

УДК 538.975:621.89.012:536.2(047.31)

КП

№ держреєстрації 0115U000692

Інв. №

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет (СумДУ)  
40007, м. Суми, вул. Р.-Корсакова, 2: тел. (0542) 33-41-08,  
факс (0542) 33-40-49

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи  
доктор фіз.-мат. наук, проф.

\_\_\_\_\_ А.М. Черноус

ЗВІТ

ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

**"НЕРІВНОВАЖНА ТЕРМОДИНАМІКА ФРАГМЕНТАЦІЇ МЕТАЛІВ І  
ТЕРТЯ ПРОСТОРОВО-НЕОДНОРІДНИХ МЕЖОВИХ МАСТИЛ МІЖ  
ПОВЕРХНЯМИ З НАНОРОЗМІРНИМИ НЕРІВНОСТЯМИ"**

(проміжний)

Начальник НДЧ

к.ф.-м.н., с.н.с.

Керівник НДР

д.ф.-м.н., проф.

Д.І. Курбатов

О.В. Хоменко

Суми - 2016

Рукопис закінчено 29 грудня 2015 р.

Результати цієї роботи розглянуто на засіданні наукової ради СумДУ,

протокол від 2015.11.26 № 3

## СПИСОК АВТОРІВ

Головний науковий співробітник

д.ф.-м.н., професор

(2015.12.29)

О. В. Хоменко

(розд. 1, 2, 3)

Старший науковий співробітник

к.ф.-м.н., доцент

(2015.12.29)

Я. О. Ляшенко

(розд. 1)

Молодший науковий співробітник

аспірант

(2015.12.29)

Д. С. Трощенко

(розд. 2)

Лаборант

студент

(2015.12.29)

М. О. Хоменко

(розд. 3)

## РЕФЕРАТ

*Звіт про НДР: 61 с., 19 рис., 73 джерел.*

Об'єктом дослідження є ультратонка плівка мастила, затиснута між двома атомарно-гладкими та шорсткими твердими поверхнями тертя.

Завдання дослідження — побудова нерівноважної термодинамічної моделі плавлення ультратонкої плівки мастила та дослідження поведінки трибологічної системи на основі представленої моделі з урахуванням просторової неоднорідності та впливу адитивних шумів основних параметрів.

Використана методика дослідження — методи нерівноважної еволюційної термодинаміки, теорії фазових переходів та теорії пружності, метод мультифрактального флуктуаційного аналізу, методи обчислювальної математики.

У рамках синергетичної моделі межового тертя, що описує фазові переходи в ультратонкій плівці мастила, вивчаються процеси тертя двох атомарно-гладких та шорстких поверхонь при наявності ультратонкого шару мастила між ними. Врахування просторової неоднорідності напружень, деформації і температури мастильного шару між двома атомарно-гладкими поверхнями дозволило описати нетривіальну неньютонівську поведінку ефективної зсувної в'язкості мастила. Показано, що за наявності нанорозмірних нерівностей поверхонь у процесі руху в площині тертя реалізується змінна у часі доменна структура, яка характеризується просторовим розподілом значень параметра порядку. Досліджено вплив адитивних шумів основних параметрів на характер поведінки трибологічної системи. За допомогою методу мультифрактального флуктуаційного аналізу розраховані залежності модифікованого показника Херста від параметра деформації та показано, що зі зменшенням інтенсивності шуму мультифрактальна поведінка ряду посилюється.

**ТЕРТЯ, ПРУЖНІ ТА В'ЯЗКІ НАПРУЖЕННЯ, ДЕФОРМАЦІЯ, ТРИБОЛОГІЧНА СИСТЕМА, ПЕРЕРИВЧАСТИЙ РУХ, ПЛАВЛЕННЯ, ФАЗОВИЙ ПЕРЕХІД, АДИТИВНИЙ ШУМ, САМОПОДІБНІСТЬ.**

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	5
1 ПРОСТОРОВА НЕОДНОРІДНІСТЬ ОСНОВНИХ ПАРАМЕТРІВ СИНЕРГЕТИЧНОЇ МОДЕЛІ МЕЖОВОГО ТЕРТЯ .....	9
1.1 Формулювання моделі .....	9
1.2 Моделювання просторової неоднорідності основних параметрів .....	13
2 МЕЖОВЕ ПЛАВЛЕННЯ МАСТИЛА МІЖ ДВОМА ШОРСТКИМИ ПОВЕРХНЯМИ .....	22
2.1 Вільна енергія та фазова діаграма .....	22
2.2 Кінетика плавлення мастила .....	25
3 ВПЛИВ АДИТИВНИХ ШУМІВ НА САМОПОДІБНУ ПОВЕДІНКУ ЗСУВНОГО ПЛАВЛЕННЯ .....	37
3.1 Постановка моделі та рівняння Фоккера-Планка .....	37
3.2 Самоподібна поведінка .....	42
3.3 Статистичний аналіз часових рядів .....	46
ВИСНОВКИ.....	52
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ .....	54

## ВСТУП

Останнім часом, з розвитком сучасної науки та техніки, дослідження режиму межового тертя має високе прикладне значення. Нанотрибологічні системи, в яких реалізується межовий режим, використовуються для побудови високоточного обладнання та приладів [1]. Останні дозволяють спостерігати за найскладнішими процесами, що відбуваються під час експлуатації в області контакту деталей [1–6]. Разом з тим з'ясовано, що багато низьковимірних систем зазнають плавлення під дією зсуву ("зсувне плавлення"). Такий вид плавлення часто спостерігається у колоїдних кристалах різного типу [7], при прослизанні по межах зерен у режимі інтенсивної пластичної деформації [8, 9], що може призводити до встановлення маловивченого режиму надпластичності. Спостережувані на бікрисналах ефекти [10] також багато в чому нагадують плавлення зміщенням. Зсувне плавлення одночасно з термодинамічним демонструють ультратонкі плівки мастильних матеріалів, що затиснуті між атомарно-гладкими твердими поверхнями [11–16].

Відомо, що під час межового тертя часто порушується закон Амонтонна. Так, наприклад, в експериментах Гарді при розгляді двох плоских поверхонь тертя, що розділені межовим шаром ароматичних сполук [17], коефіцієнт статичного тертя з ростом навантаження зменшується. Таким чином, Гарді встановив, що існують граничні внутрішні напруження, при перевищенні яких починається течія. Крім того, Гарді прийшов до висновку, що з підвищенням тиску шар мастила стає тоншим, що і призводить до зміни коефіцієнта тертя. Таким чином, була виведена залежність коефіцієнта тертя від товщини мастила.

Однак, незважаючи на те, що вивчення межового режиму має високе прикладне та фундаментальне значення, досі не існує єдиної теорії, що достеменно описує межове тертя. Зважаючи на складність процесів, що протікають

при терті у зоні контакту, часто користуються феноменологічними моделями [16, 18–24]. Також для опису результатів експериментів активно застосовуються методи молекулярної динаміки [25–27]. Зокрема, у роботах [28, 29] запропонована синергетична модель, в якій плавлення мастильного шару проходить за рахунок механізмів термодинамічного і зсувного плавлення. У роботах Попова [16, 18] розроблена термодинамічна теорія межового тертя, заснована на теорії фазових переходів Ландау другого роду [30], де в якості параметра порядку обирається модуль зсуву мастильного матеріалу. Однак, у режимі межового тертя часто спостерігаються стрибкоподібні фазові перетворення першого роду [11, 20, 31], що призводять до встановлення переривчастого режиму руху [11, 31, 32]. У роботі [33] представлена модель пластичної деформації металів з урахуванням просторової неоднорідності, де для опису використовуються рівняння, що схожі за математичною структурою з використаними нижче, оскільки у роботі розглядається модель в'язкопружного середовища [34], що враховує зсувне плавлення, результатом якого є наявність у мастилі великих пластичних деформацій. Крім того, останнім часом, великий інтерес викликає вивчення двошарових атомних структур (бішарів), оскільки подібні структури часто застосовуються у промислових і технологічних процесах. Так, у роботі [35] була запропонована модель, яка враховує основні фактори, що впливають на поведінку таких систем. Вона якісно описує експериментальні дані, що отримані за допомогою апарату поверхневих сил (SFA – Surface Forces Apparatus). У роботі [36] запропонована проста модель зсувного плавлення, яка може використовуватися для опису систем різних типів. Свій подальший розвиток зазначена робота отримала у [37], де при чисельному аналізі основних рівнянь досліджується відносний рух пари взаємодіючих атомарних шарів, а також розглядається введення адитивного шуму, однак, він введений насамперед для того, щоб система при будь-яких початкових умовах приходила до стаціонарного стану, і нічого не говориться про те, що шум може

критичним чином впливати на характер поведінки системи.

Отже, для опису поведінки ультратонких плівок мастильних матеріалів, що затиснуті між атомарно-гладкими та шорсткими твердими поверхнями, нами розвивається синергетична [34, 38–42], а також термодинамічні [21, 43–47] моделі. У роботах [21, 40] розглядається випадок, коли ультратонка плівка мастила плавиться при перевищенні внутрішніми напруженнями, що виникають у ній, критичного значення. За допомогою моделі, яка представлена у роботі [34], описані гістерезисні явища, вивчено фрактальні характеристики часових рядів напружень, а також розглянуто питання про виникнення у системі коливань у режимі детерміністичного хаосу [40]. Проте скрізь вважалося, що шар мастила має однакові властивості як по товщині, так і по площині контакту. Щоб уникнути такого обмеження розділ 1, представленої роботи, цілеспрямований на подальший розвиток моделі, де вивчається просторово-часова залежність поведінки основних параметрів системи з урахуванням неоднорідного розподілу напружень, деформації і температури по товщині мастильного шару. Поверхні тертя, як і раніше, покладаються гладкими, а мастило у стані спокою — однорідне. Всі описані далі просторові залежності отримані за рахунок того, що мастильний шар володіє ефективною в'язкістю [48], яка показує неньютонівську поведінку і враховується при виведенні основних рівнянь [34].

У розділі 2, у випадку реалізації фазового переходу першого роду, що приводить до встановлення переривчастого режиму руху [45, 49], проведено узагальнення теорії [16, 18] та досліджується специфічна ситуація тертя атомарно-гладких поверхонь, яка широко вивчається експериментально [3, 4, 11, 31]. Представлений розділ розвинений з метою теоретичного вивчення особливостей режиму межового мастила при взаємному терті поверхонь, що мають нанорозмірні нерівності. Оскільки у технічних застосуваннях поверхні тертя практично завжди володіють нерівностями і неоднорідностями, запропонований підхід дозволяє розширити результати попередніх робіт [45, 49] на

більш широкий клас реальних трибологічних систем.

Дослідження, проведені у розділі 3, враховують вплив адитивних шумів на характер поведінки системи. Окрім того, визначаються умови, при яких спостерігається самоподібна поведінка системи, в якій неможливо виділити характерний масштаб параметра порядку. Також визначаються умови, при яких система демонструє монофрактальну чи мультифрактальну поведінку, що характеризується спектром фрактальних розмірностей.



# 1 ПРОСТОРОВА НЕОДНОРІДНІСТЬ ОСНОВНИХ ПАРАМЕТРІВ СИНЕРГЕТИЧНОЇ МОДЕЛІ МЕЖОВОГО ТЕРТЯ

## 1.1 Формулювання моделі

Розглянемо дві гладкі поверхні, розділені шаром мастила товщиною  $h$ . Причому верхня рухається зі швидкістю  $V = V_0$ , а нижня спочиває ( $V = 0$ ). У такому разі для звичайних ньютонівських рідин у режимі гідродинамічного тертя виконується добре відомий закон Ньютона:

$$F = \eta A \frac{dV}{dy}, \quad (1.1)$$

де  $F$  – сила в'язкого тертя, за рахунок якої мастило з часом розігрівається і стає більш рідким,  $\eta$  – зсувна в'язкість мастила,  $A$  – площа контакту поверхонь через мастило,  $y$  – поперечна координата. Розглянемо випадок, у якому сили взаємодії молекул мастила з поверхнями тертя більші, ніж сили взаємодії молекул мастила одна з одною. Наприклад, така ситуація експериментально досліджується у роботі при розгляді межового тертя [6], де показано, що верхній та нижній мастильний шар адсорбуються на поверхнях тертя і рухаються з ними як єдине ціле. При цьому верхній шар мастильного матеріалу рухається зі швидкістю  $V_0$ , а нижній спочиває. У зазначеному випадку поле швидкостей приймає вигляд [50]

$$V = V_0 \frac{y}{h}, \quad (1.2)$$

де швидкість  $V$  лінійно зростає від нуля у нижньої нерухомої поверхні до максимального значення  $V_0$  у верхній. Проте ми розглядаємо більш складний випадок, коли мастило має неньютонівську в'язкість, тобто коефіцієнт  $\eta$  в (1.1) залежить як від температури  $T$ , так і від градієнта швидкості  $dV/dy$  [48]. У нашому випадку за рахунок тонкості мастильного шару градієнт швидкості може

бути записаний як [32]

$$\dot{\varepsilon} = \frac{V_0}{h}, \quad (1.3)$$

де  $\dot{\varepsilon}$  — швидкість деформації (див. рівняння (1.6) — (1.8)). Таким чином, ми приходимо до залежності

$$\eta = \eta(T, \dot{\varepsilon}). \quad (1.4)$$

Згідно з записаними далі основними рівняннями (1.6) — (1.8), це означає, що в'язкість мастила змінюється з часом так само, як і всі інші параметри. Тому введення до розгляду градієнтних доданків дозволяє вивчити часову еволюцію основних параметрів мастила по її товщині, що завжди має місце, у будь-якому експерименті. Однак зважаючи на ультратонкість мастильного шару на сьогоднішній день експериментально вимірюються лише його загальні усереднені характеристики [1]: в'язкість, в'язкі і пружні напруження, температури плавлення і затвердіння і т. д. Процеси, що відбуваються по товщині мастила у даний час вивчаються в основному за допомогою методів молекулярної динаміки [51, 52]. Наприклад, у [52] досліджується система, що складається з двох блоків товщиною 2 нм, між якими розміщене полімерне мастило завтовшки 3 нм. Подібні моделі дозволяють з'ясувати залежності динамічних параметрів мастильного матеріалу по товщині розглянутої системи. Оскільки за рахунок ультратонкості мастила прямі вимірювання розподілів параметрів по її товщині ускладнені, такі роботи є передбачуваними і несуть високе фундаментальне значення. У роботі [14] вивчається просторово неоднорідна система, але в рамках аналітичної моделі. Крім того, побудовані фазові діаграми та вивчено вплив товщини мастила на поведінку системи, а також на особливості встановлення переривчастого режиму руху. У [53] вивчається розподіл напружень по товщині мастильного шару при зсуві верхньої і нижньої поверхонь у протилежні сторони і показано, що напруження у нижній і верхній частинах системи мають різний знак. Такий же результат показує і наша робота. У робо-

ті [53] в ході комп'ютерного експерименту можна виділити три етапи. Спершу на нижню поверхню тертя наносився мастильний шар молекулярної товщини і очікувався час, за який встановлювався стаціонарний стан. Потім до верхньої та нижньої поверхонь тертя прикладалася сила, за рахунок якої вони почали контактувати через мастило. І на завершальній стадії здійснювався зсув поверхонь у взаємно протилежних напрямках, і одночасно вимірювалися динамічні параметри мастила, у тому числі і по її товщині. У роботі досліджено вплив на систему зовнішнього навантаження, швидкості відносного зсуву поверхонь, типу мастила, вивчена залежність кута повороту полімерних молекул від параметрів навантаження і т. д. У роботі [53] отримано переривчастий режим руху, який є однією з основних причин руйнування деталей у наномеханізмах. Показано, що під час реалізації переривчастого руху з часом змінюється товщина мастила, оскільки вона зазнає фазові переходи між кінетичними режимами тертя.

У запропонованому нами підході просторовим розподілом володіють не тільки напруження, які пропорційні відносній швидкості зсуву згідно до формули [32, 34]<sup>1</sup>

$$V = \sigma_v \frac{h}{\eta_{eff}}, \quad (1.5)$$

але і температура  $T$  і деформація  $\varepsilon$ , оскільки при зміні градієнта швидкості по товщині мастила (неньютонівська поведінка) буде змінюватися рівень дисипації механічної енергії, що приведе до нерівномірного розподілу температури, тобто по товщині мастило в одному місці може бути розплавленим, а в іншому — можуть проявлятися властивості твердого тіла. Молекулярно-динамічні моделі показують саме таку поведінку, наприклад коли виділений атомарний мастильний шар переміщується між сусідніми шарами без розупорядкування [6].

У так званих *stop-start* експериментах [54] характер неоднорідного розподілу

<sup>1</sup>Тут  $\eta_{eff}$  — ефективна в'язкість, яка для ультратонких шарів сильно відрізняється від в'язкості об'ємних мастил, що складаються з тих же речовин, тому для конкретної системи  $\eta_{eff}$  може бути знайдена тільки експериментально [48]. Величина  $\sigma_v$  у (1.5) — це в'язка компонента напружень.

температури по товщині мастила критичним чином впливає на поведінку системи, оскільки “більш нагріті” шари здатні залишатися рідиноподібними при затвердінні основного об’єму мастила, забезпечуючи більш тривалий режим ковзання. Оскільки ефективна в’язкість  $\eta_{eff}$  залежить від природи мастильного матеріалу, а також від типу використовуваних поверхонь, експерименти з різними мастилами можуть показувати абсолютно різну поведінку. Урахування неоднорідного розподілу температури по товщині мастильного матеріалу може частково описати ті або інші спостережувані особливості.

У роботі [34] досліджується синергетична модель межового тертя, побудована на основі трьох самоузгоджених диференціальних рівняннях для зсувної компоненти тензора напружень  $\sigma$ , що виникають у мастильному шарі, зсувної компоненти відносних деформацій  $\varepsilon$ , а також температури мастила  $T$ . Досліджується загальний просторово-неоднорідний випадок, опис якого стає можливим при модифікації вихідної системи рівнянь [34] за допомогою урахування відповідних градієнтних вкладів [33]:

$$\dot{\sigma} = D_{\sigma} \nabla^2 \sigma - \sigma + g\varepsilon, \quad (1.6)$$

$$\tau \dot{\varepsilon} = D_{\varepsilon} \nabla^2 \varepsilon - \varepsilon + (T - 1)\sigma, \quad (1.7)$$

$$\delta \dot{T} = D_T \nabla^2 T + (T_e - T) - \sigma\varepsilon + \sigma^2, \quad (1.8)$$

де величина  $T_e$  є температурою поверхонь тертя [34]. Тут також введені константа  $g < 1$ , яка чисельно дорівнює відношенню модуля зсуву мастила  $G$  до його характерного значення  $G_0$ , та параметри

$$\tau = \frac{\tau_{\varepsilon}}{\tau_{\sigma}}, \quad \delta = \frac{\tau_T}{\tau_{\sigma}}, \quad (1.9)$$

де  $\tau_{\sigma}$ ,  $\tau_{\varepsilon}$ ,  $\tau_T$  — часи релаксації напружень, деформації та температури.

У роботах [18, 34] показано, що нульові стаціонарні напруження  $\sigma_0$  відповідають твердоподібній структурі мастильного матеріалу, а при  $\sigma_0 \neq 0$

мастило плавиться з переходом до рідиноподібного стану. Однією з причин цього є те, що згідно до узагальненої для межового режиму діаграми Герсі-Штрибека [32, 34], із збільшенням в'язких напружень  $\sigma_v$  зростає відносна швидкість зсуву поверхонь тертя  $V$  (1.5). Оскільки напруження  $\sigma$  представляють суму в'язкої та пружної компонент [34], а у шарі рідиноподібного мастила переважають в'язкі напруження, із зростанням  $\sigma$  зростає швидкість руху зсувних поверхонь, що відповідає кінетичному режиму ковзання і рідиноподібній структурі мастила. При значенні  $\sigma = 0$  поверхні тертя не рухаються, що відповідає їх “прилипанню” за рахунок затвердіння міжповерхневого мастильного шару. Представлені висновки підтверджуються як теоретично [18], так і експериментально [54].

## 1.2 Моделювання просторової неоднорідності основних параметрів

Нехай поверхні тертя атомарно-гладкі і не мають дефектів. Такі поверхні часто отримують відколом слюди вздовж атомарної площини [1]. Нехай мастило однорідне і складається з неполярних квазісферичних молекул (наприклад, молекул октаметилциклотетрасилоксана  $C_8H_{24}O_4Si_4$  [1]), які здатні утворювати твердоподібні упорядковані структури, що характеризуються наявністю далекого порядку чергування молекул. У цьому випадку уздовж площини поверхонь мастило можна вважати однорідним. У зв'язку з цим, далі розглядається неоднорідність тільки по товщині мастильного матеріалу (координата  $y$ ). Тому співвідношення (1.6) – (1.8) являють собою одновимірні диференціальні параболічні рівняння в частинних похідних. Їх можна легко розв'язати чисельно за допомогою застосування явної двошарової різницевої схеми [55]. При цьому вся, зацікавлена нами, просторово-часова область розбивається сіткою. Розрахунок проводиться від початкового моменту часу  $t = 0$  до  $t = t_N$ , а ко-

ордината при цьому  $y \in [0, y_M]$ . Необхідні для розв'язання початкові і граничні умови слід вибирати з фізичного представлення завдання.

Індексом  $i$  будемо позначати координатні шари, а індексом  $j$  – часові. Тоді при використанні явної різницевої схеми координатні похідні апроксимуються наступним чином (для деформації  $\varepsilon$  і температури  $T$  аналогічно):

$$\nabla^2 \sigma \equiv \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = \frac{\sigma_{i+1}^j - 2\sigma_i^j + \sigma_{i-1}^j}{H^2}, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\sigma_i^{j+1} - \sigma_i^j}{\Delta}, \quad (1.11)$$

де  $\Delta = t_N/N$  – крок за часом,  $H = y_M/M$  – крок по координаті (відстань між вузлами сітки по вертикалі і горизонталі).

Остаточні розрахункові співвідношення приймають вигляд:

$$\sigma_i^{j+1} = \sigma_i^j + \frac{\Delta}{H^2} \left[ D_\sigma \left( \sigma_{i+1}^j - 2\sigma_i^j + \sigma_{i-1}^j \right) + H^2 \left( -\sigma_i^j + g\varepsilon_i^j \right) \right], \quad (1.12)$$

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j + \frac{\Delta}{\tau H^2} \left[ D_\varepsilon \left( \varepsilon_{i+1}^j - 2\varepsilon_i^j + \varepsilon_{i-1}^j \right) + H^2 \left( -\varepsilon_i^j + \sigma_i^j T_i^j - \sigma_i^j \right) \right], \quad (1.13)$$

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \frac{\Delta}{\delta H^2} \left[ D_T \left( T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j \right) + H^2 \left( T_e - T_i^j - \sigma_i^j \varepsilon_i^j + (\sigma_i^j)^2 \right) \right]. \quad (1.14)$$

Система рівнянь (1.12) – (1.14) має  $3N(M - 1)$  рівнянь і дозволяє визначити  $\sigma_i^{j+1}$ ,  $\varepsilon_i^{j+1}$  та  $T_i^{j+1}$ , знаючи набір значень на попередньому часовому шарі  $\sigma_i^j$ ,  $\varepsilon_i^j$  і  $T_i^j$ . У додаток до (1.12) – (1.14) необхідний набір початкових умов у момент часу  $t = 0$ , які дають  $3(M + 1)$  рівнянь, а також граничні умови, що дають  $6N$  рівнянь. Таким чином, загальна кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих  $3(M + 1)(N + 1)$ .

При русі поверхонь тертя відповідно до рівнянь (1.6) – (1.8) в однорідному випадку ( $\nabla^2 \equiv 0$ ) встановлюються стаціонарні значення напружень  $\sigma_0$ ,

деформації  $\varepsilon_0$  та температури  $T_0$  [34]:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{gT_e - (g+1)}{1-g}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{g}, \quad T_0 = T_e. \quad (1.15)$$

Розглянемо два найбільш поширені випадки. У першому з них верхня поверхня також рухається зі швидкістю  $V$ , а нижня з такою ж швидкістю рухається в протилежному напрямку. При цьому напруження, деформація і температура у верхній поверхні будуть рівні  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$  і  $T_0$  відповідно. Значення температури біля межі нижньої поверхні також буде дорівнює  $T_0$ , оскільки згідно (1.15)  $T_0 = T_e$ , а  $T_e$  є температурою поверхонь тертя, яка є термостатом (зовнішнім середовищем) [34], тобто їх температура у процесі передачі тепла від мастила, що розігріте за рахунок виконаної роботи, не змінюється. З огляду симетрії розглянутої задачі напруження і деформація поблизу нижньої поверхні будуть рівні  $-\sigma_0$  і  $-\varepsilon_0$  відповідно. Тому виберемо початкові умови параметрів за товщиною мастила згідно до співвідношення

$$\sigma_i^0 = -\sigma_0 + \frac{2i\sigma_0}{M}, \quad \varepsilon_i^0 = -\varepsilon_0 + \frac{2i\varepsilon_0}{M}, \quad T_i^0 = T_0, \quad i = 0, 1, \dots, M. \quad (1.16)$$

Граничні умови запишуться наступним чином<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \sigma_0^j &= -\sigma_0, & \sigma_M^j &= \sigma_0, & \varepsilon_0^j &= -\varepsilon_0, & \varepsilon_M^j &= \varepsilon_0, \\ T_0^j &= T_M^j = T_0, & j &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.17)$$

У випадку, коли нижня поверхня жорстко закріплена і не рухається, а з фіксованою швидкістю рухається тільки верхня, напруження, деформація і температура у верхній поверхні будуть також дорівнювати  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$  та  $T_0$ , а поблизу нижньої буде виконуватися рівність  $\sigma_0 = \varepsilon_0 = 0$ , оскільки за рахунок взаємодії

<sup>2</sup>У (1.17) індекс  $j$  змінюється від 1, оскільки співвідношення (1.16) і так вже задають граничні умови на нульовому часовому шарі при  $j = 0$ . Легко переконатися у тому, що якщо в (1.17)  $j$  відраховувати від нуля, то помилки не буде, оскільки у цьому випадку співвідношення (1.16) і (1.17) продублюють на нульовому часовому шарі одні і ті ж значення.

атомів поверхні з атомами мастильного матеріалу нижній шар “прилипає” до поверхні [6]. Температура мастила у нижньої межі вибирається, як і раніше, рівною  $T_0$ . У цьому випадку початкові умови можна представити у вигляді

$$\sigma_i^0 = \frac{i\sigma_0}{M}, \quad \varepsilon_i^0 = \frac{i\varepsilon_0}{M}, \quad T_i^0 = T_0, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad (1.18)$$

а граничні

$$\begin{aligned} \sigma_0^j &= 0, & \sigma_M^j &= \sigma_0, & \varepsilon_0^j &= 0, & \varepsilon_M^j &= \varepsilon_0, \\ T_0^j &= T_M^j = T_0, & j &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Виміряємо координату  $y$  в одиницях товщини мастила  $h$ , тоді рівню нижньої поверхні відповідає значення  $y_0 = 0$ , а у верхньої  $y_M = 1$ . Тепер система рівнянь є замкнутою і може бути розв’язана чисельно.

Виберемо для розв’язання крок часової сітки  $\Delta = 10^{-6}$ , а крок по координаті  $H = 0.01$ . Таким чином, координата ділиться на  $M = 100$  частин. На рис. 1.1 і рис. 1.2 показано результати розв’язання зазначених рівнянь. Причому рис. 1.1 відповідає зсуву поверхонь тертя у протилежних напрямках (використовуються початкові умови (1.16) і граничні (1.17)), а рис. 1.2 відповідає ситуації, коли зсувається тільки верхня поверхня тертя, а нижня спочиває (відповідно початкові умови (1.18) і граничні (1.19)). На обох рисунках приведена часова еволюція просторових розподілів напружень  $\sigma$ , деформацій  $\varepsilon$ , а також температури мастила  $T$ . Криві наведені для 4-х послідовних моментів часу. Штрихові прямі на рис. 1.1 і рис. 1.2 представляють початкові умови, тобто описують просторові розподіли величин у момент часу  $t = 0$ . Тому чим далі від штрихової лінії знаходиться крива на рисунку, тим більш пізнішому моменту часу вона відповідає. Криві на обох рисунках відповідають часам на 2000 часовому шарі, 10000, 80000 і 1000000. При урахуванні кроку інтегрування за часом  $\Delta = 10^{-6}$  дає значення  $t = 0.002, 0.01, 0.08, 1.0$ . Остання крива,



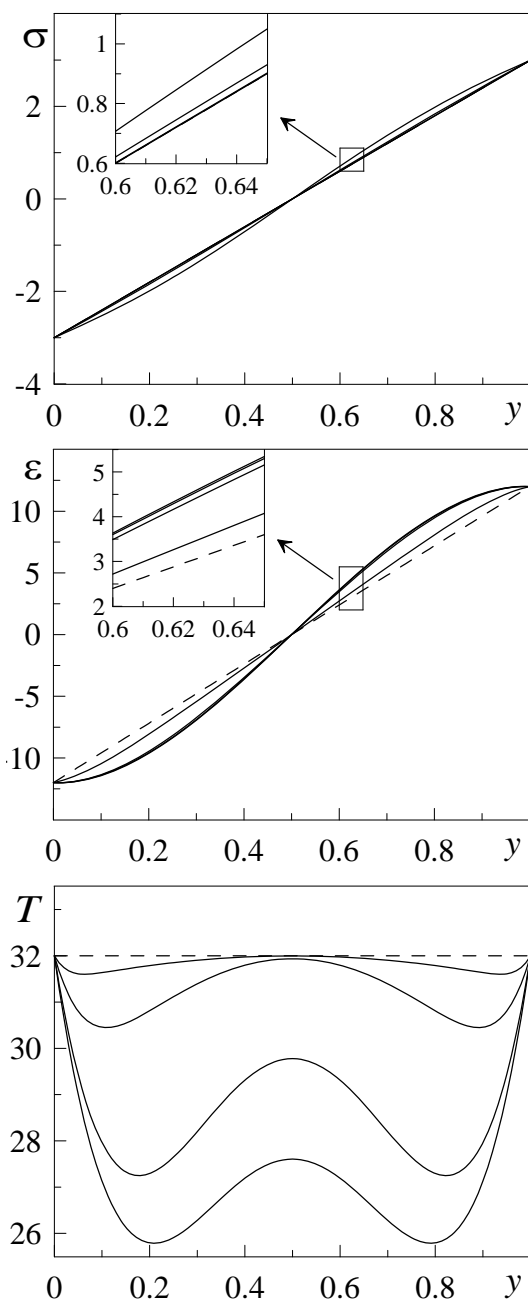


Рисунок 1.1 – Профілі напружень  $\sigma$ , деформацій  $\varepsilon$  та температури  $T$ , отримані у результаті чисельного розв’язку рівнянь (1.12)–(1.14) з параметрами  $g = 0.25$ ,  $T_e = 32$ ,  $\tau = \delta = 0.1$ ,  $D_\varepsilon = 0.45$ ,  $D_\sigma = D_T = 0.05$  при початкових і граничних умовах (1.16) і (1.17). Штриховою лінією показано початкові умови (1.16). Рисунок відповідає зсуву поверхонь тертя з однаковими швидкостями у протилежних напрямках.

отримана для моменту часу  $t = 1.0$ , на обох рисунках з подальшим плином часу не змінює вигляд, тобто представляє сталі стаціонарні значення розподілів відповідних величин по товщині мастила.

Як видно із рис. 1.1, рис. 1.2, і вставок на них, напруження з плином ча-

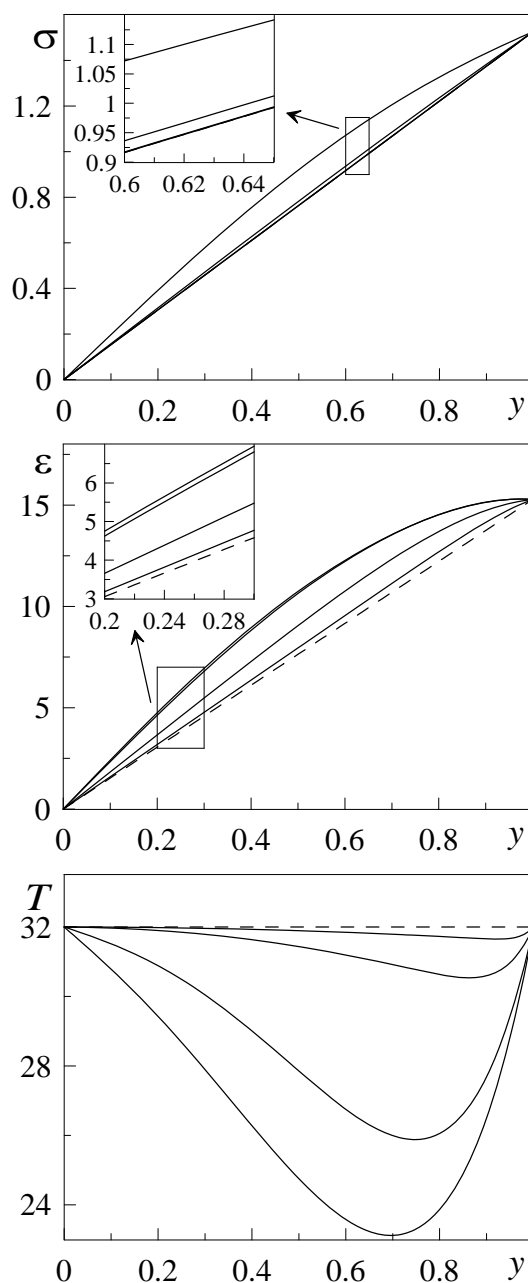


Рисунок 1.2 – Профілі напружень  $\sigma$ , деформацій  $\varepsilon$  та температури  $T$ , отримані у результаті чисельного розв’язку рівнянь (1.12) – (1.14) з параметрами рис. 1.1 і  $g = 0.1$ , при початкових і граничних умовах (1.18) і (1.19). Штриховою лінією показано початкові умови (1.18). Рисунок відповідає ситуації, коли нижня поверхня спочиває, а верхня зсувається з фіксованою швидкістю.

су змінюється повільніше, ніж деформація і температура. Це пов’язано з тим, що час релаксації напружень вибрано у 10 разів більшим, ніж часи релаксації двох інших параметрів. У цьому випадку виконується синергетичний принцип підпорядкування, коли зміни деформації  $\varepsilon$  і температури  $T$  слідують за зміною

напруження (параметр порядку).<sup>3</sup>

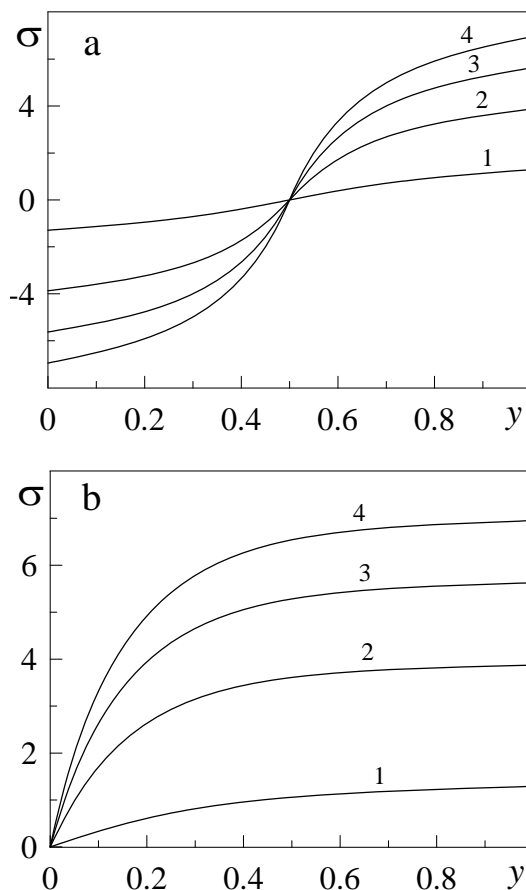


Рисунок 1.3 – Стационарні профілі напружень  $\sigma(y)$ , отримані при параметрах рис. 1.1 та  $D_\varepsilon = D_T = 0$ ,  $D_\sigma = 0.05$ . Криві 1 – 4 відповідають температурам  $T_e = 10, 50, 100, 150$  відповідно; а) початкові і граничні умови (1.16) та (1.17), зсув поверхонь з однаковими швидкостями у протилежних напрямках; б) початкові і граничні умови (1.18) та (1.19), нижня поверхня спочиває, а верхня зсувається з фіксованою швидкістю.

Зазначимо, що на рис. 1.1 криві, симетричні відносно серединного шару мастила, в області якого напруження і деформації дорівнюють нулю. Це відбувається за рахунок того, що поверхні, які труться, рухаються в протилежних напрямках з однаковими швидкостями. При цьому, згідно залежності  $T(y)$ , якщо рухатися від центру мастильного шару у напрямку до будь-якої з поверхонь (в перпендикулярному до них напрямі), температура  $T$  спочатку зменшується, а потім знову починає збільшуватися, доки у поверхонь не прийме значення  $T_e$ . Залежності на рис. 1.2 фактично повторюють праву частину

<sup>3</sup>У такому випадку часто використовується адіабатичне наближення  $\tau \dot{\varepsilon}, \delta \dot{T} \approx 0$ , яке дозволяє записати рівняння Ландау-Халатнікова, і при його інтегруванні знайти явний вигляд синергетичного потенціалу, що є аналогом вільної енергії у термодинаміці, або потенційної енергії у механіці [56].

залежностей, представлених на рис. 1.1 при  $y > 0.5$ , тобто розподіли, які спостерігаються на рис. 1.1 вище центру системи. Це цілком зрозуміло, оскільки у випадку, який представлений на рис. 1.2, нижня поверхня спочиває, і біля неї реалізуються значення  $\sigma = \varepsilon = 0$ , так само як і в серединному шарі мастила на рис. 1.1. Рис. 1.1 і 1.2 при різному наборі параметрів  $D_\sigma$ ,  $D_\varepsilon$  і  $D_T$  можуть показувати різну поведінку. Це зокрема означає, що вигляд кривої навантаження  $\sigma(\varepsilon)$  [57] змінюється по товщині мастильного матеріалу, тобто мастило по товщині може показувати як режим пластичного течії (ковзання), так і гуківську ділянку залежності  $\sigma(\varepsilon)$ . Під час експерименту зазвичай вимірюються усереднені характеристики, що як правило не дозволяють провести такий аналіз [1].

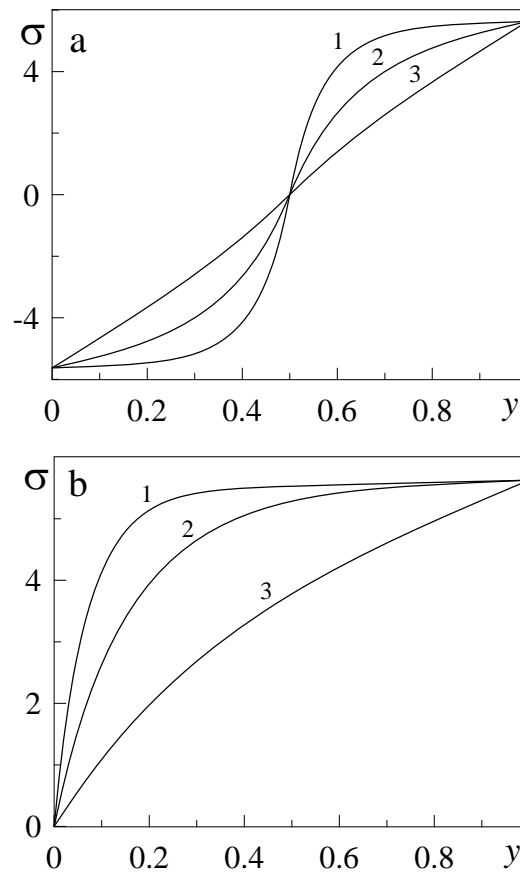


Рисунок 1.4 – Стационарні профілі напружень  $\sigma(y)$ , отримані при параметрах рис. 1.1 та  $D_\varepsilon = D_T = 0$ ,  $T_e = 100$ . Криві 1–3 відповідають величинам  $D_\sigma = 0.01, 0.05, 0.5$  відповідно; а) початкові і граничні умови (1.16) та (1.17), зсув поверхонь з однаковими швидкостями в протилежних напрямках; б) початкові і граничні умови (1.18) та (1.19), нижня поверхня спочиває, а верхня зсувається з фіксованою швидкістю.

Рисунки 1.1 і 1.2 показують часову еволюцію основних параметрів. Значимо, що в залежності від початкових умов характер еволюції може бути дуже різним, але при фіксованих параметрах у результаті устанавлюються стаціонарні розподіли величин  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $T$  за товщиною мастильного матеріалу. У результаті саме вони і визначають режим тертя. На рис. 1.3 наведено стаціонарні розподіли напружень за товщиною мастила при різних температурах поверхонь  $T_e$ . Рисунок демонструє той факт, що зі зростанням температури зростає відносна швидкість руху поверхонь, оскільки в'язкість мастила зменшується і вона стає більш рідкою (згідно (1.5) напруження визначають відносну швидкість поверхонь  $V$ ). Також з рисунка слідує, що чим нижче температура  $T_e$ , тим більша товщина прилеглої до верхньої зсувної поверхні мастила має однакову швидкість. Це відбувається за рахунок того, що із зменшенням температури  $T_e$  збільшується в'язкість мастильного матеріалу, за рахунок чого також зменшується швидкість зсуву поверхонь  $V$ .

На рис. 1.4 показано вплив на режим тертя коефіцієнта  $D_\sigma$  при  $D_\varepsilon = D_T = 0$ . У цьому випадку встановлюються такі ж залежності, як і на попередніх рисунках. Однак варто відзначити, що при збільшенні  $D_\sigma$  (крива 3) розподіл напружень за товщиною знаходиться поруч з прямою лінією, що відповідає початковим умовам. Тобто із збільшенням коефіцієнта  $D_\sigma$  мастило набуває ньютонівських властивостей, оскільки реалізується залежність  $V(y)$ , що наближається зі зростанням  $D_\sigma$  до вигляду (1.2). На рис. 1.4 добре видно, що при зменшенні коефіцієнта  $D_\sigma$  в'язкість стає неньютонівською і верхній шар мастила твердне, оскільки зі збільшенням  $D_\sigma$  зростає товщина поверхневого шару, який рухається зі швидкістю, рівною швидкості верхній поверхні  $V_0$ . Таким чином, варіація  $D_\sigma$  дозволяє враховувати тип мастила, змінюючи її в'язкісні характеристики.

## 2 МЕЖОВЕ ПЛАВЛЕННЯ МАСТИЛА МІЖ ДВОМА ШОРСТКИМИ ПОВЕРХНЯМИ

### 2.1 Вільна енергія та фазова діаграма

У одновимірному випадку вираз для щільності вільної енергії мастильного шару між двома твердими поверхнями може бути представлено у вигляді [16, 18, 45, 49]:

$$f = \alpha(T - T_c)\varphi^2 + \frac{a}{2}\varphi^2\varepsilon_{el}^2 - \frac{b}{3}\varphi^3 + \frac{c}{4}\varphi^4, \quad (2.1)$$

де  $T$  – температура мастила,  $T_c$  – критична температура,  $\varepsilon_{el}$  – зсувна компонента пружної деформації,  $\alpha, a, b, c$  – додатні постійні. Параметр порядку  $\varphi$  представляє амплітуду періодичної частини мікроскопічної функції щільності середовища [16, 18]. Таким чином, рідиноподібна фаза мастила характеризується стаціонарним значенням  $\varphi_0 = 0$ , тоді як у твердоподібній фазі встановлюється нульове значення  $\varphi_0 > 0$ . Розкладання (2.1), на відміну від робіт [16, 18], відповідає моделі фазового переходу першого роду [30, 45, 49, 58].

Оскільки параметр  $\varphi$  є модуляцією щільності, далі будемо розглядати діапазон  $\varphi \geq 0$ . Аналізуючи вираз (2.1), можна виділити критичні температури плавлення  $T_{c0}$  і затвердіння  $T_c^0$  мастила, причому  $T_{c0} > T_c^0$  на постійну величину, що залежить тільки від констант розкладання [45, 49]:

$$T_{c0} = T_c - \frac{a}{2\alpha}\varepsilon_{el}^2 + \frac{b^2}{8\alpha c}, \quad (2.2)$$

$$T_c^0 = T_c - \frac{a}{2\alpha}\varepsilon_{el}^2. \quad (2.3)$$

У діапазоні температур  $T_c^0 < T < T_{c0}$  на залежності  $\varphi_0(T, \varepsilon_{el})$  реалізується область гістерезису, характерна для фазових переходів першого роду [45, 49]. Відзначимо, що при плавленні параметр порядку стрибкоподіб-

но змінюється від стаціонарного значення  $\varphi_0 = 0.5bc^{-1}$  до нуля, у той час як при затвердінні стаціонарне значення  $\varphi$  зростає від нуля до величини  $\varphi_0 = bc^{-1}$  [45, 49].

При терті поверхонь у мастильному шарі з'являються пружні напруження  $\sigma_{el}$ , які визнаються як похідна від вільної енергії  $f$  (2.1) за деформацією  $\varepsilon_{el}$ :

$$\sigma_{el} = \mu\varepsilon_{el}, \quad (2.4)$$

$$\mu = a\varphi^2, \quad (2.5)$$

де модуль зсуву мастила  $\mu$  підноситься до квадрату параметра порядку з точністю до постійного множника  $a$  [16, 18, 45, 49]. Сила тертя, яка чинить опір руху поверхонь, визначається згідно до формули [20, 45, 49, 59]:

$$F = \left[ \sigma_{el} + k \operatorname{sgn}(V) \left( \frac{|V|}{h} \right)^{\gamma+1} \right] A, \quad (2.6)$$

де  $A$  – площа контакту поверхонь тертя,  $h$  – товщина мастильного шару, а феноменологічні параметри  $k, \gamma$  задають тип мастильного матеріалу [32, 48]. Зокрема, значення  $\gamma < 0$  відповідає неньютонівському псевдопластичному мастилу. Другий доданок у дужках у виразі (2.6) являє в'язкі напруження, що існують тільки при русі поверхонь з відносною швидкістю  $V \neq 0$ . У формулі (2.6) сила тертя пропорційна площі контакту  $A$  і не залежить від навантаження на поверхні. Це пов'язано з тим, що розглядаються специфічні умови тертя двох нанорозмірних поверхонь, розділених шаром простого неполярного мастила. Причому між поверхнями при русі підтримується фіксована відстань. У цьому випадку площа реального контакту через мастило близька до площі поверхонь незалежно від прикладеного тиску, що дозволяє використовувати формулу (2.6). При цьому таке поняття, як коефіцієнт тертя, втрачає сенс [60].

У роботах [20, 45, 46, 49] показано, що під час руху поверхонь тертя з відносною швидкістю  $V$  у мастильному шарі виникають стаціонарні пружні

деформації

$$\varepsilon_{el}^0 = \frac{V\tau_\varepsilon}{h}, \quad (2.7)$$

де  $\tau_\varepsilon$  — максвелівський час релаксації внутрішніх напружень [18]. При значенні  $\tau_\varepsilon \ll 1$  вираз (2.7) з достатньою точністю може бути використаний для визначення поточного значення деформації  $\varepsilon_{el}$ . З урахуванням (2.7) із виразів для критичних температур (2.2) і (2.3) легко отримати аналогічні вирази для визначення критичних швидкостей [45, 49]:

$$V_{c0} = \frac{h}{\tau_\varepsilon} \sqrt{\frac{2\alpha(T_c - T)}{a} + \frac{b^2}{4ac}}, \quad (2.8)$$

$$V_c^0 = \frac{h}{\tau_\varepsilon} \sqrt{\frac{2\alpha(T_c - T)}{a}}. \quad (2.9)$$

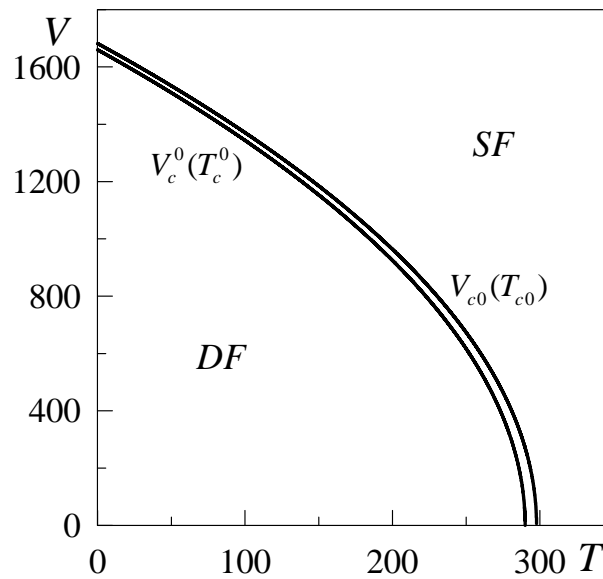


Рисунок 2.1 — Фазова діаграма з областями рідиноподібного ( $SF$ ) та твердоподібного ( $DF$ ) мастила при параметрах  $\alpha = 0.95$  Дж·К<sup>-1</sup>/м<sup>3</sup>,  $T_c = 290$  К,  $a = 2 \cdot 10^{12}$  Па,  $b = 230$  Дж/м<sup>3</sup>,  $c = 900$  Дж/м<sup>3</sup>,  $h = 10^{-9}$  м,  $\tau_\varepsilon = 10^{-8}$  с.

На рис. 2.1 показана фазова діаграма станів мастила. Вона представляє залежність швидкостей  $V_{c0}$  і  $V_c^0$  від температури  $T$ . Вище кривої  $V_{c0}$  мастило рідиноподібне (потенціал  $f(\varphi)$  має єдиний мінімум при  $\varphi = 0$ ) і реалізується режим рідинного тертя  $SF$ . У області  $V < V_c^0$  мастило має твердоподібну структуру, що відповідає єдиному мінімуму потенціалу при  $\varphi > 0$ . Між кривими на



рисунку потенціал  $f(\varphi)$  у додатній області  $\varphi$  володіє нульовим та ненульовим мінімумами, які розділені максимумом. Таким чином, у цій проміжній області стан мастильного матеріалу залежить від початкових умов. Рисунок 2.1 можна також інтерпретувати як залежності критичних температур  $T_{c0}$  (2.2) і  $T_c^0$  (2.3) від швидкості зсуву  $V$ .

## 2.2 Кінетика плавлення мастила

На рис. 2.2 представлена схема типової трибологічної системи [11, 18, 31], поведінка якої в рамках запропонованої моделі досліджувалася нами раніше [49]. Основна відмінність представлених досліджень полягає у тому, що раніше вивчалась поведінка атомарно-гладких поверхонь тертя у той час як дана робота спрямована на вивчення процесів межового тертя поверхонь, що мають рельєф. Система, приведена на рис. 2.2, складається з пружини з жорсткістю  $K$ , верхнього блоку масою  $M$ , що ковзає по нижній поверхні, відокремленої від нього шаром мастила товщиною  $h$ , яка далі у кожній точці поверхонь має своє конкретне значення, котре змінюється під час руху. Вільний кінець пружини приводиться в рух з фіксованою швидкістю  $V_0$ . При ковзанні блоку по поверхні між ними виникає сила тертя  $F$ , яка визначається згідно з формулою (2.6).

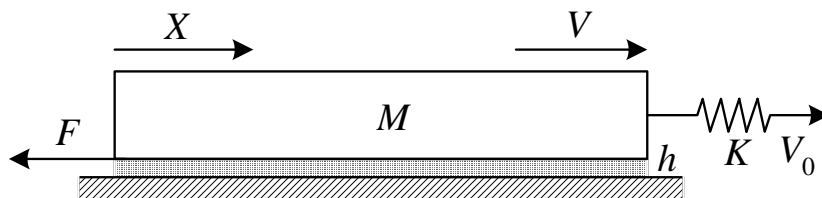


Рисунок 2.2 — Схема трибологічної системи.

Запишемо рівняння руху верхнього блоку з координатою  $X$  у

вигляді [11, 18, 49]:

$$M\ddot{X} = K(V_0t - X) - F, \quad (2.10)$$

де вираз у дужках представляє розтягнення пружини  $\Delta X$ , а  $t$  — час руху її вільного кінця. Додатково до (2.10) необхідно записати кінетичне рівняння типу Ландау-Халатнікова [49, 61]:

$$\dot{\varphi} = -\delta \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (2.11)$$

яке в явному вигляді набуває форми

$$\dot{\varphi} = -\delta (2\alpha (T - T_c) \varphi + a\varphi\varepsilon_{el}^2 - b\varphi^2 + c\varphi^3) + \xi(t). \quad (2.12)$$

У (2.12) введено кінетичний коефіцієнт  $\delta$ , а також додатковий стохастичний доданок  $\xi(t)$ , який представляє малі адитивні флуктуації, які необхідно врахувати із-за особливостей подальшого чисельного розрахунку [45, 49]. У найпростішому випадку процес  $\xi(t)$  представляється білим шумом з моментами

$$\langle \xi(t) \rangle = 0; \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t - t'), \quad (2.13)$$

де інтенсивність стохастичного джерела  $D$  скрізь приймається рівною  $10^{-25} \text{ c}^{-1}$ .

На рис. 2.3 показаний зовнішній вигляд поверхонь тертя, які згенеровані за допомогою використання відомого пагорбного алгоритму (Hill Algorithm). Зазначений алгоритм являється ітераційним і полягає у наступному. Спершу створюється двовимірний масив розміром  $N \times N$  і заповнюється нульовими значеннями. Значення елемента масиву — це висота  $z$  точки поверхні, індекси елемента — цілочислові координати точки  $(x, y)$ . Таким чином, маємо площину. Потім випадковим чином вибираються координати  $(x_r, y_r)$ , причому вони можуть вибиратися і за межами масиву (поверхні). На цьому ж етапі генерується

ще одна випадкова величина – радіус пагорба  $r$ . Діапазон випадкових величин  $r$  істотно впливає на остаточний вигляд поверхні. Далі для всіх елементів масиву (точок поверхні)  $(x, y)$  розраховується значення висот  $z$  згідно до формули

$$z = r^2 - (x - x_r)^2 - (y - y_r)^2. \quad (2.14)$$

У разі  $z(x, y) > 0$  висота  $z$  додається до значення відповідного елемента масиву. Далі знову генерується випадкова точка  $(x_r, y_r)$ , випадковий радіус  $r$ , і описані дії повторюються. Нехай процедура повторюється  $n$  разів. Зазначимо, що величина  $n$  істотно впливає на характер отриманої поверхні. Після закінчення описаної процедури проводиться масштабування висот поверхні  $z$  від 0 до 1, і отримана поверхня “спускається” до нульового рівня. Це легко здійснити, якщо всі висоти  $z(x, y)$  перерахувати згідно до співвідношення

$$z = \frac{z - z_{min}}{z_{max} - z_{min}}, \quad (2.15)$$

де  $z_{min}$ ,  $z_{max}$  – мінімальне та максимальне значення  $z$  у масиві до масштабування. На рис. 2.3 показані отримані таким чином поверхні. Верхня поверхня (ліворуч) у площині  $xy$  має  $200 \times 200$  точок, нижня (праворуч) –  $400 \times 200$ . Випадкова величина радіуса  $r$  для обох поверхонь вибиралася у діапазоні від 0 до 50. Кількість ітерацій для верхньої поверхні  $n = 1000$ , для нижньої  $n = 2000$ , оскільки її площа є у два рази більшою. Координати  $x_r, y_r$  при генеруванні обох поверхонь вибиралися згідно визначеного діапазону масиву, тобто для верхньої поверхні обидві координати вибиралися у межах від 0 до 199, а для нижньої –  $y \in [0, 199]$ ,  $x \in [0, 399]$ . Після формування таким чином поверхонь кожне значення  $z$  було піднесене до квадрату, що дозволило “притиснути” краї поверхонь до низу, а виступи зробити більш високими, у порівнянні з загальною картиною.

Після того, як поверхні отримані, їх необхідно підготувати для постав-

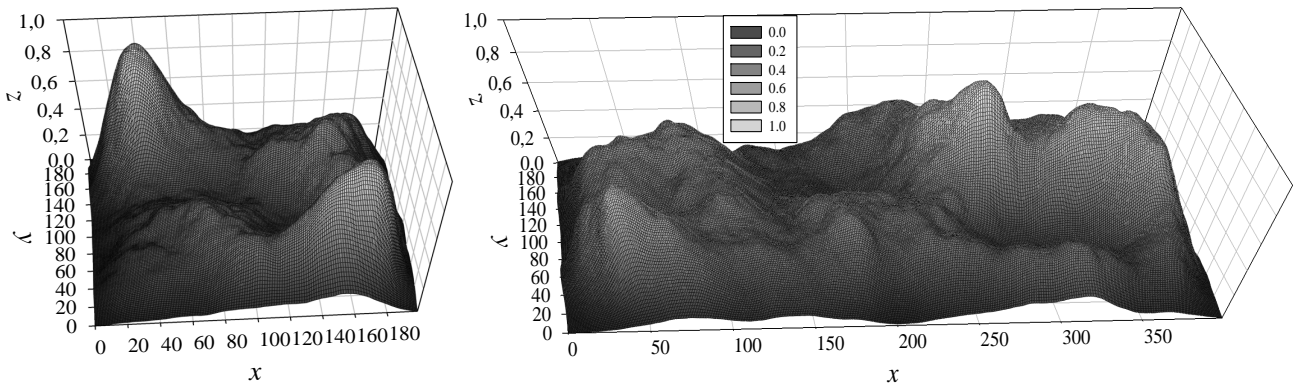


Рисунок 2.3 – Зовнішній вигляд верхньої (ліворуч) та нижньої (праворуч) поверхонь тертя, отриманих за допомогою застосування пагорбного алгоритму (Hill Algorithm).

леної задачі. Оскільки верхня поверхня буде ковзати по нижній, всі її точки слід дзеркально відобразити щодо площини  $xy$  вниз, тобто всі елементи масиву верхньої поверхні перераховуються згідно з співвідношенням  $z = 1 - z$ . Далі, щоб уникнути перетину площин (значення висот верхньої і нижньої поверхонь знаходяться в діапазоні від 0 до 1), при кожній фіксованій координаті  $y$  для верхньої поверхні знаходиться мінімальне значення висоти  $z_{min}$ , а для нижньої – максимальне  $z_{max}$  і визначається величина  $\Delta z = z_{min} - z_{max}$ . Таким чином, отримуємо 200 значень  $\Delta z$  для всіх наявних осей  $y$ . З цих значень вибирається мінімальне  $\Delta z_{min}$ , і верхня поверхня згідно до заміни її елементів  $z = z - \Delta z_{min}$  приводиться у дотикання з нижньою під час руху. Тепер поверхні при переміщенні не будуть перекриватися, проте в деяких точках (принаймні в одній) дотикаються. Далі кожен елемент обох масивів поверхонь домножується на величину  $l = 10^{-9}$  м, після чого верхня поверхня “піднімається” на 0.5 нм згідно до заміни  $z = z + 0.5 \cdot 10^{-9}$  м. Виберемо лінійний розмір сторін верхньої квадратної поверхні  $L = 1.2 \cdot 10^{-5}$  м, тоді її площа становить  $A = L^2 = 0.144 \cdot 10^{-9}$  м<sup>2</sup>, а відстань між точками по осях  $x$  і  $y$  на обох поверхнях буде дорівнювати

$$S_{x,y} = \frac{L}{200} = 6 \cdot 10^{-8} \text{ м.} \quad (2.16)$$

У результаті маємо дві нанорозмірні поверхні необхідних розмірів з однакови-

ми властивостями.

На рис. 2.4 показано масштабування поверхні у вигляді карти висот, де координати  $x$  і  $y$  є не номерами точок, як на рис. 2.3, а просторові координати у мікрометрах, де за початок відліку взято лівий нижній кут. На малюнку на легенді відтінками сірого виділені значення висот поверхонь у нанометрах. Оскільки при підготовці верхньої поверхні вона була інвертована, виступи на ній тепер відповідають меншим значенням  $z$ . Тому для того, щоб на рис. 2.4 на обох поверхнях виступам відповідали світлі ділянки, значення висот на лівій поверхні збільшуються від світлого до темного, а на правій — навпаки.

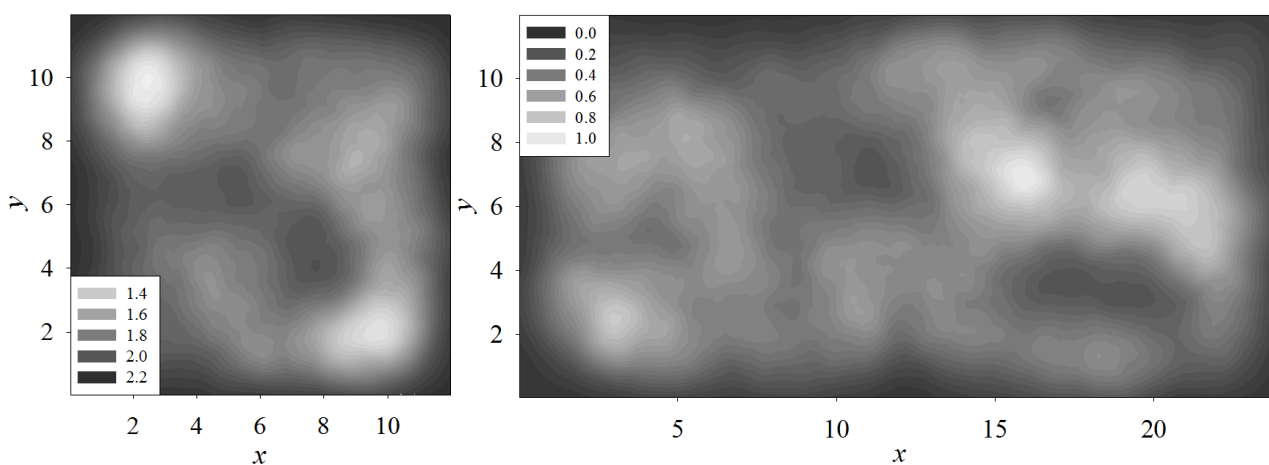


Рисунок 2.4 — Карта висот верхньої (ліворуч) та нижньої (праворуч) поверхонь тертя після масштабування. Координати  $x$  і  $y$  приведені у мкм, висоти на легендах — у нм.

Розглянемо кінетику системи, показаної на рис. 2.2, де в ролі верхньої та нижньої поверхонь тертя виступають поверхні, що показані на рис. 2.4. Для цього необхідно чисельно розв'язувати систему диференціальних рівнянь (2.10), (2.12) з урахуванням визначень (2.4), (2.5), (2.6), (2.7), (2.13). Оскільки область контакту містить  $200 \times 200 = 40000$  доменів, на кожному кроці чисельного інтегрування для всіх доменів окремо визначаються величини  $h[i][j]$ ,  $\varepsilon_{el}[i][j]$ ,  $\varphi[i][j]$ ,  $\sigma_{el}[i][j]$ ,  $F[i][j]$ , де  $i$  — цілочисловий індекс точки поверхні по осі  $X$ , а  $j$  — індекс, що відповідає осі  $Y$  (обидва індекси змінюються від 0 до 199). При цьому вважаємо, що температура мастила  $T$  постійна для всіх доменів, що відповідає випадку ультратонкого мастила, коли надлишкове тепло, що виникає

під час руху у зоні контакту, швидко передається поверхням тертя (термостату або навколишньому середовищу). Зазначимо, що у процесі руху верхньої поверхні величини  $h[i][j]$  будуть змінюватися, оскільки ці висоти являють собою відстань між відповідними точками верхньої та нижньої поверхонь, що труть-ся. Для врахування цього факту вводиться цілочислова змінна

$$s = \text{integer} \left( \frac{X}{S_{x,y}} \right), \quad (2.17)$$

яка описує зсув верхньої поверхні відносно нижньої. Тут  $X$  – координата верхнього поверхні, що треться, на початку руху при  $t = 0$  дорівнює нулю, а  $S_{x,y}$  (2.16) – відстань між точками поверхні по осі  $X$ . Тоді  $h[i][j]$  легко визначити як

$$h[i][j] = \text{top}[i][j] - \text{bottom}[i + s][j], \quad (2.18)$$

де  $\text{top}[200][200]$  – масив, що містить шкалу висот верхньої поверхні,  $\text{bottom}[400][200]$  – масив висот нижньої. З виразу (2.18) видно, що зсув верхньої поверхні проводиться у напрямку осі  $X$ , тому як координати  $Y$  (індекс  $j$ ) для обох поверхонь у процесі руху не змінюються. При чисельному розв'язку рівняння руху (2.10) будемо на кожному часовому кроці для всіх доменів окремо чисельно розв'язувати диференційне рівняння (2.12), визначаючи поточні значення величин параметра порядку  $\varphi[i][j]$ , які залежать від попередніх значень масиву  $\varphi[i][j]$ . На початку руху ( $t = 0$ ) всім елементам масиву  $\varphi[i][j]$  присвоюється значення  $\varphi_0 = 0.5$ , тобто спочатку мастило однорідне у просторі і знаходиться у твердоподібному стані. Далі, знаючи значення параметра порядку для всіх доменів, внесок у силу тертя від кожного з них розраховується за модифікованою формулою (2.6):

$$F[i][j] = \left[ \sigma_{el}[i][j] + k \operatorname{sgn}(V) \left( \frac{|V|}{h[i][j]} \right)^{\gamma+1} \right] \frac{L^2}{N^2}, \quad (2.19)$$

де  $A = L^2 = 0.144 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2$  – раніше введена площа області контакту,  $N^2$  – загальна кількість доменів. Після розрахунку значень (2.19) діюча сила тертя визначається як сума всіх елементів масиву (всього  $N^2 = 40000$ ) і це значення використовується для розв’язання кінетичного рівняння (2.10). При цьому розраховуються нові значення  $X$ ,  $V$ ,  $\Delta X$ , і процедура повторюється знову. У рівнянні (2.19) швидкість  $V$  не має індексів, оскільки верхня поверхня є абсолютно жорсткою і рухається як єдине ціле.

Для чисельного інтегрування описаних рівнянь використовується ітераційний метод Ейлера [45, 49] з кроком по часу  $\Delta t = 10^{-7}$  с. Ітераційна процедура продовжується до тих пір, доки значення цілочислової змінної зсуву  $s$  (2.17) не стане рівним 200, тобто поки верхня поверхня не дійде до кінця нижньої. При вибраних параметрах для цього потрібно більше ніж  $9 \cdot 10^7$  ітерацій, на кожній ітерації необхідно розраховувати  $N^2 = 40000$  значень масивів  $h[i][j]$ ,  $\varepsilon_{el}[i][j]$ ,  $\varphi[i][j]$ ,  $\sigma_{el}[i][j]$ , і в підсумку  $F[i][j]$ , що суттєво сповільнює чисельний розрахунок, роблячи його нездійсненним на сучасному персональному комп’ютері. Однак, оскільки у рамках запропонованого підходу домени не взаємодіють один з одним, значення масивів на кожному кроці також розраховуються незалежно. Це дозволяє для обчислень значень застосувати розроблену компанією NVIDIA у 2007 році паралельну архітектуру CUDA [62], яка використовується для виконання неграфічних обчислень на універсальних графічних процесорах (GPU) відеокарт компанії NVIDIA. Оскільки рівняння руху (2.10) після обчислення значення повної сили тертя  $F$  як суми елементів (2.19) розраховується на центральному процесорі (CPU), його частота також істотно впливає на час чисельного розрахунку. Нами використовувалася система на основі центрального процесора Intel Core 2 Quad Q9400, що працює на частоті 2.66 GHz і відеокарта Palit GeForce GTX 570 Sonic 1280MB, яка має 480 універсальних процесорів, кожен з яких працює на частоті 1.4 GHz. При цьому час виконання програми (розрахунку залежностей, наведених на

рис. 2.5) склав 5 годин 32 хвилини.

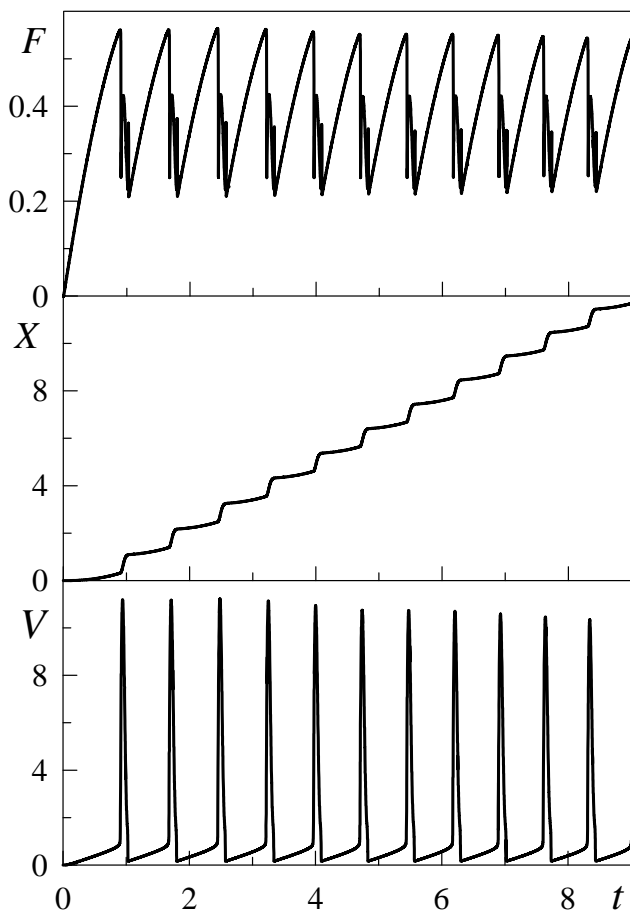


Рисунок 2.5 – Залежності сили тертя  $F$  (мН), координати верхнього блоку  $X$  (мкм) і його швидкості  $V$  (мкм/с) від часу  $t$  (с) при параметрах рис. 2.1 і  $k = 1.5 \cdot 10^5$  Па·с<sup>1/3</sup>,  $\gamma = -2/3$ ,  $\delta = 100$  Дж<sup>-1</sup>·м<sup>3</sup>/с,  $K = 600$  Н/м,  $M = 0.5$  кг,  $T = 200$  К,  $V_0 = 1400$  нм/с.

Отримані у результаті розв'язку зазначених рівнянь залежності показані на рис. 2.5. При вибраній температурі  $T$  у стані спокою ( $\varepsilon_{el} = 0$ ) мастило твердоподібне. У момент часу  $t = 0$  вільний кінець пружини починає рівномірний рух зі швидкістю  $V_0 = 1.4$  мкм/с. На початковому етапі змінна  $s$ , що описує зрушення, приймає нульове значення, тому зі зростанням швидкості  $V$  для всіх доменів зростають компоненти сили тертя (2.19). За рахунок зростання швидкості також збільшуються значення пружних деформацій  $\varepsilon_{el}[i][j]$ , що приводить до зростання пружних компонент напруження  $\sigma_{el}[i][j]$ . Оскільки спочатку швидкість  $V$  істотно менше значення  $V_0$ , пружина розтягується, і розтягнення  $\Delta X$  збільшується. З плином часу збільшується координата  $X$ , встановлюєть-



ся ненульове значення  $s$  (2.17), і відбувається перерахунок  $h[i][j]$ . Це приводить до порушення періодичності, що особливо видно на залежності  $V(t)$ . Для кожного домену виконання умови плавлення  $V > V_{c0}$  буде відбуватися у різні моменти часу, оскільки критична швидкість  $V_{c0}$  (2.8) пропорційна відстані між “площинами” поверхонь  $h[i][j]$ , яку обмежують відповідні домени. Тому у кожен момент часу мастило в одних місцях поверхні твердоподібне, а в інших рідиноподібне. Однак, як видно з рисунку, існують моменти часу, коли швидкість руху  $V$  багатократно збільшується. Ця ситуація відповідає повному плавленню мастильного матеріалу, оскільки при багаторазовому збільшенні  $V$  для всіх доменів виконується умова  $V > V_{c0}$ . При плавленні напруження  $\sigma_{el}[i][j]$  приймають нульові значення, за рахунок чого і зростає швидкість проковзування верхнього блоку  $V$ , оскільки пружні складові сил тертя  $F[i][j]$  стають рівними нулю. При цьому блок швидко переміщується на велику відстань, про що свідчить збільшення кута нахилу залежності  $X(t)$  до осі абсцис після плавлення. Оскільки тепер блок рухається зі швидкістю  $V$ , яка істотно перевищує швидкість руху вільного кінця пружини  $V_0$ , пружина стискається, зменшується розтягнення  $\Delta X$ , а разом з ним і пружна сила  $K\Delta X$ , що приводить до руху. Умова  $V < V_c^0$  знову ж для всіх доменів відбувається у різний час, тому при затвердінні формується неоднорідна доменна структура. Варто відзначити, що хоча представлені на рис. 2.5 залежності не є строго періодичними, вони близькі до періодичного вигляду, що також підтверджують дослідження поведінки взаємодіючих шорстких поверхонь при їх взаємному переміщенні з урахуванням пружності [63]. Зазначимо, що переривчастий режим руху *stick – slip*, що показаний на рис. 2.5, спостерігався Боуденом і Тейбором більше 50 років тому [64] при проведенні експериментів для визначення впливу молекулярної ваги полімерів на коефіцієнт тертя.

Розглянемо більш докладно перехід між кінетичним режимом ковзання і сухим тертям. На рис. 2.6 наведено залежності сили тертя  $F$  і швидкості ко-

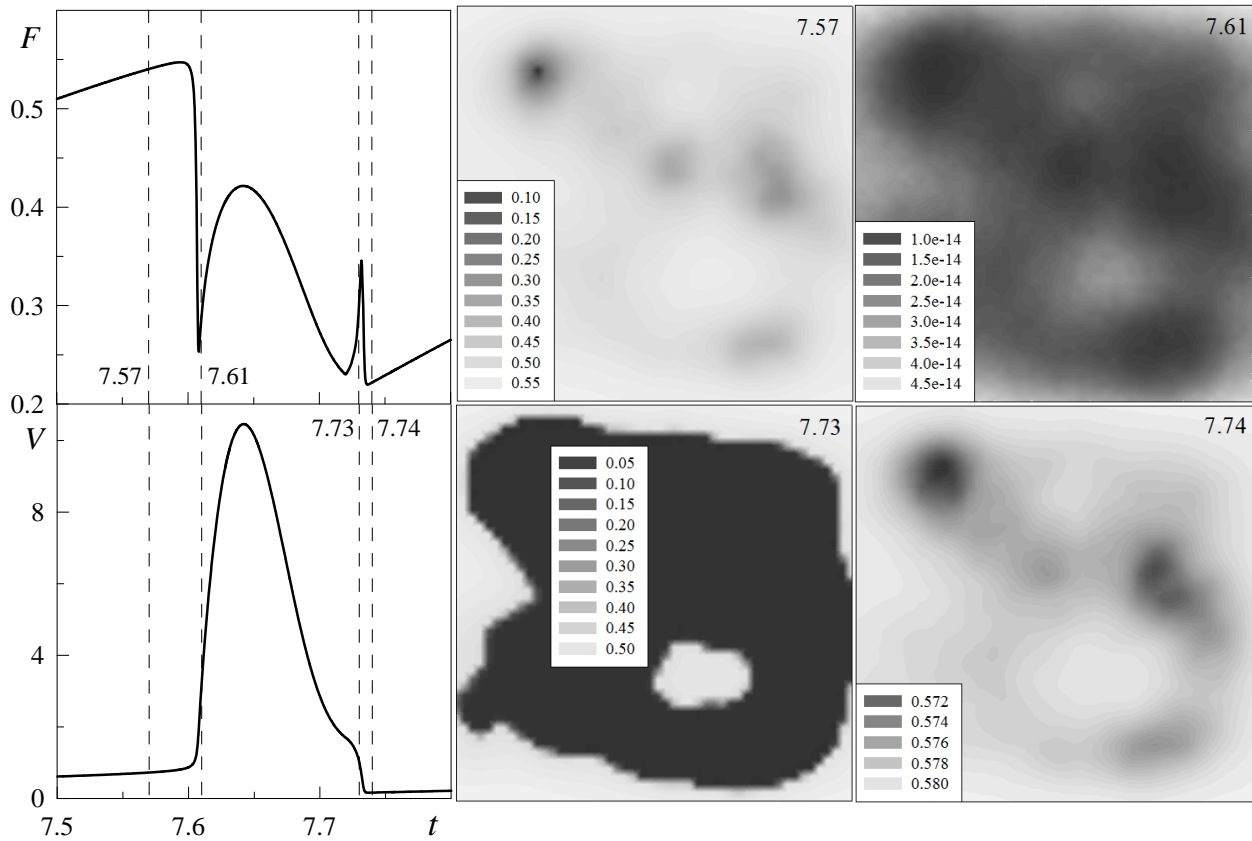


Рисунок 2.6 – Залежності  $F(t)$  і  $V(t)$ , наведені на рис. 2.5 на відрізку часу  $t \in [7.5, 7.8]$  (с) і розподіл значень параметра порядку  $\varphi(x, y)$  по площі контакту поверхностей для чотирьох обраних моментів часу  $t = 7.57, 7.61, 7.73, 7.74$  (с).

взання  $V$  від часу, показані на рис. 2.5, однак для обмеженого проміжку часу. На рисунку обрані чотири моменти часу, для яких наведені розподіли значень параметра порядку  $\varphi$  по площі ковзання. Координати  $x$  і  $y$  на цих рисунках відповідають значенням, які представлені на рис. 2.4 для верхньої поверхні, що треться. Координати  $X$  точок поверхонь верхнього блоку тертя можуть бути розраховані як

$$X = x + sS_{x,y}, \quad (2.20)$$

де змінна зсуву  $s$  (2.17) для 4-х збільшуваних на рис. 2.6 моментів часу приймають значення 161, 162, 174, 174. Проаналізуємо отримані дані. Як видно на залежності  $F(t)$ , у момент часу  $t = 7.57$  с в системі реалізується режим сухого тертя, що характеризується високим значенням сили тертя і малою величиною швидкості зсуву  $V$ . На відповідному просторовому розподілі  $\varphi(x, y)$

видно, що параметр порядку практично скрізь приймає значення  $\varphi > 0$ , однак присутні темні ділянки, де мастило близьке до рідиноподібного стану. Оскільки кількість доменів з твердоподібним мастилом значно перевищує кількість доменів з рідиноподібною структурою, встановлюється режим сухого тертя. Момент часу  $t = 7.61$  с відповідає режиму ковзання, оскільки сила тертя  $F$  різко зменшується, а швидкість зсуву  $V$  зростає. Якщо подивитися на відповідну залежність  $\varphi(x, y)$ , то видно, що по всій площині контакту реалізуються значення  $\varphi \sim 10^{-14}$ , що відповідає рівню обраної інтенсивності білого шуму  $D$  (2.13). Таким чином, всі домени перебувають у розплавленому стані. У наступний розглянутий момент часу  $t = 7.73$  с відбувається збільшення сили тертя  $F$ , а також зниження швидкості  $V$  (на залежності  $V(t)$  при зростанні  $F$  в околі обраного часу спостерігається перегин). Таким чином, система переходить у режим сухого тертя. Однак, як видно з відповідного рисунка  $\varphi(x, y)$ , не всі домени при цьому мають твердоподібну структуру. Рідиноподібну структуру у даний момент часу має більша кількість доменів (темні ділянки залежності). І після повного затвердіння ( $t = 7.74$  с) всі домени характеризуються значенням  $\varphi > 0$ , однак на відповідній залежності  $\varphi(x, y)$  є більш темні ділянки, для яких модуль зсуву приймає найменше значення. Зазначимо, що залежності  $\varphi(x, y)$  для останніх двох моментів часу характеризуються однаковими величинами  $s = 174$ . Таким чином, їх принципова відмінність викликана не зміною набору значень  $h[i][j]$ , а релаксаційними процесами у мастильному матеріалі. Якщо ж параметр  $s$  при русі довгий час залишається постійним, то картина  $\varphi(x, y)$  повністю визначається набором  $h[i][j]$  при інших фіксованих параметрах. Це відбувається за рахунок того, що при обраному значенні кінетичного коефіцієнта  $\delta$  відбувається швидка релаксація параметра порядку  $\varphi$  до сталого значення, що визначається величиною  $h$ . Однак, у нанотрибологічних системах, у порівнянні з об'ємними мастилами, часи релаксації можуть відрізнятися на порядки величин в залежності від створених умов, тому варі-

юванням значення  $\delta$  при необхідності можна домогтися якісного опису різних ефектів, що спостерігаються експериментально, таких, наприклад, як ефекти пам'яті, коли час релаксації напружень багатократно перевищує час спостереження процесів під час експерименту [11]. Зазначимо, що залежність сили тертя від часу, що представлена на рис. 2.6, має особливості (два максимуми після плавлення), які докладно описані раніше у роботі [49].

## З ВПЛИВ АДИТИВНИХ ШУМІВ НА САМОПОДІБНУ ПОВЕДІНКУ ЗСУВНОГО ПЛАВЛЕННЯ

### 3.1 Постановка моделі та рівняння Фоккера-Планка

Загальний вираз для густини вільної енергії системи, що зазнає зсувне плавлення, в однорідному випадку може бути записано у вигляді [37]

$$F(\rho, \theta) = \frac{a_1 \rho^2}{2} - \frac{b_1 \rho^3}{3} + \frac{c_1 \rho^4}{4} + \frac{\alpha \rho^2}{2} \left( \frac{a_2 \theta^2}{2} - \frac{b_2 \theta^3}{3} + \frac{c_2 \theta^4}{4} \right), \quad (3.1)$$

де параметр порядку  $\rho$  має значення інтенсивності брегівських рефлексів. Параметр  $\theta$  описує відхилення, що виникають під час руху частинок, тобто фактично являє деформацію шарів. Для твердоподібного стану при малих або нульових відхиленнях  $\theta = 0$ . Також у твердоподібній фазі, коли ми маємо упорядкування,  $\rho > 0$ . Коли ж система зазнає плавлення зміщенням, навпаки, встановлюється стаціонарне значення  $\rho = 0$ . Відзначимо, що у роботі [37] енергія (3.1) записана, ґрунтуючись на результатах моделювання броунівської динаміки багаточастинкової моделі. Аналізуючи отримані результати, автори [37] обирають параметри у потенціалі (3.1):  $a_1 = 0.85$ ,  $b_1 = 5.8$ ,  $c_1 = 8.0$ ,  $a_2 = 1.3644$ ,  $b_2 = 8.7105$ ,  $c_2 = 13.674$ . Надалі ми також будемо використовувати ці значення. Зазначимо, що параметр зв'язку  $\alpha$  не є константою, і його вплив на поведінку системи також досліджується у роботі [37].

Використовуючи енергію (3.1), запишемо систему еволюційних рівнянь типу Ландау-Халатнікова [37]:

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{\gamma_\rho} \frac{\partial F(\rho, \theta)}{\partial \rho} + \xi_\rho(t), \quad (3.2)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{\gamma_\theta} \frac{\partial F(\rho, \theta)}{\partial \theta} + \Omega + \xi_\theta(t), \quad (3.3)$$

де білий шум  $\xi_q(t)$  має моменти

$$\langle \xi_q(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_q(t) \xi_q(t + \tau) \rangle = 2D_q \delta(\tau), \quad (3.4)$$

де  $q = \rho, \theta$  і введені інтенсивності шуму  $D_q$ , причому шуми  $\xi_\rho(t)$  і  $\xi_\theta(t)$  не корелюють між собою.

У рівнянні (3.3) введено параметр  $\Omega$ , який задає ефект відносного руху поверхонь. Основна ідея введення цього параметра у тому [37], що при відсутності сил і шумів останнє рівняння перетворюється у співвідношення  $\dot{\theta} = \Omega$ . Це нагадує використовуваний нами раніше при описі зсувного плавлення в ультратонких мастильних шарах вираз  $\dot{\varepsilon} = V/h$  (співвідношення (2.7) у розділі 2), де  $\varepsilon$  – повна деформація у шарі,  $V$  – відносна швидкість зсуву поверхонь,  $h$  – товщина шару мастила. Таким чином, параметр  $\Omega$  задає швидкість руху взаємодіючих шарів.

Відзначимо, що у випадку  $\Omega = 0$  система описується вільної енергією (3.1). Ситуація  $\Omega \neq 0$ , згідно до структури рівнянь (3.2) та (3.3), відповідає енергії

$$F'(\rho, \theta) = F(\rho, \theta) - \theta \Omega \gamma_\theta, \quad (3.5)$$

що відрізняється від початкового виразу наявністю останнього доданку. Таким чином, рух у системі змінює стаціонарні стани [37]. Далі будемо використовувати узагальнений вираз (3.5).

На рис. 3.1 показана тривимірна залежність  $F'(\rho, \theta)$ . У від'ємній області параметрів  $\rho$  і  $\theta$  потенціал (3.5) зростає, а величина швидкості  $\Omega$  визначає нахил прямої  $F'(\theta)$  при  $\rho = 0$ . Відповідно до вигляду потенціалу, наведеного на рис. 3.1, за відсутності шуму при стаціонарному значенні  $\rho = 0$  параметр  $\theta$  буде монотонно збільшуватися з часом. Однак при наявності шуму цього не відбувається, а реалізуються постійні переходи між двома (або більше) точками, що притягуються. Одній із цих точок відповідає мінімум при  $\rho \neq 0$ , що

показаний на рис. 3.1. У роботі [37] чисельно досліджено вплив інтенсивності шуму, а також параметрів  $\alpha$  і  $\Omega$  на поведінку системи. Запишемо аналітичні вирази, що дозволяють проводити такий аналіз.

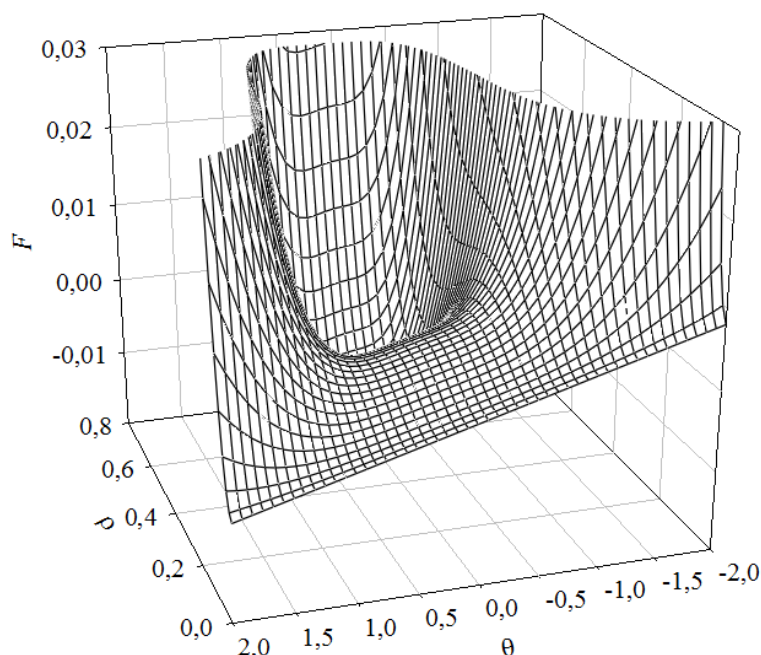


Рисунок 3.1 – Вільна енергія  $F'(\rho, \theta)$  (3.5) при параметрах  $\alpha = 0.17$ ,  $\Omega = 0.08$ ,  $\gamma_\theta = 0.05$ .

Для загального розгляду наведемо рівняння Фоккера-Планка (РФП). Системі рівнянь (3.2) і (3.3) може бути поставлено у відповідність двовимірне рівняння виду [65, 66]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\rho, \theta)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\gamma_\rho} \frac{\partial F'(\rho, \theta)}{\partial \rho} P(\rho, \theta) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{\gamma_\theta} \frac{\partial F'(\rho, \theta)}{\partial \theta} P(\rho, \theta) \right] + \\ &+ D_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} P(\rho, \theta) + D_\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(\rho, \theta). \end{aligned} \quad (3.6)$$

У роботі [37] чисельно розглядається випадок, коли часи релаксації  $\gamma_\rho = \gamma_\theta = \gamma$  та інтенсивності шумів  $D_\rho = D_\theta = D$  є тотожними величинами. У цьому випадку рівняння (3.6) може бути переписано у спрощеному вигляді:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial P(\rho, \theta)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{\partial F'(\rho, \theta)}{\partial \rho} P(\rho, \theta) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial F'(\rho, \theta)}{\partial \theta} P(\rho, \theta) \right] + \\ &+ \gamma D \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} P(\rho, \theta) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(\rho, \theta) \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Тепер обидва коефіцієнти дрейфу в точності представляють похідні від потенціалу (3.5). У стаціонарному випадку  $\partial P(\rho, \theta)/\partial t = 0$  розв'язок рівняння (3.7) добре відомий і дає щільність імовірності виду [65, 66]:

$$P(\rho, \theta) = C \exp \left\{ -\frac{F'(\rho, \theta)}{\gamma D} \right\}, \quad (3.8)$$

де  $C$  – нормуюча постійна, а  $F'(\rho, \theta)$ , як і раніше, визначається виразом (3.5). Нагадаємо, що коефіцієнт  $\gamma$  входить також і до співвідношення для енергії  $F'(\rho, \theta)$  (3.5). Вигляд розподілу (3.8) без урахування значення нормуючої константи  $C$  показаний на рис. 3.2. З рисунка видно, що зі зростанням інтенсивності шуму  $D$  збільшується імовірність переходів між твердоподібним і рідноподібним станами. У роботі [37] такі переходи докладно досліджуються чисельно при різних значеннях  $\Omega$  та  $\alpha$ , тому зупинимося на одному наборі вже обраних значень.

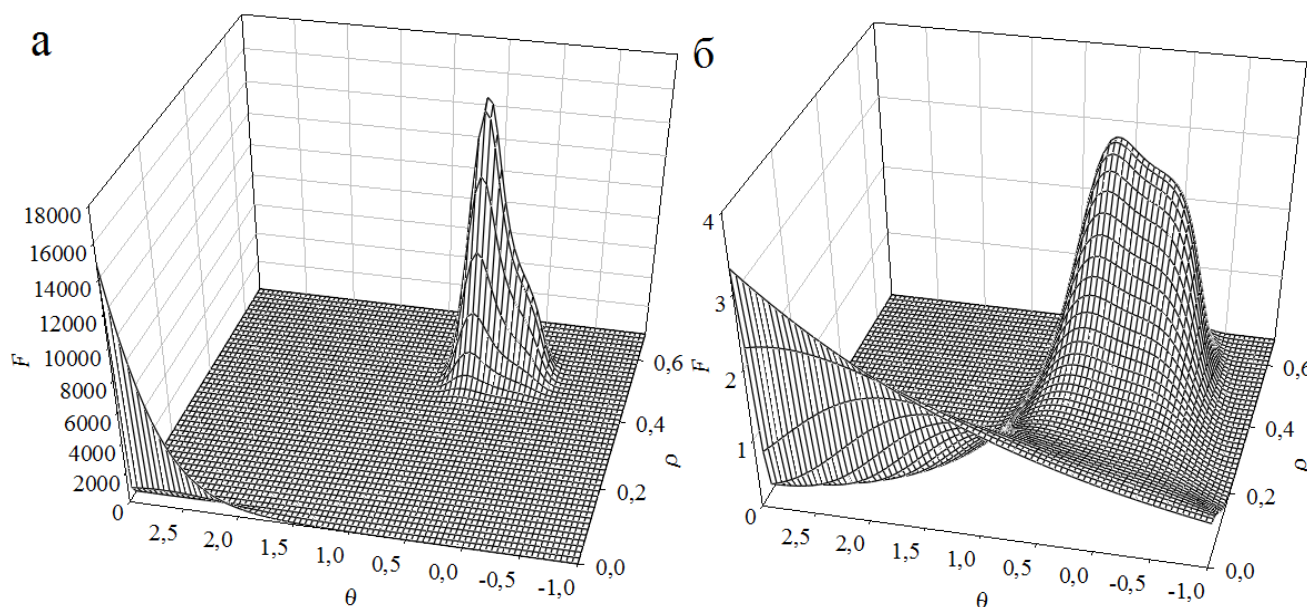


Рисунок 3.2 – Ненормований розподіл (3.8) при параметрах рис. 3.1 при значеннях інтенсивності шуму: а)  $D = 0.025$ ; б)  $D = 0.2$ .

Для чисельного розв'язку рівнянь (3.2), (3.3) достатньо скористатися методом Ейлера [49]. При цьому рівнянням відповідає наступна ітераційна



процедура [49]:

$$\rho_{i+1} = \rho_i - \frac{\Delta t}{\gamma_\rho} (a_1 \rho_i - b_1 \rho_i^2 + c_1 \rho_i^3 + \alpha \rho_i V(\theta_i)) + \sqrt{\Delta t} W_{\rho_i}, \quad (3.9)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \frac{\alpha \rho_i^2 \Delta t}{2\gamma_\theta} (a_2 \theta_i - b_2 \theta_i^2 + c_2 \theta_i^3) + \Delta t \Omega + \sqrt{\Delta t} W_{\theta_i}, \quad (3.10)$$

де потенціал  $V(\theta_i)$  задається виразом у дужках енергії (3.1). Випадкові сили  $W_q$  визначаються згідно до стандартної процедури [67]

$$W_q = \sqrt{2D_q} \sqrt{-2 \ln r_{q1}} \cos(2\pi r_{q2}), \quad r_{qi} \in (0; 1], \quad (3.11)$$

а псевдовипадкові числа  $r_{q1}, r_{q2}$  характеризуються рівномірним розподілом.

На рис. 3.3 і рис. 3.4 показані часові траєкторії  $\rho(t)$ ,  $\theta(t)$ , що отримані при чисельному розв'язанні системи рівнянь (3.9) і (3.10).<sup>4</sup> При обраних параметрах згідно до рисунків відбуваються постійні спонтанні переходи між рідиноподібним ( $\rho = 0$ ) та твердоподібним ( $\rho \neq 0$ ) станами. Однак, на рис. 3.3 імовірність переходів між впорядкованим і невпорядкованим станами менше, оскільки він побудований при меншому значенні інтенсивності шуму  $D$ . У правих частинах рисунків приведено чисельно визначені одновимірні щільності імовірностей  $P_\rho(\rho)$  і  $P_\theta(\theta)$ . Відповідні часові ряди для знаходження щільності імовірностей розраховувалися на інтервалі часу  $t \in [0; 10^6]$  з кроком  $\Delta t = 10^{-3}$ , тобто кожен ряд мав  $10^9$  точок. Цим і пояснюється гладкий вигляд залежностей  $P_\rho(\rho)$  і  $P_\theta(\theta)$ , які також підпорядковуються одновимірним умовам нормування:

$$\int_0^{+\infty} P_\rho(\rho) d\rho = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P_\theta(\rho) d\theta = 1, \quad (3.12)$$

де інтенсивність брегівських рефлексів  $\rho$  вимірюється від нуля. Останні умови також були враховані чисельно. Таким чином, площі під кривими імовірностей на рис. 3.3 і рис. 3.4 дорівнюють одиниці. Зазначимо, що форма кривих для

<sup>4</sup>На рисунках наведені абсолютні значення параметра  $\rho$ , оскільки область  $\rho < 0$  не має фізичного значення.

одновимірних щільностей імовірностей на рисунках підтверджує вигляд двовимірної поверхні, показаної на рис. 3.2. У роботі [37] проведено детальний аналіз описаної ситуації, де ґрунтуючись на вигляді одновимірної щільності імовірності  $P_\rho$  чисельно розраховуються фазові діаграми з наявністю областей кристалізації, рідиноподібної поведінки, а також області, у якій відбуваються спонтанні переходи між зазначеними станами (*stick-slip* режим). Тому вивчення даного питання не є метою представленої роботи. Зосередимо увагу на випадку, коли інтенсивність одного із шумів багаторазово перевищує інтенсивність іншого і покажемо, що у цьому випадку встановлюється самоподібна поведінка твердоподібної системи [41].

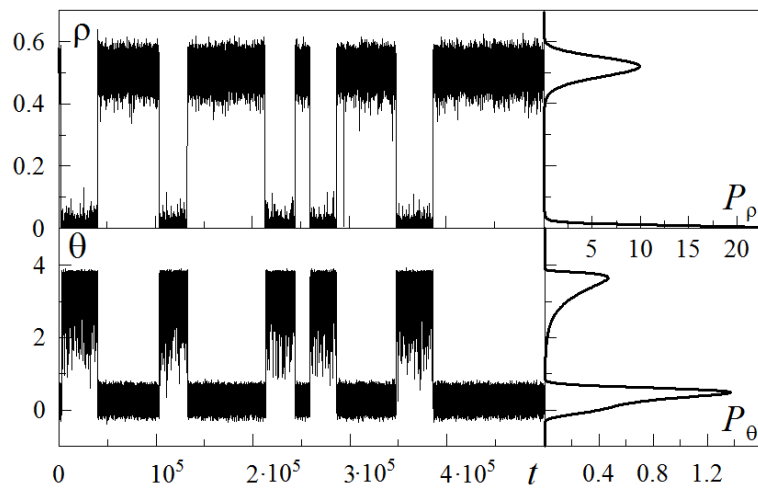


Рисунок 3.3 – Часові залежності абсолютного значення параметра порядку  $\rho$ , величини  $\theta$ , а також їх щільності імовірностей  $P_\rho(\rho)$ ,  $P_\theta(\theta)$  при параметрах рис. 3.1 і  $\gamma_\rho = \gamma_\theta = 0.05$ ,  $D_\rho = D_\theta = 0.025$ .

### 3.2 Самоподібна поведінка

Для з'ясування поведінки системи у загальному випадку (коли часи релаксації і інтенсивності шумів мають різні значення) можна розв'язати загальне рівняння Фоккера-Планка (3.6). Однак зазначене рівняння є рівнян-

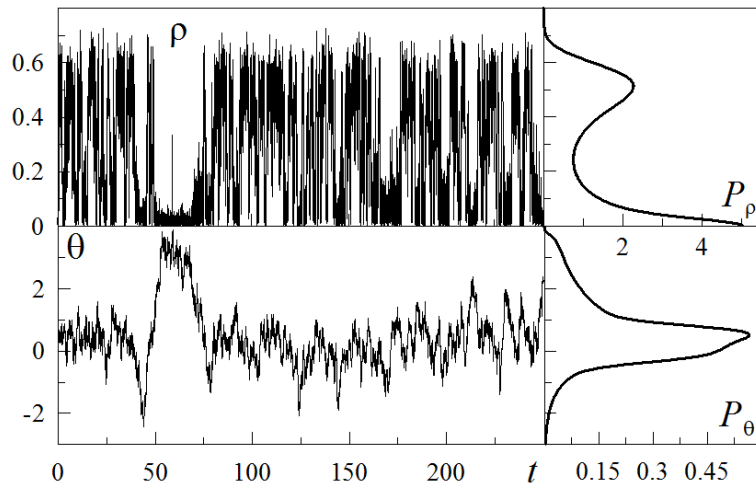


Рисунок 3.4 – Відповідні до рис. 3.3 залежності, але при  $D_\rho = D_\theta = 0.2$ .

ням другого порядку в частинних похідних, що в деякій мірі ускладнює ситуацію. Тим більше, нас не цікавить розподіл імовірності процесу на початковому етапі, а інтерес представляє тільки стаціонарний вигляд розподілу. Це дозволяє замінити розв’язок відповідного РФП (3.6) чисельним аналізом вихідної системи (процедура (3.9), (3.10)). У роботі [41] проводиться аналітичний аналіз з визначенням областей існування різних самоподібних режимів, однак рівняння (3.9), (3.10) мають більш складну структуру, що ускладнює такий аналіз. Тому обмежимося у рамках даного розділу чисельним моделюванням.

На рис. 3.5 показана розрахована ненормована щільність імовірності  $P_\rho(\rho)$  для різних співвідношень між величинами інтенсивностей шумів, причому для всіх кривих значення  $D_\theta$  не змінюється.<sup>5</sup> З рисунка можна зробити висновок, що величина інтенсивності шуму  $D_\rho$  критичним чином впливає на поведінку системи. Наприклад, криві 1 і 2 показують поведінку системи у двофазній області, оскільки реалізуються два максимуми імовірності. Причому для кривої 1 максимум більш виражений при  $\rho = 0$ , а крива 2 відповідає ви-

<sup>5</sup>При розрахунку кривих відповідні часові ряди розраховувались на часовому інтервалі  $t \in [0; 2 \cdot 10^7]$  з кроком  $\Delta t = 10^{-3}$ . Таким чином, кожний часовий ряд мав  $2 \cdot 10^{10}$  точок. Після цього проводився підрахунок кількості влучень значень ряду в той чи інший інтервал  $\rho$ . На заключному рис. 3.5 кожна крива побудована на  $2 \cdot 10^5$  точках, тобто була обрана така кількість інтервалів на осі  $\rho$  від значення  $10^{-5}$  до 3. Розраховані значення  $\rho$  на заданому інтервалі не піднімались вище значення 3. Після цього кількість влучень у кожний інтервал ділилось на загальну кількість точок у рядові, таким чином криві “спускалися” донизу.

падку, коли система більше часу знаходиться у твердоподібному стані ( $\rho \neq 0$ ). Зі зменшенням інтенсивності шуму  $D_\rho$  (криві 3–8) двофазна область зникає, оскільки реалізується лише нульовий максимум  $P_\rho(\rho)$ . Причому лінійна ділянка імовірності при невеликих  $\rho$  при пониженні інтенсивності шуму  $D_\rho$  зменшується (криві 3–5). Для кривих 6–8 вже виконується умова

$$D_\theta \gg D_\rho, \quad (3.13)$$

яка у нашому випадку в області малих значень параметра порядку  $\rho$  приводить до самоподібного вигляду щільності розподілу [41]. Справа в тому, що у випадку (3.13) в області малих  $\rho$  функція розподілу стає однорідною [41, 73]:

$$P_\rho(\rho) \sim \rho^{-a} \quad (3.14)$$

і відповідає самоподібній системі, для якої відсутній характерний масштаб параметра  $\rho$  ( $a < 1$  – показник розподілу, який визначає нахил розподілу на лінійній ділянці) [68]. Зазначимо, що режиму самоорганізованої критичності (СОК) відповідає значення  $a = 1.5$ . У випадку, показаному на рис. 3.5, значення  $a \approx 1$ .

На рис. 3.6 показані часові ряди  $\rho(t)$ , що відповідають параметрам кривих 8 і 6 на рис. 3.5. Залежності приведені у логарифмічному масштабі, для кращого визначення діапазону значень параметра порядку, де встановлюється самоподібна поведінка (різкі збільшення значень параметра порядку видно як на малих, так і на великих масштабах). Залежності на рис. 3.6а відповідає менша інтенсивність шуму  $D_\rho$ , що приводить до самоподібної поведінки на більшому діапазоні масштабів, що видно із залежності. Рис. 3.6б, для якого функція розподілу згідно рис. 3.5 у деякому інтервалі  $\rho$  також є самоподібною, демонструє зміну параметра  $\rho$  на меншому діапазоні масштабів. Часові ряди при однакових інтенсивностях шуму наведені на рис. 3.4 і рис. 3.5, для яких

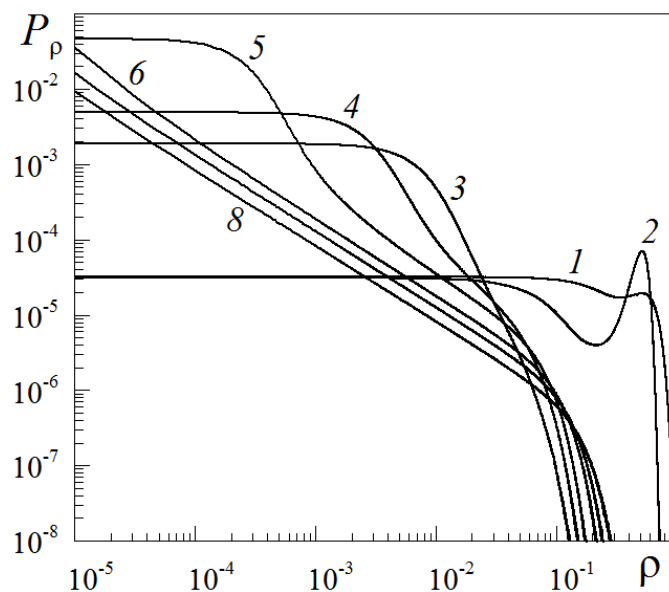


Рисунок 3.5 – Щільність імовірності  $P_\rho(\rho)$ , розрахована при  $D_\theta = 10^{-2}$ . Криві 1–8 відповідають значенням  $D_\rho = 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-10}, 10^{-15}, 10^{-25}$ . Крива 7 розташована між кривими 6 та 8, цифрою на рисунку не позначена.

самоподібна поведінка не спостерігається. Таким чином, степеневий вигляд функції розподілу  $P_\rho(\rho)$  обмежений і мінімальним значенням параметра  $\rho$ , яке зменшується при зменшенні величини  $D_\rho$ .

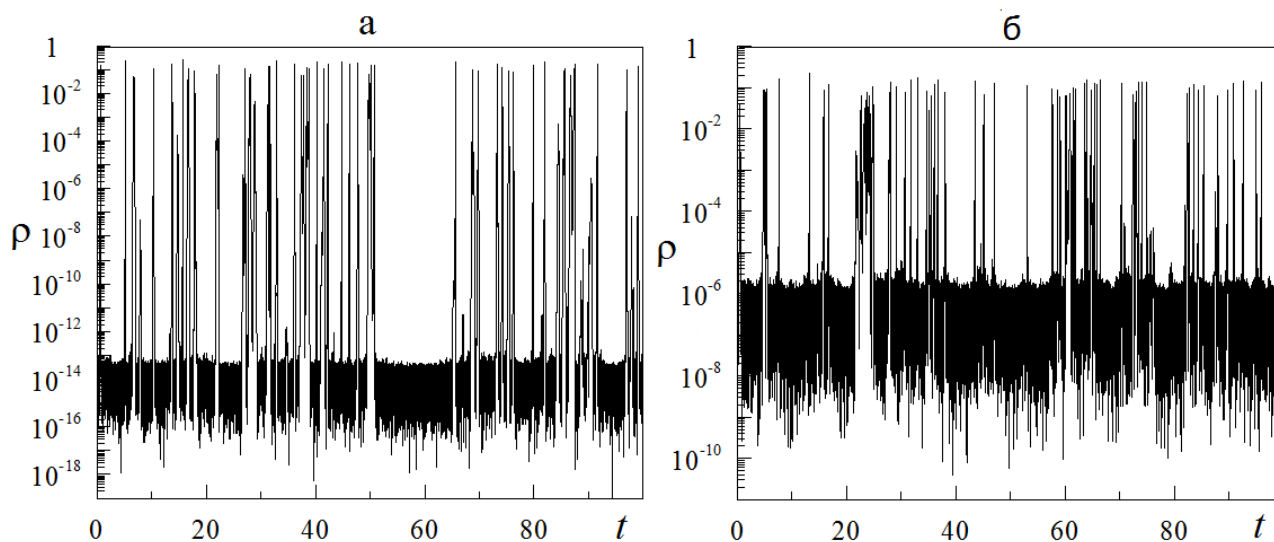


Рисунок 3.6 – Часові залежності  $\rho(t)$ , що відповідають параметрам рис. 3.5: а –  $D_\rho = 10^{-25}$ ; б –  $D_\rho = 10^{-10}$ .

### 3.3 Статистичний аналіз часових рядів

Як було зазначено у попередньому розділі, характерною особливістю часових залежностей параметра порядку, отриманих для значень інтенсивностей шуму  $D_\rho = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-10}, 10^{-15}, 10^{-25}$  (криві 3–8 на рис. 3.5), є наявність у обмеженому діапазоні степеневого вигляду функції щільності розподілу, і, як наслідок, самоподібна структура ряду. Слід зазначити, що розраховані у попередньому розділі статистичні параметри не дають повної інформації про поведінку ряду, зокрема про його передбачуваність. Так, при розрахунку стандартних статистичних параметрів для самоподібних рядів не враховується відсутність характерного масштабу у різні моменти часу. Дана особливість може бути врахована в рамках так званого *скейлінгового* аналізу. Однією із можливих методик розгляду локальних властивостей часових залежностей є метод мультифрактального флуктуаційного аналізу [69], що дозволяє дослідити часові ряди різної природи [70, 71].

Алгоритм зазначеного методу зводиться до наступних кроків (оригінальний опис приведено у роботі [69]). Спочатку, для розглянутого ряду  $x(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$  виділяється флуктуаційний профіль

$$y(i) = \sum_{k=1}^i [x(k) - \bar{x}], \quad (3.15)$$

відрахований від середньої величини  $\bar{x}$ . Потім отримані значення  $y(i)$  розподіляються по непересічним сегментам довжини  $s$ , число яких дорівнює цілому значенню  $N_s = [N/s]$ . Так як довжина ряду  $N$  не завжди кратна обраній шкалі  $s$ , то у загальному випадку остання частина містить число точок менше, ніж  $s$ . Для врахування цього залишку слід повторити процедуру поділу на сегменти, починаючи з протилежного кінця ряду. У результаті повне число сегментів, що

володіють довжиною  $s$ , складе  $2N_s$ .

Оскільки зміна випадкової величини  $y(i)$  відбувається поблизу значення  $y_\nu(i) \neq 0$ , обумовленого певною тенденцією (трендом) еволюції ряду, то далі слід знайти локальний тренд  $y_\nu(i)$  для кожного із  $2N_s$  сегментів. При цьому найпростіше використовувати метод найменших квадратів, представляючи тренд  $y_\nu(i)$  поліномом, степінь якого вибирається таким чином, щоб забезпечити інтерполяцію з помилкою, що не перевищує задану межу. Наступним етапом є визначення дисперсії

$$F^2(\nu, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{y[(\nu - 1)s + i] - y_\nu(i)\}^2, \quad (3.16)$$

для сегментів  $\nu = 1, \dots, N_s$ , що слідує у прямому напрямку, і відповідне значення

$$F^2(\nu, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{y[N - (\nu - N_s)s + i] - y_\nu(i)\}^2, \quad (3.17)$$

для зворотної послідовності  $\nu = N_s + 1, \dots, 2N_s$ .

На наступному кроці проводиться узагальнення дисперсії

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F^2(\nu, s)]^{q/2} \right\}^{1/q} \quad (3.18)$$

шляхом піднесення виразів (3.16), (3.17) до степені  $q$  і подальшим усередненням за всіма сегментами. Оскільки при  $q = 0$  рівність (3.18) містить невизначеність, то замість нього слід використовувати межовий вираз

$$F_0(s) = \exp \frac{1}{4N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} \ln[F^2(\nu, s)]. \quad (3.19)$$

Змінюючи часову шкалу  $s$  при фіксованому показнику  $q$ , знаходимо залежність  $F_q(s)$ , представляючи її у подвійних логарифмічних координатах. Якщо досліджуваний ряд зводиться до самоподібної множини, що проявляє дале-

кодуючі кореляції, то флуктуаційна функція  $F_q(s)$  представляється степеневою залежністю

$$F_q(s) \propto s^{h(q)} \quad (3.20)$$

з узагальненим показником Херста  $h(q)$ , величина якого визначається параметром  $q$ . Із визначень (3.18), (3.20) випливає, що при  $q = 2$  цей показник зводиться до класичного показника Херста  $H$ . Для часових рядів, які відповідають монофрактальній множині, флуктуаційна функція  $F^2(\nu, s)$  однакова для всіх сегментів  $\nu$ , і узагальнений показник Херста  $h(q) = H$  не залежить від параметра деформації  $q$ . Для мультифрактальних рядів при додатних  $q$  основний внесок у функцію  $F_q(s)$  дають сегменти  $\nu$ , що проявляють великі відхилення  $F^2(\nu, s)$ , а при від'ємних  $q$  домінують сегменти з малими значеннями дисперсії  $F^2(\nu, s)$ . У результаті можна зробити висновок, що при від'ємних значеннях  $q$  узагальнений показник Херста  $h(q)$  описує сегменти, які проявляють малі флуктуації, а при додатних — великі [69, 72].

При реалізації викладеного алгоритму слід мати на увазі, що із зростанням розміру сегментів до  $s > N/4$ , функція  $F_q(s)$  втрачає статистичну інформативність зважаючи на малість числа  $N_s < 4$  сегментів, що використовуються при усередненні. Таким чином, проведення вказаної процедури передбачає виняток, з одного боку, великих сегментів ( $s > N/4$ ), а з іншого — малих ( $s < 10$ ).

Стандартне подання скейлінгових властивостей часового ряду передбачає перехід від показника Херста  $h(q)$  до масового показника  $\tau(q)$  і спектральної функції  $f(\alpha)$ , які є основними характеристиками мультифракталів [69, 72]:

$$\tau(q) = qh(q) - 1, \quad (3.21)$$

$$f(\alpha) = \alpha q(\alpha) - \tau(q(\alpha)). \quad (3.22)$$

Тут значення  $q(\alpha)$  визначається умовою  $\tau'(q) = \alpha$ , де штрих означає диферен-



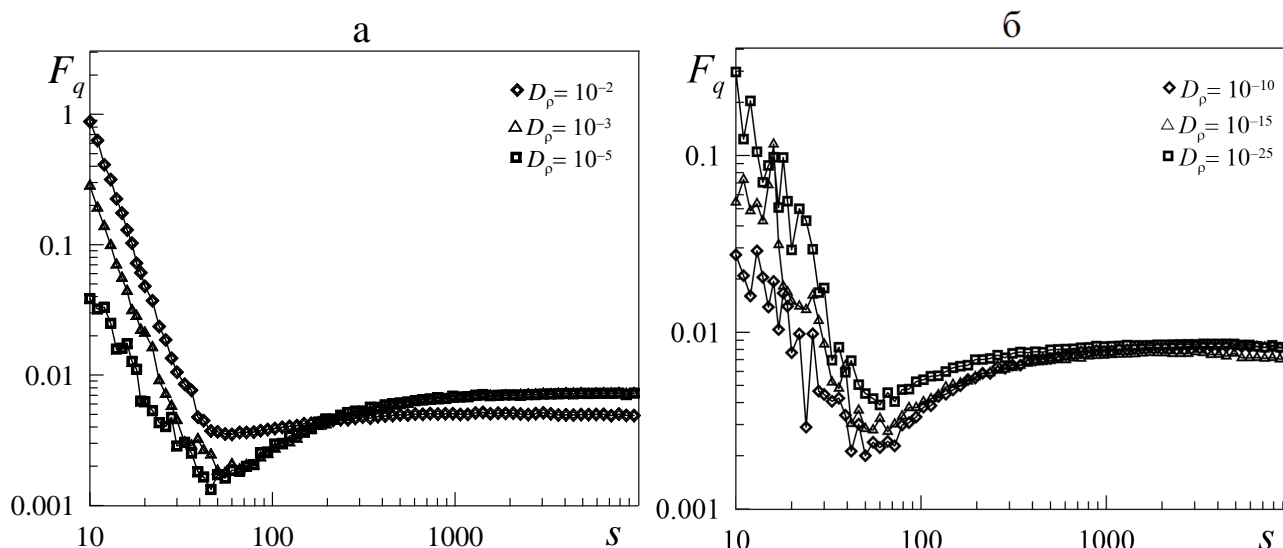


Рисунок 3.7 – Залежність (3.20), побудована у подвійних логарифмічних осях при показнику деформації  $q = 2$  для рядів із значенням  $D_\rho = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}$  (а) і  $D_\rho = 10^{-10}, 10^{-15}, 10^{-25}$  (б).

ціювання за аргументом. При  $|q| \gg 1$  залежність  $\tau(q)$  має лінійно зростаючий вигляд з криволінійною ділянкою поблизу  $q = 0$ , який забезпечує уповільнення зростання масового показника  $\tau$  зі збільшенням параметра деформації  $q$ . Спектральна функція  $f(\alpha)$  визначає набір монофракталів з розмірностями  $\alpha$ , які формують досліджувану множину: при цьому відносна кількість монофракталів з даними  $\alpha$ , які потрапляють до сегментів з розміром  $l$ , що покривають цю множину, задається співвідношенням  $N(\alpha) \sim l^{-f(\alpha)}$ . Згідно з цим визначенням, ширина спектра  $f(\alpha)$  буде тим більше, чим сильніше виражені мультифрактальні властивості. Так, для монофракталу спектральна функція  $f(\alpha)$  має  $\delta$ -подібну форму, що виділяє єдине значення фрактальної розмірності  $\alpha$  [72].

На рис. 3.7 представлений типовий вид залежності (3.20) для рядів з інтенсивностями шумів  $D_\rho = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-10}, 10^{-15}, 10^{-25}$  при показнику деформації  $q = 2$ . Як видно з рисунка, залежність (3.20), побудована у подвійних логарифмічних осях, має яскраво виражену лінійну ділянку при значеннях масштабу  $50 < s < 500$ , і отже, може бути використана для обчислення параметра  $h(q)$ . Лінійна інтерполяція рівності (3.20), що розрахова-

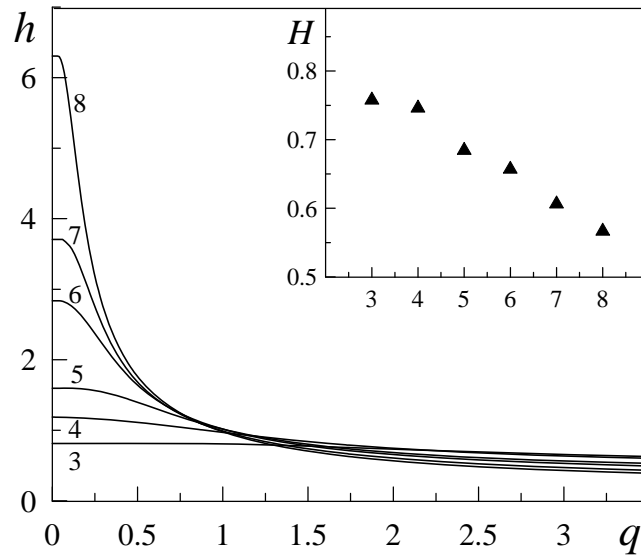


Рисунок 3.8 — Узагальнений показник Херста  $h(q)$  для рядів з інтенсивністю шуму  $D_\rho = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-10}, 10^{-15}, 10^{-25}$  (криві 3–8 відповідно), а також зміна класичного показника Херста  $H$  для зазначених кривих.

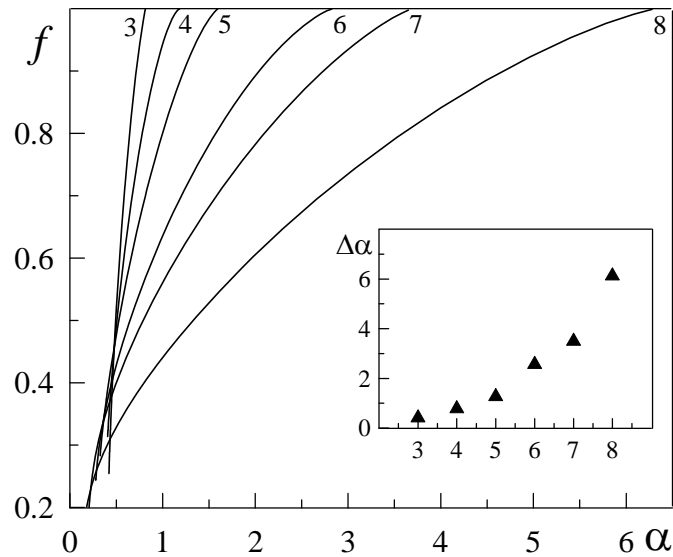


Рисунок 3.9 — Спектральна функція  $f(\alpha)$  для рядів з інтенсивністю шуму  $D_\rho = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-10}, 10^{-15}, 10^{-25}$  (криві 3–8 відповідно), а також ширина розкиду мультифрактального спектра  $\Delta\alpha$ .

на для досліджуваних рядів, у рамках зазначеного інтервалу зміни масштабу  $s$  при значеннях параметра деформації  $0 \leq q \leq 3.5$  приводить до залежностей  $h(q)$ , представлених на рис. 3.8, де на додатковій панелі також приведена залежність класичного показника Херста  $H$  від номера (інтенсивності шуму) відповідного ряду. Для досліджуваних рядів так само була розрахована спектральна функція  $f(\alpha)$  з використанням рівностей (3.21) і (3.22). Результати

проведених розрахунків представлені на рис. 3.9. З наведених на рис. 3.8 і 3.9 залежностей випливає, що зменшення інтенсивності шуму  $D_\rho$  приводить до істотного ускладнення динаміки часових залежностей параметра порядку, що проявляється у збільшенні ширини розкиду значень узагальненого показника Херста  $h(q)$  і функції мультифрактального спектра (3.22). Виходячи з фізичного змісту функції  $f(\alpha)$ , зростання розкиду значень  $\Delta\alpha$  обумовлено тим, що в сегментах часового ряду довжини  $s$ , зростає число підмножин (так званих монофракталів)  $N(\alpha)$ , з показником Гельдера  $\alpha$ . Дана ситуація може означати, що в системі зростає кількість статистично різних сценаріїв розвитку. Крім того, значення показника Херста  $H$  із зменшенням  $D_\rho$  наближається до значення  $H \approx 0.5$ , яке, як відомо, відповідає абсолютно випадковій послідовності [72], таким чином, ускладнення структури часових рядів робить їх подальшу поведінку непередбачуваною. Цій ситуації відповідає наявність екстремально великих розкидів значень параметра порядку, що показано на рис. 3.6.

## ВИСНОВКИ

У представленій роботі, в рамках синергетичної моделі межового тертя, вивчалися процеси тертя двох атомарно-гладких та шорстких поверхонь при наявності ультратонкого шару мастила між ними. Врахована просторова неоднорідність напружень, деформації і температури мастильного шару дозволила описати нетривіальну неньютонівську поведінку ефективної зсувної в'язкості мастила. Розглянуті два випадки, що відрізняються врахуванням різних типів руху поверхонь тертя. Отримані просторові профілі напружень, деформації і температури у різні моменти часу. Показано, що у розглянутих випадках з плином часу встановлюється стаціонарний розподіл напружень, а також деформації і температури по товщині мастила. Показано, що варіацією параметрів, що відповідають за внесок градієнтних членів, можливо змінювати характеристики в'язкості мастила, у тому числі описувати ньютонівську поведінку, а також випадок, у якому верхній шар мастила твердне і рухається разом з поверхнею, як єдине ціле.

Розгляд поверхонь тертя з нанорозмірними нерівностями дозволив розширити та узагальнити отримані раніше результати для атомарно-гладких поверхонь. З'ясовано, що у процесі тертя нерівних поверхонь мастило по площині тертя представляє доменну структуру, де присутні рідиноподібні та твердоподібні ділянки, що робить різний внесок у загальну силу тертя. Показано, що для шорстких поверхонь залежність сили тертя від часу хоча і не є строго періодичною, але близька до такої, що збігається з відомими експериментальними даними. Для отримання результатів була застосована паралельна архітектура CUDA, що розроблена компанією NVIDIA і широко використовується у даний час для виконання неграфічних обчислень на великій кількості універсальних графічних процесорів сучасних відеокарт.

Вводячи до розгляду зовнішній адитивний шум з'ясовано його харак-

тер впливу на поведінку системи та показано, що із зростанням інтенсивності шуму збільшується імовірність переходів між твердоподібним та рідиноподібним станами. Розглядається випадок, коли інтенсивність одного із шумів багаторазово перевищує інтенсивність іншого. При цьому показано, що в деякому обмеженому діапазоні функція щільності розподілу часових залежностей параметра порядку приймає степеневий вигляд, тобто встановлюється самоподібна поведінка твердоподібної системи. За допомогою методу мультифрактального флуктуаційного аналізу, що дозволяє дослідити часові ряди різної природи, вдалося отримати інформацію про локальні властивості часових залежностей. Також з'ясовано умови, за яких система демонструє монофрактальну чи мультифрактальну поведінку, що характеризується спектром фрактальних розмірностей.

**ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ**

1. Israelachvili J. Adhesion forces between surfaces in liquids and condensable vapours // *Surface Science Reports*. – 1992. – Vol. 14, No 3. – P. 109-159.
2. Persson B. N. J. Sliding friction. Physical principles and applications. – Berlin: Springer-Verlag, 2000. – 515 p.
3. Demirel A. L., Granick S. Transition from static to kinetic friction in a model lubricating system // *Journal of Chemical Physics*. – 1998. – Vol. 109, No 16. – P. 6889-6897.
4. Reiter G., Demirel A. L., Peanasky J. Stick to slip transition and adhesion of lubricated surfaces in moving contact // *Journal of Chemical Physics*. – 1994. – Vol. 101, No 3. – P. 2606-2615.
5. Ohnishi S., Kaneko D., Gong J. P., Osada Y., Stewart A. M., Yaminsky V. V. Influence of Cyclohexane Vapor on Stick-Slip Friction between Mica Surfaces // *Langmuir*. – 2007. – Vol. 23, No 13. – P. 7032-7038.
6. Yamada S. Dynamic Transitions in Molecularly Thin Liquid Films under Frictional Sliding // *Langmuir*. – 2008. – Vol. 24, No 4. – P. 1469-1475.
7. Ackerson B. J. and Clark N. A. Shear-Induced Melting // *Physical Review Letters*. – 1981. – Vol. 46, No 2. – P. 123.
8. Kaibyshev O. A. Superplasticity of Alloys, Intermetallides and Ceramics. – Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 317 p.
9. Metlov L. S., Myshlyaev M. M., Khomenko A. V., and Lyashenko I. A. A model of grain boundary sliding during deformation // *Technical Physics Letters*. – 2012. – Vol. 38, No 11. – P. 972-974.
10. Gleiter H. The structure and properties of high-angle grain boundaries in metals // *Phys. Status Solidi*. – 1971. – Vol. 45, No 1. – P. 9-38.

11. Yoshizawa H., Israelachvili J. Fundamental mechanisms of interfacial friction. 2. Stick-slip friction of spherical and chain molecules // *Journal of Physical Chemistry*. – 1993. – Vol. 97, No 43. – P. 11300-11313.
12. Smith E. D., Robbins M. O., and Cieplak M. Friction on adsorbed monolayers // *Physical Review B*. – 1996. – Vol. 54, No 11. – P. 8252.
13. Carlson J. M. and Batista A. A. Constitutive relation for the friction between lubricated surfaces // *Physical Review E*. – 1996. – Vol. 53, No 4. – P. 4153.
14. Aranson I. S., Tsimring L. S., Vinokur V. M. Stick-slip and nuclear dynamics of ultrathin liquid films // *Physical Review B*. – 2002. – Vol. 65, No 12. – P. 125402 (7).
15. Popov V. L. Thermodynamics and kinetics of shear-induced melting of a thin layer of lubricant confined between solids // *Technical Physics*. – 2001. – Vol. 46, No 5. – P. 605-615.
16. Popov V. L. A theory of the transition from static to kinetic friction in boundary lubrication layers // *Solid State Commun.* – 2000. – Vol. 115, No 7. – P. 369-373.
17. Hardy W., Bircumshaw J. Bakerian Lecture. Boundary Lubrication. Plane Surfaces and the Limitations of Amontons Law // *Proc. R. Soc. Lond. A*. – 1925. – Vol. 108, No 745. – P. 1-27.
18. Попов В. Л. Термодинамика и кинетика плавления сдвигом тонкого слоя смазки, заключенного между твердыми телами // *Журнал технической физики*. – 2001. – Т. 71, № 5. – С. 100-110.
19. Filippov A. E., Klafter J., Urbakh M. Friction through dynamical formation and rupture of molecular bonds // *Physical Review Letters*. – 2004. – Vol. 92, No 13. – P. 135503 (4).
20. Ляшенко Я. А., Хоменко А. В., Метлов Л. С. Феноменологическая теория плавления тонкой пленки смазки между двумя атомарно-гладкими твердыми поверхностями // *Журнал технической физики*. – 2010. – Т. 80, № 8.

- С. 120-126.
21. Ляшенко Я. А., Хоменко А. В., Метлов Л. С. Нелинейная термодинамическая модель граничного трения // Трение и износ. – 2011. – Т. 32, № 2, – С. 113-123.
22. Lyashenko I. A., Popov V. L. Impact of an elastic sphere with an elastic half space revisited: Numerical analysis based on the method of dimensionality reduction // Scientific Reports. – 2015. – Vol. 5. – P. 8479 (5).
23. Ляшенко Я. А., Кузнецов В. П., Попов М., Попов В. Л., Горгоц В. Г. Динамическое моделирование спонтанных колебаний в процессе наноструктурирующего выглаживания // Физическая мезомеханика. – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 38-42.
24. Lyashenko I. A., Willert E., Popov V. L. Adhesive impact of an elastic sphere with an elastic half space: Numerical analysis based on the method of dimensionality reduction // Mechanics of Materials. – 2016. – Vol. 92. – P. 155-163.
25. Braun O. M., Naumovets A. G. Nanotribology: Microscopic mechanisms of friction // Surf. Sci. Rep. – 2006. – Vol. 60. – P. 79-158.
26. Sivebaek I.M., Samoilov V.N., Persson B.N.J. Velocity Dependence of Friction of Confined Hydrocarbons // Langmuir. – 2010. – Vol. 26, No 11. – P. 8721-8728.
27. Robbins M. O., Müser M. H. Computer Simulations of Friction, Lubrication and Wear (Electronic resource) // In Modern Tribology Handbook / Edited by B. Bhushan. – Boca Raton: CRC Press, 2001. – P. 717-765. – cond-mat/0001056.
28. Хоменко О. В., Ляшенко Я. О. Фазова динаміка тонкої плівки мастила між твердими поверхнями при деформаційному дефекті модуля зсуву // Журнал фізичних досліджень. – 2007. – Т. 11, № 3. – С. 268-278.
29. Хоменко О. В., Ляшенко Я. О., Борисюк В. М. Самоподібна фазова ди-



- наміка межового тертя // Український фізичний журнал. – 2009. – Т. 54, № 11. – С. 1142-1151.
30. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1. – Москва: Наука, 1995. – 608 с.
31. Berman A. D., Ducker W. A., Israelachvili J.N. Origin and Characterization of Different Stick-Slip Friction Mechanisms // *Langmuir*. – 1996. – Vol. 12, No 19. – P. 4559-4563.
32. Luengo G., Israelachvili J., Granick S. Generalized effects in confined fluids: new friction map for boundary lubrication // *Wear*. – 1996. – Vol. 200, No 1-2. – P. 328-335.
33. Zuev L. B., Danilov V. I. A self-excited wave model of plastic deformation in solids // *Philosophical Magazine A*. – 1999. – Vol. 79, No 1. – P. 43-57.
34. Хоменко А. В., Ляшенко Я. А. Статистическая теория граничного трения атомарно-гладких твёрдых поверхностей при наличии смазочного слоя // *Успехи физических наук*. – 2012. – Т. 182, № 10. – С. 1081-1110.
35. Donaldson S., Lee T., Chmelka B., and Israelachvili J. General hydrophobic interaction potential for surfactant/lipid bilayers from direct force measurements between light-modulated bilayers // *PNAS*. – 2011. – Vol. 108, No 38. – P. 15699-15704.
36. Lahiri R. and Ramaswamy S. Shear-Induced Melting and Reentrance: A Model // *Physical Review Letters*. – 1994. – Vol. 73, No 7. – P. 1043.
37. Das M., Ananthakrishna G., and Ramaswamy S. Collective stochastic resonance in shear-induced melting of sliding bilayers // *Physical Review E*. – 2003. – Vol. 68, No 6. – P. 061402.
38. Ляшенко Я. А., Заскока А. Н. Учет универсальной зависимости вязкости граничной смазки от температуры и скорости деформаций при описании особенностей stop-start-экспериментов // *Журнал технической физики*. – 2015. – Т. 85, № 7. – С. 69-76.

39. Ляшенко Я. А., Манько Н. Н., Влияние деформационного дефекта модуля сдвига смазки на фазовую диаграмму режимов граничного трения // Известия Высших учебных заведений. Физика. – 2015. – Т. 58, № 5. – С. 102-108.
40. Lyashenko I. A., Manko N. N. Synergetic representation of stick-slip mode of boundary friction // Journal of Friction and Wear. – 2013. – Vol. 34, No 1. – P. 38-45.
41. Khomenko A. V., Lyashenko I. A., Borisyuk V. N. Multifractal analysis of stress time during ultrathin lubricant film melting // Fluctuation and Noise Letters. – 2010. – Vol. 9, No 1. – P. 19-35.
42. Ляшенко Я. А., Винниченко И. В. Прерывистый режим плавления граничной смазки между двумя жесткими поверхностями с наноразмерными неровностями // Журнал Технической Физики. – 2013. – Т. 83, Вып. 9. – С. 90-97.
43. Хоменко А. В., Трощенко Д. С., Бойко Д. В., Захаров М. В. Влияние внешнего периодического воздействия на кинетику фрагментации металлов при интенсивной пластической деформации // Журнал нано- и электронной физики. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 01039 (11).
44. Khomenko A. V., Troshchenko D. S., Metlov L. S. Thermodynamics and Kinetics of Solids Fragmentation at Severe Plastic Deformation // Condensed Matter Physics. – 2015. – Vol. 18, No 3. – P. 33004 (14).
45. Ляшенко Я. А. Трибологическая система в режиме граничного трения под периодическим внешним воздействием // Журнал Технической Физики. – 2011. – Т. 81, Вып. 6. – С. 125-132.
46. Ляшенко Я. А. Трибологические свойства режимов сухого, жидкостного и граничного трения // Журнал Технической Физики. – 2011. – Т. 81, Вып. 5. – С. 115-121.
47. Lyashenko I. A. Effect of the temperature dependence of the viscosity

- of pseudoplastic lubricants on the boundary friction regime // *Technical Physics*. – 2013. – Vol. 58, No 7. – P. 1016-1024.
48. Sivebaek I. M., Samoilov V. N., Persson B.N.J. Effective Viscosity of Confined Hydrocarbons // *Physical Review Letters*. – 2012. – Vol. 108, No 3. – P. 036102 (4).
49. Ляшенко Я. А. Фазовый переход первого рода между жидкоподобной и твердоподобной структурами граничной смазки // *Журнал Технической Физики*. – 2012. – Т. 82, Вып. 1. – С. 19-28.
50. Попов В.Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения: От нанотрибологии до динамики землетрясений. – Москва: Физматлит, 2013. – 352 с.
51. Chandross M., Grest G. S., Stevens M. J. Friction between Alkylsilane Monolayers: Molecular Simulation of Ordered Monolayers // *Langmuir*. – 2002. – Vol. 18, No 22. – P. 8392-8399.
52. Dai L., Minn M., Satyanarayana N., Sinha S.K., Tan V. B. C. Identifying the Mechanisms of Polymer Friction through Molecular Dynamics Simulation // *Langmuir*. – 2011. – Vol. 27, No 24. – P. 14861-14867.
53. Ramin L., Jabbarzadeh A. Effect of Load on Structural and Frictional Properties of Alkanethiol Self-Assembled Monolayers on Gold: Some Odd–Even Effects // *Langmuir*. – 2012. – Vol. 28, No 9. – P. 4102-4112.
54. Yamada S. Nanotribology of Ethers: Effects of Molecular Asymmetry and Fluoroalkyl Chains // *Langmuir*. – 2005. – Vol. 21, No 19. – P. 8724-8732.
55. Ляшенко Я. А., Манько Н. Н. Учет пространственной неоднородности температуры в синергетической модели граничного трения // *Журнал нано- и электронной физики*. – 2013. – Т. 5, № 3. – С. 03040 (5).
56. Olemskoi A. I. Axiomatic theory of self-organizing system // *Physica A*. – 2002. – Vol. 310, No 1-2. – P. 223-233.
57. Погребняк А. Д., Братушка С. Н., Береснев В. М., Levintant-Zayonts N.

- Эффект памяти формы и сверхэластичность сплавов никелида титана, имплантированных высокими дозами ионов // *Успехи химии*. – 2013. – Т. 82, Вып. 12. – С. 1135-1159.
58. Попов В. Л. Термомеханическая модель кристаллических упругопластических сред // *Письма в ЖТФ*. – 1999. – Т. 25, Вып. 20. – С. 31-38.
59. Lyashenko I. A., Khomenko A. V., Metlov L. S. Thermodynamics and kinetics of boundary friction // *Tribology International*. – 2011. – Vol. 44. – P. 476-482.
60. Ахматов А. С. Молекулярная физика граничного трения. – Москва: Физматгиз, 1963. – 472 с.
61. Ландау Л. Д., Халатников И. М. Об аномальном поглощении звука вблизи точек фазового перехода второго рода // *ДАН СССР*. – 1954. – Т. 96, № 3. – С. 469–472.
62. Сандерс Д., Кэндрот Э. Технология CUDA в примерах. Введение в программирование графических процессоров: пер. с англ. Слинкина А. А., научный редактор Боресков А. В. – Москва: ДМК Пресс, 2011. – 232 с.
63. Tartaglino U., Samoilov V. N., Persson B. N. J. Role of surface roughness in superlubricity // *J. Phys.: Condens. Matter*. – 2006. – Vol. 18, No 17. – P. 4143-4160.
64. Bowden F. P., Tabor D. *The friction and lubrication of solids*. Oxford: The Clarendon Press, 1954. – 337 p.
65. Horsthemke W., Lefever R. *Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology*. – New York: Springer-Verlag, 1984. – 318 p.
66. Risken H. *The Fokker-Planck Equation*. – Berlin: Springer, 1989. – 485 p.
67. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., and Flannery B. P. *Numerical recipes in C: the art of scientific computing*, 2nd ed. – New York: Cambridge University Press, 1992. – 1020 p.

68. Amit D. J. *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena*. – New York: McGraw-Hill International Book Co., 1978. – 336 p.
69. Kantelhardt J. W., Zschiegner S. A., Koscielny-Bunde E., Havlin S., Bunde A., and Stanley H. E. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series // *Physica A*. – 2002. – Vol. 316. – P. 87–114.
70. Olemskoi A., Shuda I, and Borisyuk V. Generalization of multifractal theory within quantum calculus // *EPL (Europhysics Letters)*. – 2010. – Vol. 89, No 5. – P. 50007.
71. Олемской А. И., Данильченко С. Н., Борисюк В. Н., Шуда И. А. Мультифрактальный анализ рентгеновских дифрактограмм сложных конденсированных сред // *Металлофизика и новейшие технологии*. – 2009. – Т. 31, № 6. – С. 777-789.
72. Feder J. *Fractals*. – New York: Plenum Press, 1988. – 283 p.
73. Олемской А. И. Теория стохастических систем с сингулярным мультипликативным шумом // *Успехи физических наук*. – 1998. – Т. 168. – С. 287-321.