

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Д. О. Левченко

**Математичні методи й моделі у розрахунках
енергетичного обладнання на ЕОМ**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Суми
Сумський державний університет
2016

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Математичні методи й моделі у розрахунках енергетичного обладнання на ЕОМ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів напряму підготовки
6.050604 «Енергомашинобудування»
денної та заочної форм навчання

Затверджено
на засіданні кафедри
технічної теплофізики
як конспект лекцій
із дисципліни
«Математичні методи й моделі
у розрахунках енергетичного
обладнання на ЕОМ».
Протокол № 10 від 30.06.2016.



Суми
Сумський державний університет
2016

Математичні методи й моделі у розрахунках енергетичного обладнання на ЕОМ : конспект лекцій / укладач Д. О. Левченко.
– Суми : Сумський державний університет, 2016. – 69 с.

КАФЕДРА ТЕХНІЧНОЇ ТЕПЛОФІЗИКИ

Лекція 1

Математична модель

Із послідовності основних етапів математичного моделювання випливає, що визначальну роль у ньому відіграє математична модель (ММ) досліджуваного технічного об'єкта. Тому перш за все необхідно приділити увагу основним властивостям ММ і вимогам до неї, а також класифікації ММ.

1.1. Поняття математичної моделі

Поняття математичної моделі (ММ), як і ряд інших понять, що використовуються в математичному моделюванні, не має строгого формального визначення. Проте в це поняття вкладають цілком конкретний зміст, з яким, зокрема, тісно пов'язане застосування математики в інженерній практиці. Більше того, такі наукові дисципліни, як механіка, фізика та їхні численні розділи, є, по суті, упорядкованими множинами ММ, побудова яких супроводжується теоретичним обґрунтуванням адекватного відображення цими моделями властивостей розглянутих процесів та явищ. Саме за допомогою ММ наукові дисципліни взаємодіють з математикою. Можливо, до цього зводиться сенс зауваження Карла Маркса про те, що будь-яка наука лише тоді досягає досконалості, коли їй вдається користуватися математикою.

Етапи розвитку багатьох природничо-наукових напрямків у пізнанні законів природи і в удосконаленні техніки – це побудова послідовності все більш точних і більш повних ММ досліджуваних процесів та явищ. Однак історія науки знає не лише випадки послідовного уточнення тієї чи іншої ММ, але й випадки відмови від деяких ММ унаслідок розбіжностей прогнозованих ними результатів із реальністю.

Відповідає реальності (адекватна) ММ, яка є, як правило, великим науковим досягненням. Вона дозволяє провести детальне дослідження досліджуваного об'єкта і дати надійний прогноз його поведінки у різних умовах. Але за адекватність ММ нерідко доводиться розплачуватися її ускладненням, що викликає труднощі при її використанні. У цьому випадку на

допомогу математиці приходить сучасна обчислювальна техніка, яка істотно розширила клас ММ, допустивши вичерпний кількісний аналіз.

Одні й ті самі ММ знаходять часом абсолютно різні додатки. Відомо, наприклад, що закон Ньютона тяжіння двох матеріальних точок і закон взаємодії двохточкових електричних зарядів при відповідному виборі одиниць вимірювання фізичних величин можна виразити однаковими формулами. За допомогою однієї й тієї самої ММ, яка містить рівняння Пуассона:

$$\nabla^2 u(M) + f(M) = 0, \quad (1.1)$$

де ∇^2 – диференціальний оператор Лапласа, а $u(M)$ і $f(M)$ – шукана і задана функції положення точки $M \in V$ у деякій області V , можна вивчати усталені процеси течії рідини і поширення теплоти, розподіл електричного потенціалу, деформацію мембрани, механічні напруги при крученні бруса, фільтрацію нафти у нафтоносному шарі або вологи в ґрунті, поширення якої – або домішки в повітрі або епідемії в регіоні. У кожному із перелічених завдань функції $u(M)$ і $f(M)$ набувають свого сенсу, але їх зв'язок описує загальне для цих завдань рівняння (1.1).

Наведені приклади характеризують властивість **універсальності ММ**. Завдяки цій властивості виникає "спорідненість" між різними галузями знань, що прискорює їх спільний розвиток.

Таку спільність та універсальність ММ можна пояснити тим, що в математиці використовують абстрактні основоположні поняття, нечисленні, але дуже ємні за змістом. Це дозволяє конкретні факти із найбільш різних галузей знань розглядати як прояв цих понять і відносин між ними. Сукупність таких понять і відносин, виражених за допомогою системи математичних символів і позначень, відображають деякі властивості досліджуваного об'єкта, і мають назву **математичної моделі** цього об'єкта. У даному випадку математика є, по суті, універсальною мовою науки. Її універсальність французький математик Анрі Пуанкаре (1854 –

1912) визначив однією фразою: «Математика – це мистецтво називати різні речі одним і тим самим ім'ям».

1.2. Структура математичної моделі

У досить загальному випадку досліджуваній *технічній об'єкт* (ТО) кількісно можна охарактеризувати векторами $x \in R^k, g \in R^m, i, y \in R^n$ *зовнішніх, внутрішніх та вихідних параметрів* відповідно. Одні й ті самі фізичні, механічні або інформаційні характеристики ТО в моделях різного рівня і змісту можуть виконувати роль як зовнішніх або внутрішніх, так і вихідних параметрів.

Наприклад, для електронного підсилювача вихідними параметрами є коефіцієнт посилення, смуга частот, що пропускає сигнали, вхідний опір, що розсіюється, потужність, зовнішніми – опір та ємність навантаження, напруги джерел живлення, температура навколишнього середовища, а внутрішніми – опір резисторів, ємності конденсаторів, характеристики транзисторів. Але якщо розглядати окремо взятий транзистор, то такі його характеристики, як відпираюча напруга і колекторний струм, необхідно вже віднести до його вихідних параметрів, а як зовнішні треба буде розглядати струми і напруги, що задаються комутуючими з ним елементами підсилювача.

При створенні ТО значення вихідних параметрів або діапазони їх можливої зміни обумовлюють у технічному завданні на розроблення ТО, тоді як зовнішні параметри характеризують умови його функціонування.

У порівняно простому випадку *математична модель* (ММ) ТО може являти собою співвідношення

$$y = f(x, g), \quad x \in R^k, \quad g \in R^m, \quad y \in R^n, \quad (1.2)$$

де f – векторна функція векторного аргументу. Модель у вигляді (1.2) дозволяє легко обчислювати вихідні параметри за заданими значеннями зовнішніх і внутрішніх параметрів, тобто розв'язувати так звану *пряму задачу*. В інженерній практиці розв'язання прямої задачі часто називають перевірним розрахунком. При створенні ТО виникає необхідність

розв'язувати більш складну так звану *зворотню задачу*: за обумовленими технічними задачами на проектування ТО значенням зовнішніх і вихідних параметрів знаходити його внутрішні параметри. В інженерній практиці розв'язання зворотної задачі відповідає так званій проектувальній розрахунок, що часто має на меті оптимізацію внутрішніх параметрів за деяким критерієм оптимальності. Однак при побудові ММ ТО функція f в (1.2), як правило, заздалегідь невідома і її необхідно встановити. Це найбільш складна *задача ідентифікації* ММ (від латинського слова *identifico* – ототожнюю, якому в цьому випадку надають змісту «розпізнаю»).

Задача ідентифікації може бути розв'язана шляхом математичної обробки інформації про ряд таких станів ТО, для кожного з яких відомі (наприклад, виміряні експериментально) значення вихідних, внутрішніх та зовнішніх параметрів. Один із таких способів пов'язаний із застосуванням регресійного аналізу [XVII]. Якщо інформація про внутрішні параметри відсутня або ж внутрішня будова ТО занадто складна, то ММ такого ТО будують за принципом *чорного ящика* – встановлюють співвідношення між зовнішніми вихідними параметрами шляхом дослідження реакції ТО на зовнішні впливи.

Теоретичний шлях побудови ММ полягає у встановленні зв'язку між y, x і g у вигляді *операторного рівняння*

$$L(u(z)) = 0, \quad (1.3)$$

де L – деякий оператор (у загальному випадку нелінійний); 0 – нульовий елемент простору, в якому діє цей оператор; z – вектор незалежних змінних, у загальному випадку містить час і просторові координати, а u – вектор *фазових змінних*, що включає ті параметри ТО, які характеризують його стан. Але навіть якщо можливо одержати розв'язок (1.3) і знайти залежність $u(z)$ від z , то далеко не завжди вдається уявити ММ ТО в явному щодо вектора y вигляді (1.2). Тому саме (1.3) визначає в загальному випадку структуру ММ ТО, а (1.2) є простішим окремим випадком такої моделі.

1.3. Властивості математичних моделей

Із зазначеного раніше випливає, що при вивченні реально існуючого або мислимого *технічного об'єкта* (ТО) математичні методи застосовують до його *математичної моделі* (ММ). Це застосування буде ефективним, якщо властивості ММ задовольняють певні вимоги. Розглянемо основні з цих властивостей.

Повнота ММ достатньою мірою дозволяє відобразити в саме її характеристики та особливості ТО, які цікавлять нас із точки зору поставленої мети проведення *обчислювального експерименту*. Наприклад, модель може досить повно описувати, як протікають в об'єкті процеси, але не відбивати його габаритні, масові або вартісні показники. Так, ММ резистора у вигляді добре відомої формули *$U = IR$ закону Ома* * має властивість повноти лише з точки зору встановлення зв'язку між падінням електричної напруги U на резисторі, його *опором* R і проходить через нього струмом силою I , але не дає ніякої інформації про розміри, масу, теплостійкість, вартість та інші характеристики резистора, щодо яких вона не є повною. Відзначимо, що в розглянутій ММ опір R резистора виступає в ролі його *внутрішнього параметра*, тоді як якщо задано U , то I буде *вихідним параметром*, U – *зовнішнім параметром*, і навпаки.

Точність ММ дає можливість забезпечити прийнятій збіг реальних і знайдених за допомогою ММ значень вихідних параметрів ТО, що становлять вектор:

$$y = (y_1 y_2 \dots y_i \dots y_n)^T \in R^n.$$

Нехай y_i^M і y_i^P – знайдене за допомогою ММ і реальне значення i -го вихідного параметра. Тоді відносна похибка ММ щодо цього параметра буде дорівнювати

$$\varepsilon_i = \frac{y_i^M - y_i^P}{y_i^P}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Як скалярну оцінку вектора

$$\varepsilon = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_i \dots \varepsilon_n)^T \in R^n$$

можна взяти будь-яку його норму, наприклад:

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \quad \text{або} \quad \varepsilon = \max_{i=1, n} |\varepsilon_i|$$

Оскільки вихідні параметри ТО за допомогою ММ пов'язані з його зовнішніми та внутрішніми параметрами, то ε як кількісна характеристика точності моделі цього ТО, буде залежати від координат векторів x і g .

Адекватність ММ – це здатність ММ описувати вихідні параметри ТО з відносною похибкою не більше деякого заданого значення δ . Нехай при деяких очікуваних номінальних значеннях зовнішніх параметрів ТО, що становлять вектор $x_{\text{ном}}$, з умови мінімуму ε шляхом розв'язання задачі скінченновимірної оптимізації [XIV] знайдені значення внутрішніх параметрів, що становлять вектор $g_{\text{ном}}$ і забезпечують мінімальне значення ε_{min} відносної похибки ММ. Тоді при фіксованому векторі $g_{\text{ном}}$ можна побудувати безліч

$$X = \{x \in R^k : \varepsilon \leq \delta\} \in R^k,$$

що є **областю адекватності даної ММ**. Зрозуміло, що $X = \emptyset$ при $\delta < \varepsilon_{\text{min}}$ а чим більше задане значення $\delta > \varepsilon_{\text{min}}$, тим ширша область адекватності ММ, тобто ця ММ застосовна в більш широкому діапазоні можливої зміни зовнішніх параметрів ТО.

У більш загальному сенсі під адекватністю ММ розуміють правильний якісний і досить точний кількісний опис саме тих характеристик ТО, які важливі в даному конкретному випадку. Модель, адекватна при виборі одних характеристик, може бути неадекватною при виборі інших характеристик того самого ТО. У ряді прикладних областей, ще недостатньо підготовлених до застосування кількісних математичних методів, ММ мають в основному якісний характер. Ця ситуація типова, наприклад, для біологічної та соціальної сфер, в яких кількісні закономірності

не завжди піддаються суворій математичній формалізації. У таких випадках під адекватністю ММ природно розуміти лише правильний якісний опис поведінки досліджуваних об'єктів або їх систем.

Економічність ММ оцінюють витратами на обчислювальні ресурси (машинний час і пам'ять), необхідні для реалізації ММ на ЕОМ. Ці витрати залежать від числа арифметичних операцій при використанні моделі, від розмірності простору фазових змінних, від особливостей застосовуваної ЕОМ та інших факторів. Очевидно, що вимоги економічності, високої точності і досить широкої області адекватності ММ суперечливі і на практиці можуть бути задоволені лише на основі розумного компромісу. Властивість економічності ММ часто пов'язують із її простотою. Більше того, кількісний аналіз деяких спрощених варіантів ММ може бути здійснений і без залучення сучасної обчислювальної техніки. Однак його результати можуть мати лише обмежену цінність на стадії налагодження алгоритму або ЕОМ-програми, якщо спрощення ММ не узгоджене з розрахунковою схемою ТО.

Робастність ММ (від англійського слова міцна, міцний, стійкий) характеризує її стійкість щодо похибок вихідних даних, здатність нівелювати ці похибки і не допускати їх надмірного впливу на результат обчислювального експерименту. Причинами низької робастності ММ можуть бути необхідність при її кількісному аналізі віднімання близьких один до одного наближених значень величин або поділу на малу за модулем величину, а також використання в ММ функцій, що швидко змінюються в проміжку, де значення аргументу відоме з невисокою точністю. Іноді прагнення збільшити повноту ММ призводить до зниження її робастності внаслідок введення додаткових параметрів, відомих з невисокою точністю або таких, що входять до занадто наближених співвідношень.

Продуктивність ММ пов'язана із можливістю розмістити досить достовірні вихідні дані. Якщо вони є результатом вимірювань, то точність їх вимірювання повинна бути вищою,

ніж для тих параметрів, які утворюються при використанні ММ. В іншому випадку ММ буде непродуктивною, і її застосування для аналізу конкретного ТО втрачає зміст. Її можна буде використовувати лише для оцінювання характеристик деякого класу ТО з гіпотетичними вихідними даними.

Наочність ММ є бажаною, але необов'язковою властивістю. Проте використання ММ та її модифікація спрощуються, якщо її складові (наприклад, окремі члени рівнянь) мають зрозумілий сенс. Це, як правило, дозволяє орієнтовно передбачити результати обчислювального експерименту і полегшує контроль їх правильності.

1.4. Структурні та функціональні моделі

Різні особливості та ознаки математичних моделей (ММ) лежать в основі їх типізації (або класифікації). Серед таких ознак виділяють характер відображуваних властивостей технічного об'єкта (ТО), ступінь їх деталізації, способи одержання і подання ММ.

Одна з істотних ознак класифікації пов'язана з відображенням у ММ тих чи інших особливостей ТО. Якщо ММ відображає пристрій ТО і зв'язки між складовими його елементами, то її називають **структурною математичною моделлю**. Якщо ж ММ відбиває, які і в ТО, фізичні, механічні, хімічні або інформаційні процеси, то її відносять до **функціональних математичних моделей**. Зрозуміло, що можуть існувати й комбіновані ММ, що описують як функціонування, так і будову ТО. Такі ММ, природно, називати **структурно - функціональними математичними моделями**.

Структурні ММ поділяють на **топологічні і геометричні**, складовими другого рівня ієрархії ММ цього типу. Перші відображають склад ТО і зв'язки між його елементами. Топологічну ММ доцільно застосовувати на початковій стадії дослідження складного за структурою ТО, що складається з великого числа елементів, насамперед для з'ясування й уточнення їх взаємозв'язку. Така ММ має форму *графів*,

таблиць, матриць, списків тощо, і її побудові, як правило, передує розроблення структурної схеми ТО.

Геометрична ММ додатково до інформації, наведеної в топологічній ММ, містить відомості про форму і розміри ТО й його елементів, про їх взаємне розміщення. До геометричної ММ, як правило, входить сукупність рівнянь ліній і поверхонь і алгебраїчні співвідношення, що визначають належність областей простору тіла ТО або його елементів. Таку ММ іноді задають координатами деякої кількості точок, за якими інтерполяцією можна побудувати обмежену область лінії або поверхні. Межі області задають і кінетичним способом: лінію – як траєкторію руху точки, а поверхню – як результат переміщення лінії. Можливе уявлення форми і розмірів області сукупністю типових фрагментів достатньо простої конфігурації. Такий спосіб характерний, наприклад, для методу скінченних елементів, широко використовуваного в *математичному моделюванні*.

Геометричні ММ знаходять застосування при проектуванні ТО, розробленні технічної документації та технологічних процесів виготовлення деталей (наприклад, на верстатах з числовим програмним керуванням).

Функціональні ММ складаються зі співвідношень, що зв'язують між собою *фазові змінні*, тобто *внутрішні, зовнішні та вихідні* параметри ТО. Функціонування складних ТО нерідко вдається описати лише за допомогою сукупності його реакцій на деякі відомі (або задані) вхідні впливи (сигнали). Такий різновид функціональної ММ відносять до типу *чорного ящика* і, як правило, називають *імітаційною математичною моделлю*, маючи на увазі, що вона лише імітує зовнішні прояви функціонування ТО, не розкриваючи і не описуючи сутності процесів, що у ньому відбуваються. Імітаційні ММ знаходять широке застосування в технічній кібернетиці – науковому напрямку, що вивчає системи керування складними ТО.

За формою подання імітаційна ММ є прикладом *алгоритмічної математичної моделі*, оскільки зв'язок у ній між зовнішніми і вихідними параметрами ТО вдається описати

лише у формі алгоритму, придатного для реалізації у вигляді ЕОМ-програми. За цією ознакою до типу алгоритмічних відносять більш широкий клас як функціональних, так і структурних ММ. Якщо зв'язок між параметрами ТО можна виразити в аналітичній формі, то говорять про **аналітичні математичні моделі**. При побудові ієрархії ММ одного й того самого ТО, як правило, прагнуть, щоб спрощений варіант ММ був представлений в аналітичній формі, що допускає точний розв'язок, який можна було б використовувати для порівняння при тестуванні результатів, одержаних за допомогою більш повних і тому більш складних варіантів ММ.

Зрозуміло, що ММ конкретного ТО за формою подання може включати ознаки як аналітичної, так і алгоритмічної ММ. Більше того, на стадії кількісного дослідження досить складної аналітичної ММ та проведення *обчислювального експерименту* на її основі розробляють алгоритм, який реалізують у вигляді ЕОМ-програми, тобто в процесі математичного моделювання аналітичну ММ перетворюють в алгоритмічну ММ.

1.5. Теоретичні та емпіричні моделі

За способом одержання математичні моделі (ММ) поділяють на **теоретичні та емпіричні**. Перші одержують у результаті вивчення властивостей *технічного об'єкта* (ТО) і процесів, що у ньому відбуваються, а другі є підсумком обробки результатів спостереження зовнішніх проявів цих властивостей і процесів. Один зі способів побудови емпіричних ММ полягає у проведенні експериментальних досліджень, пов'язаних із вимірюванням *фазових змінних* ТО, і в подальшому узагальненні результатів цих вимірювань в алгоритмічній формі або у вигляді аналітичних залежностей. Тому емпірична ММ за формою подання може містити ознаки як алгоритмічної, так і *аналітичної математичної моделі*. Таким чином, побудова емпіричної ММ зводиться до розв'язання *задачі ідентифікації*.

Під час побудови теоретичних ММ насамперед намагаються використовувати відомі фундаментальні закони збереження таких субстанцій, як маса, електричний заряд,

енергія, кількість руху і момент кількості руху. Крім того, застосовують **визначальні співвідношення** (називані також **рівняннями стану**), у ролі яких можуть виступати так звані **феноменологічні закони** (наприклад, *рівняння Клапейрона – Менделєєва стану зробленого газу, закон Ома про зв'язок сили струму в провіднику і падіння електричної напруги, закон Гука про зв'язок деформації і механічної напруги в лінійно пружному матеріалі, закон Фур'є про зв'язок градієнта температури в тілі з щільністю теплового потоку і т. п.*).

Поєднання теоретичних міркувань якісного характеру з обробленням результатів спостереження зовнішніх проявів властивостей досліджуваного ТО приводить до змішаного типу ММ, так званих **напівемпіричних**. При побудові таких ММ використовують основні положення теорії розмірностей, зокрема числі так звану П-теорему (**Пі-теорему**): якщо між П параметрами, що характеризують досліджуваний об'єкт, існує залежність, що має фізичний зміст, то цю залежність можна подати у вигляді залежності між $\bar{n} = n - k$ їх безрозмірними комбінаціями, де k – число незалежних одиниць виміру, через які можна виразити розмірності цих параметрів. При цьому n визначає число незалежних (не виражає один через одного) безрозмірних комбінацій, таких, що мають назву критерій подібності.

Об'єкти, для яких однакові значення відповідних критеріїв подібності, вважають подібними. Наприклад, будь-який трикутник однозначно визначено довжинами a , b і c його сторін, тобто $n = 3, k = 1$. Тому згідно з П-теореомою безліч подібних трикутників можна задати значеннями $\bar{n} = n - k = 2$ критеріїв подібності. Як такі критерії можна вибрати безрозмірні відношення довжин сторін: b/a і c/a або будь-які два інших незалежних відношення. Оскільки кути трикутника однозначно пов'язані з відносинами сторін і є безрозмірними величинами, то безліч подібних трикутників можна визначити рівністю двох відповідних кутів або рівністю кута і відносини довжин прилеглих до нього сторін. Усі

перелічені варіанти відповідають відомим ознаками подібності трикутників.

Для успішного застосування П-теореми до побудови моделей ТО необхідно розмістити повний набір параметрів, що описують досліджуваний об'єкт, причому вибір цих параметрів повинен спиратися на аргументовано якісний аналіз тих властивостей і особливостей ТО, вплив яких істотно в даному конкретному випадку. Відзначимо, що такий аналіз необхідний при будь-якому способі побудови ММ, і проілюструємо це положення прикладами.

Приклад 1.1. До напівемпіричної слід віднести ММ, що включає відому формулу

$$P = C_y(\alpha) \frac{\rho v^2}{2} b \quad (1.4)$$

для підйомної сили крила у дозвуковому повітряному потоці, що припадає на одиницю довжини розмаху крила (тут ρ і v – щільність і швидкість потоку, що набігає; b – так звана *хорда профілю крила* (рис. 1.1); $C_y(\alpha)$ – безрозмірний коефіцієнт, що залежить від форми профілю крила і характеризується *кутом атаки* в напрямку набігаючого потоку).

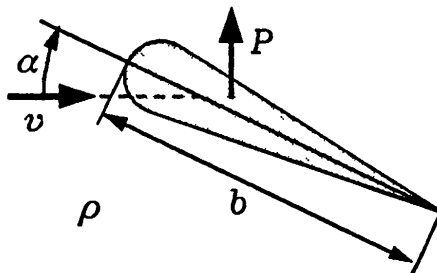


Рисунок 1.1

Кут атаки і параметри, що визначають форму профілю крила, безрозмірні. Тому можна розглядати вплив $n = 4$ розмірних параметрів P , ρ , v і b , розмірності яких можна виразити через $k = 3$ незалежні стандартні одиниці

вимірювання

$$[P] = \text{Н/м} = \text{кг/с}^2, [\rho] = \text{кг/м}^3,$$

$[\vartheta] = \text{м/с}, [b] = \text{м}$, де $\text{Н} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}$ (Ньютон – похідна одиниця вимірювання сили. Згідно з П-теоремою, з цих розмірних параметрів можна скласти лише одну ($\bar{n} = n - k = 1$) незалежну безрозмірну комбінацію, яку запишемо у вигляді $\frac{P}{\rho\vartheta^2 b}$.

Тоді для конкретної форми профілю крила одержимо:

$$\frac{P}{\rho\vartheta^2 b} = f(\alpha),$$

де функція $f(\alpha)$ може бути знайдена експериментально шляхом продування під різними кутами атаки геометрично подібної моделі крила в аеродинамічній трубі. Якщо безрозмірні значення цієї функції для фіксованих значень α позначити через $C_y(\alpha)/2$, то дійдемо до (1.5). Таким чином, структура (1.5) суперечить П-теоремі. Комплекс $\rho v^2/2$ іноді називають динамічним тиском набігаючого потоку, він дорівнює збільшенню тиску при повному гальмуванні потоку, або кінетичної енергії одиниці об'єму цього потоку. Тиск, як і механічне напруження, вимірюють у паскалях *($\text{Па} = \text{Н/м}^2$). Поряд із (1.5) існує встановлена теоретичним шляхом відома формула Жуковського [1]

$$P = \rho\vartheta\Gamma, \quad (1.5)$$

де Γ – циркуляція вектора швидкості по контуру, що охоплює профіль крила. Теоретична ММ, що містить (1,6), здавалося б, більш досконала, ніж напівемпірична ММ, оскільки на відміну від (1.5) не містить емпіричного коефіцієнта $C_y(\alpha)$. Однак знайти значення Γ теоретичним шляхом вдається лише в рідкісних випадках, що часто вже не становлять практичного інтересу, а одержати це значення за допомогою експериментальних вимірювань істотно більш складно, ніж знайти значення $C_y(\alpha)$. Тому напівемпірична ММ у даному

випадку має певну перевагу перед теоретичною ММ з точки зору задоволення вимог продуктивності.

Приклад 1.2. Нехай потік нестисливої рідини обтікає нерухоме тверде тіло заданої форми, що має характерний розмір l і постійну температуру T_0 (рис. 1.2). Швидкість v і температура $T_{ж} > T_0$ рідини на великій (порівняно з l) відстані від тіла зберігають сталі значення. Необхідно при деякому фіксованому положенні тіла щодо напрямку вектора V швидкості знайти кількість теплоти Q , передану за одиницю часу від рідини до тіла і названу тепловим потоком струму.

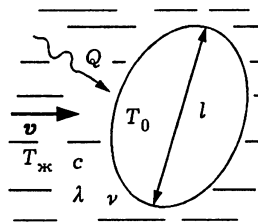


Рисунок 1.2

Процес передачі теплоти локалізований біля поверхні тіла і залежить не лише від перелічених параметрів, але й від об'ємної теплоємності c і коефіцієнта теплопровідності λ рідини, оскільки ці параметри характеризують здатність рідини підводити теплову енергію і передавати її поверхні тіла. Підведення теплової енергії до тіла також залежить від розподілу швидкості рідини біля його поверхні. У випадку ідеальної (нев'язкої) рідини воно однозначно визначене фіксованим положенням тіла щодо вектора v , а для в'язкої рідини залежить і від співвідношення між силами в'язкості та інерції, що характеризується коефіцієнтом в'язкості V , що називається кінематичними та вимірюваним у m^2/s .

При порівняно близьких значеннях $T_{ж}$ і T_0 природно припустити, що тепловий потік залежить не від кожної з цих температур, а від їх різниці $\vartheta = T_{ж} - T_0$. Тоді у випадку ідеальної рідини маємо $n = 6$ розмірних параметрів, розмірності яких можна виразити через $k = 4$ незалежні стандартні одиниці

вимірювання:

$$[l] = \text{м}, [\vartheta] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, [\vartheta] = \text{К}, [Q] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3},$$

$$[c] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3\cdot\text{К}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}^2\cdot\text{К}},$$

$$[\lambda] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^3\cdot\text{К}}, \text{ одиниці вимірювання енергії (роботи) і}$$

потужності відповідно, а К (Кельвін) – одиниця вимірювання температури в абсолютній шкалі. За П-теоремою з цих параметрів можна скласти лише $\bar{n} = n - k$ незалежні безрозмірні комбінації, наприклад, $Q/(l\lambda\vartheta)$ і $\vartheta lc/\lambda$. У підсумку приходимо до функціональної залежності

$$\frac{Q}{l\lambda\vartheta} = f\left(\frac{\vartheta lc}{\lambda}\right). \quad (1.6)$$

Співвідношення $\bar{q} = Q/S$ називають усередненою за площею S поверхні тіла **щільністю теплового потоку** і вимірюють у $\text{Вт}/\text{м}^2$. Оскільки для геометрично подібних тіл $l^2/S = C = \text{const}$, то (1.6) можна подавати у вигляді

$$Ki = \frac{\bar{q}l}{\lambda\vartheta} = Cf(Pe), \quad Pe = \frac{\vartheta lc}{\lambda}, \quad (1.7)$$

де Ki – тепловий критерій Кірпічова і Pe – критерій Пекле. Інтенсивність теплообміну на поверхні тіла, як правило, характеризують усередненим **коефіцієнтом тепловіддачі** $\bar{\alpha} = \bar{q}/\vartheta$, вимірюваним у $\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$. Тоді замість (1.7) одержимо

$$Nu = \frac{\bar{\alpha}l}{\lambda} = Cf(Pe), \quad (1.8)$$

де Nu – критерій (число) Нуссельта. Вид функції f у (1.6) – (1.8) не можна встановити в рамках теорії розмірностей і його доводиться визначати шляхом обробки результатів експериментів, хоча у деяких простих випадках вдається побудувати і теоретичні ММ процесу теплообміну.

У разі в'язкої рідини маємо $n = 7$ розмірних параметрів, розмірності яких, як і раніше, можна виразити через $k = 4$ незалежні одиниці виміру, тобто число незалежних безрозмірних комбінацій дорівнює. До розглянутих вище

необхідно додати будь-яку безрозмірну комбінацію, що включає новий параметр V . Цю комбінацію можна вибрати, наприклад, у вигляді vl/ν або cv/λ . У першому випадку її називають **критерієм (числом) Рейнольдса** і позначають $Re = VL/\nu$, а в другому – **критерієм (числом) Прандтля** і позначають $Pr = cv/\lambda$. Критерій Прандтля характеризує лише властивості рідини, а критерій Рейнольдса – співвідношення між інерційними силами і силами в'язкого тертя. У підсумку замість (1.8) отримуємо

$$Nu = f_1(Pe, Re) \text{ або } Nu = f_2(Pe, Pr). \quad (1.9)$$

Оскільки $Pe = Re, Pr$, то у випадку в'язкої рідини критерій Нуссельта може бути представлений функцією будь-яких двох з трьох аргументів Pe, Re, Pr .

Зрозуміло, що за наявності трьох і більше безрозмірних комбінацій параметрів побудова напівемпіричної ММ істотно ускладнюється. У цьому випадку, як правило, виділяють так званий визначальний критерій (у прикладі 2.3 це Ki або Nu), інші критерії відносять до визначальних і проводять кілька серій експериментальних вимірювань для встановлення функціональної залежності, що визначається критерієм від двох або більше визначальних, що розглядаються як аргументи шуканої функції (1.9) (це функції f_1 або f_2). У кожній серії вимірювань розмірні параметри змінюють, так щоб змінювалося значення лише одного з визначальних критеріїв. Тоді обробка результатів такої серії вимірювань дозволяє виявити функціональну залежність обумовленого критерію від одного з аргументів при фіксованих значеннях інших. У підсумку в деякій області зміни значень визначальних критеріїв вдається з деяким ступенем наближення побудувати шукану функцію, тобто вирішити завдання ідентифікації напівемпіричної М. Відзначимо, що застосування П-теореми до аналітичної ММ, поданої у вигляді рівнянь, дозволяє звести їх до безрозмірної форми і скоротити число параметрів, що характеризують досліджуваній ТО. Це спрощує якісний аналіз ММ і дозволяє ще до проведення кількісного аналізу оцінити вплив окремих

факторів. Крім того, безрозмірна форма ММ дає можливість подати в більш компактному вигляді результати її кількісного аналізу.

Лекція 2

Інтерполяція функцій із рівновіддаленими вузлами

Мета роботи – навчитися користуватися програмою Excel для одержання аналітичної залежності за експериментальними даними.

Основні теоретичні положення

2.1. Наближення функцій однієї змінної

Однією з найбільш важливих проблем чисельного аналізу є проблема наближеного опису невідомої функціональної залежності за відомими її значеннями в деяких точках, що мають назву вузлових.

Приклад 2.1

- а) Закон руху деякого об'єкта $S = f(t)$ наведений у табл. 2.1 (t – час, S – шлях).

Таблиця 2.1

t	0	1	2	3	4	5	6
S	0	2	10	30	46	130	222

Потрібно знайти пройдений об'єктом шлях до моменту $t = 3, 5$.

Для обчислення $S=f(3,5)$ необхідно на основі табл. 2.1 одержати математичний опис функціональної залежності $S=f(t)$.

При вимозі точного збігу у вузлових точках функції та її наближення (задача інтерполяції) число визначуваних параметрів апроксимуючої залежності дорівнює числу точок. При виборі такого критерію завдання зводиться до побудови інтерполяційних багаточленів.

У тих випадках, коли значення функції у вузлах визначені з деякою похибкою або кількість вузлових точок велика, вимога точного збігу у вузлах зайва. Апроксимуюча залежність повинна бути близька до вихідної функції лише за деякого критерію. У цьому випадку завдання про наближення (задача апроксимації) ставиться так. Потрібно дану досить складну функцію $f(x)$ замінити (апроксимувати) на поліном так, щоб відхилення функції від полінома на заданій множині $X = \{x\}$ було мінімальним. Як критерій неузгодженості в задачах

апроксимації найбільш поширений критерій «найменших квадратів» R :

$$R = \sum_{i=0}^n (f(x_i) - y_i)^2, \quad (2.1)$$

де y_i – значення апроксимуючої залежності, що спостерігається (обчислене або одержане з досвіду) в i -й точці; $f(x_i)$ – розраховане значення апроксимуючої функції в i -й точці.

2.2. Постановка задачі інтерполяції

Завдання інтерполяції може бути сформульоване так.

Нехай на відрізку $[a, b]$ задані $n + 1$ точка x_0, x_1, \dots, x_n , які називаються вузлами інтерполяції, і значення деякої інтерпольованої функції $f(x)$ в цих точках, тобто

$$y_0 = f(x_0); y_1 = f(x_1); \dots y_n = f(x_n).$$

Потрібно побудувати залежність $F(x)$, що інтерполюється, вузлах інтерполяції набирає тих самих значень, що й інтерпольована функція $f(x)$, тобто

$$F(x_0) = f(x_0) = y_0$$

.....

$$F(x_n) = f(x_n) = y_n.$$

Графічно завдання інтерполяції полягає в тому, щоб побудувати таку інтерполюючу функцію, яка б проходила через усі вузли інтерполяції.

Найчастіше як інтерполюючу функцію $F(x)$ використовуються багаточлени $P_n(x)$. Завдання полягає в тому, щоб підібрати багаточлени $P_n(x)$, що забезпечує необхідну точність інтерполяції ε , тобто задовольняє умову:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon. \quad (2.2)$$

Найбільш успішно для інтерполяції використовується багаточлен Ньютона, для запису якого у разі інтерполяції функції з рівновіддаленими вузлами використовуються кінцеві різниці.

2.3. Кінцеві різниці

Нехай для значень $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh$, h -крок інтерполяції, відомі значення функції визначення. Кінцевою різницею першого порядку називається різниця

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (2.3)$$

Аналогічно визначаються кінцеві різниці другого і більш високого порядків

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, i = 0, 1, \dots, n - 2, \quad (2.4)$$

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, i = 0, 1, \dots, n - k.$$

Кінцеві різниці при обчисленні зручно записати в таблицю, форма якої наведена в табл. 2.2.

Таблиця 2.2.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
1	x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
2	x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
3	x_3	y_3	Δy_3			
4	x_4	y_4				

Відзначимо, що число (порядок) кінцевих різниць завжди на одиницю менше від числа вузлів.

Наприклад: маємо функцію $f(x)$, відомі результати значення $f(x)$ в точці x_0 і точці x_2 , інтерполяція дозволяє знайти значення $f(x_1)$ за умови, що x_1 належить інтервалу від x_0 до x_2 . Якщо x_1 лежить на інтервалі (x_0, x_2) , інтерполяція не допоможе, для цього потрібно використовувати «екстраполяцію».

Дано: обчислити проміжне значення функції за відомими значеннями.

x_0	$f(x_0)$	x_2	$f(x_2)$	x_1	$f(x_1)$
275	-114	550	-31	398,75	?

$$f(x_1) = f(x_0) + \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \cdot (x_1 - x_0)$$

$$= -114 + \frac{-31 - (-114)}{550 - 275} \cdot (398,75 - 275) = -114 + 0,45 \cdot 83 = -76,65$$

Рівняння прямої, яка проходить через 2 точки $(x_0, f(x_0))$ і $(x_1, f(x_1))$, має вигляд

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

$$f(x) \approx y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Приклад: знайти наближене значення функції $y = f(x)$ при $x = 0,32$, якщо відома таблиця її значень.

x	0,15	0,30	0,40	0,55
y	2,17	3,63	5,07	7,78

Скористаємося спочатку формулою лінійної інтерполяції

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Значення $x = 0,32$ знаходиться між вузлами $x_{i-1} = 0,30$ та $x_i = 0,40$.

У цьому випадку

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{5,07 - 3,63}{0,40 - 0,30} = 14,4$$

$$b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1} = 3,63 - 14,4 \cdot 0,30 = -0,69,$$

$$y \approx 14,4x - 0,69 = 14,4 \cdot 0,32 - 0,69 = 3,92.$$

Тепер знайдемо наближене значення функції за допомогою формули квадратичної інтерполяції:

$$a = \frac{y_3 - \frac{x_3(y_2 - y_1) + x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}}{x_3(x_3 - x_2 - x_1) + x_1 x_2},$$

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - a(x_1 + x_2),$$

$$c = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} + a x_1 x_2$$

Складемо систему рівнянь (3) з урахуванням найближчих до точки $x = 0,32$ вузлів:

$$x_i - 1 = 0,15, x_i = 0,30, x_i + 1 = 0,40.$$

Відповідно:

$$y_i - 1 = 2,17, y_i = 3,63, y_i + 1 = 5,07.$$

Система запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} 0,15^2 a_i + 0,15 b_i + c_i = 2,17, \\ 0,30^2 a_i + 0,30 b_i + c_i = 3,63, \\ 0,40^2 a_i + 0,40 b_i + c_i = 5,07. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо

$$a_i = 18,67, b_i = 1,33, c_i = 1,55. \text{ Знайдене значення функції } y \approx 18,67 \cdot 0,32^2 + 1,33 \cdot 0,32 + 1,55 = 3,89.$$

Приклад 2.2

Обчислимо таблицю кінцевих різниць для експериментальних даних, наведених у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

x_i	0	1	2	3
y_i	5	5	9	25

Розв'язування

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= y_1 - y_0 = 5 - 5 = 0 & \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 = 4 - 0 = 4 \\ \Delta y_1 &= y_2 - y_1 = 9 - 5 = 4 & \Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1 = 16 - 4 = 12 \\ \Delta y_2 &= y_3 - y_2 = 25 - 9 = 16 & \Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 12 - 4 = 18 \end{aligned}$$

Зведемо значення кінцевих різниць у табл. 2.4.

Таблиця 2.4

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	0	5	0	4	8
1	1	5	4	12	
2	2	9	16		
3	3	25			

2.4. Інтерполяційний поліном Ньютона

Інтерполяційний многочлен Ньютона для рівновіддалених вузлів записується у вигляді

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0) \frac{\Delta y_0}{h} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} \quad (2.5)$$

або

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^n (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k} \quad (2.6)$$

Можна показати, що оцінка похибки $R_n(x)$ при заміні $f(x)$ поліномом $P_n(x)$ має вигляд

$$R_n(x) = \left| (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} \right| \quad (2.7)$$

Метод найменших квадратів

Як правило, визначення параметрів при відомому вигляді залежності здійснюють за методом найменших квадратів.

Метод найменших квадратів (МНК, OLS, Ordinary Least Squares) - математичний метод, застосовуваний для розв'язання різних задач, що базуються на мінімізації суми квадратів деяких функцій від шуканих змінних. МНК є одним із базових методів регресійного аналізу для оцінювання невідомих параметрів регресійних моделей за вибірковими даними.

При цьому функція $\varphi(x)$ вважається найкращим наближенням до $f(x)$, якщо для неї сума квадратів відхилень $\varepsilon_i = f(x_i) - \varphi(x_i)$ або «теоретичних» значень

$\varphi(xi)$, знайдених за емпіричною формулою, від відповідних експериментальних значень y_i має найменше значення порівнянно з іншими функціями, з яких обирається шукане наближення.

$$\sigma = \sum_{i=0}^n [f(xi) - \varphi(xi)]^2 \rightarrow \min$$

Використовуючи методи диференціального числення, метод найменших квадратів формулює аналітичні умови досягнення сумою квадратів відхилень $\sigma(1)$ свого найменшого значення.

Так, якщо функція $\varphi(x)$ цілком визначається своїми параметрами a, b, c, \dots , то найкращі значення цих параметрів знаходяться з розв'язку системи рівнянь.

Вид функції $y = \varphi(x)$ повинен бути відомий заздалегідь, причому найчастіше розглядають моделі першого і другого порядків, тобто:

$$y = \varphi(x) = ax + b$$

$$y = \varphi(x) = ax^2 + bx + c,$$

де a, b і c – коефіцієнти регресії.

Наприклад, у простому випадку, коли функція $\varphi(x)$ подана лінійним рівнянням $y = ax + b$, система має вигляд:

Щоб знайти значення a і b , при яких сума S мінімальна, візьмемо похідну від S за a і b і прирівняємо їх до нуля.

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=0}^N [(ax_i + b) - y_i] \cdot x_i = b \sum_{i=0}^N x_i + a \sum_{i=0}^N x_i^2 - \sum_{i=0}^N y_i x_i = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=0}^N [(ax_i + b) - y_i] \cdot 1 = b \cdot N + a \sum_{i=0}^N x_i - \sum_{i=0}^N y_i = 0 \end{cases}$$

У результаті після найпростіших перетворень одержимо таке рівняння:

$$\begin{cases} a \sum_{i=0}^N x_i^2 + b \sum_{i=0}^N x_i = \sum_{i=0}^N (x_i \cdot y_i) \\ \sum_{i=0}^N x_i + b \cdot N = \sum_{i=0}^N y_i \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^N x_i^2 & \sum_{i=0}^N x_i \\ \sum_{i=0}^N x_i & N \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^N x_i^2 \cdot N - \sum_{i=0}^N x_i \cdot \sum_{i=0}^N x_i$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^N y_i x_i & \sum_{i=0}^N x_i \\ \sum_{i=0}^N y_i & N \end{vmatrix} = N \cdot \sum_{i=0}^N y_i x_i - \sum_{i=0}^N x_i \cdot \sum_{i=0}^N y_i$$

$$\Delta b = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^N x_i^2 & \sum_{i=0}^N y_i x_i \\ \sum_{i=0}^N y_i & N \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^N x_i^2 \cdot \sum_{i=0}^N y_i - \sum_{i=0}^N y_i x_i \cdot \sum_{i=0}^N x_i$$

Загальний розв'язок цих рівнянь дає:

$$a = \frac{N \sum_{i=1}^N (x_i y_i) - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2},$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N y_i - a \sum_{i=1}^N x_i}{N},$$

$$c = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N (x_i \cdot y_i) \cdot \sum_{i=1}^N x_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}$$

Формули є формулами для знаходження коефіцієнтів апроксимуючого полінома методом найменших квадратів.

У результаті експерименту одержані 5 значень шуканої функції.

x	-2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

Знайти функціональну залежність вигляду $\tilde{y} = ax + b$.

Виконаємо необхідне обчислення за формулами й занесемо їх до таблиці.

Таблиця 2.5

№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	\tilde{y}	$ \tilde{y} - y_i $
1	-2,0	0,5	4,00	-1,00	0,325	0,175
2	0,0	1,0	0,00	0,00	1,175	0,175
3	1,0	1,5	1,00	1,50	1,6	0,1
4	2,0	2,0	4,00	4,00	2,025	0,025
5	4,0	3,0	16,00	12,00	2,275	0,125
сума	5,0	8,0	25,0	16,5		

Система для знаходження коефіцієнтів матиме вигляд

$$\begin{cases} 25a + 5b = 16,5 \\ 5a + 5b = 8 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 100, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 16,5 & 5 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 42,5, \quad \Delta_0 = \begin{vmatrix} 25 & 16,5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 117,5$$

Звідси $a=0,425$, $b = 1,175$.

Відповідно $\tilde{y} = 0,425x + 1,17$, є рівнянням знайденої прямої.

Графічна інтерпретація наведена на рисунку 2.1.

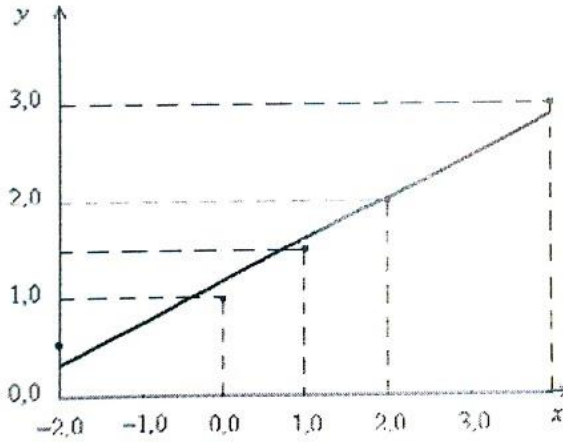


Рисунок 2.1

У передостанньому стовпчику табл. 2.5 для порівняння з емпіричними даними записані значення функції \tilde{y} , знайдені за формулою $\tilde{y} = 0,425x + 1,17$, а в останньому – абсолютні похибки (різниця між одержаними результатами і експериментальними даними). Середня похибка становить 0,12.

З'ясувати вид функції можна або з теоретичних міркувань або аналізуючи розташування точок (x_i, y_i) на координатній площині.

Наприклад, нехай точки розташовані так, як показано на рис. 2.2.

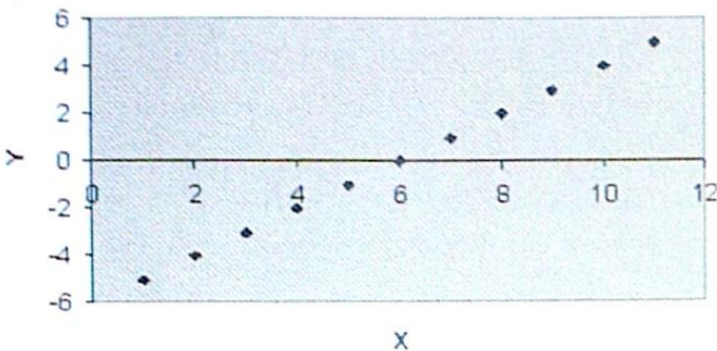


Рисунок 2.2 – Можливий варіант розміщення експериментальних точок

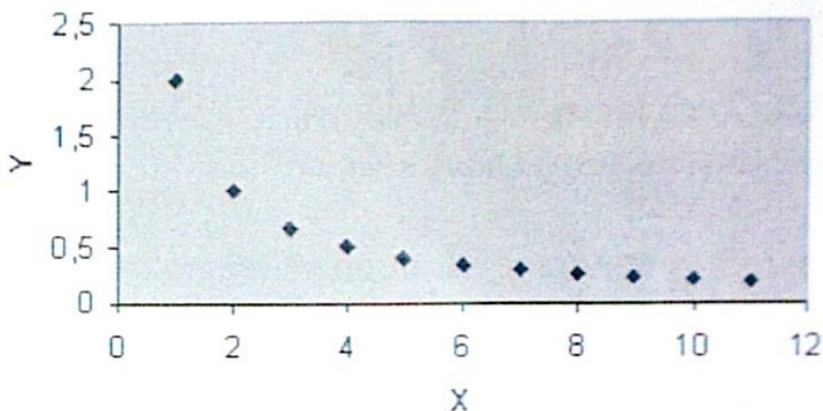


Рисунок 2.3 – Інший варіант розміщення експериментальних точок

Враховуючи те, що практичні дані одержані з деякою похибкою, обумовленою неточністю вимірювань, необхідно округлення результатів і т. д., природно припустити, що тут має місце лінійна залежність $y = ax + b$. Щоб функція набрала конкретного вигляду, необхідно якимось чином обчислити a і b . Для цього можна розв'язати систему (2). Розміщення експериментальних точок у вигляді кривої на рис. 2.2 наводить на думку, що залежність обернено пропорційна і функцію $\varphi(x)$ потрібно підбирати у вигляді $y = a + b/x$. Тут також необхідно обчислити параметри a і b . Таким чином, розміщення експериментальних точок може мати найрізноманітніший вигляд, і кожному відповідає конкретний тип функції.

Побудова емпіричної функції зводиться до обчислення параметрів, що входять до неї, так щоб з усіх функцій такого виду вибрати ту, яка краще за інших описує залежність між досліджуваними величинами. Тобто сума квадратів різниці між табличними значеннями функції в деяких точках і значеннями, обчисленими за одержаною формулою, повинна бути мінімальна.

Для полінома другого порядку

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Мінімум суми квадратів відхилень

$$s = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_i)^2 \rightarrow \min,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial c} = 2 \sum_{i=0}^N [(axi^2 + bx + c) - yi] \cdot 1 = c \cdot N + b \sum_{i=0}^N xi + a \sum_{i=0}^N x^2i - \sum_{i=0}^N yi = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=0}^N [(axi^2 + bx + c) - yi] \cdot xi = c \sum_{i=0}^N xi + b \sum_{i=0}^N x^2i + a \sum_{i=0}^N x^3i - \sum_{i=0}^N xiyi = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=0}^N [(axi^2 + bx + c) - yi] \cdot xi^2 = c \sum_{i=0}^N xi^2 + b \sum_{i=0}^N x^3i + a \sum_{i=0}^N x^4i - \sum_{i=0}^N xi^2yi = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

знаходимо згідно із системою:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \sum_{i=1}^N x^2i + b \sum_{i=1}^N xi + N \cdot c = \sum_{i=1}^N yi, \\ a \sum_{i=1}^N x^3i + b \sum_{i=1}^N x^2i + c \sum_{i=1}^N xi = \sum_{i=0}^N (xi \cdot yi), \\ a \sum_{i=0}^N x^4i + b \sum_{i=0}^N x^3i + c \sum_{i=0}^N x^2i = \sum_{i=0}^N (x^2i \cdot yi). \end{array} \right.$$

Найпростіше розв'язати систему матричним способом.

i	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1	2	-2,5	4	8	16	5	-10
2	3	-6,7	9	27	81	-20,1	-60,3
3	4	-7,9	16	64	256	-31,6	-126,4
4	5	-8,5	25	125	625	-42,5	-212,5
5	6	-6,7	36	216	1296	-40,2	-241,2
6	7	-6,3	49	343	2401	-44,1	-308,7
7	8	-3,3	64	512	4096	-26,4	-211,2
8	9	0,3	81	729	6561	2,7	24,3
9	10	4	100	1000	10000	40	400
10	11	9,2	121	1331	14641	101,2	1113,2
Σ	65	-28,4	505	4355	39973	-66	367,2

$$1) y = ax + b, \text{ де}$$

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 65a + 10b = -28,4, \\ 505a + 65b = -66. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 65 & 10 \\ 505 & 65 \end{vmatrix} = 4225 - 5050 = -825$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} -28,4 & 10 \\ -66 & 65 \end{vmatrix} = -1846 + 660 = -1186 \Rightarrow$$

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{-1186}{-825} = \frac{1186}{825} \approx 1,438$$

$$\Delta b = \begin{vmatrix} 65 & -28,4 \\ 505 & -66 \end{vmatrix} = -4290 + 14342 = 10052 \Rightarrow$$

$$b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{10052}{-825} = -\frac{10052}{825} \approx -12,184$$

$$y = 1,438x - 12,184.$$

$$2) y = ax^2 + bx + c, \text{ де}$$

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + nc = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 505a + 65b + 10c = -28,4 \\ 4355a + 505b + 65c = -66 \\ 39973a + 4355b + 505c = 367,2; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 505 & 65 & 10 \\ 4355 & 505 & 65 \\ 39973 & 4355 & 505 \end{vmatrix} = \dots = -435600$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} -28,4 & 65 & 10 \\ -66 & 505 & 65 \\ 367,2 & 4355 & 505 \end{vmatrix} = \dots = -214170 \Rightarrow$$

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{-214170}{-435600} = \frac{59}{2200} \approx 0,492$$

$$\Delta b = \begin{vmatrix} 505 & -28,4 & 10 \\ 4355 & -66 & 65 \\ 39973 & 367,2 & 505 \end{vmatrix} = \dots = 2158002 \Rightarrow$$

$$b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{2158002}{-435600} = \frac{10899}{2200} \approx -4,954$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} 505 & 65 & -28,4 \\ 4355 & 505 & -66 \\ 39973 & 4355 & 367,2 \end{vmatrix} = \dots = -1974324 \Rightarrow$$

$$c = \frac{\Delta c}{\Delta} = \frac{-1974324}{-435600} = \frac{14957}{3300} \approx 4,532$$

$$y = 0,492x^2 + 4,954x + 4,532.$$

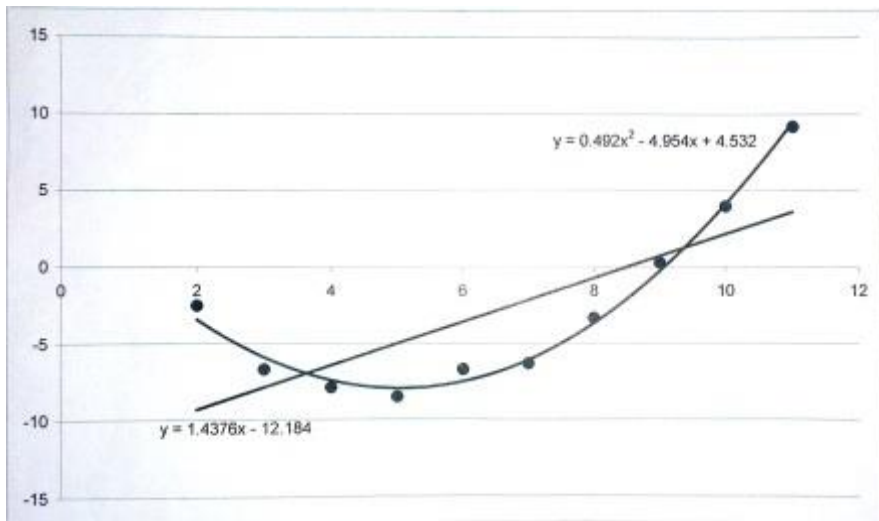


Рисунок 2.4 – Розміщення експериментальних точок та підібраних функцій (рівняння регресії зображене на графіку)

Приклад 3

Побудуємо інтерполяційний поліном Ньютона для експериментальних даних, наведених у таблиці 2.3 (кінцеві різниці в табл. 2.4).

Розв'язання

Зрозуміло, що тут крок інтерполяції $h = 1$. Ступінь полінома визначається числом (порядком) кінцевих різниць, тобто

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_3(x) = y_0 + \frac{(x - x_0)\Delta y_0}{1!h} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\Delta^2 y_0}{2!h^2} + \\ &+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\Delta^3 y_0}{3!h^3} = \\ &= 5 + \frac{(x - 0)0}{1!1} + \frac{(x - 0)(x - 1)4}{1^2 \cdot 1 \cdot 2} + \\ &\frac{(x - 0)(x - 1)(x - 2)8}{1^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 + 0 + x(x - 1) \cdot 2 + \frac{x(x - 1)(x - 2) \cdot 4}{3} = \\ &= 5 + 2x^2 - 2x + \frac{(4x^2 - 4x)(x - 2)}{3} = \\ &= \frac{1}{3}(15 + 6x^2 + 4x^3 - 8x^2 - 4x^2 + 8x) = \frac{1}{3}(4x^3 - 6x^2 + 2x + 15). \end{aligned}$$

Отже, інтерполяційний поліном для табл. 2.3 має вигляд

$$P_3(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}x + 5.$$

Приклад 4

Знайти значення $y = f(x)$ для $x = 1,5$.

Розв'язання

$$y = f(1,5) = P_3(1,5) = \frac{4}{3} \cdot 1,5^2 - 2 \cdot 1,5^2 + \frac{2}{3} \cdot 1,5 + 5 = 6,$$

тобто $y(1,5) = 6$.

Лекція 3

Аналіз та прогнозування в Excel

Мета роботи – вивчення режимів екстраполяції даних в Excel.

Основні теоретичні положення

Табличний процесор Excel надає дві можливості для апроксимації :

- 1) із використанням функцій апроксимації кривої;
- 2) із використанням апарата графічного аналізу.

Розглянемо обидва варіанти.

3.1. Екстраполяція (прогнозування) за допомогою функції апроксимації кривої

Нехай у вузлах x_0, x_1, \dots, x_n проведені вимірювання функції $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. Необхідно здійснити прогнозування (екстраполяції), тобто обчислити значення $f(x_{n+1}), f(x_{n+2}), \dots$.

У категорії Статистичні функції Excel є дві, використовувані для екстраполяції : ТЕНДЕНЦІЯ і ПРЕДСКАЗ. Обидві здійснюють лінійну апроксимацію кривої для даних масивів X і Y методом найменших квадратів.

Функція ТЕНДЕНЦІЯ має структуру:

ТЕНДЕНЦІЯ ($Y_{\text{масив}}, X_{\text{масив}}, X_{\text{список}}$),

де $X_{\text{список}}$ – це значення x , для яких потрібно здійснити прогнозування; $X_{\text{масив}}$ і $Y_{\text{масив}}$ – вихідні дані.

Приклад 1

Нехай у результаті спостережень за попитом на продукцію підприємства одержана табл. 3.1., в якій X – порядковий номер місяця.

Таблиця 3.1

X	1	2	3	4
Y	10	12	15	17

Необхідно здійснити прогноз попиту на травень, червень і липень (тобто на місяці, що відповідають значенням $X = \{5, 6, 7\}$). Розмістимо вихідні дані в комірках A1 : F2 (фрагмент ЕТ наведений у табл. 3.2).

Список значень X для прогнозування розмістимо в комірках C4 : E4. Після звернення до функції ТЕНДЕНЦІЯ результат прогнозування буде розміщений в комірках C5 : E5.

Таблиця 3.2

№	A	B	C	D	E	F
1	Вихідні	X	1	2	3	4
2	дані	Y	10	12	15	17
3	Прогноз					
4		X	5	6	7	
5		Y				

Функція ПРЕДСКАЗ ($X; У_{\text{массив}}; X_{\text{массив}}$) після апроксимації повертає лише одне прогнозоване значення У (для одного з заданих значень аргументу X).

3.2. Графічний апарат прогнозування в Excel

Excel має спеціальний апарат для графічного аналізу даних, зокрема можливість побудови *Ліній тренду*, які можуть використовуватися для аналізу та прогнозування. Тренд – це графічна апроксимація експериментальних даних. Для вивчення *Ліній тренду* побудуємо невелику табл. 3.3 – динаміка попиту на продукцію.

Таблиця 3.3

Місяць	Попит (шт.)
Січень	90
Лютий	88
Березень	85
Квітень	70
Травень	69
Червень	65
Липень	

У табл. 3.3 наведені результати вивчення попиту за перші шість місяців року. Ставиться завдання спрогнозувати попит на наступний місяць. Для вирішення завдання використовуються

описані вище математичні методи інтерполяції даних за допомогою спеціальних багаточленів (поліномів) різного порядку. Чим вищий ступінь полінома, тим, як правило, вища точність опису функціональної залежності попиту від аналізованого місяця. Після того, як складена така аналітична залежність, змінюючи номер місяця (аргумент полінома), можна зробити прогноз попиту на наступний період.

У Excel можливість прогнозувати дає *Майстер діаграм*. При виборі типу *Графік*, *Лінійна діаграма* (рис. 3.1) можна побудувати графік для табл. 3.3. Після клацання по правій кнопці мишки по лінії графіка в контекстному меню є можливість скористатися командою *Лінія тренду*. Ця команда викликає однойменне вікно (рис. 3.2), в якому можна вибрати ступінь екстраполюючого полінома, а в наступному вікні (рис. 3.3) зазначити період прогнозування.

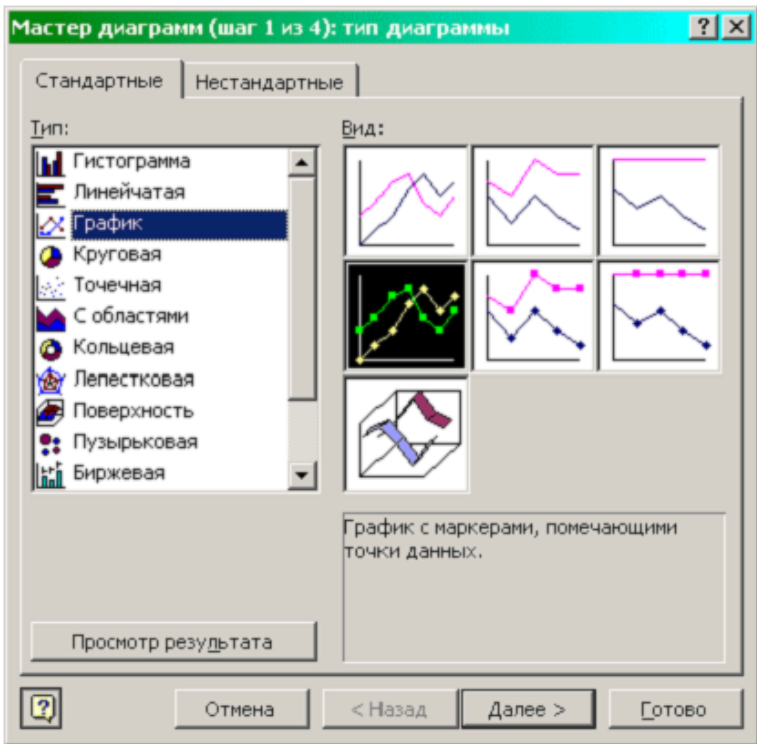


Рисунок 3.1

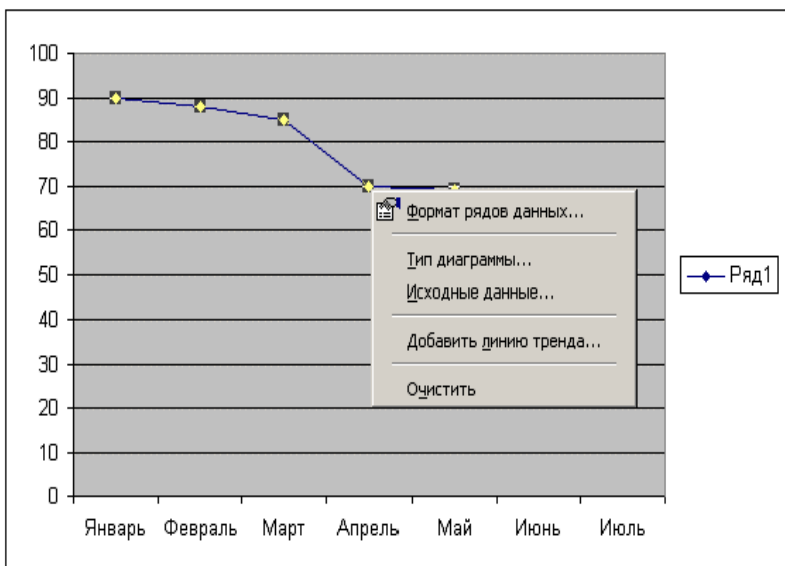


Рисунок 3.2

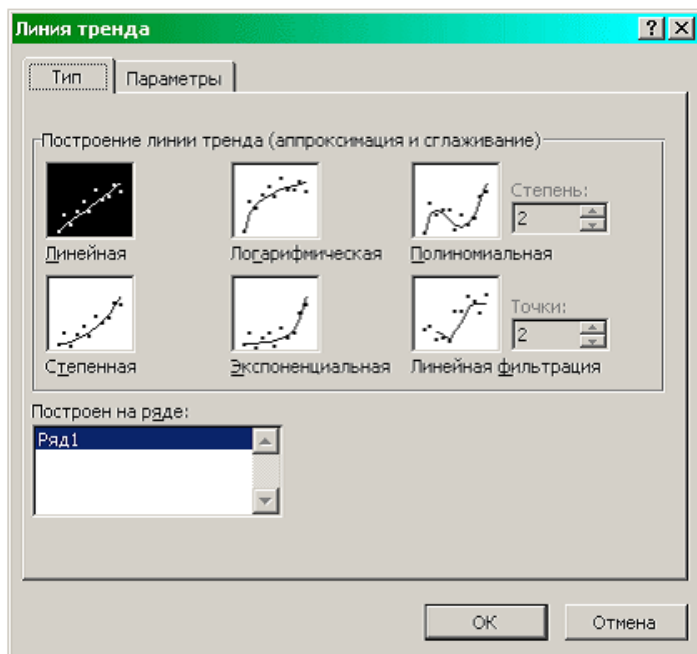


Рисунок 3.3

Лекція 4

Наближений розв'язок рівнянь. Відділення коренів

Мета роботи – ознайомитися з чисельними методами розв'язання кінцевих рівнянь і реалізацією їх в Excel.

Основні теоретичні положення

4.1 Постановка завдання

У загальному випадку рівняння з одним невідомим має вигляд

$$f(x) = 0, \quad (4.1)$$

де $f(x)$ – задана функція, визначена на відрізку $[a; b]$. Будь-яке число ξ (дійсне або уявне) на відрізку $[a; b]$, що перетворює рівняння на тотожність

$$f(\xi) \equiv 0, \quad (4.2)$$

називається коренем рівняння або його розв'язком.

Розв'язання задачі наближеного визначення коренів рівняння складається з двох етапів: 1) відділення коренів, тобто знаходження підінтервалів $[\alpha, \beta]$ на відрізку $[a; b]$, які містять лише один корінь рівняння; 2) уточнення коренів, тобто безпосереднє обчислення значень коренів на знайдених підінтервалах $[\alpha, \beta]$ із заданою точністю ξ .

4.2. Відділення коренів

Графічний спосіб відділення коренів полягає в побудові графіка функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Точка перетину графіка функції з віссю абсцис дає наближене значення кореня рівняння. Знайдені таким чином наближені значення коренів дозволяють виділити відрізки $[\alpha, \beta]$, на яких за необхідності можна виконати уточнення коренів (рис. 4.1).

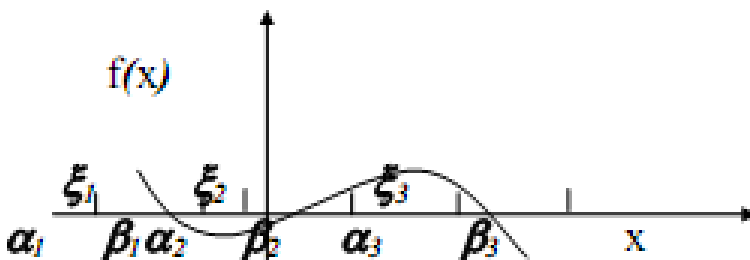


Рисунок 4.1

При відділенні дійсних коренів розрахунковим шляхом для безперервних функцій $f(x)$ можна керуватися такими міркуваннями:

- якщо на кінцях відрізка $[a ; b]$ функція має різні знаки ($f(a) \cdot f(b) < 0$), то між точками a і b на осі абсцис є непарне число коренів;
- якщо ж $f(a) \cdot f(b) > 0$, то між a і b є парне число коренів або їх зовсім немає ;
- якщо $f(a) \cdot f(b) < 0$ або перша похідна $f'(x)$, або друга похідна $f''(x)$ не змінюють знака на цьому відрізку, то рівняння має єдиний корінь на відрізку $[a, b]$.

Приклад 1

Видокремимо всі дійсні корені рівняння

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \quad (4.3)$$

на відрізку $[-2, 2]$.

Розв'язання

Знаходимо значення функції $f(x)$ на кінцях відрізка:

$$f(-2) = -26 ; f(2) = 22.$$

Оскільки функція має різні знаки, то на відрізку $[-2, 2]$ є непарне число коренів.

Перша і друга похідні від функції $F(x)$:

$$f'(x) = 5x^4 - 4 \text{ і } f''(x) = 20x^3, \quad (4.4)$$

змінюють знак на відрізку $[-2; 2]$ (рис. 4.2), тому коренів буде декілька і відрізок треба розділити навпіл.

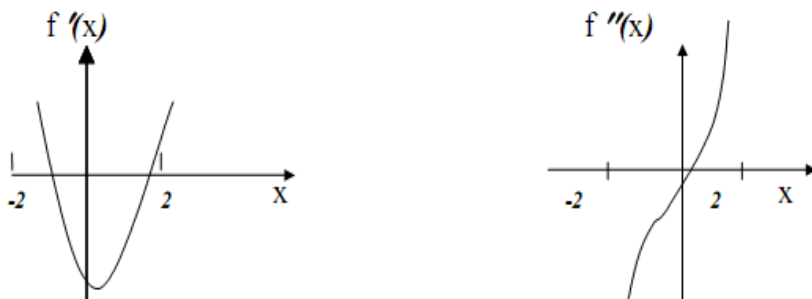


Рисунок 4.2

Розглянемо два відрізки $[-2;0]$ і $[0;2]$ окремо; оскільки $f(0) = -2$, то $f(2) \cdot f(0) > 0$, $f(0) \cdot f(2) < 0$. На першому відрізку $[-2;0]$ або немає коренів, або їх парне число, а на другому відрізку $[0;2]$ коренів непарне число.

На другому відрізку перша похідна змінює знак, друга – не змінює, тому на цьому відрізку є єдиний корінь. Таким чином, відділений один корінь рівняння – на відрізку $[0,2]$.

Перший відрізок ділимо навпіл, одержуємо два під інтервали:

$[-2,-1]$ і $[-1,0]$. Оскільки $f(-1) = 1$, значення функцій на кінцях кожного з відрізків різні: $f(-2) \cdot f(-1) < 0$, і $f(-1) \cdot f(0) < 0$; ці відрізки повинні містити непарне число коренів. На відрізку $[-2,-1]$ перша похідна не змінює знак, а на відрізку $[-1,0]$ друга похідна не змінює свій знак. Звідси можна зробити висновок, що на інтервалах $[-2,-1]$ і $[-1,0]$ є по одному кореню.

Таким чином, на відрізку $[-2,2]$ для рівняння $x^5 - 4x - 2 = 0$ відокремлено три дійсних корені на відрізках $[-2;-1]$, $[-1;0]$ і $[0;2]$.

4.3. Уточнення коренів

Чисельний метод, при якому уточнюється початкове грубе наближення, називається ітераційним методом, або методом послідовних наближень. Кожен крок цього методу називається ітерацією.

Якщо при послідовних ітераціях ($k = 1, 2, \dots$) одержувані величини $X^{(k)}$ все ближче наближаються до істинного значення кореня ξ , то ітераційний процес буде збіжним, в іншому випадку – розбіжним. При цьому розрізняють монотонну і коливальну збіжність (розбіжність) залежно від того, з одного або з різних сторін здійснюється наближення (віддалення) до (від) шуканого розв'язку.

Для реалізації ітераційного процесу повинні бути задані початкове наближення $X^{(0)}$ і точність ε , з якої потрібно знайти розв'язок рівняння.

Первісне грубе наближення $X^{(0)}$ необхідно задавати з фізичних міркувань і за результатами відділення коренів. Уся решта наближень випливає з ітераційної формули, що відповідає використовуваному методу розв'язку рівняння.

Умова закінчення ітераційного процесу (знаходження значення кореня з точністю ε) має вигляд

$$|X^{(k+1)} - X^{(k)}| = < \varepsilon \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.5)$$

У Excel для організації ітераційного процесу існує спеціальний режим ітерацій (команди Сервіс – Параметри – Обчислення).

Лекція 5

Уточнення коренів рівняння із використанням режиму «Пошук рішень»

Мета роботи – вивчення можливостей Excel у режимі пошуку рішень для уточнення коренів.

Основні теоретичні положення

Порядок виконання роботи

Завдання. Уточнити з похибкою $E = 0001$ усі корені рівняння

$$x^5 - 4x - 2 = 0.$$

5.3.1. Виконання завдання

У роботі 3 для рівняння $x^5 - 4x - 2 = 0$ були відокремлені три корені на інтервалах: $[-2; -1]$, $[-1; 0]$ і $[0; 2]$.

5.3.1.1. Для уточнення коренів на першому інтервалі $[-2; -1]$ складемо ЕТ (табл. 5.1).

Таблиця 5.1

№	A	B
1	Уточнення коренів	
2	Режим	Пошук рішення
3	Початкове наближення кореня	-2
4	Рівняння	= B3^5-4*B3-2
5	Нижня межа інтервалу	-2
6	Верхня межа інтервалу	-1

5.3.1.2. Запускаємо режим «Пошук рішення»:

а) виконуємо команди Сервіс – Пошук рішення;

б) у вікні Пошук рішення (рис. 5.1) зазначаємо – Установити цільову комірку В4 ;

в) вибираємо опцію «Дорівнює значенню» і вводимо 0;

г) у вікні «Змінюючи осередки » вводимо \$B\$3;

д) для введення обмежень треба клацнути по кнопці Додати ;

е) у вікні Додавання обмежень (рис.5.2) введемо обмеження:

$B3 \geq B5$ (клацнути по Додати);

$B3 \leq B6$ (клацнути по ОК);

ж) натиснути кнопку Виконати .

Режим показу рішення відобразить знайдені корені.

5.3.1.3. Для уточнення кореня на інтервалі $[-1; 0]$ вводимо:

- у комірку В3 значення -1 ;

- в комірку В5 значення -1 ;

- у комірку В6 значення 0 .

Далі повторити дії п.3.1.2 а (установки пп. **5.3.1.2 б** –

5.3.1.2 ж зберігаються).

5.3.1.4. Для уточнення кореня на інтервалі $[0;2]$ вводимо:

- у комірку В3 значення 0 ;

- у комірку В5 значення 0 ;

- у комірку В6 значення 2 .

Далі повторити дії п. 5.3.1.2 а.

5.3.2. Уточнення кореня для рівняння з індивідуального завдання .

Для коренів, відокремлених під час виконання індивідуального завдання в роботі 3, провести уточнення коренів аналогічно п. 3.1.

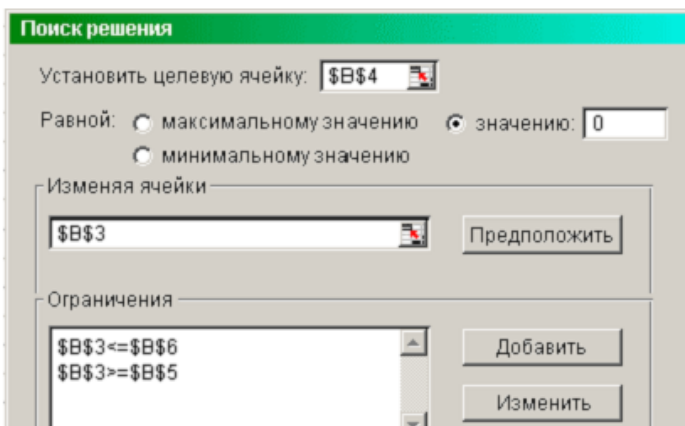


Рисунок 5.1

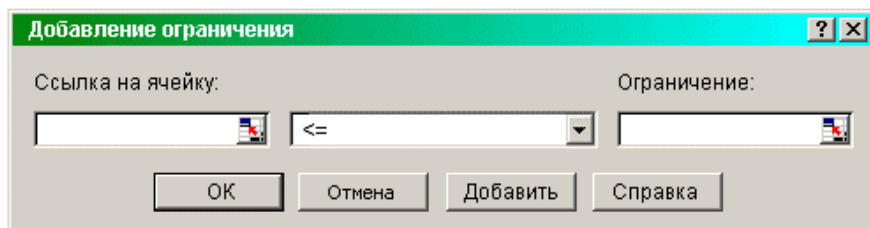


Рисунок 5.2

Лекція 6

Розв'язання систем рівнянь в Excel

Мета роботи – навчитися розв'язувати в Excel системи кінцевих рівнянь із використанням зворотних матриць.

Основні теоретичні положення.

Нехай необхідно розв'язати систему рівнянь :

6.2.1. Метод зворотної матриці

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (6.1)$$

Із використанням поняття матриці і матричних операцій система рівнянь може бути записана в матричному вигляді

$$[A]\bar{x} = \bar{b} \quad (6.2)$$

тут $[A]$ – матриця коефіцієнтів системи вигляду

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

де \bar{x}, \bar{b} – вектор невідомих і вектор вільних членів відповідно.

Наприклад, система

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 7, \end{cases}$$

у матричному вигляді записується аналогічно (6.2) так:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix};$$

Розв'язання системи методом зворотної матриці може бути отримано в результаті множення правої частини системи рівняння (6.2) на матрицю, зворотну до матриці коефіцієнтів системи:

$$A^{-1}A\bar{x} = A^{-1}\bar{b}.$$

Ураховуючи, що перетворення зворотної матриці на пряму дає одиничну матрицю, одержуємо

$$E\bar{x} = A^{-1}\bar{b} \quad \text{або} \quad \bar{x} = A^{-1}\bar{b}.$$

Таким чином, розв'язання системи зводиться до знаходження зворотної матриці і потім обчислене перетворення цієї матриці на вектор \bar{b} . Цей метод зручно застосовувати в тих випадках, коли кілька разів розв'язується система з різними правими частинами. У цьому випадку достатньо один раз обчислити зворотну матрицю $[A^{-1}]$ і потім помножити її на різні вектори \bar{b} .

Приклад

Методом зворотної матриці розв'язати систему

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 2 \\ x_1 - 35 = -4; \end{cases}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді $x = [A^{-1}]$. Обчислимо обернену матрицю $[A^{-1}]$ класичним методом згідно з алгоритмом:

$$1) \det A = -25 + 3 = -22;$$

$$2) Ay = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix};$$

$$3) A^T = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

A^T – транспонована матриця ;

$$4) A^{-1} = -1/22 \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5/22 & -3/22 \\ 1/22 & 5/22 \end{vmatrix};$$

Тепер знайдемо вектор розв'язку :

$$\bar{x} = A^{-1} * \bar{b} = \begin{vmatrix} 5/22 & -3/22 \\ 1/22 & -5/22 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10/22 + 12/22 \\ 2/22 + 20/22 \end{vmatrix} =$$

тобто $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$.

Лекція 7

Наближений розв'язок систем рівнянь

Мета роботи – вивчення можливостей Excel, режиму ітерації для розв'язання системи рівнянь.

Основні теоретичні положення

Нехай потрібно розв'язати систему рівнянь :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (7.1)$$

Розглянемо розв'язання системи (7.1) методом простих ітерацій.

7.1. Метод простих ітерацій

Уявити систему з трьох рівнянь вигляду (7.1) в ітераційній формі можна шляхом запису кожного його рівняння у вигляді розв'язку щодо одного з невідомих, наприклад:

$$\begin{aligned} x_1 &= -c_{12}x_2 - c_{13}x_3 + d_1 \\ x_2 &= c_{21}x_1 + c_{23}x_3 + d_2 \\ x_3 &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + d_3 \end{aligned} \quad (7.2)$$

або у матричному вигляді,

$$x = Cx + d, \quad (7.3)$$
$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; c = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 0 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{bmatrix}; \bar{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix};$$

Елементи матриці $[C]$ і вектора d обчислюють за формулами

$$c_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}, \quad d_i = b_i/a_{ii}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

При використанні ітераційного методу розв'язання необхідно оцінити збіг методу для даної системи, яка залежить тільки від матриці коефіцієнтів $[C]$. Процес збігається в тому випадку, якщо норма матриці $[C]$ менша від одиниці, тобто

$$\|C\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^2} < 1 \quad (7.4)$$

Ця умова є достатньою для збігу методу. Для його виконання необхідно, щоб на етапі приведення до ітераційної форми (7.1) кожне рівняння системи розв'язувалося щодо тієї невідомої змінної, яка має найбільший за модулем коефіцієнт. Тому порядок розміщення рівнянь у системі має важливе значення.

Стратегія методу простих ітерацій базується на послідовному наближенні до шуканого розв'язку системи, при цьому кожне наступне $(k + 1)$ – наближення утворюється в результаті підстановки в праву частину перетвореної системи (7.1) наближення, одержаного на попередній k -й ітерації, тобто

$$\bar{x}^{(k+1)} = C\bar{x}^{(k)} + \bar{d}. \quad (7.5)$$

Як початкове наближення, як правило, беруть вектор – стовпець вільних членів перетвореної системи: $x_0 = d$. Умова закінчення ітераційного процесу для одержання розв'язку набуває вигляду

$$|\bar{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.6)$$

$$\max |\bar{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.7)$$

Приклад

Методом простих ітерацій з точністю $\varepsilon = 0,1$ розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} -7x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Для одержання перетвореної системи рівнянь необхідно зробити допустимі перетворення над вихідною системою, для того щоб діагональні коефіцієнти матриці були максимальними за модулем. Для цього друге рівняння зробимо першим і в як

друге використовуємо третє. Складемо перше і друге рівняння вихідної системи, одержимо третє: $x_1 - x_2 + 4x_3 = 3$.

Тоді в ітераційній формі маємо систему

$$x_1 = -(3/8)x_2 - (3/8)x_3 + 2/8$$

$$x_2 = -(1/6)x_1 + (1/6)x_3 + 3/6$$

$$x_3 = -(1/4)x_1 - (1/4)x_2$$

Перевіряємо умову збігу:

$$\begin{aligned} \|C\| &= \sqrt{\left(-\frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)} = \\ &= \sqrt{266/576} < 1; \end{aligned}$$

оскільки $\|C\| < 1$, то розв'язок може бути одержаний методом простих ітерацій.

Результати розрахунку наведені в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Ітерації	x_1	x_2	x_3	$\max x_i^{k+1} - x_i^k $
0	0,25	0,5	0,75	
1	-0,125	0,583	0,75	0,13
2	-0,217	0,583	0,575	0,18
3	-0,308	0,632	0,559	0,09

Таким чином, для одержання розв'язку із заданою точністю

$\varepsilon = 0,1$ потрібні були три ітерації ;

$$x_1 = x_1(3) = -0,308; x_2 = x_2(3) = 0,632; x_3 = x_3(3) = 0,559.$$

Для підвищення швидкодії розв'язку, крім методу простих ітерацій використовується метод Гаусса-Зейделя.

7.2. Метод Зейделя

У цьому методі при обчисленні $(k+1)$ -го наближення невідомого x_i використовуються вже розраховані за поточною ітерацією $(k+1)$ -те наближення невідомих x_1, x_2, \dots, x_i і k -те

наближення невідомих x_i, x_{i+1}, \dots, x_n . Розрахункова формула Зейделя має вигляд

$$x_i^{(k+1)} = d_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n c_{ij}x_j^{(k)}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.8)$$

Метод Зейделя у більшості випадків дає більш швидкий збіг, ніж метод простих ітерацій.

Приклад 1

Методом простих ітерацій і методом Зейделя з точністю $\varepsilon = 0,003$ розв'язати систему

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 10. \end{cases}$$

Система в початковому вигляді не може бути розв'язана методом простих ітерацій, оскільки простою перестановкою рівнянь не можна одержати систему, в якій по діагоналі стояли б максимальні значення коефіцієнтів (тут немає ні одного рівняння, в якому б коефіцієнт при x_2 був би максимальним за модулем порівняно з іншими коефіцієнтами того самого рівняння). Перетворимо систему. Другим рівнянням візьмемо рівняння, одержане як різниця першого і другого рівнянь. Третє рівняння залишається незмінним. Як перше рівняння візьмемо друге рівняння вихідної системи. Уявімо перетворену таким чином систему (по діагоналі будуть коефіцієнти із максимальними за модулем значеннями) в ітераційній формі:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & -0,25x_2 & + 0,5x_3 + 2, \\ x_2 &= 0,1x_1 + 0 & & + 0,2x_3 + 2, \\ x_3 &= 0,6x_1 + & + 0,2x_2 + 0 & - 2. \end{aligned}$$

Перевіряємо умову збігу :

$$[C] = \begin{vmatrix} 0 & -0,25 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,6 & 0,2 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\|C\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^2} = \sqrt{0,79} < 1.$$

Достатня умова збігу виконана. Результати розрахунку за методом простої ітерації і методом Зейделя наведені в табл. 7.2 і 7.3 відповідно (у перших трьох рядках зазначені наближення, в останньому – розв'язки).

Таблиця 7.2

Ітерації	x_1	x_2	x_3	$\max x_i^{k+1} - x_i^k $
0	2	2	-2	
1	0,500	2,000	-0,400	1,600
2	1,300	2,020	-1,300	0,900
.....				
11	0,999	2,000	-0,999	0,003

Таблиця 7.3

Ітерації	x_1	x_2	x_3	$\max x_i^{k+1} - x_i^k $
0	2	2	-2	
1	0,500	1,700	-1,360	1,500
2	0,895	1,907	-1,082	0,395
.....				
6	1,000	2,000	-1,000	0

Із наведених таблиць видно, що метод Зейделя має велику швидкість збігу.

Лекція 8

Наближене інтегрування із заданим кроком

Мета роботи – вивчення способів наближеного інтегрування в таблицях Excel.

Основні теоретичні положення

8.1. Постановка задачі

Нехай необхідно обчислити визначений інтеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx. \quad (8.1)$$

Методи наближеного інтегрування базуються на використанні геометричної інтерпретації значення певного інтеграла як площі криволінійної трапеції, обмеженої віссю абсцис, прямими $x = a$, $x = b$ і кривою $f(x)$ (рис. 8.1).

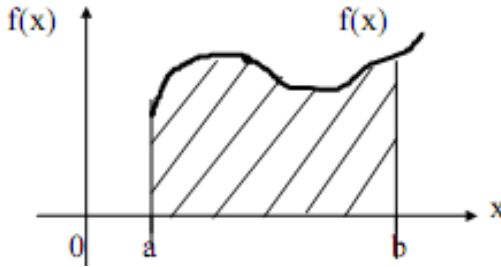


Рисунок 8.1

Для обчислення нас цікавлять площі (див. рис. 8.2). Розіб'ємо область інтегрування на n рівних частин точками

$$x = a, x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n = b.$$

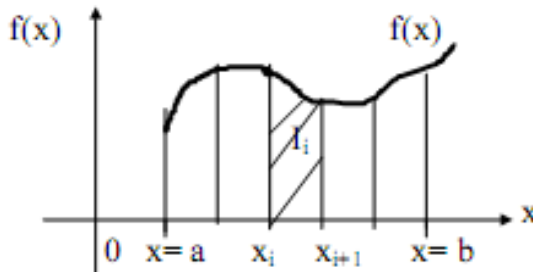


Рисунок 8.2

Тоді $I = \sum_{i=1}^n I_i$, (8.2), де

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx. \quad (8.3)$$

Отже, для обчислення інтеграла (8.1) необхідно обчислити n площ фігур криволінійних трапецій (рис. 8.2).

8.2. Інтегрування експериментальних даних

Як правило, в результаті експерименту одержують дискретні дані, тобто у вузлах x_i проводять вимірювання значень деякої функції y_i .

Інтегрування дискретних даних передбачає попередню апроксимацію або інтерполяцію цих даних відомою функцією з подальшим її інтегруванням. У більшості випадків не вдається підібрати одну функцію для апроксимації на всьому інтервалі, тому область інтегрування поділяється на велику кількість підінтервалів, на кожному з яких використовується проста функція типу лінійної, квадратичної або кубічної. Після цього результати апроксимації для окремих підінтервалів складаються разом для одержання повного інтеграла.

8.3. Типи формул інтегрування

Найбільш часто при чисельному інтегруванні використовуються правило прямокутників, правило трапецій, інтегрування за Ромбергом, правило Сімпсона і квадратуру Гаусса. Кожен із цих методів є більш точним, ніж попередній, оскільки виробляє апроксимацію даних більш складної кривої.

8.4. Правило прямокутників

Згідно з правилом прямокутників, область між точками розбиття інтервалу інтегрування $[a, b]$ замінюється прямокутником, висота якого відповідає координаті Y однією з точок, а ширина дорівнює відстані між точками (рис. 8.3). Значення інтеграла визначається за такою формулою:

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i). \quad (8.4)$$

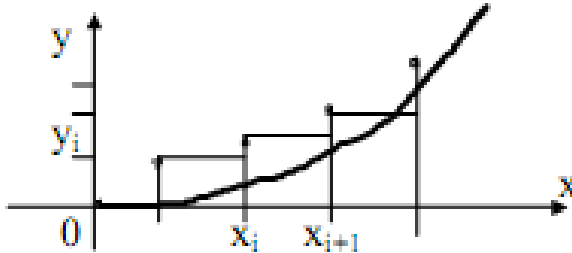


Рисунок 8.3

Таке наближення може здатися грубим, наприклад, для випадку, зазначеного на рис. 8.3, однак при малій ширині інтервалу і гладкої функції результати є досить точними. Крім того, такий метод дуже просто реалізувати, оскільки досить просто обчислюється площа прямокутника – перемножується значення Y в кожній точці на ширину інтервалу, результати додаються.

8.2.5. Правило трапецій

Згідно з цим правилом кожна пара сусідніх точок з'єднується прямою лінією, утворюючи послідовність трапецій (рис. 8.4).

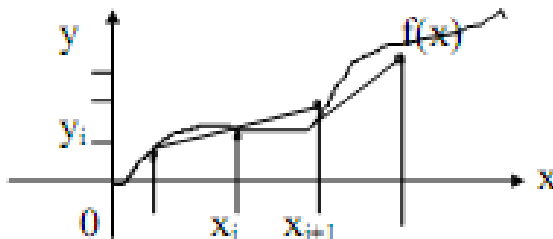


Рисунок 8.4

Площа трапеції дорівнює півсумі основ, помноженій на висоту, яка в даному випадку дорівнює відстані між точками по осі X. Інтеграл дорівнює сумі площ усіх трапецій.

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(y_i + y_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i). \quad (8.5)$$

8.2.6. Інтегрування за Ромбергом

Правило трапецій можна поліпшити за допомогою інтегрування за Ромбергом, що використовує дві різні оцінки для екстраполяції значення інтеграла. При обчисленні першої оцінки використовується правило трапецій для кожної точки, а при обчисленні другої оцінки – правило трапецій для кожної другої точки (рис. 8.5).

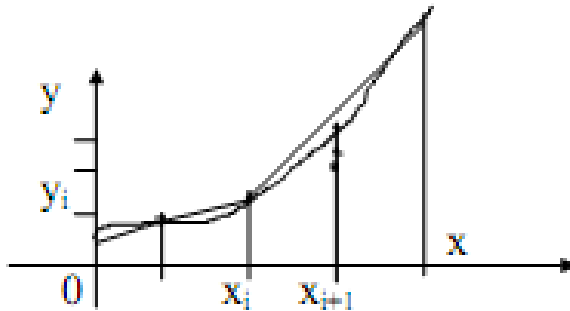


Рисунок 8.5

$$I1 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(y_i + y_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i). \quad (8.6)$$

$$I2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(y_i + y_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i). \quad (8.7)$$

Одержані оцінки відповідають різним інтервалам між точками. Згідно з методом Ромберга помилка при обчисленні інтеграла пропорційна квадрату відстані між точками.

$$I = I_1 + Ch^2. \quad (8.8)$$

$$I = I_2 + Ch^2. \quad (8.9)$$

де C стала величина, $h = (b - a)/n$. Розв'язання цих двох рівнянь дає вираз для обчислення інтеграла:

$$I = I_1 + 1/3(I_1 - I_2). \quad (8.10)$$

8.2.7. Правило Сімпсона

Згідно з правилом Сімпсона, для апроксимації даних використовується рівняння параболи, побудованої за трьома точками (правило 1/3) або за чотирма точками (правило 3/8).

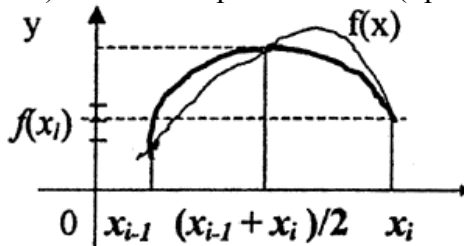


Рисунок 8.6

$$I = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-2} \frac{1}{3} (y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2})h,$$

$$I = \sum_{i=1,4,7,\dots}^{n-3} \frac{3}{8} (y_i + 3y_{i+1} + 3y_{i+2} + y_{i+3})h$$

8.2.8. Використання методів інтегрування

Методи інтегрування досить просто можуть бути використані під час роботи з Excel. Значення інтеграла на елементарних ділянках, на які розбитий заданий інтервал інтегрування, обчислюються у відповідних осередках, після чого результати в них підсумовуються.

Розглянемо інтегрування гамма-функції, яка належить до так званих спеціальних функцій науки і техніки. Вона виникає у фізичних завданнях, наприклад, при обчисленні ймовірностей у

статистичній механіці або при нормуванні хвильових функцій у кулонівському полі. Гамма-функція визначається таким інтегралом:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt, \quad (8.11)$$

який не має аналітичного виразу. Значення гамма-функції, як правило, задаються таблично.

Лекція 9

Наближене інтегрування із заданою точністю

Мета роботи – ознайомлення з макросами на основі мови Visual Basic в Excel.

Основні теоретичні положення

У лекції 8 розглянуті основні принципи і методи наближеного інтегрування. В результаті виконання цієї роботи можна переконатися, що збільшення числа інтервалів (кроків) інтегрування призводить до збільшення точності інтегрування.

Однак якщо при постановці задачі задана точність інтегрування, але невідоме число кроків, розв'язання такої задачі стає дуже важким. Можливо, буде необхідно подвоювати число кроків багаторазово. Використання режиму Ітерації в цьому випадку неможливе, оскільки необхідно здійснювати додаткове копіювання формул у комірках B, C, D, E при подвоєнні числа кроків.

Для інтегрування із заданою точністю зручно використовувати макроси (підпрограми) на мові програмування Visual Basic. Visual Basic на відміну від базової мови Turbo Basic, а це вимагає попереднього опису змінних і констант. Наприклад, речову змінну t , необхідну для обчислення гамма-функції, можна описати так:

Dim dblT As Double.

Тут *Dim* – оператор опису змінної по імені *dblT*: *As* – ключове слово, що вказує на тип змінної (речова, *Double* або цілий *Integer*). Операція підсумовування при інтегруванні буде здійснюватися з допомогою оператора циклу *FOR*. Параметром циклу буде змінна t , яка повинна змінюватися від нижньої межі інтегрування (позначимо її *tstart*) до верхньої межі інтегрування (позначимо її *tend*).

Опишемо ці змінні як константи

Const tstart = 0 Const tend = 20.

Обчислення гамма-функції будемо здійснювати за допомогою процедури - ФУНКЦІЇ, яка описується у вигляді

Function Gamma (dbl AsDouble)As Double.

Тут *Function* – вказівка, що працюємо з функцією; *Gamma* – ім'я нашої процедури - функції. У дужках зазначається, для якої змінної повинна змінюватися ця функція (у нашому випадку це змінна *dbl*). Функція повинна бути описана як змінна (ціла чи речова), в даному випадку – речова : *As Double*.

Для друку коментарів використовуються рядкові константи, що позначаються на початку рядка апострофом «Наприклад, це рядок–коментар».

Лекція 10

Метод Ейлера при розв'язанні звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку

Мета роботи – ознайомлення з основами чисельних методів на прикладі метода Ейлера.

Основні теоретичні положення

Звичайним диференціальним рівнянням (ЗДР) першого порядку називається рівняння вигляду $F(x, y, y') = 0$ або

$$y' = f(x, y) \text{ тобто } y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) .$$

Розв'язком диференціального рівняння може бути графік функції або залежність між величинами у якому-небудь фізичному законі. Іншими словами, за допомогою диференціальних рівнянь можна описувати фізичний зміст та функціональну залежність законів природи.

Приклад 1

Рівняння прямої, що має вигляд $y = kx + c$, можна записати у диференціальній формі: $\frac{dy}{dx} = k$, де k – константа.

Проінтегрувавши це рівняння, одержуємо рівняння прямої:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= k \\ dy &= k dx \\ \int dy &= \int k dx \\ y &= kx + c, \end{aligned}$$

де c – константа інтегрування (оскільки межі інтегрування не задані).

Приклад 2

Рівняння параболи, що має вигляд $y = ax^2 + c$, можна записати у диференціальній формі

$$\frac{dy}{dx} = x$$

Проінтегрувавши це рівняння, одержуємо:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x, \\ dy &= x dx, \\ \int dy &= \int x dx, \\ y &= \frac{x^2}{2} + c,\end{aligned}$$

де c – константа інтегрування (при цьому $a = \frac{1}{2}$).

Розв'язання ЗДР, наведене у прикладах 1 і 2 є аналітичним. Дуже часто трапляються випадки, коли ЗДР аналітично розв'язати дуже складно. У такому разі необхідно застосовувати чисельні методи.

10.1. Опис методу Ейлера

Метод Ейлера є найпростішим наближеним способом розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, але його точність сильно залежить від величини кроку інтегрування $h = x_i - x_{i-1}$. Розглянемо його геометричну інтерпретацію на

прикладі одного рівняння $y' = \frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = F(x_i, y_i)$.

Нехай потрібно проінтегрувати рівняння на інтервалі $[a, b]$, тобто знайти профіль зміни функції y для заданого діапазону значень аргументу x (рис. 10.1).

Розділимо інтервал $[a, b]$ на рівні малі відрізки Δx , які і є кроком інтегрування. На рисунку пунктиром позначена невідома функція y . Подумки проведемо в точці дотичну до функції. Наближеним значенням функції y в точці з координатою $a + \Delta x$, тобто на кінці першого відрізка будемо вважати точку перетину дотичної і перпендикуляра, відновленого в цій точці. Тоді $y(a + \Delta x) = y(a) + \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

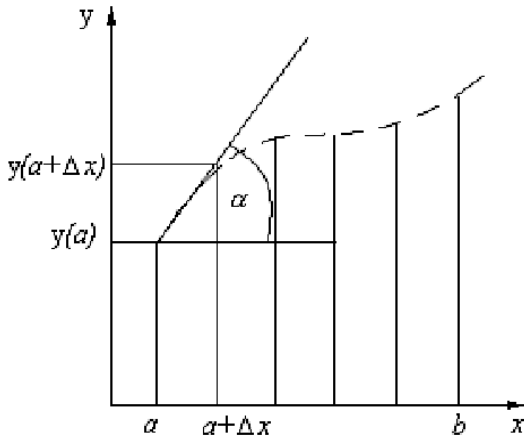


Рисунок 10.1 – Геометричне зображення методу Ейлера

Кут α – це кут нахилу дотичної, проведеної в точці a . Із геометричного змісту першої похідної випливає, що тангенс кута нахилу дотичної, проведеної в певній точці, чисельно дорівнює першій похідній, обчисленій у цій точці, тобто

$$\operatorname{tg} \alpha = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}.$$

Формула для наближеного значення функції на кінці відрізка набуває вигляду

$$y(a + \Delta x) \approx y(a) + \Delta x \cdot \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a},$$

або

$$y_{i+1} = y_i + F(x_i, y_i)h, \quad (10.1)$$

де $h = x_{i+1} - x_i$ – крок інтегрування (для зручності задається рівномірним, тоді $x_{i+1} - x_i$ завжди буде дорівнювати h)

Формула **10.1** називається **ітераційною формулою Ейлера**.

Таким чином, наближене значення функції на кінці поточного відрізка інтегрування дорівнює сумі значень функції на початку відрізка і добутку кроку інтегрування на величину похідної, обчисленої на початку відрізка. Для першого кроку повинне бути відоме значення функції на початку всього інтервалу інтегрування (у точці a). Це значення називають початковою умовою ($y(x_0) = y_0$).

Метод Ейлера досить простий для реалізації, тому його часто програмують безпосередньо у прикладній програмі. Основний недолік методу – невисока точність при недостатньо малому кроці інтегрування.

Приклад 3

Розв'яжемо за допомогою методу Ейлера рівняння $\frac{dy}{dx} = x^2$, використовуючи можливості MSExcel. Початкові умови при цьому $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

У даному випадку $F(x, y) = x^2$ або $F(x_i, y_i) = x_i^2$.

1) Напишемо в одному рядку початкові наближення x та y , а також функцію $F(x, y)$:

	A	B	C	D
1	i	x _i	y _i	F(x _i ,y _i)
2	0 (начальные условия)	0		0 =B2^2
3				
4				

2) Задамо крок інтегрування h .

	A	B	C	D	E	F
1	i	x_i	y_i	$F(x_i, y_i)$		h
2	0 (начальные условия)	0	0	0		0,1
3						

3) Задамо масив значень x_i , враховуючи крок інтегрування h .

	A	B	C	D	E	F
1	i	x_i	y_i	$F(x_i, y_i)$		h
2	0 (начальные условия)	0	0	0		0,1
3		$1 = B2 + \$F\2				
4		2 0,2				
5	0,3				
6		0,4				
7		0,5				
8		0,6				
9		0,7				
10		0,8				
11		0,9				
12		1				

4) Із урахуванням ітераційної формули 10.1 заповнюємо комірки для стовпчика y_i , починаючи із рядка $i = 1$.

	A	B	C	D	E	F	G
1	i	x_i	y_i	$F(x_i, y_i)$		h	
2	0 (начальные условия)	0	0	0		0,1	
3		1	$0,1 = C2 + \$F\$2 * D2$				
4		2	0,2	0			
5		0,3	0			
6			0,4	0			
7			0,5	0			
8			0,6	0			
9			0,7	0			
10			0,8	0			
11			0,9	0			
12			1	0			
13							
14							

5) Створимо масив $F(x_i, y_i)$.

	A	B	C	D	E	F	G
1	i	x _i	y _i	F(x _i ,y _i)		h	
2	0 (начальные условия)	0	0	0	0	0,1	
3		1	0,1	0	0,01		
4		2	0,2	0,001	0,04		
5		0,3	0,005	0,09		
6			0,4	0,014	0,16		
7			0,5	0,03	0,25		
8			0,6	0,055	0,36		
9			0,7	0,091	0,49		
10			0,8	0,14	0,64		
11			0,9	0,204	0,81		
12			1	0,285	1		
13							
14							
15							

Таким чином, ми одержали масив значень y при різних значеннях x .

При цьому аналітичним розв'язком рівняння буде:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^2, \\ dy &= x^2 dx, \\ \int dy &= \int x^2 dx, \\ y &= \frac{x^3}{3} + c. \end{aligned}$$

Константу інтегрування c знаходимо шляхом підстановки у функцію початкових умов $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Тоді $c = 0$. Отже, у даному випадку ми маємо рівняння

$$y = \frac{x^3}{3};$$

Порівняймо результати розв'язання даного рівняння із результатами чисельного розв'язку:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	i	xi	yi	F(xi,yi)		h		Аналитическое решение		
2	0 (начальные условия)	0	0	0		0,1		$=8x^2/3$		
3		1	0,1	0	0,01			0,000333		
4		2	0,2	0,001	0,04			0,002667		
5		0,3	0,005	0,09			0,009		
6			0,4	0,014	0,16			0,021333		
7			0,5	0,03	0,25			0,041667		
8			0,6	0,055	0,36			0,072		
9			0,7	0,091	0,49			0,114333		
10			0,8	0,14	0,64			0,170667		
11			0,9	0,204	0,81			0,243		
12			1	0,285	1			0,333333		
13										

та

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
	xi	yi	F(xi,yi)		h		Аналитическое решение			Погрешность расчета τ	
	0	0	0		0,1		0			$=(C2-H2)/H2*100$	
1	0,1	0	0,01				0,000333			-100	
2	0,2	0,001	0,04				0,002667			-62,5	
	0,3	0,005	0,09				0,009			-44,4444	
	0,4	0,014	0,16				0,021333			-34,375	
	0,5	0,03	0,25				0,041667			-28	
	0,6	0,055	0,36				0,072			-23,6111	
	0,7	0,091	0,49				0,114333			-20,4082	
	0,8	0,14	0,64				0,170667			-17,9688	
	0,9	0,204	0,81				0,243			-16,0494	
	1	0,285	1				0,333333			-14,5	

Список літератури

1. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1966. – 664 с.
2. Орвис В. Д. Excel для ученых, инженеров и студентов / В. Д. Орвис. – Киев : Юниор, 1999. – 528 с.
3. Ткаченко Г. Г. Вычислительная техника и программирование / Г. Г. Ткаченко, Т. Д. Бессонова. – Л. : СЗПИ, 1991. – Ч. 1. – 55 с.
4. Евдокимов В. В. Экономическая информатика / В. В. Евдокимов. – СПб. : Питер Паблишинг, 1997. – 592 с.
5. Scott D. F. Разработка прикладных систем на Visual Basic for Windows / D. F. Scott. – М. : Исланд, 1994. – 480 с.

Навчальне видання

Левченко Дмитро Олексійович

Математичні методи й моделі у розрахунках енергетичного обладнання на ЕОМ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів напряму підготовки
6.050604 «Енергомашинобудування»
денної та заочної форм навчання

Відповідальний за випуск С. М. Ванєєв
Редактор Н. В. Лисогуб
Комп'ютерне верстання Д. О. Левченка

Підписано до друку 02.08.2016, поз.
Фрмат 60x84/16. Ум. друк. арк. 16,04. Обл.- вид. арк. 15,06. Тираж 40 пр. Зам. № .
Собівартість вид. грн к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.