. – P.196801(4).
13. H.W. Schumacher, C. Chappert, R. C. Sousa, P. P. Freitas, and J. Miltat Quasibal-

- listic Magnetization Reversal // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – Vol.90, №1. – P.017204(4).
14. H. Scher, E.W. Montroll, Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids // *Phys. Rev. B.* – 1975. – Vol.12, №6. – P.2455-2477
  15. A. Klemm, R. Metzler, and R. Kimmich, Diffusion on random-site percolation clusters: Theory and NMR microscopy experiments with model objects, *Phys. Rev. E.* – 2002. – Vol.65, 021112.
  16. I. Golding and E.C. Cox, Physical Nature of Bacterial Cytoplasm, *Phys. Rev. Lett.* – 2006. – Vol. 96, 098102.
  17. J. Szymanski, and M. Weiss, Elucidating the Origin of Anomalous Diffusion in Crowded Fluids, *Phys. Rev. Lett.* – 2009. – Vol.103, 038102.
  18. L.F. Richardson, Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph, *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* – 1926, Vol.110, P. 709-737.
  19. T.H. Solomon, E.R. Weeks, and H.L. Swinney, Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow, *Phys. Rev. Lett.* – 1993. – Vol.71, P. 3975-3978.
  20. H. Katori, S. Schlipf, and H. Walther, Anomalous Dynamics of a Single Ion in an Optical Lattice, *Phys. Rev. Lett.* – 1997. – Vol.79, P. 2221-2224.
  21. D.W. Sims, et al., Scaling laws of marine predator search behaviour, *Nature.* – 2008. – Vol. 451, P. 1098-1102.
  22. N.E. Humphries, et al., Environmental context explains Lévy and Brownian movement patterns of marine predators, *Nature.* – 2010. – Vol.465, P.1066-1069.
  23. Q.A. Pankhurst, J. Connolly, S.K. Jones and J. Dobson, Applications of magnetic nanoparticles in biomedicine, *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2003. – Vol.36, R167-R181.
  24. Q.A. Pankhurst, J. Connolly, S.K. Jones and J. Dobson, Progress in applications of magnetic nanoparticles in biomedicine, *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2009. – Vol. 42, 224001.
  25. T. Atanasijevic, A. Jasanoff, Preparation of iron oxide-based calcium sensors for MRI, *Nat. Protoc.* – 2007. – Vol.2, 2582-2589.

26. A. Jordan, R. Scholz, P. Wust, H. Fahling, R. Felix, Magnetic fluid hyperthermia (MFH): Cancer treatment with AC magnetic field induced excitation of biocompatible superparamagnetic nanoparticles, *J. Magn. Magn. Mat.* – 1999. Vol.201, 413-419.
27. S.-J. Han, S.Wang, Magnetic Nanotechnology for Biodetection, *Journal of The Association for Laboratory Automation.* – 2003. – Vol.15, 93-98.
28. J. Kim, Yu. Piao, N. Lee, Y.I. Park, I.-H. Lee, J.-H. Lee., S.R. Paik, T. Hyeon, Magnetic Nanocomposite Spheres Decorated with NiO Nanoparticles for a Magnetically Recyclable Protein Separation System, *Adv. Mater.* – 2010. – Vol.22, 57-60.
29. G. Bertotti, C. Serpico, and I.D. Mayergoyz. Nonlinear Magnetization Dynamics under Circularly Polarized Field // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – Vol.86, №4. – P.724-727.
30. C. Thirion, W. Wernsdorfer, D. Mailly. Switching of magnetization by nonlinear resonance studied in single nanoparticles // *Nature Mat.* – 2003. – Vol.2. – P.524-527.
31. Z.Z. Sun, X.R. Wang. Magnetization reversal through synchronization with a microwave // *Phys. Rev. B.* – 2006. – Vol.74. – 132401.
32. S.I. Denisov, T.V. Lyutyu, P. Hänggi, and K.N. Trohidou. Dynamical and thermal effects in nanoparticle systems driven by a rotating magnetic field // *Phys. Rev. B.* – 2006. – Vol.74. – 104406.
33. Т.В. Лютый, А.Ю. Поляков, Перемагничивание наночастицы циркулярно-поляризованным магнитным полем, *Металлофиз. новейшие технол.* – 2008. – Т. 28, №4, С. 429-438.
34. T.V. Lyutyu, A.Yu. Polyakov, A.V. Rot-Serov. and C. Binns Switching properties of ferromagnetic nanoparticles driven by a circularly polarized magnetic field // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 2009. – Vol.21. – P.396002 (9)
35. S.I. Denisov, K. Sakmann, P. Talkner, P. Hanggi, Rapidly driven nanoparticles: Mean first-passage times and relaxation of the magnetic moment, *Phys. Rev. B.* – 2007. – Vol.75, 184432.



36. E. Stoner, E. Wohlfarth, A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys, *IEEE T. Magn.* – 1991. – Vol.27, 3475-3518.
37. P.E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz, *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments* (Berlin: Springer: 1994).
38. J.P. Bouchaud, A. Georges, Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications // *Phys. Rep.* – 1990. – Vol.195, №4. – P.127-293
39. R. Metzler, J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Phys. Rep.* – 2000. – Vol.339, №1. – P.1-77
40. D. Ben-Avraham, S. Havlin, *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems* – Cambridge University Press, 2000. – 332 c.
41. M.F. Shlesinger, Asymptotic solutions of continuous-time random walks, *J. Stat. Phys.* – 1974. – Vol.10, P. 421-434.
42. G. Zumofen, and J. Klafter, Scale-invariant motion in intermittent chaotic systems, *Phys. Rev. E.* –1993. – Vol. 47, P. 851-863.
43. S.I. Denisov and H. Kantz, Anomalous biased diffusion in a randomly layered medium, *Phys. Rev. E.* – 2010. – Vol.81, 021117.
44. Ya.G. Sinai, Limit behaviour of one-dimensional random walks in random environments, *Theory Probab. Appl.* – 1982. – 1982 Vol.27, P. 256-.
45. S. Havlin, R. Blumberg Selinger, M. Schwartz, H.E. Stanley, and A. Bunde, Random Multiplicative Processes and Transport in Structures with Correlated Spatial Disorder, *Phys. Rev. Lett.* – 1988. – Vol.61, P. 1438-1441.
46. S. Havlin, and G.H. Weiss, A new class of long-tailed pausing time densities for the CTRW, *J. Stat. Phys.* – 1990. – Vol. 58, P. 1267-1273.
47. H. Schiessel, I.M. Sokolov, and A. Blumen, Dynamics of a polyampholyte hooked around an obstacle, *Phys. Rev. E.* –1997. – Vol.56 R2390-R2393.
48. F. Igloi, L. Turban, and H. Rieger, Anomalous diffusion in aperiodic environments, *Phys. Rev. E.* – 1999. –Vol.59, P. 1465-1474.
49. J. Drager, and J. Klafter, Strong Anomaly in Diffusion Generated by Iterated Maps, *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – Vol.84, P. 5998-6001.

50. S.I. Denisov, and W. Horsthemke, Anomalous diffusion of particles driven by correlated noise, *Phys. Rev. E.* – 2000. – Vol. 62, P. 7729-7734.
51. A.V. Chechkin, J. Klafter, I.M. Sokolov, Fractional Fokker-Planck equation for ultraslow kinetics, *Europhys. Lett.* – 2003. – Vol. 63, P. 326-329.
52. E.W. Montroll, and G.H. Weiss, Random walks on lattices. II, *J. Math. Phys.* – 1965. – Vol.6, P. 167-181.
53. S.I. Denisov, H. Kantz, and P. Hanggi, Langevin equation with super-heavy-tailed noise. *J. Phys. A: Math. Theor.* – 2010. – Vol.43, 285004.
54. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol.2 (Wiley, New York) 1971.
55. S.I. Denisov, E.S. Denisova, and H. Kantz, Biased diffusion in a piecewise linear random potential, *Eur. Phys. J. B.* – 2010. – Vol.76, P. 1-8.
56. N.H. Bingham, C.M. Goldie, and J.L. Teugels, *Regular Variation* (Cambridge University Press, Cambridge) 1987.