УДК 514.7
КП
№ госрегистрации 0115U000691
Инв. №

Министерство образования и науки Украины
Сумский государственный университет
(СумГУ)

40007, г. Сумы, ул. Римского-Корсакова, 2;
тел. (0542) 33 41 08, факс (0542) 33 40 49

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе,
д.ф.-м.н., профессор

____________ А.Н. Черноус
2015.12.29

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ ПОДМНОГОВИДОВ И АНАЛИЗ НА МНОГОВИДАХ

(промежуточный)

Начальник НИЧ
к.ф.-м.н., с.н.с. Д.И. Курбатов
2015.12.29

Руководитель НИР
д.ф.-м.н., профессор А.А. Борисенко
2015.12.28

2015

Рукопись закончена 25 декабря 2015 г.

Результаты работы рассмотрены научным советом СумГУ
протокол №3 от 26 ноября 2015 г.

СПИСОК АВТОРОВ

Руководитель НИР главный научный сотрудник член-корр. АН Украины д.ф.-м.н., профессор	2015.12.24	А.А. Борисенко (реферат, разделы 1, 3)
ведущий научный сотрудник д.ф.-м.н., профессор	2015.12.24	К.Г. Малютин (реферат, разделы 4, 5)
старший научный сотрудник к.ф.-м.н., с.н.с.	2015.12.24	Д.В. Болотов (раздел 2)
ведущий научный сотрудник к.ф.-м.н., ассистент	2015.12.24	И.И. Козлова (раздел 4)
научный сотрудник ст. преподаватель	2015.12.24	К.Д. Драч (раздел 3)
лаборант ассистент	2015.12.24	О.А. Боженко (раздел 5)

РЕФЕРАТ

Отчет о НИР. 35 с., 55 источников.

Объект исследования — выпуклые подмногообразия; римановы многообразия; субгармонические и целые функции.

Цель работы — изучение оптимальных свойств действительных полных кэлеровых выпуклых подмногообразий и римановых многообразий, а также исследование свойств субгармонических функций.

Метод исследования — теоремы в пространствах постоянной кривизны, теоремы Александрова, Погорелова об изометрическом погружении Александровских пространств в пространства постоянной кривизны, топологические свойства слоев, метод рядов Фурье.

Актуальность темы исследования обусловлена недостаточной исследованностью действительных полных кэлеровых выпуклых подмногообразий в евклидовом пространстве, макроскопических размерностей римановых многообразий, классов субгармонических функций в полуплоскости с ограничениями на рост.

Основные полученные результаты. Доказано, что действительное полное кэлерово выпуклое подмногообразие в евклидовом пространстве расщепляется как метрическое произведение двумерных поверхностей положительной гауссовой кривизны в трехмерных евклидовых пространствах и евклидова подпространства. Дано также обобщение теоремы В. К. Белошапки и С. Н. Бычкова на случай выпуклых подмногообразий произвольной коразмерности.

Решена проблема Громова по макроскопическое размерности римановых многообразий, которая сформулирована в виде гипотез.

Доказана теорема о нижнем порядке субгармонических в верхней полуплоскости функций бесконечного порядка с полной мерой, распределенной на конечной системе лучей.

Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости интерполяционной задачи в классе целых функций нулевого порядка.

КЭЛЕРОВО ВЫПУКЛОЕ ПОДМНОГООБРАЗИЕ, ГАУССОВА КРИВИЗНА, КОРАЗМЕРНОСТЬ, МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ, РИМАНОВО МНОГООБРАЗИЕ, СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, ПОЛНАЯ МЕРА, НУЛЕВОЙ ПОРЯДОК.

Содержание

1 О погружении кэлеровых многообразий в классе выпуклых подмногообразий

Теоремы о расщеплении занимают одно из центральных мест в римановой геометрии и геометрии подмногообразий. Это теоремы Топоногова, Чигера-Громолла в римановой геометрии, теорема Хартмана о цилиндричности подмногообразий неотрицательной секционной кривизны, теорема о цилиндричности подмногообразий в евклидовом пространстве без требования на внутреннюю геометрию, которые заменяется естественным внешне геометрическим условием.

Дайчер, Флорит изучали строение действительных кэлеровых подмногообразий в евклидовом пространстве. При дополнительном ограничении на внутренюю кривизну при малой коразмерности вложения справедлива

Теорема 1 *[1] Пусть $f : M^{2n} \to R^{2n+p}$ есть изометрическое погружение кэлерового многообразия с $p \leq n$. Если M^{2n} имеет либо положительную кривизну Риччи либо положительную голоморфную секционную кривизну, то $p = n$ и f локально расщепляется как произведение n двумерных выпуклых поверхностей в R^3. При условии, что M^{2n} полное многообразие, то расщепление глобальное.*

Напомним, что изометрическое погружение $f : M^m \to R^{m+p}$ расщепляется локально как произведение гиперповерхностей, если для любого $x \in M^n$ существует окрестность $x \in U \subseteq M^n$ и для любого $1 \geq i \geq p$ риманово многообразие $U_i^{m_i}$ допускает изометрическое погружение $f_i : U_i^{m_i} \to R^{m_i+1}$ такое, что $U = U_1 \times ... \times U_p$ и $f|_U = f_1 \times ... \times f_p$.

При менее жестких ограничениях на внутреннюю кривизну справедлива

Теорема 2 *[1] Пусть $f : M^{2n} \to R^{2n+p}$ есть изометрическое погружение кэлерова многообразия. Если M^{2n} имеет либо неотрицательную кривизну Риччи либо неотрицательную голоморфную кривизну, то внешний нуль-индекс $\nu \geq 2n - 2p$. Более того, если $\nu = 2n - 2p$, то на некотором открытом всюду плотном множестве $W \subset M^{2n}$ подмногообразие $f|_W$ локально расщепляется как метрическое произведение p нигде не плоских действительных кэлеровых гиперповерхностей с неотрицательной кривизной Риччи.*

Если многообразие полное, то расщепление глобально:

$$\begin{aligned} M^{2n} &= M_1^2 \times ... \times M_p^2 \times \mathbb{C}^{n-p} \qquad \text{и} \\ f &= f_1 \times ... \times f_p \times I, \end{aligned}$$

$f_i : M_i^2 \to R^3$, $1 \leq i \leq p$ *— полные двумерные выпуклые поверхности положительной гаусовой кривизны, и* $I : \mathbb{C}^{n-p} \to R^{2n-2p}$ *— тождественное отображение.*

Эти результаты уточнялись и обобщались в [2].

Погружения кэлеровых многообразий изучалось в классе плюригармонических подмногообразий: это такие кэлеровы евклидовы подмногообразия, когда образ любой голоморфной кривой является минимальной поверхностью в объемлющем евклидовом пространстве.

Пусть $\alpha(x)$ вторая квадратичная форма $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$ изометричного погружения кэлерова многообразия M^{2n} в евклидово пространство. В фиксированной точке $x \in M^{2n}$

$$\alpha : T_xM \times T_xM \to T_x^{\perp}M = N \cong R^p$$

есть симметричное билинейное отображение, где $T_xM = R^{2n}$ — действительное касательное пространство M^{2n} в точке x и $(T_x^{\perp}M, <,>)$ — нормальное пространство в точке x.

Комплексифицируем α

$$\alpha : (T_xM) \otimes \mathbb{C} \times (T_xM) \otimes \mathbb{C} \to N \otimes \mathbb{C}.$$

Пусть V пространство касательных векторов типа (0, 1) в точке x такое, что V есть комплексное подпространство $(T_xM) \otimes \mathbb{C}$, где $V = \{v - iJv : v \in T_xM\}$, $\overline{V} = \{v + iJv : v \in T_xM\}$, где J — комплексная структура на M. Тогда $(T_xM) \otimes \mathbb{C} \cong V \oplus \overline{V}$. Обозначим $H = \alpha|_{V \times \overline{V}}$.

Определим нуль-индекс плюригармоничности $\nu_J(x)$ M^{2n} в точке x [1]:

$$\nu_J(x) = \dim_{\mathbb{C}} \Delta_{1,1}, \qquad \text{где} \qquad \Delta_{1,1} := \{v \in V | H_{v\overline{w}} = 0, \forall w \in V\}.$$

Отображение f является плюригармоническим тогда и только тогда, если $\nu_J(x) = n$ для всех точек $x \in M^{2n}$.

Напомним определение внешнего нуль-индекса ν:

$$\nu(x) = \dim \Delta(x),$$

где $\Delta(x) = \ker \alpha(x) = \{v \in T_xM : \alpha(v, w) = 0, \forall w \in T_xM\}$, т. е. это есть нуль-пространство второй квадратичной формы. На открытом множестве, где нуль-индекс постоянен нуль-пространства образуют гладкое распределение, которое интегрируемое. Слои являются вполне геодезическими как в подмногообразии так и в объемлющем евклидовом пространстве [3, 4, 5]. Поэтому нижняя оценка на внешний нуль-индекс дает глубокую информацию о подмногообразии. Получение такой оценки и будет целью этой заметки.

Требование положительности (неотрицательности) кривизны Риччи — это требование на метрику, чтобы изометрическое погружение было "далеко" от минимального. Поэтому естественно было бы погружать в классе подмногообразий, который наследует некоторые свойства выпуклых гиперповерхностей. Такой класс подмногообразий был введен в [4, 6].

Пусть $r(x, \xi)$ есть ранг второй квадратичной формы $\alpha(x, \xi)$ подмногообразия M^l в римановом пространстве R^n в точке x относительно нормали ξ. Рангом второй квадратичной формы подмногообразия M^l в точке x называется целое неотрицательное число

$$r(x) = \max_{\xi \in N_x} r(x, \xi),$$

где N_x — нормальное пространство в точке x, а максимум взят по множеству нормалей в этой точке.

Пусть вторая квадратичная форма $\alpha(x, \xi)$ после приведения к диагональному виду имеет k_1 положительных и k_2 отрицательных членов. Обозначим $j(x, \xi) = \min(k_1, k_2)$. Типом точки x называется число

$$j(x) = \min j(x, \xi),$$

где минимум берется по всем нормалям в точке x, для которых $r(x, \xi) = r(x)$, $j = \max_{x \in M^l} j(x)$ [4, 6].

Если $j(x) = 0$, то существует нормаль в точке x, относительно которой вторая квадратичная форма является неотрицательно определенной. Если $r(x) = l$, то относительно некоторой нормали вторая квадратичная форма строго положительно определенная. Подмногообразия с $j(x) = 0$ для всех точек подмногообразия естественно назвать выпуклыми. Заметим, что для подмногообразия неотрицательной кривизны Риччи $j(x) = 0$ [4]. Обратное неверно. Поэтому класс выпуклых подмногообразий шире, чем класс подмногообразий с неотрицательной кривизной Риччи.

Мы будем рассматривать погружения кэлеровых многообразий в классе подмногообразий евклидова пространства с $j(x) = 0$ для $x \in M^l$.

Лемма 3 *Пусть M^l подмногообразие в римановом пространстве R^{l+p}. Если $j(x) = 0$, то внешний нуль-индекс*

$$\nu(x) = l - r(x).$$

Доказательство. Ранее было доказано неравенство [5, 6, 7]

$$\nu(x) \geq l - r - j(p-1). \tag{1}$$

Так как $j = 0$, $\nu \geq l - r$. Но с другой стороны $\nu \leq l - r$ и мы получим требуемое равенство. Имеет место

Лемма 4 *[5, 6, 7] Пусть F^l — полное регулярное связное подмногообразие в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ такое, что:*

1. *тип точки $j(x) = 0$ для всех точек поверхности;*
2. *нуль-индекс $\nu(x) = k$ для всех точек поверхности.*

Тогда подмногообразие F^l есть цилиндр с k-мерной образующей.

Лемма 5 *[1] Пусть $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$ — кэлерово подмногообразие в евклидовом пространстве, $p \geq 1$. Тогда $\nu_J(x) \geq n - p$. Более того:*

1. *если $\nu_J(x) = n - p$, то $\nu \geq 2(n-p)$;*
2. *если $\nu_J(x) = n-p$ и $\nu = 2(n-p)$, тогда есть открытое всюду плотное множество $W \subset M^{2n}$ такое, что $f|_W$ локально расщепляется как произведение p нигде не плоских кэлеровых гиперповерхностей;*
3. *если $\nu = \nu_J = 0$, то f локально расщепляется как произведение p нигде не плоских поверхностей в $\mathbb{R}^3$. Расщепление глобально, если M^{2n} полное подмногообразие.*

Справедлива

Теорема 6 *Пусть $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$ есть изометрическое погружение кэлерова многообразия. Если $j(x) = 0$ для всех $x \in M^{2n}$, то внешний нуль-индекс*

$$\nu \geq 2(n-p). \tag{2}$$

Более того, если $\nu = 2(n-p)$, то существует всюду плотное открытое множество $W \subset M^{2n}$ такое, что $f|_W$ расщепляется локально как произведение p нигде не плоских кэлеровых гиперповерхностей с неотрицательной кривизной Риччи.

Теорема 7 *Пусть $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$ есть изометрическое погружение кэлерова многообразия с $p \leq n$. Если в каждой точке $x \in M^{2n}$, $j(x) = 0$, $r(x) = 2n$, то $p = n$ и f расщепляется локально как произведение n двумерных поверхностей положительной гауссовой кривизны в $\mathbb{R}^3$. Расщепление глобально, если M^{2n} полное.*

Следствие 8 *Пусть $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$ есть изометрическое погружение полного кэлерова многообразия. Если $j(x) = 0$ для всех $x \in M^{2n}$, то внешний нуль-*
индекс $\nu \geq 2(n-p)$ и равенство во всех точках $x \in M^{2n}$ имеет место тогда и только тогда, когда $M^{2n} = M_1^2 \times ... \times M_p^2 \times \mathbb{C}^{n-p}$ и $f = f_1 \times ... \times f_p \times I$ глобально расщепляется, где $f_i : M_i^2 \to \mathbb{R}^3$, $1 \leq i \leq p$, есть полные поверхности положительной гауссовой кривизны и $I : \mathbb{C}^{n-p} \to \mathbb{R}^{2n-2p}$ есть тождественное отображение.

Доказательство теоремы 3. Пусть N — нормаль в точке $x \in M^{2n}$, для которой $r(x, N) = r(x)$ и $j(x, N) = j(x) = 0$. По лемме 3 $\nu_J(x) \geq n - p$.

Из определения индекса плюригармоничности следует, что существует подпространство $L \subset T_x M^{2n} \otimes \mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} L = \nu_J(x)$ такое, что

$$\alpha(u - iJu, v + iJv) = 0$$

для $u \in L_R \subset T_x M^{2n}$, $v \in TM_x^{2n}$, где L_R — овеществление L.

Тогда имеем

$$\alpha(u, v) + \alpha(Ju, Jv) + i(\alpha(u, Jv) - \alpha(v, Ju)) = 0.$$

Тогда для $v = u$ это равенство перепишется так:

$$\alpha(u, u) + \alpha(Ju, Ju) = 0. \tag{3}$$

Так как для нормали N вторая квадратичная форма α_N неотрицательная, то
$\alpha_N(u, u) = 0$, $\alpha_N(Ju, Ju) = 0$, для $u \in L_R$.

Так как по лемме 3 $\dim_{\mathbb{C}} L \geq n - p$, $\dim L_R \geq 2(n-p)$ и ограничение второй квадратичной формы α_N на L_R равно нулю, то ранг второй квадратичной формы подмногообразия удовлетворяет неравенству $r(x) \leq l - 2(n-p)$. Тогда из леммы 1 следует, что внешний нуль-индекс $\nu = l - r(x) \geq 2(n-p)$. Если $\nu = 2(n-p)$, то и $\nu_J = n - p$ и выполняеться условие 2 леммы 3. Неотрицательность кривизны Риччи гиперповерхностей следует из условия $j = 0$.

Доказательство теоремы 4. Так как из условия теоремы 4 $r(x) = 2n$, $j(x) = 0$, то из неравенства (1) следует $\nu = 0$. Из неравенства (2) и условия теоремы 4 $p \leq n$ следует, что $p = n$. Из равенства (3) и условия $j = 0$ следует, что $\nu_J = 0$. Поэтому подмногообразие M^{2n} удовлетворяет условиям 3 леммы 3. Отсюда и следует теорема 4.

Следствие 1 верно потому, что выполняется условие 2 леммы 3.

В. К. Белошапка, С. Н. Бычков доказали следуещее утверждение [8]: Пусть выпуклая гиперплоскости F в комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$ расслаивается на комплексные гиперповерхности. Тогда гиперповерхность есть цилиндр с комплексной образующей $\mathbb{C}^{n-1}$.

Эту теорему можна обобщить на случай подмногообразий любой коразмерности с $j(x) = 0$ для всех точек подмногообразия. Эти подмногообразия являются обобщением выпуклых гиперповерхностей. В регулярном случае справедлива

Теорема 9 *Пусть F^{2l+1} — регулярное подмногообразие в комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$. Если $j(x) = 0$ для всех точек подмногообразия и подмногообразие расслаивается на комплексные плоскости $\mathbb{C}^l$. Тогда F^{2l+1} есть цилиндр с комплексной образующей $\mathbb{C}^l$.*

Доказательство. Пусть N нормаль к F^{2l+1} в точке x такая, что $r(x, N) = r(x)$, $j(x, N) = j(x) = 0$.

В силу того, что через точку на подмногообразии проходит плоскость $\mathbb{C}^l$ и

$j(x, N) = 0$ ранг второй квадратичной формы относительно нормали N удовлетворяет неравенству $r(x, N) \leq 1$. Из леммы 1 следует, что внешний нуль-индекс $\nu(x) \geq 2l$ и комплексные плоскости $\mathbb{C}^l$ на которые расслаивается подмногообразие принадлежат нулевому подпространству. Параметризуем подмногообразие следующим образом: пусть $\mathbb{C}^l$ — комплексная плоскость, которая проходит через точку $O \in F^{2l+1}$. Вещественные векторы $e_q = (0, ..., 1, ..., 0, 0, ..., 0)$, $Je_q = (0, ..., 0, 0, ..., 1, ..., 0)$, $q = 1, ..., l$, где в первом векторе 1 стоит на q месте, во втором векторе на $(l + q)$ месте, образуют базис $\mathbb{C}^l = R^{2l}$. Проведем ортогональное комплексное пространство $\mathbb{C}^{n-l} = R^{2(n-l)}$ через точку O. Оно пересекает F^{2l+1} по кривой $\rho(t)$. Возьмем касательное пространство в точке O за координатную плоскость в $R^{2n} = \mathbb{C}^n$, где меняются координаты $(u^1, ..., u^l, u^{l+1}, v^1, ..., v^l)$. В пространстве $\mathbb{C}^{n-l} = R^{2(n-l)}$ изменяются координаты $(u^{l+1}, u^n, v^{l+1}, v^n)$. Выберем направляющие векторы плоскости $\mathbb{C}^l(x)$, $x \in F^{2l+1}$ так, чтобы их ортогональные проекции на плоскость

$\mathbb{C}^l$ совпадали с базисными векторами e_q, Je_q, $q = 1, ..., l$. В этом базисе радиус-вектор подмногообразия имеет вид:

$$R = \rho(t) + S_k(t)u^k + JS_k(t)v^k. \tag{4}$$

Учитывая, что векторы $S_k(t)$, $JS_k(t)$ принадлежат нулевому подпространству вторых квадратичных форм (см. [4, раздел 3.2, равенство 3.2.8]) мы получим:

$$\frac{\partial S_k(t)}{\partial t} = \lambda_k(t)\frac{\partial \rho}{\partial t}, \qquad \frac{\partial JS_k(t)}{\partial t} = \mu_k(t)\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$S_k(t) = \left(a_k(t), b_k(t)\right),$$

где a_k, b_k — l-мерные вещественные векторы,

$$JS_k(t) = (-b_k, a_k).$$

Вектор $\rho(t)$ перепишем в виде $\rho = \big(\rho^1(t), \rho^2(t)\big)$, где $\rho^1(t)$ — ортогональная проекция на подпространство натянутое на векторы $e_{l+1}, ..., e_n$, $\rho^2(t)$ — ортогональная проекция на подпространство натянутое на векторы $Je_{l+1}, ..., Je_n$. Тогда уравнения (4) перепишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_k}{\partial t} &= \lambda_k \frac{d\rho^1(t)}{dt}; \qquad & \frac{\partial b_k}{\partial t} &= \lambda_k \frac{d\rho^2(t)}{dt} \\ -\frac{\partial b_k}{\partial t} &= \mu_k \frac{\partial \rho^1(t)}{\partial t}; \qquad & \frac{\partial a_k}{\partial t} &= \mu_k \frac{\partial \rho^2(t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mu_k \frac{d\rho^1}{dt} + \lambda_k \frac{d\rho^2}{dt} &= 0; \\ \lambda_k \frac{d\rho^1}{dt} - \mu_k \frac{d\rho^2}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

$$\left.\frac{d\rho^1}{dt}\right|_{t=0} = (1, 0, ..., 0); \qquad \left.\frac{d\rho^2}{dt}\right|_{t=0} = (0, 0, ..., 0).$$

Так как векторы $\dfrac{\partial \rho^1}{\partial t}$, $\dfrac{\partial \rho^2}{\partial t}$ не равны одновременно нулю, то $\mu_k = \lambda_k = 0$. Отсюда $\dfrac{\partial S_k}{\partial t} = \dfrac{\partial JS_k(t)}{\partial t} \equiv 0$ и комплексные плоскости $\mathbb{C}^l$, на которые расслаивается подмногообразие, параллельны.

2 Топология и макроскопическая геометрия римановых многообразий

Описаны методы современной алгебраической топологии, используемых в работе. В частности, на языке спектров описаны различные теории (ко)гомологий, предоставлен необходимый материал по теории препятствий с локальными коэффициентами и теории грубых когомологий.

Раздел посвящен изучению топологических, гомотопических и макроскопических инвариантов римановых многообразий и их отображений.

Одним из основных вопросов, поднятых в разделе является исследование проблем, поставленных М. Громовым, о макроскопической размерности универсального накрытия замкнутого риманова многообразия, в частности - гипотеза о падении макроскопической размерности. Полученные в разделе результаты подтверждают гипотезу в трехмерном и вполне неспиновом случаях и опровергают ее в спиновом случае большей размерности.

Наиболее значимая гипотеза Громова о макроскопической размерности универсального накрытия замкнутого многообразия, допускающего метрику положительной скалярной кривизны, оказалась тесно связана с фундаментальной группой многообразия. Установлено, что в случае спинового многообразия, гипотеза имеет положительное решение, если фундаментальная группа удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, например, является абелевой.

Решена проблема Громова по макроскопическое размерности римановых многообразий, которые мы сформулируем в виде гипотез.

Макроскопическая размерность определяется следующим образом:

Определение 10 *Макроскопическая размерность метрического пространства X не превышает k, или $\dim_{mc} X \leq k$, если существует k - мерный полиэдр P^k и собственное непрерывное отображение $h : X \to P^k$ такое, что $Diam(h^{-1}(p)) \leq \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и произвольного $p \in P^k$. Скажем, что $\dim_{mc} X = k$, если k наименьшее из чисел, для которых выполнено $\dim_{mc} X \leq k$.*

Гипотеза 11 (О падении макроскопической размерности) *Пусть M^n – замкнутое многообразие размерности n. Если $\dim_{mc} \widetilde{M}^n < n$, то $\dim_{mc} \widetilde{M}^n < n - 1$.*

Замечание 12 *Пусть M^n - компактное риманово многообразие, и классифицирующее отображение $f : M^n \to B\pi$ есть отображение в k-остов $B\pi^{(k)}$, тогда поднятие данного отображения до отображения универсальных накрытий $\widetilde{f} : \widetilde{M}^n \to E\pi^{(k)}$ гарантирует нам, что* $\dim_{mc} \widetilde{M}^n \leq k$, *если метрику на $\widetilde{M}^n$ предполагать поднятой из M^n.*

Гомотопический аналог гипотезы 11 имеет следующий вид.

Гипотеза 13 *Если M^n несущественно, то классифицирующее отображение $f : M^n \to B\pi$ можно продеформировать на $B\pi^{(n-2)}$.*

Напомним, что по Громову

> *многообразие M^n называется несущественным, если классифицирующее отображение $f : M^n \to B\pi$ можно продеформировать на $B\pi^{(n-1)}$.*

Естественно также дать следующее естественное определение (Драшников):

> *многообразие M^n называется макроскопически несущественным, если существует ограниченная деформация классифицирующего отображения $f : \widetilde{M}^n \to E\pi$ на $E\pi^{(n-1)}$.*

Ясно, что если M несущественно, то из гипотезы 13 и замечания 12 немедленно следует гипотеза 11.

На уровне когомологий гипотеза 13 не имеет препятствий, так как нетрудно показать, что $f^*(H^{n-1}(B\pi)) = 0$.

В данном разделе автором приводится положительное решение гипотез 11 и 13 в частных случаях и отрицательное решение в общем случае.

Следующая теорема подтверждает гипотезу Громова 11 о падении макроскопической размерности универсального накрытия замкнутого многообразия размерности 3.

Теорема 14 *Пусть M – замкнутое риманово многообразие размерности 3, а $\widetilde{M}$ – его универсальное накрытие. Тогда* $\dim_{mc} \widetilde{M} \neq 2$.

Замечание 15 *Если M^3 несущественно, то оно не содержит $K(\pi, 1)$-факторы K_i в разложении Кнезера - Милнора многообразия M^3 на неприводимые многообразия:*

$$M^3 = \Sigma_1 \# \ldots \# \Sigma_n \# k(S^2 \times S^1) \# K_1 \# \ldots \# K_m.$$

Поэтому, если $\pi_1(M^3)$ *из теоремы 14 не имеет кручения, то* $\pi_1(M)$ *либо тривиальна, либо* $B\pi_1(M^3)$ *гомотопически эквивалентно букету окружностей, а значит в этом случае подтверждается гипотеза Громова 13.*

Оказывается, гипотеза Громова 11 о падении макроскопической размерности не подтверждается для $n \geq 4$. Здесь существенным оказалось наличие спиновой структуры на многообразии.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 16 *Для каждого* $n \geq 4$ *существует замкнутое несущественное спиновое многообразие* M^n, *имеющее макроскопическую размерность универсального накрытия* $\dim_{mc} \widetilde{M}^n = n - 1$.

В четырехмерном случае пример многообразия из теоремы 16 строится следующим образом. Рассмотрим расслоение на окружности $S^3 \times S^1 \to S^2 \times S^1$, полученное умножением расслоения Хопфа $S^3 \to S^2$ на S^1. Теперь рассмотрим тривиальное расслоение $T^4 = S^1 \times T^3 \to T^3$ и возьмем его связную сумму над S^1 с построенным выше расслоением вдоль маленьких расслоенных трубок вокруг фиксированных слоев с естественной тривиализацией, определяемой расслоениями. Получим искомое многообразие $M^4 = S^3 \times S^1 \#_{S^1} T^4$. В общем случае контрпример к гипотезе Громова 11 доставляет многообразие $M^n = M^{4+k}$, которое является тотальным пространством расслоения над $M^3 \times T^k$, которое индуцировано проекцией $pr : M^3 \times T^k \to M^3$ и расслоением $p : M^4 \to M^3$.

В неспиновом случае аналога теоремы 16 не существует, так как имеет место следующая теорема.

Теорема 17 *Пусть* M *является вполне неспиновым замкнутым ориентируемым* n*-многообразием,* $n \geq 5$, *с* $\pi_1(M) = \Gamma$, *чье универсальное накрытие* $\widetilde{M}$ *является макроскопически несущественным. Тогда* $\dim_{mc} \widetilde{M} \leq n - 2$.

Напомним, что многообразие называется *вполне неспиновым* если его универсальное накрытие не является спиновым многообразием, или что то же самое – имеет нетривиальный второй класс Штифеля - Уитни.

Имеет место также гомотопический аналог теоремы 17, однако с некоторыми ограничениями на фундаментальную группу. Напомним, что для конечно представимой группы π, условие FP_m означает, что $B\pi$ может быть взято с конечным m-остовом.

Теорема 18 *Пусть M вполне неспиновое замкнутое ориентируемое несущественное n-многообразие, $n \geq 5$, чья фундаментальная группа π имеет тип FP_3. Тогда классифицирующее отображение $u^M : M \to B\pi$ может быть продеформировано в $B\pi^{(n-2)}$, в частности, $\dim_{mc} \widetilde{M} \leq n-2$.*

Теперь сформулируем ряд гипотез Громова о макроскопической размерности PSC -многообразий.

Гипотеза 19 *Пусть M^n есть полное PSC-многообразие размерности n и скалярная кривизна $Sc(M^n) > c > 0$. Тогда $\dim_{mc} M^n \leq n-2$.*

Замечание 20 *В случае $n = 2$ справедливость гипотезы следует из того, что риманово многообразие секционной кривизны $K \geq K_0 > 0$, как и любое пространство Александрова кривизны отделенной от нуля положительной константой, имеет ограниченный диаметр, а значит имеет нулевую макроскопическую размерность. Случай $n = 3$ доказан Громовым и Лоусоном (1983).*

Гипотеза 21 (Гипотеза Громова) *Пусть M^n – замкнутое PSC-многообразие размерности n. Тогда $\dim_{mc} \widetilde{M}^n \leq n-2$.*

Гипотеза 22 (Сильная гипотеза Громова) *Классифицирующее отображение $f : M^n \to B\pi$ замкнутого PSC-многообразия M^n можно продеформировать на $(n-2)$-остов $B\pi^{(n-2)}$.*

Замечание 23 *Замечание 12 влечет, что гипотеза Громова следует из сильной гипотезы Громова. Кроме того гипотеза Громова немедленно следует из гипотезы 19, которую также можно считать ее сильным аналогом.*

Имеет место следующая теорема.

Теорема 24 *Предположим, что группа π содержит подгруппу π' конечного индекса, удовлетворяет следующим двум условиям:*

1. *π' удовлетворяет сильной гипотезе Новикова.*

2. *Отображение $per : ko_n(B\pi') \to KO_n(B\pi')$ инъективно.*

Тогда гипотеза Громова справедлива для спиновых многообразий M^n с фундаментальной группой $\pi_1(M^n) = \pi$.

Замечание 25 *Будем называть второе условие на фундаментальную группу условием Розенберга - Штольца или (RS)-условием, так как Розенберг и Штольц впервые рассмотрели это условие при доказательстве гипотезы Громова -Лоусена.*

Из этой теоремы можно получить следующие следствия.

Следствие 26 *Гипотеза Громова выполняется для замкнутых спиновых n - мерных многообразий M с фундаментальной группой $\pi_1(M) = \pi$ имеющей конечное $B\pi$ и удовлетворяющей неравенству* $\operatorname{asdim} \pi \leq n+4$.

Замечание 27 *Заметим, что примеры M^n, построенные в теореме 16, имеют фундаментальную группу $\pi_1(M^n) \cong (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}^3) \times \mathbb{Z}^k$, которая удовлетворяет предыдущему следствию, поэтому они не допускают метрики положительной скалярной кривизны.*

Следствие 28 *Гипотеза Громова выполняется для спиновых n-мерных многообразий M с фундаментальной группой $\pi_1(M) = \pi$ равной произведению свободных групп $F_1 \times \cdots \times F_n$. В частности, для свободных абелевых групп, а значит и для абелевых групп, так как последние содержат свободные абелевы группы конечного индекса.*

3 Экстремальные оценки для полных гиперповерхностей в римановых пространствах

Результаты по внешней геометрии подмногообразий можно естественным образом разделить на два класса: локальные, когда речь идет о локальных свойствах объекта в некоторой окрестности пространства, и глобальные результаты "в целом", когда что-то утверждается об объекте целиком. Второй класс включает в себя первый, поэтому получение результатов "в целом" является, в некотором смысле, более интересной но сложной задачей. Классические результаты дифференциальной и римановой геометрии "в целом" были получены в первой половине XX века в работах В. Бляшке, А.Д. Александрова, А.В. Погорелова. Позднее, их результаты были развиты и дополнены в работах Л. Сантало, Г. Каршера, А.Д. Милки и др. Современное развитие идей геометрии "в целом" может быть проиллюстрировано, среди прочего, положительным решением гипотез Г. Лоусона (С. Брендл, [9]) и Т. Вилмора (Ф.К. Маркус и А. Невес, [10]).

В 1972 году Л.Сантало и И. Янеш [11], интересуясь вопросами геометрической теории вероятностей, исследовали асимптотическое поведение семейств *h-выпуклых* областей, т.е. областей, кривизна границы которых не меньше 1, которые распространяются на все пространство. Они показали, что на плоскости Лобачевского для таких областей отношение площади к длине границы стремится к 1. Стоит отметить, что для выпуклых областей на евклидовой плоскости этот предел равен ∞, а для *произвольных* выпуклых областей на плоскости Лобачевского, как было показано Э. Галлего и А. Ревентосом [12, 13], этот предел может принимать любое значение от 0 до 1. Обобщение результата Сантало и Янеша для многомерного пространства Лобачевского при дополнительных ограничениях на семейство h-выпуклых областей было получено в [14]. Используя принципиально другой подход, А.А. Борисенко с соавторами (В. Микуэль, Э. Галлего, Д.И. Власенко, и др.) в целом цикле работ [15, 19, 16, 17, 18] удалось убрать эти ограничения и перенести результат Сантало и Янеша на случай семейства *λ-выпуклых* областей, т.е. областей, нормальные кривизны границы которых не меньше λ для некоторой положительной константы $\lambda \leqslant 1$, в полных односвязных римановых многообразиях отрицательной кривизны не меньше -1 (*многообразиях Адамара*). Ключевым этапом этих исследований было рассмотрение величины угла между границей области и радиальным направлением из фиксированной точки внутри этой области (*функция радиального угла*) и доказательство предложенной А. А. Борисенко теоремы сравнения для таких углов и следующих из нее точных оценок для них. Аналогичные оценки в случае объемлющего евклидова пространства были получены и применены в работах А.А. Борисенко с К. Тененблат [21] и с Е. А. Олиным [22]. Поэтому интересным является распространение упомянутых результатов для функции радиального угла на случай неотрицательно искривленных многообразий, а также для уже упомянутых многообразий Адамара в случае $\lambda > 1$.

Для пространственноподобных гиперповерхностей в пространстве-времени каноническим образом возникает понятие *функции гиперболического угла* между ориентирующим времениподобным векторным полем и направленным в будущее (времениподобным) нормальным векторным полем к гиперповерхности. Величина этого угла имеет определенный физический смысл в вопросах общей теории относительности [**?**]. В цикле работ А. Ромеро, Р. Рубио с соавторами [**?**, **?**, **?**] эта функция была использована для исследования поверхностей постоянной средней кривизны. Для получения результатов типа Бернштейна существенной оказывалась ограниченность этого угла. Поэтому естественно попытаться перенести результаты по оценкам радиальных углов из риманова случая на случай поверхностей ограниченной нормальной кривизны в лоренцевом многообразии.

Ограничения на нормальную кривизну полной гиперповерхности накладывают ограничение на структуру этой поверхности "в целом". Так, В. Бляшке доказал [23], что гладкий овалоид (граница компактной области с внутренними точками) в $\mathbb{E}^m$, нормальная кривизна которого удовлетворяет $k_{\mathrm{n}} \geqslant \lambda > 0$ (λ-выпуклый), может свободно перекатываться в шаре радиуса $1/\lambda$. В случае $\lambda \geqslant k_{\mathrm{n}} > 0$, соответствующий шар может свободно перекатываться внутри овалоида. Эта теорема обобщалась во многих направлениях в пространствах постоянной кривизны (см., например, [24, 25]), а также для произвольных римановых многообразий в работе Р. Ховарда [26]. Возникает естественный вопрос о связи теоремы прокатывания Бляшке с теоремой сравнения углов для полных λ-выпуклых поверхностей в пространствах постоянной кривизны и общих римановых пространствах.

А.А. Борисенко (частично с В. Микуэлем) в серии работ [15, 17, 18, 20] была получена точная оценка для ширины сферического слоя, т.е. пространства между двумя концентрическими геодезическими сферами, в который можно поместить замкнутую λ-выпуклую гиперповерхность, $\lambda \in (0,1]$, в многообразиях Адамара кривизны не меньше -1. Частный случай этого результата в пространстве Лобачевского был позднее другими методами получен В. К. Иониным [27]. Оценки подобного рода показывают степень близости соответствующей поверхности к сфере. Поэтому естественный интерес представляет исследования степени сферичности λ-выпуклых поверхностей при других ограничениях на λ в многообразиях Адамара и в римановых пространствах неотрицательной кривизны. Также возникает вопрос о степени сферичности и получении соответствующих точных оценок для полных гиперповерхностей *защемленной нормальной кривизны*, т.е. кривизна которых для некоторых положительных констант λ_1, λ_2 удовлетворяет $\lambda_2 \geqslant k_{\mathrm{n}} \geqslant \lambda_1$. С этим вопросом тесно связаны исследования о стабильности для гиперповерхностей, у которых матрица второй фундаментальной формы в каждой точке p в некоторой норме близка к $\lambda(p) \cdot I$, где $\lambda(p)$ – функция точки, I – единичная матрица (*практически омбилические поверхности*). Результаты такого типа были получены А. В. Погореловым [28], В. И. Дискантом [31], Р. Шнайдером [29], К. Лихтвейсом [30], Ж. Шойером [32] и др.

Одним из важных разделов глобальной геометрии гиперповерхностей являются результаты, связанные с минимизацией одних геометрических величин при ограничении (фиксации) других. Пожалуй, исторически первым вопросом такого типа является *изопериметрическая задача*. Так, в $\mathbb{E}^m$ она гласит: максимизировать объем компактной области при заданной площади границы. Решением классической изопериметрической задачи является шар. Эта задача уточнялась и нетривиально обобщалась огромной плеядой великий математиков, таких как Я. Штейнер, К. Брунн, Г. Минковский, Т. Боннезен, А.Д. Александров и многими другими. Тем не менее, тема актуальна и по сей день. Отметим недавнее решение гипотезы двойного пузырька [33] о форме поверхности в $\mathbb{E}^3$ минимальной площади, ограничивающей два заданных объема. Наряду с классической постановкой, имеет место и *обратная изопериметрическая задача* о *минимизации* объема и нахождении экстремального объекта. Для произвольных областей она имеет тривиальное решение. Поэтому необходимо естественным образом сузить класс рассматриваемых объектов с наложением дополнительных ограничений. Одним из таких ограничений может быть кривизна. Единственный результат такого типа был получен Р. Ховардом и А. Трайбергсом в [34]. В ней авторы полностью решили обратную изопериметрическую задачу в $\mathbb{E}^2$ для замкнутых вложенных кривых кривизны $|k| \leqslant 1$ (вообще говоря, не выпуклых) при некоторых дополнительных ограничениях на длину. В этом свете интерес представляет рассмотрение обратной изопериметрической задачи в классе полных λ-выпуклых гиперповерхностей. В завершение отметим, что в $\mathbb{E}^m$ такой вопрос перекликается с *задачей Бляшке – Лебега* о минимизации объема области, граница которой есть гиперповерхность постоянной ширины d ([38, 39, 35, 37] для $m = 2$, в размерности больше 2 проблема Бляшке – Лебега в полной общности до сих пор не решена). При $m = 2$ и $m = 3$, с необходимостью, решением задачи является полная $1/d$-выпуклая гиперповерхность [37, 36].

Были рассмотрены основные определения и необходимые вспомогательные факты из римановой и лоренцевой геометрий, теории оптимального управления.

Доказана теорема сравнения радиальных углов (в римановом случае) и гиперболических углов (в лоренцевом случае), из которых выводятся некоторые следствия.

Теорема 29 *Пусть M^{m+1} – гладкое $(m+1)$-мерное $(m \geqslant 1)$ риманово многообразие, все секционные кривизны K_σ которого в каждой точке и по каждой двумерной площадке $\sigma \subset TM^{m+1}$ удовлетворяют*

$$c_2 \geqslant K_\sigma \geqslant c_1.$$

Пусть $\Sigma \subset M^{m+1}$ – гладкая λ-выпуклая гиперповерхность (в случае $c_2 > 0$ полагаем, что Σ лежит внутри геодезической сферы радиуса $\pi/(2\sqrt{c_2})$), $\mathcal{S}_\lambda \subset M^{m+1}(c_1)$ – вполне омбилическая гиперповерхность кривизны λ, а точки $p \in M^{m+1}\backslash\Sigma$, $p_\lambda \in M^{m+1}(c_1)\backslash\mathcal{S}_\lambda$ такие, что $\mathrm{dist}(\mathrm{p}, \Sigma) = \mathrm{dist}(\mathrm{p}_\lambda, \mathcal{S}_\lambda) = \mathrm{d}$. *Тогда для φ и φ_λ – функций радиального угла гиперповерхностей, соответственно, Σ и $\mathcal{S}_\lambda$ по отношению к p и p_λ – в тех точках $q \in \Sigma$ и $q_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$, для которых*

$$\tau_p(q) = \tau_{p_\lambda}(q_\lambda),$$

выполняется неравенство

$$\cos\varphi(q) \geqslant \cos\varphi_\lambda(q_\lambda).$$

Следствие 30 *Пусть выполнены условия теоремы 29, и при этом гиперповерхность Σ является полной гладкой λ-выпуклой гиперповерхностью в полном односвязном римановом многообразии M^{m+1}. Тогда для опорных функций h_p и h_{p_λ} гиперповерхностей Σ и $\mathcal{S}_\lambda$ выполняется неравенство*

$$h_p(q) \geqslant h_{p_\lambda}(q_\lambda).$$

4 Субгармонические функции бесконечного порядка в полуплоскости

В разделе 4 рассматриваются субгармонические функции в верхней полуплоскости бесконечного порядка, с полной мерой, распределенной на конечной системе лучей. Доказана теорема о том, что в этом случае и нижний порядок функции равен бесконечности. Аналогичный результат для целых функций был получен Д. Майлзом.

Пусть v – субгармоническая функция в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $M(v,r) = \max\limits_{0\le\theta\le 2\pi} v(re^{i\theta})$. *Порядком и нижним порядком функции* v называются соответственно числа

$$\rho[\gamma] = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(v,r)}{\ln r}, \quad \rho_*[\gamma] = \liminf_{r\to\infty} \frac{\ln M(v,r)}{\ln r}\,.$$

Порядком и нижним порядком целой функции f называются соответственно порядок и нижний порядок субгармонической функции $\ln|f|$.

В работе [40] рассматривались целые функции, нули которых лежат на конечной системе лучей. В частности, было доказано, что если f – целая функция бесконечного порядка с нулями, расположенными на конечной системе лучей, то её нижний порядок также равен бесконечности. Этот результат легко обобщается на субгармонические функции в комплексной плоскости: если риссовская мера субгармонической во всей в комплексной плоскости функции v, бесконечного порядка, сосредоточена на конечной системе лучей, то её нижний порядок также равен бесконечности. Мы доказываем аналогичный результа для функций, субгармонических в полуплоскости.

Обозначим через $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ верхнюю полуплоскость комплексного переменного z. Через $C(a,r)$ будем обозначать открытый, а через $B(a,r)$ замкнутый, круг радиуса r с центром в точке a; через Ω_+ – пересечение множества Ω с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$: $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{C}_+$; $\overline{G}$ означает замыкание множества G. Если $0 < r_1 < r_2$, то $D_+(r_1,r_2) = \overline{C_+(0,r_2)\setminus C_+(0,r_1)}$ означает замкнутое полукольцо.

Пусть SK – класс субгармонических функций в $\mathbb{C}_+$, имеющих положительную гармоническую мажоранту в любой ограниченной области в $\mathbb{C}_+$. Функции класса $v(z)$ SK обладают следующими свойствами [41]:

a) $v(z)$ имеет некасательный предел $v(t)$ почти всюду на вещественной оси, $v(t) \in L^1_{loc}(-\infty,\infty)$;

b) на вещественной прямой существует знакопеременная мера ν такая, что

$$\lim_{y\to+0}\int\limits_a^b v(t+iy)\,dt=\nu([a,b])-\frac{1}{2}\nu(\{a\})-\frac{1}{2}\nu(\{b\})\,.$$

Мера ν называется граничной мерой функции v;

c) $d\nu(t)=v(t)\,dt+d\sigma(t)$, где σ – сингулярная мера относительно меры Лебега.

Для функции $v\in SK$ определим, следуя [41], полную меру λ как

$$\lambda(K)=2\pi\int\limits_{\mathbb{C}_+\cap K}\operatorname{Im}\zeta\,d\mu(\zeta)-\nu(K)\,,$$

где μ риссовская мера функции v.

Мера λ обладает следующими свойствами:

1) λ – конечная мера на каждом компакте $K\subset\mathbb{C}$,

2) λ – неотрицательная мера вне $\mathbb{R}$,

3) λ равна нулю в полуплоскости $\mathbb{C}_-=\{z:\operatorname{Im}z<0\}$.

Наоборот, если мера λ удовлетворяет условиям 1) – 3), то существует функция $v\in SK$, с полной мерой равной λ. Совокупность условий 1) – 3) в дальнейшем будем обозначать через {G}, если, кроме того, мера λ неотрицательная и на $\mathbb{R}$, то через $\{\mathrm{G}^+\}$.

Если D – ограниченная область в $\mathbb{C}_+$, $D_1=D\cup(\partial D\cap\mathbb{R}\,)$, $v\in SK$, $z\in D$, тогда

$$v(z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D_1}\frac{1}{\operatorname{Im}\zeta}\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right|\,d\lambda(\zeta)+h(z)\,,$$

где h – гармоническая функция в D, а если $[a,b]\subset\{\mathbb{R}\cap\partial D\}$, то h допускает непрерывное продолжение нулем на (a,b), ядро $\dfrac{1}{\operatorname{Im}\zeta}\ln\left|\dfrac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right|$ считается продолженным по непрерывности на вещественную ось. Полная мера λ определяет функцию $v\in SK$ так же как мера Рисса μ определяет субгармоническую функцию в $\mathbb{C}$. Точнее, если функции $v_1,\,v_2\in SK$ и каждая имеет полную меру λ, то существует вещественная целая функция g такая, что $v_2(z)-v_1(z)=\operatorname{Im}g(z)$, $z\in\mathbb{C}_+$.

Субгармоническая в $\mathbb{C}_+$ функция v называется истинно субгармонической, если $\limsup\limits_{z\to t} v(z) \leqslant 0$ для любого вещественного числа $t \in \mathbb{R}$. Класс истинно субгармонических функций обозначим через JS. Полная мера функции $v \in JS$ является положительной мерой, чем и обоснован термин "истинно субгармоническая функция". Отметим также, что множество JS является конусом, т.е., если v_1, $v_2 \in JS$, $\alpha \geq 0$, то $v_1 + v_2$, $\alpha v_1 \in JS$.

Класс истинно дельта-субгармонических функций $J\delta$ определяется как разность $J\delta = JS - JS$. Заметим, что $J\delta$ – наиболее широкий класс δ-субгармонических функций в полуплоскости, для которых можно определить неванлинновскую характеристику.

Справедливы следующие утверждения [41]:

Утверждение 1. $JS \subset SK$.

Утверждение 2. $J\delta = SK - SK$.

Из утверждения 2 следует, что $SK \subset J\delta$. Тем самым мы можем в дальнейшем при рассмотрении субгармонических функций ограничиться классом JS, так как функция класса SK представляется в виде разности двух истинно субгармонических функций. Для функций $v \in J\delta$ справедливо представление в полукольце $z \in D_+(R_1, R_2)$:

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{D_+(R_1,R_2)} K(z,\zeta)\, d\lambda(\zeta) +$$

$$\int\limits_0^\pi \left[\frac{R_2}{2\pi} \frac{\partial G(z, R_2 e^{i\varphi})}{\partial n} v\left(R_2 e^{i\varphi}\right) + \frac{R_1}{2\pi} \frac{\partial G(z, R_1 e^{i\varphi})}{\partial n} v(R_1 e^{i\varphi}) \right] d\varphi\,,$$

и в полукруге $z \in C_+(0, R)$:

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\overline{C_+(0,R)}} \frac{G(z,\zeta)}{\operatorname{Im}\zeta}\, d\lambda(\zeta) + \frac{R}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z, Re^{i\varphi})}{\partial n} v(Re^{i\varphi})\, d\varphi\,,$$

где $G(z,\zeta)$ – функция Грина полукруга, $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ – означает производную по внутренней нормали, ядро под знаком двойного интеграла продолжается на вещественную ось по непрерывности при $|t| \leqslant R$.

Для заданной меры λ обозначим через $\lambda(t) = \lambda(\overline{C(0,t)})$. Пусть $v \in J\delta$, $v = v_+ - v_-$, λ – полная мера функции v, $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ – жорданово разложение меры λ. Далее будем считать, что выполняется условие:

d) функция v гармонична в некоторой окрестности нуля и сходится интеграл $\int_0^{r_0} \frac{\lambda_-(t)}{t^3}\, dt < \infty$ при некотором $r_0 > 0$.

Введем следующие характеристики функции v:

$$m(r,v) := \frac{1}{r}\int\limits_0^{\pi} v_+(re^{i\varphi})\sin\varphi\, d\varphi, \quad N(r,v,r_0) := \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda_-(t)}{t^3}\, dt\,,$$

$$T(r,v,r_0) := m(r,v) + N(r,v,r_0) + m(r_0,-v), \quad r > r_0\,,$$

где r_0 – произвольное, как правило фиксированное, положительное число, которое в обозначениях (если это не вызывает недоразумений) мы будем опускать (например, вместо $T(r,v,r_0)$ писать $T(r,v)$). Кроме того обозначим $T_0(r,v) = T(r,v,0)$, $N_0(r,v) = N(r,v,0)$.

Обозначим

$$d\lambda_k(\tau e^{i\varphi}) = \frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}\tau^{k-1}\, d\lambda(\tau e^{i\varphi})$$

$\Big($функция $\frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}$ при $\varphi = 0,\ \pi$, определяется по непрерывности$\Big)$. Положим $\lambda_k(r) = \lambda_k(\overline{C(0,r)})$. Справедливо неравенство, которое будет использоваться в дальнейшем:

$$|\lambda_k(r)| \leqslant kr^{k-1}|\lambda|(r)\,.$$

Отметим формулу Карлемана в обозначениях Гришина:

$$\frac{1}{r^k}\int\limits_0^{\pi} v(re^{i\varphi})\sin k\varphi\, d\varphi = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\, dt + \frac{1}{r_0^k}\int\limits_0^{\pi} v(r_0e^{i\varphi})\sin k\varphi\, d\varphi\,, \tag{1}$$

В частности, для $k = 1$ имеем

$$\frac{1}{r}\int\limits_0^{\pi} v(re^{i\varphi})\sin\varphi\, d\varphi = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda(t)}{t^3}\, dt + \frac{1}{r_0}\int\limits_0^{\pi} v(r_0e^{i\varphi})\sin\varphi\, d\varphi\,. \tag{2}$$

Формула (2) может быть записана в виде:

$$T(r,v) = T(r,-v)\,. \tag{3}$$

Определение 31 *Гармоническими коэффициентами Фурье функции $v \in J\delta$ называются функции*

$$c_k(\theta,r,v) = \frac{2\sin k\theta}{\pi}\int\limits_0^{\pi} v(re^{i\varphi})\sin k\varphi\, d\varphi,\ \theta\in[0,\pi], \quad k\in\mathbb{N}\,.$$

Пусть λ – полная мера функции $v \in J\delta$, величина λ_k определена выше. Тогда из формулы (1) получим следующие выражения для гармонических коэффициентов Фурье:

$$c_k(\theta, r, v) = \alpha_k r^k + \frac{2r^k \sin k\theta}{\pi} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\, dt, \quad k \in \mathbb{N}\,, \tag{4}$$

где $\alpha_k = \dfrac{2}{\pi} r_0^{-k} c_k(\theta, r_0, v)$ (здесь и далее r_0 – фиксированное положительное число, например, $r_0 = 1$).

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралу в правой части (4), получаем

$$\begin{gathered} c_k(\theta, r, v) = \alpha_k r^k + \frac{r^k \sin k\theta}{\pi k r_0^{2k}} \iint\limits_{\overline{C_+(0,r_0)}} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta} \tau^k\, d\lambda(\zeta) + \\ \frac{r^k \sin k\theta}{\pi k} \iint\limits_{D_+(r_0,r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im}\zeta}\, d\lambda(\zeta) - \frac{\sin k\theta}{r^k \pi k} \iint\limits_{\overline{C_+(0,r)}} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta} \tau^k\, d\lambda(\zeta) \end{gathered} \tag{5}$$

(здесь и всюду ниже $\zeta = \tau e^{i\varphi}$).

Определение 32 *Порядком и нижним порядком функции $v \in J\delta$ называются соответственно числа $\rho[rT(r, v)]$ и $\rho_*[rT(r, v)]$.*

Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 33 *Если $v \in SK$ – субгармоническая функция в $\mathbb{C}_+$ бесконечного порядка с полной мерой λ на конечной системе лучей $\mathbb{L}_k = \left\{ z : \arg z = e^{i\theta_k},\ \theta_k = \dfrac{\pi p_k}{q_k} \right\}$; $k = 1, \ldots, N_0$; $p_k, q_k, N_0 \in \mathbb{N}$; $p_k < q_k$; тогда ее нижний порядок также равен бесконечности.*

Доказательство. Будем считать, что $0 \notin \operatorname{supp} v$. Так как мера λ сосредоточена на конечной системе лучей, то из формул (5) для коэффициентов Фурье функции v находим:

$$\begin{gathered} c_n(r, v) = \alpha_n r^n + \sum_{k=1}^{N_0} \frac{r^n \sin(\theta_k n)}{\pi n r_0^{2n}} \int\limits_0^{r_0} t^{n-1} d\lambda(t) + \\ \sum_{k=1}^{N_0} \frac{r^n \sin(\theta_k n)}{\pi n} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{d\lambda(t)}{t^{n+1}} - \sum_{k=1}^{N_0} \frac{\sin(\theta_k n)}{r^n \pi n} \int\limits_0^{r} t^{n-1} d\lambda(t),\ n \in \mathbb{N}\,. \end{gathered}$$

Выбирая r_0 так, чтобы $C(0,r_0)\notin \operatorname{supp} v$, получим отсюда:

$$c_n(r,v)=\alpha_n r^n+$$
$$\sum_{k=1}^{N_0}\frac{\sin(\theta_k n)}{\pi n}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{1}{t}\left[\left(\frac{r}{t}\right)^n-\left(\frac{t}{r}\right)^n\right]d\lambda(t),\ n\in\mathbb{N}\,. \tag{6}$$

Интегрируя дважды по частям в формулах (6), получим:

$$\begin{gathered}c_n(r,v)=\alpha_n r^n+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N_0}\sin(\theta_k n)\left(\tilde N(r)+r^n\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\tilde N(r)}{t^{n+1}}\,dt\right)+\\ +\frac{n-1}{\pi}\sum_{k=1}^{N_0}\sin(\theta_k n)\int\limits_{r_0}^{r}\frac{1}{t}\left[\left(\frac{r}{t}\right)^n-\left(\frac{t}{r}\right)^n\right]\tilde N(r)\,dt,\ n\in\mathbb{N}\,,\end{gathered} \tag{7}$$

где $\tilde N(r)=\displaystyle\int_{r_0}^{r}\frac{\lambda(t)}{t^2}dt.$

Обозначим через $C=\sum\limits_{k=1}^{N_0}\sin\theta_k$. Ясно, что $C>0$. Из (7) с $n=n_l=1+2l\prod\limits_{k=1}^{N_0}q_k$, $l\in\mathbb{N}$, мы получаем

$$\frac{|c_n(r,v)|}{r^n}\geqslant\frac{2C}{\pi}\left(\frac{\tilde N(r)}{r^n}+\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\tilde N(r)}{t^{n+1}}\,dt\right)-|\alpha_n|,\ n\in\mathbb{N}\,. \tag{7}$$

Если функция $\tilde N(r)$ имеет бесконечный порядок, то интеграл, стоящий в правой части этого неравенства, неограничен при $r\to\infty$, так как

$$\int\limits_{r}^{\infty}\frac{\tilde N(t)}{t^{n+1}}\,dt\geqslant\frac{\tilde N(r)}{nr^n},\quad n\in\mathbb{N}\,,,\quad n=1,2,\ldots\,, \tag{8}$$

и правая часть этого неравенства может быть сделана сколь угодно большой при подходящем выборе r.

Из определения коэффициентов Фурье $c_k(r,v)$ следует неравенство:

$$|c_k(r,v)|\leqslant\frac{2k}{\pi}\int\limits_0^{\pi}|v(re^{i\varphi})|\sin\varphi\,d\varphi,\quad k\in\mathbb{N}\,.$$

Отсюда и из равенства (3) получаем

$$rT(r,v)\geqslant\frac{\pi}{2k}|c_k(r,v)|,\quad k\in\mathbb{N}\,.$$

Учитывая это и неравенство (7), из (8), получаем требуемое утверждение.

Если $\tilde{N}(r)$ имеет конечный порядок, то существуют положительные числа $K > 0$ и $\rho > 0$ такие, что $\tilde{N}(r) \leqslant Kr^{\rho}$ для всех $r > 0$. Можно считать ρ нецелым. Отсюда следует, что

$$K2^{\rho}r^{\rho} \geqslant \tilde{N}(2r) \geqslant \int_r^{2r} \frac{\lambda(t)}{t^2}\,dt \geqslant \lambda(r)\int_r^{2r} \frac{dt}{t^2} = \frac{\lambda(r)}{2r}\,,$$

т.е.

$$\lambda(r) \leqslant K2^{\rho+1}r^{\rho+1}\,.$$

В этом случае из работы [41] следует, что существует функция $g \in JS$ порядка ρ с полной мерой λ. Тогда функция $G = v - g \in J\delta$ и $\lambda_G \equiv 0$. Так как $G(z) = \operatorname{Im} f(z)$, где $f(z)$ – целая вещественная функция,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,.$$

Если лишь конечное число $a_n \neq 0$, то $f(z)$ – многочлен, следовательно, функции G и v имеют конечный порядок, что противоречит условию.

Далее

$$c_n(r, G) = a_n r^n\,, n = 1, 2, \dots\,.$$

Тогда из неравенства

$$rT(r, v) \geqslant rT(r, G) - rT(r, g) \geqslant \frac{\pi}{2n}\left|c_n(r, G)\right| + O(r^{\rho}) \geqslant \frac{1}{2}\left|a_n\right| r^n + O(r^{\rho})\,, r \to \infty\,, n = 1, 2, \dots\,,$$

следует, что $\alpha[rT(r, v)] = \infty$. Теорема доказана.

5 Интерполяционная задача в классе целых функций нулевого порядка

Введем необходимые определения. Пусть $f(z)$ – целая функция, $M(f,r) = \max\limits_{0\leqslant\varphi<2\pi} |f(re^{i\varphi})|$.

Через $[\rho,\infty]$ обозначим класс целых функций порядок которых не превышает ρ, $\rho \geqslant 0$, то есть таких, что

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ M(f,r)}{\ln r} \leqslant \rho\,.$$

В частности через $\mathcal{E}_0$ обозначим класс целых функций нулевого порядка (при $\rho = 0$).

Далее, следуя Титчмаршу [43], будем пользоваться следующими названиями и обозначениями. Если в некотором рассуждении встречается число, не зависящее от основных переменных, то оно называется постоянной. Для обозначения абсолютных положительных постоянных, не обязательно одних и тех же, мы пользуемся буквами A, B, K, M. Может встретиться утверждение вроде "$|f(z)| < A\gamma(Br)$, следовательно, $3|f(z)| < A\gamma(Br)$", которое не должно вызывать недоразумений.

Пусть $A = \{a_n : n = 1, 2, \dots\}$ – такая последовательность комплексных чисел, что выполняются соотношения: $0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \dots$, $a_n \neq a_k$ при $n \neq k$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Такие последовательности мы в дальнейшем будем называть *допустимыми.*

Исследование разрешимости задачи

$$f(a_n) = b_n, \quad n = 1, 2, \dots\,, \tag{1}$$

в классе $[\rho,\infty]$, при единственном ограничении

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |b_n|}{\ln |a_n|} \leqslant \rho\,,$$

теперь называют задачей свободной простой интерполяции в классе $[\rho,\infty]$. Этой терминологии мы обязаны А.Ф. Леонтьеву [44].

Определение 34 *Допустимая последовательность $\{a_n\}$ называется интерполяционной в классе $[\rho,\infty]$, если задача (1) разрешима в классе $[\rho,\infty]$ для любой последовательности чисел $\{b_n\}$, удовлетворяющей условию*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |b_n|}{\ln |a_n|} \leqslant 0\,,$$

Мы дополнительно предполагаем, что выполняется неравенство $|a_1| > 0$. Это упрощает доказательство и формулировки некоторых утверждений, однако, не ограничивает общности наших рассуждений. По ходу работы мы делаем замечание, что последовательности $a_1, a_2, \dots$ и $0, a_1, a_2, \dots$ являются одновременно интерполяционными.

Мы находим необходимые и достаточные условия для того, чтобы последовательность $\{a_n\}$ была интерполяционной в классе $\mathcal{E}_0$.

С каждой последовательностью $\{a_n\}$ мы связываем следующую меру в комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(z - a_n)\,,$$

где $\delta(z - a_n)$ – мера Дирака, то есть единичная мера, сосредоточенная в точке a_n. Мы будем употреблять следующие обозначения:

$$C(z,t) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < t\}, \quad B(z,t) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leqslant t\}\,.$$

Функция $n(t) = \mu(B(0,t))$ называется считающей функцией последовательности $\{a_n\}$.

По заданной последовательности A определим семейство функций

$$\Phi_A^*(z,\alpha) = (n_A(C(z,\alpha|z|)) - 1)^+\,,$$

Приведем формулу Пуассона для субгармонической функции v и круга $B(z,R)$, на которую будем ссылаться в нашей работе:

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z + Re^{i\varphi})\,d\varphi - \int_0^R \frac{\mu_v(B(z,t))}{t}\,dt\,.$$

Здесь μ_v – риссовская мера функции v.

В случае, если $f(z)$ – целая функция, a – простой корень функции f, $v(z) = \ln\left|\dfrac{f(z)}{z-a}\right|$, $\mu_f = \mu_v$, то формула Пуассона для круга $B(a,R)$ приобретает вид:

$$\ln|f'(a)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(a + Re^{i\varphi})|\,d\varphi - \int_0^R \frac{\mu_f(B(a,t)) - 1}{t}\,dt - \ln R\,.$$

Пусть $A = \{a_n\}$ – произвольная последовательность комплексных чисел. Обозначим через

$$E_A(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Функция $E_A(z)$ называется канонической функцией последовательности A.

Основным результатом этого раздела является следующая теорема. Напомним, мы считаем, что выполняется условие $|a_1| > 0$. Кроме того, как обычно, $b^+ = \max\{b; 0\}$.

Теорема 35 *Пусть $\{a_n\}$ – допустимая последовательность. Следующие три утверждения эквивалентны:*

1) *для любой последовательности чисел $\{b_n\}$, удовлетворяющей условию*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |b_n|}{\ln |a_n|} \leqslant 0.$$

существует функция $f(z)$ из класса $\mathcal{E}_0$, со свойством (1)

2) *для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение* :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\varepsilon}} < \infty\,, \tag{2}$$

и каноническая функция $E_A(z)$ последовательности $\{a_n\}$ удовлетворяет условию:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln |a_n|} \ln^+ \ln \frac{1}{|E'_A(a_n)|} \leqslant 0\,.$$

3) *выполняется соотношение (2) и*

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{1}{\ln |z|} \ln^+ \int_0^1 \frac{\Phi^*_A(z,\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = 0\,.$$

Выводы

1. Теоремы о расщеплении занимают одно из центральных мест в римановой геометрии и геометрии подмногообразий. Это теоремы Топоногова, Чигера-Громолла в римановой геометрии, теорема Хартмана о цилиндричности подмногообразий неотрицательной секционной кривизны, теорема о цилиндричности подмногообразий в евклидовом пространстве без требования на внутреннюю геометрию, которые заменяется естественным внешне геометрическим условием. В первом разделе рассматриваются погружения кэлеровых многообразий в классе подмногообразий евклидова пространства (теоремы 6,7,9).

2. Одной из важнейших задач геометрической топологии является установление связей между топологическими и геометрическими характеристиками многообразий и их отображений. Такие связи, в частности, позволяют находить топологические препятствия к существованию на гладком многообразии метрик, ограниченных дополнительными условиями на кривизну многообразия. Во втором разделе описаны методы современной алгебраической топологии, используемых в работе. Раздел посвящен изучению топологических, гомотопических и макроскопических инвариантов римановых многообразий и их отображений.

Одним из основных вопросов, поднятых в разделе является исследование проблем, поставленных М. Громовым, о макроскопической размерности универсального накрытия замкнутого риманова многообразия, в частности - гипотеза о падении макроскопической размерности. Полученные в разделе результаты подтверждают гипотезу в трехмерном и вполне неспиновом случаях и опровергают ее в спиновом случае большей размерности. Установлено, что в случае спинового многообразия, гипотеза имеет положительное решение, если фундаментальная группа удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, например, является абелевой. Решена проблема Громова по макроскопическое размерности римановых многообразий (теорема 14).

3. Одним из важных разделов глобальной геометрии гиперповерхностей являются результаты, связанные с минимизацией одних геометрических величин при ограничении (фиксации) других. Пожалуй, исторически первым вопросом такого типа является *изопериметрическая задача.* Были рассмотрены основные определения и необходимые вспомогательные факты из римановой и лоренцевой геометрий, теории оптимального управления. Доказана теорема 29 сравнения радиальных углов

(в римановом случае) и гиперболических углов (в лоренцевом случае), из которых выводятся некоторые следствия.

4. В работе Майлза рассматривались целые функции, нули которых лежат на конечной системе лучей. В частности, было доказано, что если f – целая функция бесконечного порядка с нулями, расположенными на конечной системе лучей, то её нижний порядок также равен бесконечности. Этот результат легко обобщается на субгармонические функции в комплексной плоскости: если риссовская мера субгармонической во всей в комплексной плоскости функции v, бесконечного порядка, сосредоточена на конечной системе лучей, то её нижний порядок также равен бесконечности. В четвертом разделе доказывается аналогичный результат (теорема 33) для функций, субгармонических в полуплоскости.

5. Основным результатом пятого раздела является теорема 35, в которой сформулированы необходимые и достаточные условия разрешимости интерполяционной задачи в классе целых функций нулевого порядка в терминах канонического произведения и меры Дирака, определяемых узлами интерполяции.

Перечень ссылок

[1] L. A. Florit, W. S. Hui, F. Zheng, *On real Kahler Euclidean submanifolds with non-negative Ricci curvature* // J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **7**, 2005, P. 1–11.

[2] L. A. Florit, F. Zheng, *A local and global splitting result for real Kahler Euclidean submanifolds* // Arch. Math. (Basel), **84**, 2005, P. 88–95.

[3] M. Dajczer,L. Rodrigues,*Rigidity of real Kahler submanifolds* // Duke Math. J., **53**, 1986, P. 211–220.

[4] A. A. Борисенко,*Внешняя геометрия сильно параболических многомерных подмногообразий* // УМН, 1997, **52**:6(318), с. 3–52.

[5] A. A. Борисенко. Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий, М. Экзамен, 2003, 671 с.

[6] A. A. Борисенко, *О строении l-мерных поверхностей с вырожденной второй квадратичной формой в n-мерном евклидовом пространстве* // Харьков, Укр. геом. сб., 1973, **13**, с. 18–27.

[7] A. A. Борисенко, *Внешняя геометрия параболических и седловых многомерных подмногообразий* // УМН, 1998, **53**:6(324), с. 3–52.

[8] B. K. Белошапка, C. H. Бычков, *Об одном свойстве выпуклых гиперповерхностей в* $\mathbf{C}^n$ // Матем. заметки, 1986, **40**:5, с. 621–626.

[9] Simon Brendle, Embedded minimal tori in S^3 and the Lawson conjecture, Acta Mathematica, Volume 211, Issue 2, pp 177-190, 2013.

[10] Fernando C. Marques, André Neves, Min-Max theory and the Willmore conjecture, Annals of Mathematics, Pages 683-782 from Volume 179 (2014), Issue 2

[11] L. A. Santaló, I. Yañez, Averages for Polygons Formed by Random Lines in Euclidean and Hyperbolic Planes, Journal of Applied Probability, Vol. 9, No. 1 (Mar., 1972), pp. 140-157

[12] E. Gallego, A. Reventós, Asymptotic behavior of convex sets in the hyperbolic plane, Journal of Differential Geometry, 21 (1985), 63-72.

[13] E. Gallego, A. Reventós, Asymptotic Behaviour of λ-Convex Sets in the Hyperbolic Plane, Geometriae Dedicata, 76: 275 - 289, 1999.

[14] A.M. Naveira, A. Tarrío, Two problems on h-convex sets in the hyperbolic space, Archiv der Mathematik June 1997, Volume 68, Issue 6, pp 514-519

[15] *A. A. Borisenko, V. Miquel* Total curvatures of convex hypersurfaces in hyperbolic space // Illinois journal of mathematics — 1999 — **43** No. 1. — p. 61–78.

[16] *A. A. Borisenko, E. Gallego, A. Reventos* Relation between area and volume for λ-convex sets in Hadamard manifolds // Differential geometry and its application — 2001 — **14** — p. 267–280.

[17] *A. A. Borisenko* Convex sets in Hadamard manifolds // Differential geometry and its application — 2002 — **17** — p. 111–121.

[18] *A. A. Borisenko, V. Miquel* Comparison Theorems on Convex Hypersurfaces in Hadamard Manifolds // Annals of global analysis and geometry — 2002 — Issue 2, **21** — p.191–202.

[19] А. А. Борисенко, Д. И. Власенко, Асимптотическое поведение объемов выпуклых тел в многообразии Адамара // Математическая физика, анализ, геометрия, — 1999 — **6** є3/4 — стр. 223–233

[20] A. A. Borisenko, Convex Hypersurfaces in Hadamard Manifolds, Chapter in Complex, Contact and Symmetric Manifolds (Editors Oldrich Kowalski, Emilio Musso, Domenico Perrone) Volume 234 of the series Progress in Mathematics, Springer, 2005, pp 27-39

[21] Alexander A. Borisenko , Keti Tenenblat, On the total curvature of curves in a Minkowski space, Israel Journal of Mathematics, October 2012, Volume 191, Issue 2, pp 755-769

[22] Alexander Borisenko, Eugene Olin, Curvatures of spheres in Hilbert geometry, Pacific Journal of Mathemtics, Vol. 254, No. 2, 2011, pp. 257Ц273.

[23] *Бляшке В.* Круг и шар. – М.: Наука, 1967. – 232 с.

[24] *Karcher H.* Umkreise und Inkreise konvexer Kurven in der spharischen und der hyperbolischen Geometrie// Math. Ann. – 1968. – **177**. – P. 122-132.

[25] *Милка А. Д.* Об одной теореме Шура – Шмидта// Укр. геом. сб. – 1970 – **8**. – стр. 95-102.

[26] *Howard R.* Blaschke's rolling theorem for manifolds with boundary // Manuscripta Math. – 1999. – **99**, No. 4. – P. 471-483.

[27] Ионин В. К. Внешнегеометрические свойства выпуклых гиперповерхностей в пространствах постоянной кривизны и некоторые геометрические свойства неполных римановых пространств неположительной кривизны. Автореф. дис. на соиск. учен. степ. д.ф.-м.н. Спец. 01.01.04 /Ионин В.К.; [Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН]. - Новосибирск, 2001. - 13 с. ; 20 см. - Библиогр.: с. 12-13 (21 назв.)

[28] А. В. Погорелов, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, Москва, Наука, 1969, 759 стр.

[29] *R. Schneider*, Closed convex hypersurfaces with curvature restrictions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **103** (1988), No. 4, 1201-1204.

[30] *K. Leichtweiss*, Nearly umbilical ovaloids in the n-space are close to spheres, *Res. Math.*, **36** (1999), 102-109.

[31] *В.И. Дискант*, Некоторые оценки для выпуклых поверхностей с ограниченной функцией кривизны, *Сибирский математический журнал*, **12** (1971), 109-125.

[32] *J. Scheuer*, Quantitative oscillation estimates for almost-umbilical closed hypersurfaces in Euclidean space, Bulletin of the Australian Mathematical Society / Volume 92 / Issue 01 / August 2015, pp 133-144

[33] Hutchings, Michael; Morgan, Frank; Ritoré, Manuel; Ros, Antonio (2002), "Proof of the double bubble conjecture Annals of Mathematics, 2nd Ser. 155 (2): 459Ц489,

[34] R. Howard, A. Treibergs, *A reverse isoperimetric inequality, stability and extremal theorems for plane curves with bounded curvature*, Rocky Mountain J. Math., Vol. 25, **2** (1995), 635 – 684.

[35] M. Ghandehari, An optimal control formulation of the Blaschke – Lebesgue theorem, *J. Math. Ann. Appl.*, **200** (1996), 322-331.

[36] Henri Anciaux, Brendan Guilfoyle, On the Three-Dimensional Blaschke-Lebesgue Problem, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), 1831-1839.

[37] E. Harrell, II, A direct proof of a theorem of Blaschke and Lebesgue, J. Geom. Anal. 12 (2002) , no. 1, 81-88.

[38] W. Blaschke, Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts, Math. Ann. 76 (1915) 504Ц513.

[39] H. Lebesgue, Sur le problème des isopèrimétres et sur les domaines de largeur constante. Bull. Soc. Math. France, C.R. (1914) 72Ц79.

[40] J. B. Miles, *On entire functions of infinite order with radially distributed zeros* // Pacif. J. Math., 1979, **81**:1, P. 131–157.

[41] Гришин А. Ф. , *Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций* // Математическая физика, анализ, геометрия, 1994, **1**:2, p. 193–215.

[42] Малютин К. Г., *Ряды Фурье и δ-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости* // Матем. сб. , 2001. — **192**:6, С. 51–70.

[43] Титчмарш Е. Теория функций, М.: Наука, 1980.

[44] А. Ф. Леонтьев, *Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка* // Докл. АН СССР, **5**, (1948), 785–787.

[45] Малютин К. Г., Боженко О. А., *Задача кратной интерполяции в классе целых функций нулевого порядка* // Збiрник праць Iн-ту математики НАН України, 2013, **10**: 4-5, с. 412–423.