УДК 621.38

МАТРИЧНАЯ БИНОМИАЛЬНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

В.В. Петров,
Сумский государственный университет

В статье исследованы ранее известные свойства матричных биномиальных чисел. Приведено доказательство этих свойств, а также получено ряд новых. Получена числовая функция матричной биномиальной системы счисления.

Ключевые слова: *матричные биномиальные числа, свойства чисел, числовая функция, числовые матрицы.*

У статті досліджені раніше відомі властивості матричних біноміальних чисел. Проведено доведення цих властивостей, а також отримано ряд нових. Отримана числова функція матричної біноміальної системи числення.

Ключові слова: *матричні біноміальні числа, властивості чисел, числова функція, числові матриці.*

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Матрицы - это одно из наиболее распространенных изображений комбинаторных объектов, среди которых выделяются двоичные матрицы. С помощью таких матриц изображаются блок-схемы, графы, кодовые комбинации и другие комбинаторные конфигурации [1]. Однако они, рядом с перечисленными объектами, могут изображать и числа [2]. Такое изображение разрешает получать вместо линейных биномиальных чисел, более сложные матричные биномиальные числа в данном случае в виде двоичных биномиальных матриц. Безусловно, такая запись утрудняет роботу с числами из-за сложности их представления, но в то же время разрешает повысить скорость и помехоустойчивость обработки цифровой информации за счет наличия в их структурах естественной избыточности. Эти свойства матричных биномиальных чисел имеют довольно важное значение при построении на их основе цифровых устройств связанных со сбором и обработкой информации, например датчиков положения и различных преобразователей аналоговых величин. МБЧ имеют такие же полезные свойства, что и линейные биномиальные числа - способны эффективно сжимать и защищать информацию от несанкционированного доступа, а также порождать комбинаторные объекты [3]. Биномиальные системы счисления используются для построения помехоустойчивых компонентов цифровых систем [4; 5]. Однако все это они выполняют с большим уровнем помехоустойчивости и быстродействия, чем обычные биномиальные числа, правда, проигрывая при этом в сложности. В роботах [2] приведено определение матричных биномиальных чисел и выявлены их свойства, однако без их деления на основные, которые заданные как аксиомы, и производные, которые выведенные из основных. Такое деление разрешило бы более детально и формализовано исследовать свойства биномиальных числовых матриц, а методы их построения, нумерации и перебора сформулировать более строго, что важно при использовании этих матриц в качестве кода с естественной избыточностью для построения помехоустойчивых компонентов систем. Достижение этой задачи и ставится в данной работе.

АНАЛИЗ СВОЙСТВ МАТРИЧНЫХ БИНОМИАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В основу рассмотренных ниже матричных биномиальных чисел положена линейная биномиальная система исчисления, в которой числа записываются в виде последовательностей двоичных цифр конечной длины [2]. Переход от линейных биномиальных чисел к матричным осуществляется при помощи специального метода подробно рассмотренного в работе [2].

Определение 2.1. Двоичные $x \in \{0,1\}$ матрицы, состоящие из $(n-k+1)$ строк и k столбцов,

$$\begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0j} & \cdots & x_{0k} \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ik} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{(n-k)1} & x_{(n-k)2} & \cdots & x_{(n-k)j} & \cdots & x_{(n-k)k} \end{bmatrix}$$

удовлетворяющие свойствам 1 - 3 называются матричными биномиальными числами (МБЧ) с параметрами n и k рис. 1.

Определение 2. Совокупность всех $N = C_{n+1}^{k}$ матричных биномиальных чисел для заданных параметров n и k образуют матричный биномиальный код (МБК).

В биномиальных числовых матрицах должны выполняться следующие основные свойства, которые можно воспринимать как аксиомы:

1. В столбце матрицы может находиться не более одной 1, т.е. $x_{ij}x_{zj} = 0$, где $i, z = 0,1,...,n-k$; $i \neq z$; $j = 1,2,...,k$.

Пример 1. Дано матричное число $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ с параметрами $n=5$, $k=3$.

Для него всегда выполняется $x_{ij}x_{zj} = 0$, где $i, z = 0,1,...,2$; $i \neq z$; $j = 1,2,...,3$. Приведем нескольких значений для первого столбца: $x_{01}x_{11} = 0 \cdot 1 = 0$; $x_{01}x_{21} = 0 \cdot 0 = 0$; $x_{11}x_{21} = 1 \cdot 0 = 0$.

2. Единицы в матрице в количестве от 1 до k расположены в одной или нескольких сроках так, что перед столбцами с единицами, либо между ними отсутствуют столбцы, в которых находятся нули. Если дана начальная единица в виде элемента x_{i1}, промежуточные $x_{i'2}$, $x_{i''j}$ и конечная $x_{yj'}$, то для них справедливо равенство $x_{i1}x_{i'2} = 1$, $x_{i1}x_{i'2} \cdot ... \cdot x_{i''2j} = 1$,..., $x_{i1}x_{i'2} \cdot ... \cdot x_{yj'} = 1$, $i, i'', i', y = 0,1,...,(n-k)$; $i \ge i'' \ge i' \ge y$; $j, j' = 1,2,...,k$; $j \ge 3$.

Пример 2. Для предыдущего примера справедливо выражение $x_{i1}x_{i'2} = 1$, $x_{i1}x_{i'2}x_{y3} = 1$ $i, i', y = 0,1,...,2$; $i \ge i' \ge y$. Для конкретных значений $x_{11}x_{12} = 1 \cdot 1 = 1$, $x_{11}x_{12}x_{03} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

3. Среди элементов любой диагонали матрицы, направленной слева направо, только один элемент может быть равен 1. Это значит, что произведение $x_{ij}x_{(i+p)(j+p)} = 0$ для всех значений $i = 0,1,...,(n-k)$ и $j = 1,2,...,k$, где $p = 1,2,...,(n-k-i)$ при $k - j \ge n-k-i$.

Пример 3. Для примера из первого свойства справедливо выражение $x_{ij}x_{(i+p)(j+p)} = 0$ для всех значений $i = 0,1,...,2$ и $j = 1,2,...,3$, где

$p = 1, 2, ..., (2-i)$ при $3 - j \geq 2 - i$. Для конкретных значений $x_{01}x_{12} = 0 \cdot 1 = 0$, $x_{01}x_{22} = 0 \cdot 0 = 0$; $x_{02}x_{13} = 0 \cdot 0 = 0$; $x_{11}x_{22} = 0 \cdot 0 = 0$.

МБЧ для параметров $n = 5$, $k = 3$ приведены на рис. 1.

МБК является помехоустойчивым кодом, содержащим $N_p = C_{n+1}^k$ разрешенных комбинаций и $N_{\text{ç}} = 2^{(n-k+1)k} - N_{\text{ç}}$ запрещенных комбинаций. Для того чтобы определить к какому классу принадлежит кодовая комбинация (класс запрещенных или класс разрешенных) необходимо проверить основные свойства 1 – 3. Невыполнения хотя бы одного из основных свойств 1 - 3 свидетельствует о том, что проверяемая комбинация принадлежит к классу запрещенных. Однако проверка такого количества свойств неудобна для быстрого поиска запрещенных комбинаций, поскольку требуют большого количество времени и большого количества операций. Таким образом, была поставлена задача получения простого свойства, проверка которого даст информацию о классе кодовой комбинации. Данное свойство даст возможность ускорить алгоритм проверки кодовых комбинаций. С этой целью была записана теорема 1.

0	1	2	3
$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$
0 0 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 1 0	0 0 1 1 1
4	5	6	7
$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$
0 1 0 0 0	0 1 0 1 0	0 1 0 1 1	0 1 1 0 0
8	9	10	11
$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$
0 1 1 0 1	0 1 1 1 0	1 0 0 0 0	1 0 0 1 0
12	13	14	15
$\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$
1 0 0 1 1	1 0 1 0 0	1 0 1 0 1	1 0 1 1 0
16	17	18	19
$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}$
1 1 0 0 0	1 1 0 0 1	1 1 0 1 0	1 1 1 0 0.

Рисунок – 1. Матричный биномиальный код $n = 5$, $k = 3$

Теорема 2.1. Все разрешенные кодовые комбинации N_{δ} МБК с заданными параметрами n и k удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{(n-k-1)} x_{ij} \cdot Sm_{(i+1)j} = 0 \\ \sum_{i=0}^{(n-k)} \sum_{j=1}^{(k-1)} \overline{Sm_{ij}} \cdot x_{i(j+1)} = 0 \end{cases}, \qquad (1)$$

где $Sm_{mj} = \sum_{z=m}^{(n-k)} x_{zj}$.

Доказательство. Докажем, что проверка уравнений системы эквивалентна проверке основных свойств 1-3 МБЧ.

Докажем, что первое уравнение системы эквивалентно проверке основного свойства 1. Перепишем первое свойство только для одного столбца матрицы в виде суммы: $\sum_{i=0}^{(n-k-1)} x_{ij} \cdot x_{(i+1)j} = 0$, или $\sum_{i=0}^{(n-k-1)} x_{ij} \left(\sum_{z=i}^{(n-k)} x_{(z+1)j} \right) = 0$. Обозначим $Sm_{mj} = \sum_{l=m}^{(n-k)} x_{lj}$, тогда уравнение примет вид $\sum_{i=0}^{(n-k-1)} x_{ij} \cdot Sm_{(i+1)j} = 0$. Тогда для всех столбцов матрицы: $\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{(n-k-1)} x_{ij} \cdot Sm_{(i+1)j} = 0$. Таким образом, проверка первого уравнения системы равноценна первому основному свойству МБЧ, поскольку является его эквивалентным преобразованием.

Докажем, что второе уравнение системы эквивалентно проверке основного свойства 2. В соответствие со вторым свойством биномиальных матриц логические суммы единиц по столбцам матрицы представляют непрерывную последовательность единиц. Это значит, что если в матрице расположено j единиц, $j \le k$, то $Sm_{01} Sm_{02} \cdot ... \cdot Sm_{0j'} \cdot ... \cdot Sm_{0j} = 1$, где $Sm_{0j'} = \sum_{z=0}^{(n-k)} x_{zj'}$. Данная последовательность может заканчиваться нулем или несколькими нулями, при условии, что количество единиц в матрице меньше k, однако не может содержать промежуточных нулей, находящихся между единицами. Для последовательности справедливо равенство $\overline{Sm_{0j}} x_{0(j+1)} = 0$, где $j = 1, 2, ..., (k-1)$. Выражение примет значение единицы, только в том случае, если последовательность $Sm_{01}, Sm_{02}, ..., Sm_{0j'}, ..., Sm_{0k}$ будет содержать промежуточный ноль, что противоречит основному свойству 2.

Промежуточный ноль будет иметь место, если в матрице первая единица будет находиться в нулевой строке, в z-том столбце, причем $z > 0$, то $Sm_{0(z-1)} = 0$, $\overline{Sm_{0(z-1)}} x_{0z} = 1 \cdot 1 = 1$. Или же в столбце под номером z' нулевой строки будет содержаться промежуточный ноль, то $Sm_{0z'} = 0$,

$\overline{Sm_{0z'}}x_{0(z'+1)} = 1 \cdot 1 = 1$. Перепишем равенство в виде суммы $\sum_{j=1}^{(k-1)} \overline{Sm_{0j}}x_{0(j+1)} = 0$.

Причем данное равенство справедливо не только для нулевой строки, а и для первой, второй и т.д., до $(n-k)$. Это доказывается тем, что все без исключения МБЧ удовлетворяют основному свойству 2. Таким образом, данное свойство выполняется для таких чисел, которые не содержат единиц в нулевой строке, но содержат единицы в первой строке: $\sum_{j=1}^{(k-1)} \overline{Sm_{1j}}x_{1(j+1)} = 0$. Таким же образом данное свойство доказывается для третьей строки и т.д., до строки с номером $(n-k)$. Для всех строк МБЧ уравнение примет вид: $\sum_{i=0}^{(n-k)} \sum_{j=1}^{(k-1)} \overline{Sm_{ij}}x_{i(j+1)} = 0$. Таким образом, показано, что проверка второго уравнения системы (1) эквивалентна проверки основного свойства 2.

Согласно третьему основному свойству среди элементов любой диагонали матрицы, направленной слева направо, только один элемент может быть равен 1. Допустим, что в диагонали находятся более одной единицы, т.е. элемент $x_{ij} = 1$, $x_{(i+1)(j+1)} = 1$. Тогда для $i+1$-ой строки не выполняется второе равенство системы (1), поскольку она содержит промежуточный ноль $x_{(i+1)j} = 0$, $\overline{Sm_{(i+1)j}}x_{(i+1)j} = 1 \cdot 1 = 1$. Если же рассмотреть вариант, когда в диагонали находятся более одной единицы $x_{ij} = 1$, $x_{(i+1)(j+1)} = 1$, но в $i+1$-ой не будет сдержаться промежуточных нулей $x_{(i+1)j} = 1$, тогда в j-м столбце будет находиться две единицы и $x_{(i+1)j} \cdot x_{ij} = 1$, что противоречит первому уравнению системы (1) и первому основному свойству. Таким образом, показано, что проверка основного свойства 3 эквивалентна проверке равенств системы (1).

Доказано, что последовательная проверка основных свойств 1 – 3 эквивалентна проверке равенств системы (1). Теорема доказана.

Свойство МБЧ записанное в виде (1) названо достаточным свойством и позволяет получить ускоренный алгоритм определения класса кодовых комбинаций МБК.

Пример 2.4. Определить класс кодовых комбинаций $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ с параметрами $n = 5$, $k = 3$.

Решение. Определим класс комбинаций при помощи проверки достаточного свойства в виде системы (1).

Для первой комбинации уравнения системы примут вид:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=0}^{2} x_{ij}\cdot Sm_{(i+1)j} = 0\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 0=0 \\ \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{2} \overline{Sm_{ij}}\cdot x_{i(j+1)} = 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0=0 \end{cases}$$

Как видно, оба равенства системы выполняются, исходя из чего сделан вывод о том, что комбинация принадлежит к классу разрешенных.

Для второй кодовой комбинации система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=0}^{2} x_{ij}\cdot Sm_{(i+1)j} = 0\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 0=1 \\ \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{2} \overline{Sm_{ij}}\cdot x_{i(j+1)} = 0\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 0=0 \end{cases}$$

Вторая кодовая комбинация принадлежит к классу запрещенных, поскольку для нее не выполняется первое равенство системы. Это подтверждается тем, что она содержит две единицы во втором столбце и для нее не выполняется первое основное свойство.

Приведем оставшиеся свойства МБЧ, приведенные в работах [2; 6] в качестве производных и докажем их при помощи основных свойств.

Утверждение 1. Число элементов биномиальной матрицы $l=(n-k+1)k$.

Доказательство. Согласно определению, биномиальная матрица состоит из $(n-k+1)$ строк и k столбцов. Тогда количество элементов матрицы равняется $l=(n-k+1)k$. Утверждение доказано.

Пример 5. Дано матричное число $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ с параметрами $n=5$, $k=3$. Число элементов матрицы $l=(2+1)3=9$.

Утверждение 2. Число нулей в биномиальной матрице равняется l.

Доказательство Матрица, которая кодирует нуль, состоит только из нулей. Поэтому максимальное число нулей в матрице, равняется l.

Пример 6. Рассмотрим матрицу с параметрами $n=5$, $k=3$, кодирующую ноль $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Число нулей в матрице равно $l=(2+1)3=9$.

Утверждение 3. Число единиц q_M в матрице не превышает значения k.

Доказательство Согласно определению матрица имеет в своем составе k столбцов и в каждом столбцы согласно основному свойству 2 не может стоять больше одной единицы, то общее количество единиц в матрице не превосходит k. Утверждение доказано.

Пример 7. Рассмотрим матричное число $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ с параметрами $n=5$, $k=3$. Максимальное число единиц равно 3.

Утверждение 4. Число единиц в строке биномиальной матрицы не превышает значения k.

Доказательство. Строка матрицы по ее определению не может вместить больше k двоичных цифр, Поэтому он не может иметь больше k единиц. Утверждение доказано.

Пример 8. Рассмотрим матричное число $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Максимальное число единиц в его сроках равно 3.

Утверждение 5. Единицы в матрице располагаются так, что единица каждого следующего столбца находится или в той же строке, что и в предыдущем столбце, или в одной из верхних строк.

Доказательство. Если бы это было не так, как указано в утверждении, то в силу того, что единицы идут в столбцах матрицы размещаются последовательно и без промежутков, то любая единица, которая оказалась бы ниже предыдущих ей единиц образовывала бы с ними диагональ с двумя и более единицами, что противоречит основному свойству 3. Утверждение доказано.

Пример 9. Рассмотрим матричное биномиальное число, приведенное в утверждении 3.

Утверждение 6. Логическое суммирование элементов диагоналей биномиальной матрицы, идущих сверху вправо, образуют цифры линейного биномиального числа a_l:

$$\begin{aligned} &x_{(n-k)1} = a_{l-1}, \\ &x_{(n-k-1)1} + x_{(n-k)2} = a_{l-2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_{0(k-1)} + x_{1k} = a_1, \\ &x_{0k} = a_0. \end{aligned}$$

где $i = 0,1,...,(n-k)$; $j = 1,2,...,k$; $l = 0,1,...,(n-1)$.

Доказательство. Согласно алгоритму построения МБЧ, рассмотренного [2], в линейном биномиальном числе каждый нулевой разряд, стоящий слева перед первой единицей или между единицами заменяется k нулями. Полученная двоичная последовательность справа налево разбивается на $(n-k+1)$ k-разрядных строк, которые записываются в виде матрицы, начиная с нижней строки. Логическое же суммирование элементов диагоналей биномиальной матрицы, идущих сверху вправо, производит обратную операцию, уменьшая количество единиц в k раз. Это подтверждается основным свойством 3 и производным свойством 13.

Пример 10. Для примера из первого свойства справедливо: $x_{21} = a_4$, $x_{11} + x_{22} = a_3$, $x_{01} + x_{12} + x_{23} = a_2$, $x_{02} + x_{13} = a_1$, $x_{01} = a_0$. Или $0 = 0$, $1+0 = 1$, $0+1+0 = 1$, $0+0 = 0$, $1 = 0$. После проведения логического суммирования получено линейное биномиальное число 01101.

Утверждение 7. Количество единиц q_M в биномиальной матрице и q в биномиальном числе равны между собой: $q_M = q$.

Доказательство. Согласно производному свойству 6 логическое суммирование элементов диагоналей, направленных слева направо, образует цифры биномиального числа. Однако данная операция не меняет количества единиц, поскольку в соответствии с основным свойством 3, среди элементов любой диагонали только один элемент может быть равен 1. Это значит, что единицы не суммируются между собой, а логическое суммирование единиц происходит только с нулями. Таким образом, в результате перехода от МБЧ к линейным биномиальным числам количество единиц не изменяется, $q_M = q$. Утверждение доказано.

Пример 11. Рассмотрим матричное биномиальное число $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ и соответствующее ему биномиальное число 01101. Они оба содержат по 3 единицы.

Утверждение 8. В первом столбце матрицы, за исключением нулевой кодовой комбинации, обязательно содержится 1.

Доказательство. Данное свойство вытекает из основного свойства 2 МБЧ. Исключение же составляет нулевая кодовая комбинация, поскольку она вовсе не сдержит единиц. Утверждение доказано.

Пример 12. Рассмотрим биномиальное число, кодирующее ноль $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ и любое другое число, например, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ в первом столбце которого содержится единица.

Утверждение 9. Во всех сроках матрицы, за исключением $(n-k)$-ой, в любой ее части может быть образована последовательность единиц длиной от 1 до k.

Доказательство. Пусть в i-ой строке, $i<(n-k)$ находится последовательность единиц длинной l, а в сроках с $(i+1)$ по $(n-k)$ одна или несколько последовательностей единиц общей длинной m, причем $(l+m)\le k$. Согласно основным свойствам 1, 2 последовательность единиц в i-и строке будет начинаться с $(m+1)$-го столбца. Количество единиц m может меняться в переделах от 0 до $(k-1)$. Как результат в любой i-ой строке, $i<(n-k)$ может быть образована последовательность единиц длиной вот 1 до k. Утверждение доказано.

Пример 13. Рассмотрим пример к утверждению 1. В его нулевой строке образована последовательность из одной единицы, в первой - последовательность из двух единиц.

Утверждение 10. Последовательности единиц, образованные в сроках матрицы не могут содержать промежуточных нулей.

Доказательство. Пусть в i-ой строке, $i=0,1,...,(n-k)$ расположена последовательность единиц, начиная с j-го оп l-и столбец, $j<l$, $l\le k$, содержащая промежуточный ноль в m столбце $j<m<l$. Это противоречит основному свойству 2, поскольку $x_{im}x_{i(m+1)}=0$. Утверждение доказано.

Пример 14. Рассмотрим пример к утверждению 4.

Утверждение 11. Если в первом столбце отсутствует единица, то и в других столбцах не может быть единиц.

Доказательство. В первом столбце единица может отсутствовать только в матрице, кодирующей 0, а она состоит только из нулей. Если же в матрице содержатся единицы, то они всегда располагаются, начиная с первого столбца, иначе это противоречит основному свойству 2. Утверждение доказано.

Пример 15. Рассмотрим биномиальное число, кодирующее ноль $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ и любое другое число, например, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ в первом столбце которого содержится единица.

Утверждение 12. Если в $(n-k)$-ой строке расположена последовательность единиц, то она всегда расположена в ее начальной части, начиная с элемента $x_{(n-k)1}$ и до $x_{(n-k)j'}$, то произведение $x_{(n-k)1}x_{(n-k)2}\cdots x_{(n-k)j'}=1$, $j'=1,2,...,k$.

Доказательство. Допустим, что утверждение не выполняется и в $(n-k)$-ой строке расположена последовательность единиц длинной l начиная с m-го столбца, $m>0$, $(l+m-1)\le k$. Тогда $x_{(n-k)(m-1)}x_{(n-k)m}=0$, что противоречит основному свойству 2. Утверждение доказано.

Пример 16. Рассмотрим матричное биномиальное число $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Для него справедливо $x_{21}x_{22}=1\cdot 1=1$.

Утверждение 13. Число нулей, между соседними единицами, стоящими в разных сроках биномиальной матрицы, при счете по срокам справа налево, кратно k .

Доказательство. Согласно алгоритму построения МБЧ, более подробно рассмотренного в третьем разделе, в линейном биномиальном числе каждый нулевой разряд, стоящий слева перед первой единицей или между единицами заменяется k нулями. Отсюда число нулей в матрице между единицами при счете слева направо кратно k. Утверждение доказано.

Пример 17. Рассмотрим матричное биномиальное число $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ с параметрами $n=5$, $k=3$. Число нулей между соседними единицами, стоящими в разных сроках при счете справа налево кратно 3.

Утверждение 14. Единица в первом столбце матрицы всегда расположена так, что остальные единицы находятся либо в того же строке, либо в сроках выше.

Доказательство. Данное свойство вытекает из основного свойства 3. При другом расположении единиц данное свойство не будет выполняться. Утверждение доказано.

Пример 18. Рассмотрим пример из предыдущего утверждения.

Утверждение 15. Единицы в матрице в количестве от 1 до k расположены в одной или нескольких сроках так, что первая из них находится в крайнем левом, а последняя - в любом последующем столбце.

Доказательство. Пусть в матрице расположена одна или несколько последовательностей единиц общей длинной l, $l\le k$. В производном утверждении 8 показано что, они будут располагаться, начиная с левого столбца и заканчиваться в l-м столбце. Если l будет меняться от 2 до k, то последняя единица последовательности будет располагаться в одном из последующих столбцов. Утверждение доказано.

Пример 19. Рассмотрим матичное биномиальное число $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Утверждение 16. Нижние разряды первого столбца не кодирующей ноль биномиальной матрицы, начиная с $(n-k)$-ой строки и до строки, содержащей единицу, представляют собой старшие разряды соответствующего биномиального числа.

Разряды второго столбца, начиная со строки содержащей единицу в первом столбце и направленные к вершине второго столбца до разряда, содержащего единицу, включительно или при его отсутствии до нуля в начале столбца включительно, образуют следующие за полученными в первом столбце старшими разрядами младшие по отношению к ним разряды линейного биномиального числа.

Аналогично находятся элементы, образующие младшие разряды биномиального числа в третьем столбце и т.д. до k-го столбца включительно.

Доказательство. Данное свойство вытекает из производного свойства 6, согласно которому логическое суммирование элементов диагоналей матрицы образуют разряды биномиального числа.

Пример 20. Рассмотрим пример для шестого производного утверждения. Его нижние разряды первого столбца $x_{21}=0$, $x_{11}=1$ начиная со строки $i=5-3=2$ и до строки $i=1$, содержащей единицу, представляют собой старшие разряды соответствующего биномиального числа. Разряды второго столбца $x_{12}=1$, $x_{02}=0$, начиная со строки $i=1$ содержащей единицу в первом столбце и направленные к вершине второго столбца до нуля в начале столбца включительно, образуют следующие разряды линейного биномиального числа. Разряд третьего столбца $x_{03}=1$, начиная со строки $i=0$ содержащей единицу во втором столбце и направленные к вершине второго столбца до разряда, содержащего единицу, образует младший разряд линейного биномиального числа. Таким образом, получено линейное биномиальное число 01101, что совпадает с примером утверждения 6.

Утверждение 17. Диапазон матричных биномиальных чисел с параметрами n и k равен диапазону линейных биномиальных чисел с теми же параметрами и находится как $P=C_{n+1}^{k}$.

Доказательство. Доказательство данного утверждения совпадает с доказательством теоремы 3.1, приведенной в третьей главе.

Пример 21. Примером к данному утверждению может служить рис 2.1, на котором приведены МБЧ с параметрами $n=5$, $k=3$ в количестве $P=C_{5+1}^{3}=20$ и табл. 3.1 где приведены линейные биномиальные числа с теми же параметрами в таком же количестве.

Утверждение 18. Количество нулей до первой 1 в биномиальной матрице при счете слева направо от начала нижней $(n-k)$- строки не превышает значения $(n-k)k$.

Доказательство. В соответствии со свойствами линейных биномиальных чисел они содержат не боле $(n-k)$ нулей перед первой единицей [2]. Согласно методу построение МБК количество нулей перед первой единицей в линейных биномиальных числах увеличивается в k раз. Отсюда количество нулей до первой единицы не превышает $(n-k)k$. Утверждение доказано.

Пример 22. Рассмотрим матричное число $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $n=5$, $k=3$. Оно содержит 6 нулей при счете слева направо от начала нижней $(n-k)=2$ строки, что удовлетворяют неравенству $6 \le (5-3)3$.

НУМЕРАЦИЯ МАТРИЧНЫХ БИНОМИАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В работе [2] приведен метод нумерации МБЧ. Достоинства данного метода состоит в возможности вычислять десятичные номера МБЧ, заменяя при этом расчеты биномиальных коэффициентов простым сложением. Однако недостаток метода состоит в том, что он является графическим. Была поставлена задача получения аналитического выражения, позволяющего определять десятичные номера матричных чисел. Иными словами была поставлена задача получения числовой функции матричной биномиальной системы счисления.

Задача решена следующим образом. Логическое суммирование элементов диагоналей биномиальной матрицы, идущих сверху вправо, образуют цифры линейного биномиального числа a_l

$$A_i = x_{(n-k)1}C_n^k + (x_{(n-k-1)1} \vee x_{(n-k)2})C_{n-1}^{k-q_{(n-1)}} + \ldots + (x_{0(k-1)} \vee x_{1k})C_2^{k-q_2} + x_{0k}C_1^{k-q_1}$$

где

$$\begin{aligned} & a_{n-1} = x_{(n-k)1}, \\ & a_{n-2} = x_{(n-k-1)1} + x_{(n-k)2}, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & a_1 = x_{0(k-1)} + x_{1k}, \\ & a_0 = x_{0k}. \end{aligned}$$

образуют логическую сумму элементов диагоналей биномиальной матрицы, идущих сверху вправо;

$q_l = \sum_{i=l}^{n-1} a_i$, - сумма единичных значений цифр от $(n-1)$-го разряда до l -го включительно.

ВЫВОДЫ

В данной работе исследованы ранее известные свойства МБЧ. Приведено доказательство этих свойств, а также получено ряд новых. Новые достаточные свойства позволили получить ускоренный метод определения класса кодовых комбинаций МБК.

Получена числовая функция матричной биномиальной системы счисления.

SUMMARY

MATRIX BINOMIAL NUMBER SYSTEM

V.V. Petrov
Sumy state university, Sumy

In this paper properties of matrix binomial numbers are considered. Known before properties were proved and some new properties were obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тараканов В. Э. Комбинаторные задачи и (0, 1) – матрицы / В. Э. Тараканов. - М.: Наука, 1985. - 192 с.
2. Борисенко А.А. Введение в теорию биномиального счета / А.А. Борисенко. - Сумы: ИТД «Университетская книга», 2004. - 88 с.
3. Borisenko A.A. Binomials Calculus: Advantages and Prospects / A.A. Borisenko // ISIC Express Letters An International Journal of Research and Surveya. - Japan, Tokai University. – P. 123-130.
4. Борисенко А.А. Биномиальный счет и счетчики: Монография / А.А.Борисенко. - Сумы: Изд-во СумДУ, 2008.- 152 с.
5. Борисенко А.А. Синтез матричных биномиальных счетчиков АСУ и приборы автоматики / А.А. Борисенко, В.В. Петров. - Харьков, ХНУРЕ, 2009.
6. Борисенко А.А. Представление биномиальных чисел в матричной форме / А.А. Борисенко // Вестник СумГУ. – 2003. - №11. - С. 51-56.

Поступила в редакцию 8 октября 2010 г.