ЖУРНАЛ НАНО- ТА ЕЛЕКТРОННОЇ ФІЗИКИ *JOURNAL OF NANO- AND ELECTRONIC PHYSICS*
Том **8** № 1, 01044(5cc) (2016) Vol. **8** No 1, 01044(5pp) (2016)

Численное исследование законов сверхмедленной диффузии для определенного класса непрерывных во времени случайных блужданий

Ю.С. Быстрик*

Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, 40007 Сумы, Украина

(Получено 15.01.2016; опубликовано online 15.03.2016)

Используя теорию непрерывных во времени случайных блужданий, рассмотрено явление аномальной сверхмедленной диффузии, для которой дисперсия положения частички растет медленнее любой положительной степени времени. Данный тип диффузии возникает в случае, когда плотности вероятности времени ожидания между последующими скачками характеризуются сверхтяжелыми хвостами с бесконечными моментами любого дробного порядка. Мы предлагаем численный метод исследования поведения законов диффузии и показываем, что наши численные результаты находятся в очень хорошем соответствии с теоретическими предсказаниями

Ключевые слова: Аномальная диффузия, Непрерывные во времени случайные блуждания, Сверхтяжелые плотности вероятности.

DOI: 10.21272/jnep.8(1).01044 PACS numbers: 05.40.Fb, 02.50.Ey

1. ВВЕДЕНИЕ И КРАТКИЙ ОБЗОР

Интенсивные исследования транспортных и диффузионных явлений показывают, что многие стохастические процессы, различной природы и сложности, в среднем часто проявляют аномальные свойства. Одной из важнейших характеристик такого рода систем является дисперсия процесса, т.е. отклонение наблюдаемой случайной величины от своего среднего значения. Под аномальным поведением систем подразумевают нелинейный во времени (даже приблизительно) рост дисперсии $\sigma^2(t)$ изучаемого процесса [1-3]. Отметим, что наиболее известным и распространенным типом аномального поведения дисперсии есть степенной закон: $\sigma^2(t) \propto t^{\upsilon}$ при $t \to \infty$, где υ − положительный параметр и $\upsilon \neq 1$. При этом в зависимости от значения параметра υ данный тип аномальной диффузии разделяется на два класса: субдиффузию (для которой $0 < \upsilon < 1$) и супердиффузию (для которой $\upsilon > 1$). Несложно заметить, что разделение на два класса связано со скоростью расширения диффузионного фронта: так для субдиффузии расширение происходит медленнее, чем в классическом гауссовом случае, а для супердиффузии − быстрее. В качестве примеров наблюдения (в том числе экспериментального) субдиффузии можно привести аморфные тела [4], живые клетки [5-6], перколяционные кластеры [7]; супердиффузия наблюдается в турбулентных потоках [8-9], оптических решетках [10], случайных фотонных решетках [11], движении животных [12-13].

Конечно же, характер изменения дисперсии для аномальной диффузии не ограничивается только степенной функцией времени. Например, существует класс *сверхмедленных* диффузионных процессов, для которых дисперсия изменяется медленнее любой положительной степени времени, т.е. при всех $\upsilon>0$ выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma^2(t)}{t^{\upsilon}} = 0. \qquad (1.1)$$

Первым и, пожалуй, самым известным результатом такого рода является диффузия Синая [14-16], описывающая определенный тип случайных блужданий в случайных средах и характеризующаяся очень медленным ростом дисперсии, а именно $\sigma^2(t) \propto \ln^4 t$ при $t \to \infty$. Впоследствии было установлено множество других примеров сверхмедленной диффузии, для которой при больших временах справедлива следующая временная зависимость дисперсии процесса: $\sigma^2(t) \propto \ln^{\beta} t$, где параметр $\beta > 0$. Например, такое поведение наблюдается в резисторных цепях [17], заряженных полимерах [18], апериодических средах [19], итерационных отображениях [20], динамике Ланжевена [21], дробной кинетике [22], некоторых частных случаях непрерывных во времени случайных блужданий [23].

Однако дисперсия сверхмедленной диффузии может иметь и другие, отличные от степенной функции логарифма времени, формы. Так в работах [24-25] для непрерывных во времени случайных блужданий, характеризующихся произвольными сверхтяжелыми хвостами распределений $p(\tau)$ времени ожидания скачка частички и распределениями $w(\xi)$ величины скачка с конечной дисперсией, найдены общие законы сверхмедленной диффузии, которые включают в себя функции вида $\ln^{\beta} t$ ($\beta > 0$) как очень частный случай.

В данной работе с помощью концепции непрерывных во времени случайных блужданий рассматривается явление сверхмедленной аномальной диффузии. Предлагается метод численного моделирования законов диффузии для изучаемого процесса и показывается, что при больших значениях времени численные результаты находятся в очень хорошем соответствии с асимптотическими формулами, полученными в работах [24-25].

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1 Описание процесса и аналитические результаты

*yurabystrik@gmail.com

Согласно подходу непрерывных во времени случайных блужданий, движение частицы полностью описывается множеством времен ожидания $\{\tau_n\}$ между последовательными скачками частички и множеством длин $\{\xi_n\}$ этих скачков. При этом (в случае несвязанной модели) для всех $n = 1,2,...$ случайные величины $\tau_n \in [0,\infty)$ и $\xi_n \in (-\infty,\infty)$ независимы и распределены с плотностями $p(\tau)$ и $w(\xi)$ соответственно. Таким образом, положение частицы задается непрерывным во времени скачкообразным процессом

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \xi_n, \qquad (2.1)$$

где $N(t) = 0,1,2,...$ – случайное число скачков за время t. Полагается, что в начальный момент времени $X(0) = 0$ и, если $N(t) = 0$, то частица остается в положении $X(t) = 0$.

Статистические свойства такого процесса описываются уравнением Монтролла-Вейсса для плотности вероятности $P(x,t)$ положения $X(t)$ [2, 28-29] Так в пространстве Фурье-Лапласа это уравнение имеет следующий вид

$$P_{ks} = \frac{1-p_s}{s(1-p_s w_k)}. \qquad (2.2)$$

В данной формуле $w_k = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} w(x)$ $(-\infty < k < \infty)$ – преобразование Фурье плотности вероятности $w(\xi)$, $p_s = \int_0^{\infty} dt e^{-s\tau} p(\tau)$ $(\mathrm{Re}\, s > 0)$ – преобразование Лапласа плотности $p(\tau)$, и P_{ks} – преобразование Фурье и Лапласа $P(x,t)$. Обращая уравнение (2.2), можно показать, что $P(x,t)$ удовлетворяет интегральное уравнение

$$P(x,t) = \delta(x)V(t) + \int_{-\infty}^{\infty} d\xi w(x-\xi) \times \int_0^t d\tau p(t-\tau) P(\xi,\tau), \qquad (2.3)$$

где $\delta(\ )$ – дельта-функция Дирака. Как видно из последней формулы, в общем случае процесс обладает памятью, т.е. состояние частички в текущий момент зависит от ее состояния во все предыдущие моменты времени

Напомним, что дисперсия процесса $X(t)$ дается выражением

$$\sigma^2(t) = \left\langle X^2(t) \right\rangle - \left\langle X(t) \right\rangle^2, \qquad (2.4)$$

где

$$\left\langle X(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x P(x,t), \ \left\langle X^2(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 P(x,t). \qquad (2.5)$$

Для вычисления поведения моментов $X(t)$ часто полезными являются следующие соотношения

$$\left\langle X^m(t) \right\rangle_s = (-i)^m \frac{d^m P_{ks}}{dk^m}\bigg|_{k=0} \qquad (2.6)$$

$(m = 1,2,...)$. Угловые скобки показывают усреднение процесса относительно всех возможных реализаций.

Поскольку мы имеем дело со стохастическими процессами диффузионного типа, то полагаем, что плотности вероятности длины скачка частицы имеют конечный момент второго порядка. Тогда, используя уравнение Мортролла-Вейсса (2.2) и учитывая, что при $k \to 0$ имеет место разложение [2]

$$1 - w_k \sim -il_1 + \frac{l_2 k^2}{2} + o(k^2), \qquad (2.7)$$

где $l_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi w(\xi)$ и $l_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi^2 w(\xi)$ – момент первого и второго порядка соответственно, из (2.6) получаем

$$\left\langle X(t) \right\rangle_s = \frac{l_1 p_s}{s(1-p_s)}, \ \left\langle X^2(t) \right\rangle_s = \frac{2 l_1^2 p_s^2}{s(1-p_s)^2} + \frac{l_2 p_s}{s(1-p_s)}. \qquad (2.8)$$

Как видно из последних формул, независимо от плотностей вероятности времени ожидания, дисперсия процесса $X(t)$ будет конечной только в случае, если длины скачков имеют конечную дисперсию. Если же хвосты $w(\xi)$ являются тяжелыми [2, 26-27], то $\sigma^2(t) = \infty$ при любых t и будет иметь место процесс переноса, но не диффузионного типа. Бесконечность дисперсии связана с тем, что для тяжелых распределений $w(\xi)$ вероятность очень длинных скачков [т.е. того, что величина случайного скачка $|\xi| > x$ при $x \to \infty$] дается медленно убывающей степенной функцией $Pr\{|\xi| > x\} \propto x^{-\alpha}$, где $\alpha \in (0,2]$ – наименьший хвостовой параметр $w(\xi)$ и $Pr\{\cdot\}$ означает вероятность события в скобках.

Ключевую роль в описании сверхмедленных процессов играют сверхтяжелые плотности вероятности, которые характеризуются следующим асимптотическим поведением хвостов [24-27]

$$p(\tau) \sim \frac{h(\tau)}{\tau} \quad (\tau \to \infty). \qquad (2.9)$$

В данной формуле $h(\tau)$ – положительные функции, медленно меняющиеся на бесконечности, т.е. $h(\lambda\tau) \sim h(\tau)$ при $\tau \to \infty$ для всех $\lambda > 0$. Также для сохранения нормировки плотностей $p(\tau)$ на функции $h(\tau)$ накладывается ограничение $h(\tau) = o(1/\ln\tau)$ при $\tau \to \infty$. Для любой правильно меняющейся функции $L(\tau)$ и любого $\gamma > 0$ при $\tau \to \infty$ выполняются соотношения [30-31]: $\tau^{\gamma} L(\tau) \to \infty$ и $\tau^{-\gamma} L(\tau) \to 0$. Из этих выражений и асимптотической формулы (2.9) следует важная особенность такого рода распределений, а именно: все их моменты (в том числе дробного порядка) являются бесконечными.

Из условия $h(\lambda\tau) \sim h(\tau)$ следует то важное обстоятельство, что вероятность отсутствия скачка в течение времени t также будет медленно меняющейся функцией

$$V(\lambda t) = \int_{\lambda t}^{\infty} d\tau \frac{h(\tau)}{\tau} \sim \int_t^{\infty} d\tau \frac{h(\tau)}{\tau} = V(t). \qquad (2.10)$$

А поэтому в среднем частица, времена ожидания которой распределены со сверхтяжелыми плотностями, будет гораздо дольше находиться в текущей позиции и, следовательно, за одинаковое время совершит намного меньше скачков, чем если бы эти времена были распределены с обычными (т.е. имеющими конечный момент второго порядка) или тяжелыми хвостами. Более наглядно это можно продемонстрировать, если вычислить среднее число скачков для изучаемого процесса на интервале $(0, t]$.

Обозначим вероятность того, что за время t было ровно $n+1$ $(n=0,1,...)$ скачок частицы как $W^{(n+1)}(t)$. Тогда вероятность ровно $n+1$ скачка при условии, что первый скачок произошел в интервале $(\tau, \tau+d\tau)$, где $\tau \in (0, t]$ и прирост $d\tau \to 0$, дается рекуррентным выражением

$$dW^{(n+1)}(t) = d\tau p(\tau) W^{(n)}(t-\tau). \qquad (2.11)$$

Согласно определению среднее число скачков частицы за время t будет

$$\langle N(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n W^{(n)}(t). \qquad (2.12)$$

Далее, интегрируя формулу (2.11) относительно всех подходящих значений τ и применяя преобразование Лапласа к формуле (2.12), получаем выражение для среднего числа скачков частицы за время блуждания t. В пространстве Лапласа оно имеет вид

$$\langle N(t) \rangle_s = \frac{p_s}{s(1-p_s)}. \qquad (2.13)$$

Известно, что поведение функции $f(t)$ при больших t определяется поведением ее преобразования Лапласа f_s при малых s. Таким образом, из формулы (2.13) мы заключаем, что среднее число скачков $\langle N(t) \rangle$ при $t \to \infty$ задается поведением p_s при $s \to 0$. Согласно свойствам медленно меняющихся функций [30-31]

$$1 - p_s = sV_s = \int_0^{\infty} d\tau e^{-\tau} V(\tau/s) \sim V(1/s). \qquad (2.14)$$

Далее подставляя асимптотику (2.14) в уравнение (2.13) и используя известную тауберову теорему Караматы [32], мы приходим к выводу, что $\langle N(t) \rangle$ при больших временах описывается выражением

$$\langle N(t) \rangle \sim \frac{1}{V(t)}. \qquad (2.15)$$

Из последней формулы и уравнения (2.10) видно, что среднее число скачков очень медленно растет. А, значит, использование сверхтяжелых плотностей дает возможность строить модели для очень медленно меняющихся во времени стохастических процессов [24-27, 33-35]. Для сравнения, если времена ожидания имеют конечное среднее значение, то можно показать, что при больших значениях времени $\langle N(t) \rangle \propto t$; если же $p(\tau)$ – тяжелые плотности и хвостовой параметр $\alpha \in (0, 1]$, то $\langle N(t) \rangle \propto t^{\alpha}$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\langle N(t) \rangle \propto t/\ln t$ при $\alpha = 1$.

Используя уравнения (2.4) и (2.6), а также асимптотики (2.7) и (2.14), с помощью тауберовой теоремы Караматы при $t \to \infty$ получаем

$$\sigma^2(t) \sim \begin{cases} l_1^2 / V^2(t), & l_1 \neq 0, \\ l_2 / V(t), & l_1 = 0. \end{cases} \qquad (2.16)$$

Принимая во внимание формулу (2.10), видно, что для $\sigma^2(t)$ выполняется условие (1.1), а поэтому рассматриваемый процесс будет являть собою аномальную сверхмедленную диффузию. Данные асимптотические законы дисперсии были получены в работах [24-25].

2.2 Численные результаты

Так как мы изучаем поведение дисперсии процесса при больших значениях времени, то для начала нужно задать временной интервал $t \in (0, T]$, где T – большое число, на протяжение которого блуждающая частичка совершает скачки. Как отмечалось ранее в начальный момент $t = 0$ положение частицы $X(0) = 0$. Через время τ_1 частичка совершает скачок длиной ξ_1, а поэтому ее новое положение $X(\tau_1) = \xi_1$. Далее через следующее время ожидания τ_2 частичка перемещается на величину ξ_2 и ее новое положение равно $X(\tau_1+\tau_2) = \xi_1 + \xi_2$ и т.д. Пусть за время T частичка совершила N скачков, т.е. $\sum_{n=1}^{N} \tau_n \le T$ и $\sum_{n=1}^{N+1} \tau_n > T$, тогда за время блуждания координата частички определяется значением $X(T) = \sum_{n=1}^{N} \xi_n$. Следовательно, после K независимых реализаций процесса дисперсию можно определить с помощью формулы

$$\tilde{\sigma}(T) = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^{K} X_n^2(T) - \left(\frac{1}{K} \sum_{n=1}^{K} X_n(T) \right)^2 \qquad (2.17)$$

Наконец, просто изменяя значение T, мы можем проследить зависимость дисперсии процесса от времени.

Времена ожидания τ_n и длины скачков ξ_n распределены с некоторыми плотностями $p(\tau)$ и $w(\xi)$ соответственно, а значит нужно применить метод генерации случайных величин с заданным распределением. В зависимости от ситуации существует много различных подходов к этой проблеме [36]. В данной работе мы применяем метод обратного преобразования, поскольку он удобный в случае, если плотности вероятности являются положительными. Это связано с тем, что такие плотности имеют строго возрастающую функцию распределения, а значит, она имеет обратную функцию на всей области определения. Данный метод базируется на теореме [36], которая утверждает, что если $F(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' f(\eta')$ есть непрерывная функция распределения и $F^{-1}(U) = \inf\{\eta : F(\eta) = U, U \in (0,1)\}$ – обратная к ней функция, тогда при условии, что U – равномерно распределенная на (0,1) случайная величина, $\eta = F^{-1}(U)$ будет случайной величиной с функцией распределения $F(\eta)$. Таким образом, если плотности $p(\tau)$ и $w(\xi)$ положительны, то этот метод применим для генерирования случайных величин τ_n и ξ_n. Отметим, что обратная функция не всегда вычисляется в аналитическом виде, в таком случае ее можно найти численно. Также обратим внимание, что предложенный численный алгоритм легко распространяется на случай произвольного числа измерений для непрерывных во времени случайных блужданий, а также на случай, когда множества времен ожидания и длин скачков зависят друг от друга.

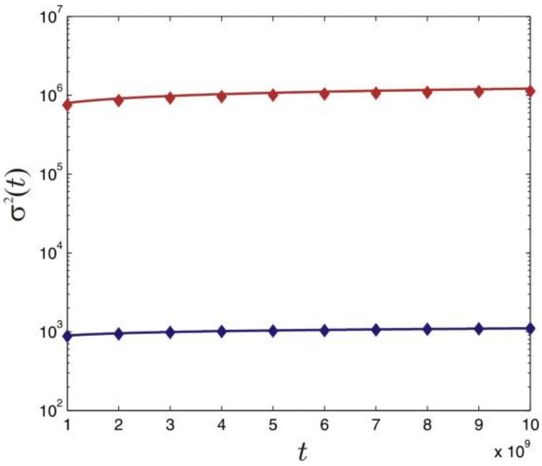

Рис. 1 – Закон диффузии для изучаемого процесса $X(t)$. Сплошные линии отвечают аналитическим формулам, а маркерами показаны результаты численного моделирования. При этом верхняя красная линия/маркеры соответствуют ситуации $l_1 \neq 0$, а нижняя синяя линия/маркеры – $l_1 = 0$

В завершении раздела приведем иллюстрации рассматриваемых в работе законов аномальной диффузии. На рисунке 1 представлены графики, полученные на основании асимптотических формул (2.16), а также с помощью численного моделирования. Для проведения расчетов мы использовали гауссовы плотности вероятности величины скачка частицы

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{\frac{-(\xi-m)^2}{2D}}, \tag{2.18}$$

где $m = l_1$ и $D = l_2 - l_1^2$ – среднее значение и дисперсия длины скачка соответственно. Распределение времен ожидания между последующими скачками мы выбрали в следующем виде

$$p(\tau) = \frac{\nu \ln^{\nu} g}{(g+\tau)\ln^{1+\nu}(g+\tau)} \tag{2.19}$$

с параметрами $\nu > 0$ и $g > 1$. Выбор таких плотностей обусловлен тем, что при численном моделировании на основании метода обратного преобразования с их помощью легко генерировать необходимые случайные величины τ_n. Не будем останавливаться на деталях данного метода, все необходимые подробности можно найти в работе [27]. Укажем лишь значения величин, используемых нами для проведения расчетов. Мы взяли параметры $\nu = g = 2$, $D = 1$ и $m = 0$ (при $l_1 = 0$), $D = 1$ и $m = 1$ (при $l_1 \neq 0$), а также при проведении моделирования во всех ситуациях число независимых реализаций процесса $X(t)$ равно $K = 10^4$. Как видно из представленного рисунка 1, аналитические и численные результаты очень хорошо соответствуют друг другу.

3. ВЫВОДЫ

Мы рассмотрели диффузионные процессы, которые характерны для случайных процессов, описываемых непрерывными во времени случайными блужданиями со сверхтяжелыми плотностями времени ожидания скачка. Такие плотности вероятности характеризуются тем, что все их моменты (в том числе дробного порядка) равны бесконечности. Это позволяет изучать процессы сверхмедленной аномальной диффузии, для которой распространение диффузионного фронта будет происходить медленнее любой положительной степени времени. Предложен численный алгоритм для исследования поведения дисперсии указанного процесса. Показано, что при больших значениях времени результаты численного моделирования находятся в прекрасном соответствии с аналитическими формулами.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен Денисову С.И. за очень полезные обсуждения, а также МОН Украины за финансовую поддержку (проект №52.16.01-01.16/18.ЗФ «Магнитные, тепловые и транспортные свойства периодически возбуждаемых систем ферромагнитных наночастиц»).

Numerical Investigation of Superslow Diffusion Laws for a Certain Class of Continuous-time Random Walks

Yu.S. Bystrik

Sumy State University, 2, Rimsky Korsakov St., 40007 Sumy, Ukraine

Using the continuous-time random walk theory we investigate the phenomenon of anomalous superslow diffusion for which the variance of the particle position increases slowly than any positive power of time. This type of diffusion emerges in the case when the probability densities of the waiting times between the successive jumps characterized by the superheavy tails with infinite moments of any fractional order. We propose a numerical method to study the behavior of the diffusion laws and show that our numerical results are in very good agreement with the theoretical predictions.

Keywords: Anomalous diffusion, Continuous-time random walks, Superheavy-tailed probability densities.

Чисельне дослідження законів надповільної дифузії для певного класу неперервних у часі випадкових блукань

Ю.С. Бистрик

Сумський державний університет, вул. Римського-Корсакова, 2, 40007 Суми, Україна

На основі теорії неперервних у часі випадкових блукань розглянуто явище аномальної надповільної дифузії, для якої дисперсія положення частинки росте повільніше за будь-яку додатню степінь часу. Даний тип дифузії виникає у випадку, коли густини ймовірності часу очікування між послідовними стрибками характеризуються надважкими хвостами з нескінченними моментами будь-якого дробового порядку. Ми пропонуємо чисельний метод дослідження поведінки законів дифузії та показуємо, що наші чисельні результати знаходяться у дуже хорошій відповідності з теоретичними передбаченнями.

Ключові слова: Аномальна дифузія, Неперервні у часі випадкові блукання, Надважкі густини ймовірності.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J.P. Bouchaud, A. Georges, *Phys. Rep.* **195**, 127 (1990).
2. R. Metzler, J. Klafter, *Phys. Rep.* **339**, 1 (2000).
3. D. ben-Avraham, S. Havlin, *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
4. H. Scher, E.W. Montroll, *Phys. Rev. B* **12**, 2455 (1975).
5. I Golding. E.C. Cox, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 098102 (2006).
6. J. Szymanski, M. Weiss, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 038102 (2009).
7. A. Klemm, R. Metzler, R. Kimmich, *Phys. Rev. E* **65**, 021112 (2002).
8. L.F. Richardson, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **110**, 709 (1926).
9. T.H. Solomon, E.R. Weeks, H.L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3975 (1993).
10. H. Katori, S. Schlipf, H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2221 (1997).
11. L. Levi, Y. Krivolapov, S. Fishman, M. Segev, *Nature Phys.* **8**, 912 (2012).
12. D.W. Sims, E.J. Southall, N.E. Humphries, et al., *Nature* **451**, 1098 (2008).
13. N.E. Humphries, N. Queiroz, J.R.M. Dyer, et al., *Nature* **465**, 1066 (2010)
14. Ya.G. Sinai, *Theory Probab. Appl.* **27**, 256 (1982).
15. H. Kesten, *Physica A* **138**, 299 (1986).
16. A. Comtet, D.S. Dean, *J. Phys. A* **31**, 8595 (1998).
17. S. Havlin, R. Blumberg Selinger, M. Schwartz, H.E. Stanley, A. Bunde, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1438 (1988).
18. H. Schiessel, I.M. Sokolov, A. Blumen, *Phys. Rev. E* **56**, R2390 (1997).
19. F. Iglói, L. Turban, H. Rieger, *Phys. Rev. E* **59**, 1465 (1999).
20. J. Dräger, J. Klafter, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5998 (2000).
21. S.I. Denisov, W. Horsthemke, *Phys. Rev. E* **62**, 7729 (2000).
22. A.V. Chechkin, J. Klafter, I.M. Sokolov, *Europhys. Lett.* **63**, 326 (2003).
23. S. Havlin, G.H. Weiss, *J. Stat. Phys.* **58**, 1267 (1990).
24. S.I. Denisov, H. Kantz, *Europhys. Lett.* **92**, 30001 (2010).
25. S.I. Denisov, H. Kantz, *Phys. Rev. E* **83**, 041132 (2011).
26. S.I. Denisov, S.B. Yuste, Yu.S. Bystrik, H. Kantz, K. Lindenberg, *Phys. Rev. E* **84**, 061143 (2011).
27. S.I. Denisov, Yu.S. Bystrik, H. Kantz, *Phys. Rev. E* **87**, 022117 (2013).
28. E.W. Montroll, G.H. Weiss, *J. Math. Phys.* **6**, 167 (1965).
29. V. Zaburdaev, S. Denisov, J. Klafter, *Rev. Mod. Phys.* **87**, 483 (2015).
30. N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels, *Regular Variation* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
31. E. Seneta, *Functions of regular variation. Lecture Notes in Mathematics* **508** (Springer-Verlag, New York, 1976).
32. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. **2** (Wiley, New York, 1971).
33. S.I. Denisov, H. Kantz, P. Hänggi, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 285004 (2010).
34. S.I. Denisov, Yu.S. Bystrik, *Acta Phys. Pol. B* **46**, 931 (2015).
35. Yu.S. Bystrik, L.A. Denisova, *J. Nano- Electron. Phys.* **7** No 3, 03049 (2015).
36. L. Devroye, *Non-Uniform Random Variate Generation* (Springer-Verlag, New York, 1986).