МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

Данільцев Віктор Володимирович

УДК 539.3

МІЦНІСТЬ КОНСТРУКЦІЙ ЗІ СКЛОПЛАСТИКА З МІЖШАРОВИМИ ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРИ МАТЕРІАЛА

05.02.09 – динаміка та міцність машин

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Науковий керівник –
доктор технічних наук,
професор Верещака С.М.

Суми – 2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальнісить теми. Обсяг світового виробництва склопластикових труб (СПТ) становить більше 72 тис. км. У вартісному вираженні світовий ринок СПТ оцінюється в 14 360 млн. USD. Найбільшими споживачами СПТ являються підприємства хімічної промисловості. На частку підприємств нафтогазової промисловості доводиться 28% світового споживання СПТ.

Інтенсивне впровадження нових композиційних матеріалів у різні галузі сучасної техніки, насамперед, викликано високими техніко-економічними показниками конструкцій, створених на їхній основі.

Високі показники питомої міцності і жорсткості волокнистих композиційних матеріалів разом з хімічною стійкістю, порівняно малою вагою та іншими властивостями, зробили ці матеріали привабливими для виготовлення трубопроводів різного призначення. Застосування склопластикових труб взамін металевих збільшує термін служби трубопроводів майже в 4 рази, приблизно в 3 рази знижує вагу трубопроводу.

Склопластикові труби на епоксидному в’яжучому здатні витримувати тиск до 24 МПа. Максимальна температура експлуатації досягає 130^{o}С. Склопластикові труби на основі епоксидних смол мають безліч переваг. Волокно, просочене епоксидною смолою, не піддаэться корозії і тому не вимагає ізоляції (внутрішньої або зовнішньої), хімічних інгібіторів, катодного і анодного захисту.Ще однією перевагою є збільшення терміну служби насосів і іншого вмонтованого в трубопровід устаткування через повну відсутність у потоці часток іржі. Низька теплопровідність таких труб зменшує втрати тепла із системи трубопроводів, внаслідок чого в багатьох випадках зникає необхідність в ізоляції.

Більша частина випадків руйнування конструкцій СПТ пов’язана з низькою міцністю механічних і адгезійних (клейових) з’єднань їхніх окремих елементів. Труби і деталі сполучень зі склопластику виготовляються під стикові з’єднання наступних типів: фланцеві, бугельні, бандажні або муфтові, раструбні, різьбові.

Аналіз ефективності різних типів з'єднань доводить, що до основних переваг адгезійних з'єднань у порівнянні з їхніми механічними аналогами варто віднести: меншу концентрацію напружень, зниження маси з'єднання, мала ймовірність поширення тріщин. Основний недолік клейових з'єднань – низька міцність клейового шару при деформаціях зсуву та трансверсального відриву.

Під час виготовлення і експлуатації багатошарових конструкцій, до яких можна віднести СПТ, на міжшарових поверхнях контакту жорстких армованих шарів утворюється тонкий клейовий прошарок, а також різного роду структурні недосконалості, наприклад, ділянки непроклею або відшарувань. Специфічними особливостями багатошарових конструкцій з композитних матеріалів є різко виражена анізотропія їх властивостей, відносно низький опір поперечним та трансверсальним деформаціям, істотна відмінність механічних і теплофізичних характеристик шарів.

З урахування наведених особливостей деформування багатошарових елементів конструкцій можна стверджувати, що традиційно використовувані в розрахункових моделях оболонок і пластин із композиційних матеріалів умови неперервності переміщень і напружень (ідеального контакту) при переході від одного сусіднього жорсткого армованого шару до іншого не виконуються.

Із-за складності чисельної реалізації розглянутих задач, отримані теоретичні результати потребують експериментальної перевірки, особливо, якщо досліджується несуча здатність багатошарових тонкостінних елементів конструкцій з урахуванням різного роду початкових дефектів структури матеріалу.

Тому розробка нових методик розрахунку напружено-деформованого стану багатошарових конструкцій з дефектами структури на основі уточненої дискретно-структурної теорії, коли враховуються адекватні кінематичні та статичні умови контактної взаємодії суміжних поверхонь сполучених шарів під час дії як статичного, так і температурного навантаження визначає актуальність проведених досліджень. Через відсутність типових методик для розрахунку на міцність клейових з'єднань труб зі склопластикових матеріалів, рішення теоретичних й експериментальних завдань, які можуть виникнути при їхньому створенні, також уявляється актуальною проблемою.

Зв’язок робрти з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі загальної механіки і динаміки машин Сумського державного університету при виконанні робіт відповідно до координаційного плану Міністерства освіти і науки України та реалізована при виконанні держбюджетних науково-дослідних робіт: «Несуча здатність комбінованого газового балона високого тиску» (0110U004017), «Дослідження робочого процесу та розробка теорії нових енергоефективних та ресурсозберігаючих конструкцій ущільнень відцентрових машин» (0113U000135).

Мета і задачі дослідження. Мета роботи полягає в розробці методики розрахунку на міцність та граничний стан склопластикових труб з урахуванням міжшарових дефектів структури матеріалу, а також різних варіантів їх з’єднань.

Для досягнення зазначеної мети в дисертації поставлені такі основні задачі:

– розробити методику дослідження термопружного стану багатошарових оболонок обертання, коли на одній частині міжфазної поверхні контакту суміжних шарів виконуються умови ідеального контакту, а на іншій спостерігаються ділянки з неідеальним контактом (непроклеї, розшарування, проковзування);

– побудувати замкнену систему диференціальних рівнянь та відповідні крайові умови незв'язаної стаціонарної задачі термопружного деформування багатошарової композитної оболонки, що дозволяють врахувати деформації поперечного зсуву і трансверсального обтиснення, умови механічного і теплового сполучення шарів та термомеханічного навантаження на лицьових поверхнях такої оболонки;

– створити методику визначення інтегральних термопружних характеристик композитів шаруватої структури та запропонувати ефективний алгоритм визначення теплового коефіцієнтів лінійного розширення та теплопровідності для багатошарового анізотропного матеріалу;

– дослідити напружено-деформований стан склопластикових труб в зоні фланцевих, бандажних та муфтових з’єднань;

– розв’язати задачу конструкційної міцності багатошарових циліндричних оболонок і створити методику визначення граничного внутрішнього тиску ремонтних композитних бандажів, виготовлених шляхом багатошарового намотування склотканини на сталеву трубу у місці дефекту з одночасним її просочуванням епоксидною смолою.

Об’єкт дослідження – процес деформування багатошарових оболонок обертання з міжшаровими дефектами структури матералу та різних варіантів їх з’єднань.

Предмет дослідження – конструкційна міцність склопластикових труб, клейових та фланцевих з’єднань, сталевих труб з дефектами, підсилених ремонтним композитним бандажем.

Методи дослідження. Для розв’язання термопружної незв'язаної задачі застосовуються метод Фур’є, метод рядів Тейлора, метод ортогональної прогонки. На основі даних методів створений алгоритм і мовою програмування VISUAL FORTRAN складена програма розрахунку напружено-деформованого стану багатошарових циліндричних оболонок від дії статичного та температурного навантаження. Для розв’язання деяких із розглянутих задач також використовувався метод скінченних елементів, який реалізовано в програмному комплексі ANSYS.

Достовірність отриманих результатів забезпечена використанням апробованих методів розв’язання крайових задач, фізично обґрунтованих моделей конструкцій і матеріалів, доброю кореляцією теоретичних результатів як з отриманими в роботі, так і наведеними в літературних джерелах експериментальними і теоретичними даними.

Наукова новизна одержаних результатів:

– складено повну систему розв’язувальних рівнянь дискретно-структурної теорії в змішаній формі для розв'язання контактної крайової задачі визначення напруженого стану багатошарових оболонок з між шаровими дефектами структури матеріалу;

– створено методику дослідження термопружного стану багатошарових оболонок обертання, коли на одній частині міжфазної поверхні контакту суміжних шарів виконуються умови ідеального контакту, а на іншій спостерігаються ділянки з неідеальним контактом (непроклеї, розшарування, проковзування);

– розроблено теоретико-експериментальну методику визначення інтегральних термопружних характеристик композитів шаруватої структури;

– експериментально досліджено деформований стан склопластикових труб та їх з’єднань з міжшаровими дефектами структури матеріалу методом тензометрування;

– розв’язано задачу конструкційної міцності і створено методику визначення граничного внутрішнього тиску багатошарових циліндричних оболонок, досліджено напружено-деформований стан склопластикових труб в зоні фланцевих, бандажних та муфтових з’єднань;

– створено методику визначення граничного гідростатичного тиску ремонтних композитних бандажів, виготовлених шляхом багатошарового намотування склотканини на трубу у місці дефекту з одночасним її просочуванням епоксидною смолою.

Практичне значення отриманих результатів:

– розроблена методика визначення інтегральних термопружних характеристик композитів шаруватої структури та розв’язок задачі конструкційної міцності композитів з міжшаровими дефектами. Теоретичні методи визначення пружних властивостей і оцінки міцності композиційних матеріалів дозволяють зменшити обсяг трудомістких експериментальних досліджень;

– розроблений метод визначення граничного внутрішнього тиску багатошарових циліндричних оболонок, а також наведені дослідження міцності склопластикових труб в зоні фланцевих, бандажних та муфтових з’єднань, має важливе значення для безпеки експлуатації трубопроводів з композиційних матеріалів.

Теоретичні і числові результати дисертаційної роботи впроваджені в прикладних науково-технічних розробках щодо вдосконалення виробів із композиційних матеріалів: ТОВ «СКЛОПЛАСТИКОВІ ТРУБИ» м. Харків.

Запропоновані методи розрахунку зазначених крайових задач використовуються в навчальному процесі Сумського державного університету, для студентів напрямку підготовки «Механіка» та магістрів спеціальності «Комп'ютерна механіка».

Результати досліджень впроваджені в практику науково-дослідних і проектних робіт в ході виконання європейського гранту «Innovative nondestructive testing and advanced composite repair of pipelines with volumetric surface defects» № PIRSES-GA-2012-318874 у 7-й рамковій програмі Європейського союзу в НТУ «ХПІ». Отримані відповідні акти впровадження.

Особистий внесок здобувача. Дисертація є результатом довготривалих досліджень автора з проблем міцності склопластикових труб з між шаровими дефектами структури. Дані до захисту основних положень дисертаційної роботи отримані здобувачем особисто. У публікаціях, виданих у співавторстві, здобувачу належать наступні наукові результати:

[1] – визначення розрахункової моделі багатошарової склопластикової труби;

[2 – 3, 5] – аналіз останніх публікацій стосовно розглянутого питання;

[4] – варіант експериментального стенду безперервного намотування труб з композиційних матеріалів;

[6] – складення алгоритму і розв'язання крайової задачі термопружного деформованого під час з'єднання циліндричної товстостінної багатошарової оболонки та металевого фланця;

[7] – варіант експериментального стенду верстака для виробництва труб з армованих пластмас;

[8] – теоретичне обгрунтування розрахункової моделі під час розрахунків на міцність склопластикових труб у зоні фланцевих з'єднань;

[9 – 17] – теоретичне обгрунтування розрахункових моделей та складання алгоритмів для розв’язання розглянутих крайових задач та аналіз достовірності отриманих результатів шляхом експериментальних досліджень.

Апробація результатів дисертації. Зміст основних розділів і окремих результатів роботи доповідався на наступних конференціях: Міжнародній науково-практичній конференції “Технология XXI века” (Южне, 2014), 12-й Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові (Львів, 2015), 5-й міжнародній конференції (м. Мінськ, Бєларусь, 2015), міжнародних спеціалізованих виставках – конференціях “Композити і склопластики ” (Запоріжжя, 2009 – 2016 р.р.).

У повному обсязі робота обговорювалася на семінарі кафедри “Загальної механіки та динаміки машин” Сумського державного університету (Суми, 2015 р.), на семінарі кафедри “Динаміки і міцності машин машин” Харківського національного технісного університету “ХПІ” (Харків, 2015 р.).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 17 наукових робіт, серед яких 9 статей у наукових журналах, що входять до переліку фахових видань України, 1 публікація – в зарубіжному періодичному фаховому виданні, 3 деклараційних патенти на винахід, 4 матеріалів і тез доповідей на наукових конференціях.

Структура і обсяг дисертації. Робота складається зі вступу, 5 розділів, списку використаних джерел (190 найменувань), висновків і додатка (на 4 сторінках). Загальний обсяг дисертації становить 184 сторінки, 60 рисунків та 21 таблицю по тексту. Обсяг основного тексту дисертації становить 161 сторінку.

1. РОЗРАХУНКОВІ МОДЕЛІ І МЕТОДИКИ РОЗРАХУНКУ СКЛОПЛАСТИКОВИХ ТРУБ ЗА ГРАНИЧНИМ СТАНОМ

1.1. Класифікація склопластикових труб

Під трубами з полімерних композитних матеріалів (ПКМ) розуміються склопластикові, базальтопластикові, органопластикові або інші труби (залежно від типу армуючого наповнювача) з полімерними в'яжучими з термореактивного матеріалу. Труби зі склопластику класифікуються по жорсткості, номінальному тиску і внутрішньому діаметру.

Під класом жорсткості (SN або G) склопластикових труб мається на увазі поперечна жорсткість труби, тобто здатність стінок труби витримувати навантаження, що приводять до деформації або стиску труби в площині, перпендикулярній осі труби. По жорсткості в різних системах стандартизації розрізняють труби за наступними класами (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Показники жорсткості труб у різних системах стандартизації.

Система стандартизації [1]	Позначення	Одиниця вимірювання	Клас жорсткості		
			SN2500	SN5000	SN10000
ISO	S_P	Н/м^2 (Па)	2500	5000	10000
DIN	S_R	Н/мм^2 (МПа)	0,02	0,04	0,08
ASTM	F/Δy	Psi	20	40	80

Джерело: дані «American Composites manufactures Association» (США).

По тиску труби класифікуються по номінальному тиску (PN), під яким мається на увазі величина безпечного тиску води в МПа при +20°С на протязі нормованого терміну служби (звичайно 50 років) із застосуванням коефіцієнта безпеки (запасу міцності), який дорівнює 1,8. Наприклад, стандартні склопластикові труби фірми Hobas мають комбіновані характеристики по робочому тиску і жорсткості, наведені в табл. 1.2.

Частка волокон у матеріалі труби може становити від 65% до 85%. Фізико-механічні характеристики склопластикових труб залежать від закону армування (напрямку укладання волокон) і для кожного типу труби розрізняються вздовж осі і в коловому напрямку (табл. 1.3).

Таблиця 1.2 – Комбіновані характеристики по робочому тиску і жорсткості склопластикових труб.

Робочий тиск (МПа)	Клас по тиску (PN)	Клас по жорсткості (SN)	Позначення
0,4	4	2500	4/2500
0,6	6	5000	6/5000
1,0	10	5000	10/5000
1,0	10	10000	10/10000
1,6	16	10000	16/10000
2,0	20	10000	20/10000
2,5	25	10000	25/10000

Джерело: дані компанії «Hobas».

Таблиця 1.3 – Фізико-механічні властивості склопластикових труб на епоксидному в’яжучому, по даним АТ «Прогрес», ТУ 2296-250-24046478-95[18].

Найменування показника	Труби спірального намотування з кутом намотування 55°	Труби безперервного намотування армування 2:1
Границя міцності при розтяганні в тангенціальному напрямку, МПа, не менш	240	180
Границя міцності при розтяганні в осьовому напрямку, МПа, не менш	120	80
Модуль пружності в тангенціальному напрямку, МПа, не менш	25000	19000
Модуль пружності в осьовому напрямку, МПа, не менш	12000	8000
Коефіцієнт лінійного теплового розширення (осьовий), 1/^{0}С, не більше	$18 \cdot 10^{-6}$	$21 \cdot 10^{-6}$
Густина, кг/м^{3}	1800 – 1900	1600 – 1700
Вагове співвідношення: стклонаповнювач – в’яжуче	65 – 72/35 – 28	50 – 55/50 – 40
Тангенціальні напруження при розтяганні, МПа, не більше	50	35
Осьові напруження при розтяганні, МПа, не більше	24	16
Деформація при розтяганні, мм/м, не більше	0002	0002

Джерело: дані компанії АТ «Прогрес».

Як правило, всі виробники склопластикових труб прагнуть до того, щоб міцність в коловому напрямку труби була у два рази вище міцності вздовж осі. Значення колової міцності склопластикових труб при повному руйнуванні матеріалу може становити від 400 до 650 МПа. Для порівняння, тимчасовий опір для сталі 20 становить 410 МПа.

Типи склопластикових труб різних виробників розділяються на три групи:

– по типу в'яжучого (матриці): епоксидні або поліефірні;

– по типу з'єднання труб: клейове або механічне;

– по конструкції стінки труби: чистий склопластик (без футеровки), склопластик із плівковим шаром (футеровані труби), багатошарові конструкції.

1.1.1. Конструкції стінки склопластикових труб. Істотним розходженням між склопластиковими трубами різних виробників є конструкція стінки.

Склопластикові труби одношарові. Одношарові склопластикові труби виконані з високоякісного склопластику методом «мокрого» намотування. З метою збільшення хімічної стійкості і зниження коефіцієнта гідравлічного опору на внутрішній поверхні труб застосовується лейнер. Лейнер являє собою двохкомпонентний композит, що складається зі скляного матеріалу, просоченого епоксидним в'яжучим, зміст якого досягає 60 – 70% від загальної маси. Товщина лейнера може становити від 0,2 до 0,8 мм. Основний шар труби (конструкційний шар) складається зі скляних ниток (ровинга), просочених епоксидним в'яжучим. Конструкційний шар забезпечує задане співвідношення фізико-механічних характеристик вздовж осі в в коловому напрямку труби.

Склопластикові труби двошарові. Двошарові склопластикові труби являють собою двошарову конструкцію, що складається із захисного і конструкційного шарів. Захисний шар виконаний з поліетилену високого тиску. Товщина захисного шару може становити від 1 до 3 мм. Конструкційний шар виконаний з високоякісного склопластику методом «мокрого» намотування скляних ниток (ровингу), просочених епоксидним в'яжучим.

Склопластикові труби тришарові. Тришарові склопластикові труби являють собою тришарову конструкцію, що складається із внутрішньої склопластикової оболонки, захисного і конструкційного шарів. Конструктивно внутрішня оболонка незалежна від захисного і конструкційного шарів.

Внутрішня оболонка виконана зі склопластику методом «мокрого» намотування скляних ниток (ровингу), просочених епоксидним в’яжучим. Товщина внутрішньої оболонки може становити від 3 до 6 мм залежно від внутрішнього діаметра труби. Внутрішня оболонка не несе навантажень вздовж осі труби, і її конструкція має більшу міцність в коловому напрямку.

Захисний шар виконаний з поліетилену високого тиску. Товщина захисного шару може становити від 1 до 3 мм. Захисний шар призначений для підвищення хімічної стійкості труби і збереження її герметичності при дії значних зовнішніх навантажень.

Конструкційний шар виконаний з високоякісного склопластику методом «мокрого» намотування скляних ниток (ровингу), просочених епоксидним в’яжучим до необхідної товщини. Конструкційний шар забезпечує задане співвідношення фізико-механічних характеристик вздовж осі і в коловому напрямку труби.

1.1.2. Склопластикові труби на поліефірному в’яжучему (GRP). Конструкція стінки труби формується на основі армованих скловолокном термореактивних поліефірних смол і піщаного наповнювача. Застосовувана технологія дозволяє створити структуру стінки труби з використанням характерних властивостей основних сировинних матеріалів.

Вони мають важливі для зазначених труб властивості: затвердження при кімнатній температурі, низький ступень токсичності, хімічна інертність, висока міцністю контактної взаємодії зі скловолокном. Залежно від сфери застосування труб використовуються різні типи поліефірних (ізофталева, ортофталева, бифенольна, винилефірна) та інші смоли.

Товщина стінки труби визначається її структурою, що включає в себе кілька шарів. Внутрішній шар – лейнер (товщиною 0,8 – 1,2 мм), забезпечує герметичність, максимальну стійкість до хімічної корозії, до абразивного стирання, гладкість внутрішньої поверхні, виключає випадки різного роду відкладень на стінках труби.

Структурний шар утворюється шляхом нанесення і намотування на частково отверділий нижній шар (лайнер) термореактивного полімеру (поліефірної смоли), скловолокна методом безперервного намотування, рубаних скловолокон і кварцового піску.

Зовнішній шар має товщину 0,2 – 0,3 мм або більше, служить для захисту труби від впливу сонячного світла, агресивного ґрунту або корозійного середовища. Звичайно він складається із чистого полімеру з додаванням (при наземній прокладці трубопроводу) ультрафіолетового інгібітору для захисту труби від впливу сонячного світла.

Труби на основі поліефірних смол стійкі до корозії і до не дуже агресивних середовищ. Вони більш дешеві, а тому мають широку область застосування, особливо у водопостачанні.

Труби з поліефірних смол не можуть застосовуватися при високих температурах, транспортуємого середовища – понад 90^0C, і в умовах високого тиску – понад 32 атм. Для застосування в умовах високого тиску, високих температур і при контакті з агресивними середовищами у світі застосовуються скло та базальтопластикові труби на епоксидному в’яжучему.

1.1.3. Склопластикові труби на епоксидному в’яжучему (GRE). Склопластикові труби на основі епоксидних смол мають безліч переваг (табл. 1.4). Волокно, просочене епоксидною смолою, не піддано корозії і тому не вимагає ізоляції (внутрішнього або зовнішньої), хімічного інгібіторів, катодного і анодного захисту, захисту від корозії. Ще однією перевагою є збільшення терміну служби насосів та іншого вмонтованого в трубопровід устаткування через повну відсутність у потоці часток іржі. Низька теплопровідність GRE-труб зменшує втрати тепла із системи трубопроводів, внаслідок чого в багатьох випадках зникає необхідність в ізоляції.

Відмінною рисою GRP труб від GRE труб є габаритні розміри. Як правило, склопластикові труби на основі поліефірних смол мають більший діаметр у порівнянні із трубами на епоксидному в’яжучему.

Таблиця 1.4 – Сфери застосування склопластикових труб на епоксидному в’яжучему.

ЖКХ	Трубопроводи для ліній ГВС і теплопостачання
Нафтовидобуток	Внутрішньопромислові трубопроводи
	Обсадні і насосно-компресорні труби
	Трубопроводи підтримки пластового тиску
	Технологічні і магістральні трубопроводи
Хімічна промисловість	Трубопроводи для транспортування кислот, солей і хімічно агресивних розчинів
	Трубопроводи хімічної водопідготовки
	Шламопроводи і системи золо та шлаковидалення
Енергетична промисловість	Системи охолодження ТЕС (ТЭЦ)
	Системи опріснювальних систем

Джерело: дані компанії «Amiantit».

1.1.4. Типи з’єднань труб. Деталі стикових з’єднань труб зі скло та базальтопластика виготовляються наступних типів: фланцеві, бугельні, муфтові, муфтові клейові , раструбні, спеціальні (наприклад, різьбові).

До найпоширеніших видів з’єднань відносятся:

1. Раструбно-шипові з’єднання з подвійним кільцевим ущільненням. Забезпечує швидку і надійну зборку труб і фасонних елементів. Два еластичних кільцевих ущільнення круглого перерізу, встановлені в паралельні колові канавки на кінцях труб, забезпечують герметичність стику в напірних і безнапірних трубопроводах;

2. Раструбно-шипові з’єднання з подвійним кільцевим ущільненням і стопорним елементом. Для компенсації дії на трубопровід осьових сил (наприклад, у надземних трубопроводах) у раструбно-шиповому з’єднанні застосовується стопорний елемент, що встановлюється через отвір у раструбі в кільцеві пази на кінцях труб і перешкоджає осьовому переміщенню елементів трубопроводу відносно один одного. Залежно від рівня осьових сил стопорний елемент може бути круглого або прямокутного перерізу і виконуватися з різних матеріалів (поліамід, , металевий трос, тощо).

3. Фланцеві з’єднання. Застосовуються для з’єднання елементів

склопластикового трубопроводу з металевими трубопроводами та арматурами.

4. Клейові стикові з'єднання виконуються шляхом пошарового нанесення на попередньо підготовлені кінці труб армуючих скломатеріалів, просочених поліефірною смолою «холодного» затвердження.

1.1.5. Способи виробництва склопластикових труб. Склопластикові труби у світі виробляються двома основними способами: методом відцентрового формуваняя та методом безперервного намотування.

Метод безперервного намотування. Більшість склопластикових труб у світі виготовляються методом безперервного намотування скловолокна з в'яжучим компонентом (таким, як поліефірна або епоксидна смола) на оправлення. Після намотування труба затверджується, знімається з оправлення, випробовується, а потім відвантажується замовникові. Схема армування визначається в результаті розрахунку, виконаного відповідно до міжнародних стандартів на підставі заданих умов монтажу і експлуатації трубопроводу.

Переваги застосування труб, виготовлених за технологією безперервного намотування: висока питома міцність, мала вага (в 4 рази легше сталевих труб), висока корозійна стійкість, висока надійність і довговічність, мінімальні витрати на монтаж і обслуговування, висока ремонтопридатність, малий гідравлічний опір, відсутність "заростання" внутрішнього перерізу, екологічна чистота продуктів, що транспортують, тривалий строк експлуатації труб.

Метод відцентрового формування. Іншим способом виготовлення склопластикових труб є відцентрове формування – технологія, наприклад, запропонована фірмою Hobas. Процес виробництва цих труб протікає в напрямку від зовнішньої поверхні до внутрішньої, із застосуванням обертової форми. Труба виготовляється з рубаних скляних волокнистих жгутів (ровенгів), поліефірної смоли і піску. Процес полімеризації смоли відбувається під дією каталізатора і додатково прискорюється шляхом нагрівання. Завдяки тривимірним просторовим хімічним зв'язкам, процес полімеризації смоли необоротний. Таким чином, склопластик (GRP) є термостійким матеріалом, що зберігає просторову стабільність при підвищеній температурі навколишнього середовища.

1.1.6. Стандарти виробництва склопластикових труб. У світі склопластикові труби виготовляються за наступними стандартами: ASTM, AWWA, BSI, DIN, ISO, KN. Російські склопластикові труби виготовляються по ТУ (наприклад, ТУ 2296-001-26757545-2005 [19]), розробленими виробниками труб і науково-дослідними організаціями. Ці ТУ відповідають міжнародними стандартам ISO і API (Американського інституту нафти), а також вимогами російських нормативних документів.

При виробництві, склопластикові труби проходять кваліфікаційні і контрольні випробування, а також тестуються на хімічну стійкість.

Існує кілька стандартів ASTM, що поширюються на склопластикові труби різного призначення. Всі стандарти застосовні до труб діаметром від 80 до 4000мм із застосуванням гнучких з’єднань при проведенні гідростатичного випробування в контурі (по ASTM D4161 [20]), що імітує перевищення параметрів їх експлуатації. Ці стандарти включають багато строгих кваліфікаційних випробувань і тестів під час контролю якості.

Стандарт AWWA 3950 [21] – найбільш вичерпний із всіх стандартів на склопластикові труби. Для напірних труб цей стандарт містить значні вимоги до труб і з їх з’єднань. Подібно ASTM це стандарт якості продукції. На цей час набув чинності новий стандарт AWWA M-45 [22], що включає додаткові розділи глав по склопластиковим трубам, які застосовуються під час проведення підземного та надземного монтажу.

Міжнародна організація по стандартизації (ISO) і Європейський комітет нормування (EN) активно поповнюють існуючі документи новими стандартами на продукцію і відповідні методи випробувань. Загальним для всіх стандартів є вимога до виробників труб – забезпечити відповідність зазначеної продукції, щодо мінімуму стандартів, які характеризують її якість. У випадку склопластикових труб у цей мінімум входять як початкові, так і довгострокові вимоги. Найважливішими з них є вимоги до з’єднань, початкових і довгострокових деформацій, довгострокової здатності витримувати тиск і довгострокової корозійної стійкості. Склопластикові труби строго тестуються для підтвердження їхньої відповідності вимогам стандартів ASTM D3262 [23], ASTM 33517 [24], AWWA C950 [25] та DIN 16868 [26].

Окремо слід зазначити, що номінальний тиск склопластикових труб серійного виробництва досягає показника 40 МПа. При цьому ряд виробників склопластикових труб відзначають, що можливо виробництво труб і більшого номінального тиску.

1.2. Розрахункові моделі багатошарових конструкцій

Теорія тонкостінних конструкцій з композиційних матеріалів є одним з важливих розділів сучасної механіки деформованого твердого тіла. Як і раніше важливими залишаються задачі створення достовірних математичних моделей та розробка надійних і високоефективних методів розрахунку багатошарових конструкцій. Аналіз цілого ряду оглядів [27 – 32] показує , що всі дослідження з питань механіки тонкостінних армованих елементів конструкцій проводяться в таких основних напрямках. Перший напрям пов’язаний з вибором математичних моделей тонкостінних елементів конструкцій. Прийнята математична модель порівнюється з її класичним аналогом за рівнем обліку тих чи інших внутрішніх силових факторів, щодо адекватності постановки крайових задач неоднорідній структурі композиційного матеріалу. Для другого напрямку характерне обґрунтування запропонованих моделей, встановлення зв’язку між ними і просторовими задачами теорії пружності. По третьому напрямку проводиться аналіз методів вирішення різних класів задач і дослідження впливу геометричних і механічних параметрів і навантажень на поля напружень і переміщень, пропонуються варіанти використання отриманих результатів розрахунку при проектуванні тонкостінних елементів конструкцій різного призначення.

Основи класичної теорії анізотропних оболонок отримали детальне відображення в монографіях С. А. Амбарцумяна [33, 34], Я. М. Григоренко [35], В. І. Корольова [36] і С. Г. Лехніцького [37]. Детальна бібліографія з класичної теорії анізотропних пластин і оболонок є в огляді Е. І. Гріголюка і Ф. А. Когана [38]. Підкреслюється, що ця теорія “є коректною для тонких ізотропних і слабо анізотропних оболонок, у яких жорсткості шарів одного порядку (розрахункові схеми шарів еквівалентні)”.

Як відомо, втрата несучої здатності шаруватих систем при дії стискаючого навантаження через слабкий опір поперечному відриву і міжшаровому зсуву відбувається задовго до досягнення напруженнями граничних значень. Тому при розрахунках на міцність і стійкість тонкостінних елементів, що мають шари зниженої жорсткості, класична теорія виявляється неприйнятною. Зазначені невідповідності класичної моделі і реальних умов деформування матеріалу шаруватих конструкцій стали основною причиною створення уточнених теорій анізотропних пластин і оболонок, які враховують поперечні деформації зсуву та обтиснення.

Перший варіант уточненої некласичної теорії належить С.П. Тимошенко [39]. При вирішенні задачі згинальних коливань балки він вводить додатковий кут повороту поперечного перерізу, що виникає через деформації поперечного зсуву. Модель, запропонована С.П. Тимошенко, отримала широке узагальнення в теорії однорідних і анізотропних пластин і оболонок.

Некласична теорія пластин вперше побудована Е. Рейснером [40]. При її побудові в якості вихідних гіпотез взято основні розрахункові напруження – тангенціальні компоненти тензора напружень. Для них прийнятий лінійний закон, який відповідає допущенню про лінійну зміну тангенціальних переміщень – гіпотеза прямої лінії. Отримано систему з двох рівнянь. Перше рівняння четвертого порядку характеризує вигин пластини. Друге рівняння другого порядку описує напружений стан, яке носить місцевий характер і швидко згасає при видаленні від краю пластини.

Розвиток некласична теорія оболонок і пластин отримала в працях: С.А.Амбарцумяна [33, 34, 41], В. В. Васильєва [42], Я. М. Григоренка [43 – 45], А. Н. Гузя, І. Ю. Бабича, Я. М . Григоренка [46], Л. Г. Донелла [47], П.М.Нагді [48] та інших вчених. Особливо ефективними при побудові уточнених теорій пластин і оболонок виявилися методи, в основу яких покладені узагальнені варіаційні принципи теорії пружності.

Аналізу і зіставлення моделей пластин типу Тимошенко і Рейсснера присвячені роботи В. В. Васильєва [49] і В. Г. Піскунова, А. О. Рассказова [50]. Відзначається, що в розглянутих варіантах безперервно-структурних моделей теорії шаруватих пластин і оболонок має місце спадкоємність некласичних теорій однорідних конструкцій. Зберігається загальне протиріччя, властиве цим теоріям: невідповідність між геометричною моделлю, яка враховує викривлення нормалі, і системою внутрішніх зусиль, яка відповідає гіпотезі прямої лінії. Це протиріччя вносить похибку у результати розв’язків і скорочує область застосування теорії.

Узагальнення моделі Тимошенко для розрахунку багатошарових оболонок виконано Е. І. Гріголюком і Г. М. Куликовим [51]. Тут, зокрема, розроблений енергетичний критерій визначення коефіцієнта зсуву для шаруватої структури. У роботі В. В. Пікуля [52] пропонується варіант фізично коректної прикладної уточненої теорії оболонок, де на основі методу мінімізації нев'язок врахована підвищена податливість оболонки в поперечних напрямках. Метод зважених нев'язок використовується при побудові уточненої теорії анізотропних оболонок в [53].

Некласичні теорії пластин і оболонок останнім часом активно розвиваються. Так вектор переміщень і, відповідно, тензори деформацій і напруг повинні включати складові, які враховують поперечне обтиснення від безпосереднього докладання зовнішніх навантажень.

Є класи задач механіки деформованого твердого тіла, в яких врахування поперечного обтиснення справляє визначальний вплив на результат. Це задачі контакту пластин і оболонок з жорсткими тілами (штампами), а також задачі взаємного контакту оболонок. Для таких задач облік поперечного обтиснення необхідний для того, щоб встановити реальну картину розподілу напружень по області контакту, тобто контактних напружень. Проблема обліку напружень і деформацій поперечного обтиснення проаналізована в [54].

Обґрунтування припущень некласичних моделей неоднорідних оболонок здійснюється, як правило, двома різними способами. Один з них полягає в зіставленні отриманих на їх основі значень напружень і переміщень з даними точних або досить точних рішень окремих класів задач тривимірної теорії пружності. Огляд по аналітичним методам розв'язання тривимірних задач статики анізотропних тіл представлений в роботі Ю. Н. Неміша [55]. Для другого підходу характерно, що відповідне обґрунтування проводиться асимптотичними методами.

Ці методи побудови двомірних моделей пружного деформування тонкостінних тіл, що враховують вплив поперечних деформацій, засновані на розкладанні в ряди по системам функцій деякого малого параметра переміщень і напружень. Як правило, передбачається, що товщина оболонки значно менше інших характерних геометричних розмірів оболонки. Аналіз по асимптотичним методам приведення тривимірних задач теорії пружності до двовимірних моделей містяться в роботах [55, 56].

А.С.Сахаровим і його співавторами [57] запропонована математична модель деформування багатошарових композитних оболонкових систем, що є узагальненням моделі Тимошенко. Переміщення мають два ступені апроксимації. Перша заснована на гіпотезі прямої лінії, а друга вводить цю гіпотезу пошарово, тобто гіпотезу ламаної для пакета шарів. Перавага моделі полягає в простоті реалізації, тому система розв’язуючих рівнянь включає тільки диференціальні оператори другого порядку.

Співвідношення пружності в розглянутих вище варіантах уточнених теорій анізотропних тонкостінних конструкцій включають інтегральні (приведені) жорсткісні характеристики, що не дозволяє в достатньо повній мірі оцінювати вплив неоднорідності механічних параметрів по товщині. Зазвичай в теорії тонких багатошарових пластин і оболонок з ідеальним зчепленням між шарами застосовуються два різні підходи до побудови уточнених двовимірних теорій: структурно-безперервний (феноменологічний) і дискретно-структурний.

При феноменологічному підході частково-неоднорідна по товщині шарувата пластина або оболонка розглядається як квазіоднородна з наведеними пружними характеристиками. Порядок вихідних при цьому рівнянь не залежить від числа шарів. При дискретно-структурному підході враховується неоднорідність оболонки по товщині введенням кінематичних або статичних (або кінематичних і статичних) гіпотез для кожного окремого шару. Порядок вихідних при цьому рівнянь залежить від числа шарів, ці рівняння дозволяють враховувати локальні ефекти на границях контакту шарів. Тому саме дискретно-структурний підхід виявився придатним, зокрема, для розрахунку багатошарових конструкцій з різного роду недосконалостями поверхонь контакту шарів.

Окремо слід виділити клас задач, пов'язаних з розрахунком тришарових пластин і оболонок [58]. Такі конструкції включають в себе два несучих шара і заповнювач, що забезпечує їхню спільну роботу. Для виведення рівнянь тришарових конструкцій кінематичні гіпотези застосовуються для кожного окремого шару. У цьому зв'язку порядок таких рівнянь буде визначатися кількістю шарів. Огляд результатів досліджень напружено-деформованого стану, стійкості і коливань тришарових оболонок і пластин можна знайти в роботах Л. Лібреску, Т. Хаузі [59], А. Нура [60].

Рівняння багатошарових пластин з довільною кількістю шарів були побудовані В. В. Болотіним [61, 62] стосовно армованих шаруватих середовищ. Тут багатошарові пластини представлені як системи жорстких і м'яких шарів, що чергуються. М’які шари визначаються властивостями зв’язуючого і сприймають поперечні дотичні напруження. Для жорстких шарів справедлива гіпотеза прямої нормалі. Як граничний варіант загальної моделі запропонована теорія шаруватих композиційних матеріалів дрібно шаруватої структури.

Слід зазначити, що при постановці, яка враховує тривимірний характер роботи кожного шару, пошаровому задоволенні умов на торцях, дискретно-структурна теорія дозволяє з високим ступенем точності описати як загальний напружено-деформований стан, так і локальні ефекти в шарах, наприклад, місцеву втрату стійкості.

При розрахунках шаруватих оболонок часто доводитися враховувати різного роду недосконалості, тобто початкові прогини серединної поверхні несучих шарів, непроклеї, тощо. У цьому зв'язку кращою виявляється дискретно-структурна теорія багатошарових оболонок, вихідна математична модель якої враховує специфіку роботи кожного окремого шару. Трудомісткість задач значно зростає, якщо на ділянці розшарування враховується контакт шарів.

1.3. Чисельне моделювання напруженого стану і експериментальні дослідження шаруватих конструкцій

Найбільш ефективний і універсальний чисельний метод механіки деформованого твердого тіла – метод скінчених елементів (МСЕ). В [63] прийнята наступна класифікація скінчених елементів (СЕ) кусочно-неоднорідної (шаруватої) структури: просторові або тривимірні СЕ; спеціалізовані двовимірні СЕ для розрахунку тришарових конструкцій; двовимірні СЕ для розрахунку шаруватих систем з довільною кількістю шарів [64 – 66].

Інший напрямок чисельно-аналітичних підходів покладено роботами Я.М.Григоренко і його співавторами [35, 43 – 44, 67], де за допомогою різних аналітичних прийомів співвідношення розглянутої математичної моделі оболонки або пластини зводяться до системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Крайові задачі при цьому вирішуються стійким чисельним методом, як правило, методом дискретної ортогоналізації С.К.Годунова [68].

Наявність локальних і крайових ефектів, які викликані неоднорідною структурою нових конструкційних матеріалів, високою змінюваністю зовнішнього навантаження, способом кріплення країв конструкції, накладає певні умови на розглянуті крайові задачі, коли має місце нестійкість рахунку в процесі їх чисельної реалізації завдання. Останнім часом для таких задач широко використовується математичний апарат сплайн-функцій [69], перевага якого полягає у високій стійкості сплайнових апроксимацій щодо різного роду локальних збурювань, швидкої збіжності, простотою і зручністю реалізації алгоритмів. Огляд робіт з теорії пластин і оболонок з використанням методу сплайнової апроксимації наведений в [70]. До чисельно-аналітичних підходів також варто віднести методи, у яких на основі гібридного підходу використовується комбінація методів кінцевих різниць і граничних елементів, а також методу рядів Фур'є і методу граничних елементів.

Для наукового обґрунтування теорії шаруватих систем був виконаний ряд експериментальних досліджень, ціль яких складалася у виявленні особливостей деформування цих систем і обґрунтування положень теорії. Дані про експериментальні роботи порівняно не чисельні [71 – 79]. Спочатку експерименти були поставлені і проведені для тришарових конструкцій.

Несуча здатність склопластикових трубчастих зразків при осьовому розтяганні залежно від величини кута укладання шарів перехресно армованого композита теоретично і експериментально вивчалася авторами роботи [74].

Випробування тонкостінних труб зі склопластику [77 – 78] проводилися на деформації розтягання з крученням та внутрішній і зовнішній тиск, також вивчався напружено-деформований стан зразків при дії на них різного роду сполучень зазначених видів навантаження. Всі зразки труб випробовувалися до руйнування. Експериментальна перевірка найпоширеніших критеріїв міцності Мізеса-Хілла, Фішера, Прагера, Верена, Нориса, Ашкеназі для композиційних матеріалів проведена в [77].

Методика визначення масштабних коефіцієнтів подібності фізико-механічних характеристик конструкцій зі склопластику запропонована в роботі [78]. Для експериментальної перевірки цієї методики зі склопластику були виготовлені зразки різних розмірів у вигляді пластинок, призм і кілець. Результати випробувань серії великомасштабних і дрібномасштабних зразків показали, що існує проста статистична подібність в межах 12%. Зразки [80], отримані спіральним намотуванням просоченого смолою базальтового джгута на циліндричне металеве оправлення, випробовувалися на розрив і зсув армованого шару до його руйнування. Попередньо розриву армованого шару під час розтягання зразка відбулося руйнування поверхні розділу метал – армований шар внаслідок поширення міжфазної тріщини.

1.4. Деформація композиційних матеріалів при дії температурного навантаження

Ефективність роботи композиційних матеріалів в сучасних виробах забезпечується поєднанням в композитах наступних властивостей: малої щільності, високої жорсткості і високої міцності при можливості управління цими властивостями раціональним армуванням; високою теплоізоляційною і теплозахисною здатністю; об'єднанням в одному конструктивному елементі силових, теплоізоляційних і теплозахисних функцій.

Але реалізація переваг композиційних матеріалів у порівнянні з традиційними матеріалами можлива лише на основі глибокого розуміння їхньої роботи в конструктивних елементах при реальній експлуатації.

У число завдань, вирішення яких необхідне для більш широкого впровадження композиційних матеріалів в техніці, входить: експериментальне вивчення теплового деформування, в'язкопружних і міцностних властивостей композиційних матеріалів при постійних і змінних підвищених або високих температурах, так як температура є чинником, який дуже сильно впливає на фізичні і механічні властивості композитів; розробка математичних моделей фізико-механічної поведінки композитів і конструкцій з них, і створення на їх основі програм оптимізаційних розрахунків на ЕОМ параметрів багатошарових конструкцій з композиційних матеріалів, що дозволяють враховувати силові і теплові впливи; розробка чисельних методів розрахунку конструкцій з композиційних матеріалів при підвищених і високих температурах, а також розробка методів експериментального підтвердження міцності конструкцій з композитів.

Існують два шляхи визначення ефективних характеристик композитів. Перший напрямок є чисто феноменологічним, причому фізико-механічні сталі визначаються на основі лабораторних випробувань зразків із шаруватих матеріалів. Другий підхід базується на елементах структурного аналізу і припускає вираз фізико-механічних характеристик шаруватого середовища через фізико-механічні характеристики матеріалів шарів, через їх питомий об'ємний зміст, товщину шарів і інші макроскопічні параметри. Другий шлях являється кращим як з теоретичної, так і практичної точки зору. В силу актуальності проблеми визначення ефективних термомеханічних характеристик композитів за останні роки запропоновано безліч структурних моделей механіки шаруватих тонкостінних конструкцій [33, 42, 81 – 86]. Автори роботи [81] розглядають композиційний матеріал, що складається з шарів з різними теплофізичними характеристиками. Якщо їх товщина досить мала у порівнянні з розмірами оболонки і відстанями, на яких температура і тепловий потік змінюються на помітну величину, то розрахунок теплофізичних характеристик пакету можна виконувати, приймаючи моношар анізотропним і квазіоднородним з усередненими коефіцієнтами теплопровідності, температуропровідності та лінійного теплового розширення.

Визначенню ефективної теплопровідності в односпрямованому композиті присвячені роботи В.С.Зарубіна, Г.Н.Кувиркіна та ін. [87 – 93]. Односпрямований волокнистий композит по відношенню до властивості теплопровідності є анізотропним матеріалом, що характеризується тензором другого рангу ефективної теплопровідності. Компоненти цього тензора залежать від ряду параметрів, які входять в математичну модель процесу переносу теплової енергії в такому композиті.

Основна особливість всіх цих теорій полягає в тому, що вони базуються на співвідношеннях і рівняннях симетричної теорії пружності. Визначення ефективних термомеханічних характеристик шаруватих композитів в рамках несиметричною теорії пружності розглядається в роботі [94].

Існує достатня кількість гіпотез і припущень, а також і розрахункових співвідношень механіки деформованого твердого тіла, які використовують в механіці композиційних матеріалів. Так, напружено-деформований і температурний стан конструкцій з композиційних матеріалів характеризується [86, 93, 95 – 99] переміщеннями $u_j(x_k,t)$, деформаціями $\varepsilon_{ij}(x_k,t)$, напруженнями $\sigma_{ij}(x_k,t)$ при i, j = 1,2,3 і температурою $T(x_k,t)$ в усіх точках тіла x_k, k = 1,2,3 в кожен момент часу t.

Але, на відміну від традиційної механіки деформованого твердого тіла, розгляд конструкції з композиційних матеріалів, особливо при підвищених і високих температурах, призводить до більш складних задач.

Багато в чому це пов’язано з інтенсивною повзучістю полімерних композитів [91, 100 – 103], коли навіть при незмінних температурах, граничних умовах і зовнішніх силах поля u_i , ε_{ij} , σ_{ij} змінюються в часі.

Перший етап розв’язання задач термопружності – визначення температурних полів [72, 104 – 107] за допомогою рівнянь теплопровідності. При цьому, як правило, вважається, що напружено-деформований стан не впливає на розподіл температур в конструкції, тобто розглядається незв'язана задача термопружності. Розрив зазначеного зв'язку істотно спрощує розв’язання задач термопружності. Другий етап – визначення напружено-деформованого стану конструкції з урахуванням вже відомого розподілу температурного поля в конструкції [33, 42, 74, 79, 86, 93, 103, 107 – 118].

Системи нелінійних тривимірних динамічних рівнянь зв’язаної задачі термопружності для опису поведінки багатошарових оболонок вперше були отримані В.В. Бакуліним і І.Ф. Зразковим [119]. Також були розроблені методи їх вирішення. В.В. Бакулін розробив ефективний підхід для побудови уточнених чисельно-аналітичних моделей шаруватих, в тому числі тришарових оболонок, при адекватному моделюванні геометрії конструкцій, їх умов закріплення та навантаження, деформацій, анізотропії, змінних фізико-механічних властивостей і параметрів напружено-деформованого стану по товщині шаруватого пакету і окремих шарів, що дозволило значно розширити клас розв’язуваних задач із розрахунку оболонкових конструкцій [120, 121].

Під час оцінки граничного стану конструкцій із композиційних матеріалів значна увага має приділятися вивченню закономірностей їх теплового деформування. Це пов’язано з тим, що теплова деформація композиційних матеріалів залежить як від складу і структури матеріалу, так і характеру розподілу температурного навантаження в часі [85, 90, 122 – 123].

Складна багатофакторна залежність коефіцієнта теплового деформування композиційних матеріалів ускладнює його вивчення як в експериментальному, так і в теоретичному плані. Тому на цей час ця фізична характеристика для більшості композиційних матеріалів ще недостатньо вивчена.

Експерименти доводять [90, 123], що для багатьох композиційних матеріалів при температурах нижче 150 ˚С процеси термодеструкції полімерного сполучного мало помітні, внаслідок чого в даному температурному діапазоні при зростанні температури матеріал розширюється. Зі збільшенням температури вище 150 °С деформація зменшується.

Досить глибокий аналіз особливостей теплового деформування вугле- і склопластиків з полімерною матрицею, представлений в роботі [123], де вивчено ряд основних закономірностей теплового деформування полімерних композиційних матеріалів. Тут наголошується, що при високотемпературному нагріві композитів в них відбуваються фізико-хімічні перетворення, при яких матеріал типу склопластиків, вугле-, вуглеметалопластиків, зв’язуючими в яких є фенольні, фенолоформальдегідні або інші смоли, перетворюються в пористу композицію, що складається з коксу, зміцненого азбестовими, кремнеземними, вугільними, металевими або іншими волокнами.

Для виявлення особливостей теплового деформування теплозахисних склопластиків в реальних виробах, експериментально вивчалось теплове деформування склопластиків в умовах максимально наближених до умов експлуатації. Отримані результати представлені в роботах [102, 124 – 125].

При всьому різноманітті експериментальних і теоретичних досліджень теплового навантаження композиційних матеріалів ще рано говорити, що дана проблема повністю вирішена.

1.5. Розрахунки на міцність конструкцій з композиційних матеріалів

Різні сторони сучасної механіки композитів відображені в монографіях [126 – 129] та оглядах [130 – 134]. Дослідження в області теорії шаруватих композитних систем показали, що при впливі на них силових полів, змінюваність яких описується довжинами хвиль, істотно перевищуючі розміри структурних елементів, композит можна розглядати як однорідний анізотропний матеріал. Специфіка полягає тільки в тому, що коефіцієнти рівнянь стану еквівалентного анізотропного матеріалу будуть залежати від властивостей складових компонент композиту.

На цей час достатньо повно розроблені і обґрунтовані методи визначення ефективних характеристик композита, якщо його деформований стан описується узагальненим законом Гука [126], і значно в меншому ступені, якщо він деформується нелінійно або пластично [127, 135]. Такий підхід дозволяє здійснювати розрахунок конструкцій з композитів методами теорії пружності анізотропного тіла [136 – 139].

Однак варто відзначити, що модель композита як анізотропного тіла є наближеної, тому що вона не враховує ефектів мікромеханічного характеру [126]. Але вона виявилася досить обґрунтованої під час визначення таких інтегральних характеристик як переміщення, зусилля і моменти, а також критичних навантажень і частот коливань оболонок.

Експериментально і теоретично доведено [135, 140], що шаруваті композиційні матеріали через високу анізотропію фізико-механічних характеристик елементарних шарів, починаючи з деякого рівня навантаження, проявляють властивості не пружної деформації. Шари, для яких критерій міцності виконуються раніше під час зростання навантаження, вже не можуть сприймати додаткове навантаження. Відбувається перерозподіл навантаження на не зруйновані шари. У цілому шаруватий пакет зберігає несучу здатність, однак його жорсткість змінюється в процесі навантаження. Прояв не пружної деформації волокнистих композитів на макрорівні може бути також наслідком стійкого процесу нагромадження або розвитку мікротріщин у структурі матеріалу.

У роботі [126] запропоновані методи визначення ефективних характеристик матеріалу при наявності тріщин на границі волокно – в’яжуче. Ці методи можна використати для визначення модулів матеріалу на кожному етапі навантаження, якщо відомі розміри тріщин при досягнутому рівні навантаження.

Різні критерії міцності з’єднання шарів при наявності розшарувань, види й моделі руйнування, а також експериментальні методи визначення опору композитів розшаруванню розглядаються в [141 – 148].

Прогнозування характеристик міцності композиційного матеріалу методами структурного моделювання в ряді випадків приводить до невірних результатів не тільки в кількісному, але і у якісному відношенні. Це доводиться тим, що руйнування композита є багатофакторним фізично неоднорідним процесом [149], де фізико-механічні характеристики елементів композиту грають важливу, але не визначальну роль. Процесу макроруйнування композита, що звичайно приводить до повної втрати його функціональних якостей як конструкційного матеріалу, передує більш-менш тривалий період зародження, взаємодії і розвитку в обсязі композита різних мікродефектів, про що свідчать дані сейсмоакустичних, рентгеноструктурних та інших методів дослідження [150].

На міцність конструкції з композиційного матеріалу істотний вплив роблять його розміри, форма і характер навантаження (швидкість та тип навантаження, взаємодія різних типів навантаження між собою, а також такі супутні фактори, як температура, вологість, радіація тощо) [151 – 154].

Структурний підхід до оцінки макроміцності композита складається у визначенні залежності характеристик макроруйнування композита, так званих границь міцності [127, 155 – 158], від характеристик міцності структурних елементів і параметрів макроструктури композита. При цьому характеристики міцності структурного елемента визначаються експериментально або теоретично під час врахування спільної роботи його вихідних елементів.

Критерії початкового руйнування, що враховують умови виникнення дефектів структури композита, запропоновані в роботах А. М. Скудри і Ф.Я.Булавса [159 – 160].

Для композитів із пластичною матрицею початок руйнування зв’язують із виникненням в матриці пластичних деформацій. Як критерій початкового руйнування для таких матеріалів вибирається одна з умов пластичності [127], при цьому поверхня початкового руйнування композита буде збігатися з поверхнею плинності матеріалу матриці.

У випадках, коли ранні стадії руйнування конструкційного матеріалу за умовами експлуатації конструкції припустимі або руйнування матеріалу розглядається на більш високих структурних рівнях, початок руйнування композита зв'язують із руйнуванням окремих структурних елементів відповідного порядку. Так для шаруватих композитів застосовується пошаровий аналіз руйнування [140, 161].

Ідея пошарового аналізу руйнування шаруватого композита складається в оцінці несучої здатності кожного моношару пакета з наступним виключенням з розгляду зруйнованих і перерахуванні граничного навантаження. Процедура припиняється після виконання критерію макроруйнування шаруватого пакета.

1.6. Висновки по першому розділу

Проведено аналіз різних розрахункових моделей і методик розрахунку напружено-деформованого стану багатошарових елементів конструкцій з дефектами структури від дії статичних та температурних навантажень. Результатом аналізу став висновок, що в даний час проводиться активна робота по створенню ефективних методик розрахунку багатошарових конструкцій на основі дискретно-структурної теорії, коли враховується анізотропія термопружних властивостей матеріалу, схеми армування, особливості спільної роботи та умови контакту шарів, температурні навантаження. Актуальними також залишаються питання експериментальної перевірки різних моделей, які враховують дефекти структури композиційного матеріалу, вплив температури.

2. ДИСКРЕТНО-СТРУКТУРНА ТЕОРІЯ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ БАГАТОШАРОВОЇ СТРУКТУРИ

Даний розділ присвячений розробці методики розрахунку багатошарових оболонок обертання при дії статичних і температурних навантажень, згідно якої реалізуються як ідеальні, так і ослаблені умови контакту сполучених поверхонь анізотропних шарів з різними напрямками армування матеріалу. Основні результати цього розділу викладені в роботі [162].

На основі запропонованого в [162] варіанта дискретно-структурної теорії розроблена одна з моделей, згідно з якою враховуються ослаблені умови контакту сполучених поверхонь анізотропних шарів з різними напрямками армування матеріалу.

Внаслідок того, що між жорсткими шарами в процесі виготовлення анізотропних оболонок утворюється міжфазний м'який клейовий шар, товщину цього шару, як правило, вважають рівною нулю. Тоді відповідно до допущень розглянутого варіанта моделі передбачається пружне проковзування жорстких шарів один щодо одного, тобто по лицьовим сполученим поверхням виконуються тільки статичні умови контакту. Вважається, що напруження поперечного зсуву та обтиснення на границі контакту рівні між собою.

Для оцінки достовірності результатів, отриманих по першій і другій моделі, розроблений варіант нелінійної теорії анізотропних оболонок з урахуванням поперечного зсуву та обтиснення із залученням варіаційного принципу Рейснера і безперервно-структурної моделі теорії пластин і оболонок.

Крім того, запропоновано варіант рівнянь теплопровідності для багатошарової оболонки, яка складається з n анізотропних криволінійних шарів з різними теплофізичними властивостями. Наведена задача теплопровідності розв’язується без урахування впливу деформування конструкції на зміну поля температур і відноситься до класу незв'язаних задач теорії термопружності.

На основі узагальненого варіаційного рівняння принципу Рейснера і дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок складені рівняння термопружності в змішаній формі.

2.1. Геометрично нелінійна деформація криволінійного шару за уточненою теорією Тимошенко

Нехай багатошарова оболонка складається з анізотропних криволінійних шарів, об'єм яких $V=\sum_{k=1}^{n}V^{(k)}$. Для позначення площі нижньої і верхньої лицьових поверхонь багатошарової оболонки в цілому застосовуються символи S^0 і S^n; $\Gamma=\sum_{k=1}^{n}\Gamma^{(k)}$ бокова поверхня, що є об'єднанням лінійчатих поверхонь, перпендикулярних серединним поверхням кожного $k-$го шару. Вважається, що $k-$й шар недеформованої оболонки віднесений до ортогональної криволінійної системи гаусових координат $\alpha_i^{(k)}\,(i=1,2)$, $z^{(k)}$. Координата $z^{(k)}$ спрямована по загальній нормалі $\vec{m}^{(k)}$ до серединної поверхні $S^{(k)}$ і еквідистантної поверхні $S_z^{(k)}$ $k-$го шару. Індекс "z" при введенні інших символів вказує, що відповідні величини відносяться до точки $(\alpha_1^{(k)},\,\alpha_2^{(k)},\,z^{(k)})$ еквідистантної поверхні $S_z^{(k)}$. Положення точки недеформованої поверхні $S_z^{(k)}$ буде визначатися радіус-вектором

$$\vec{\rho}^{(k)}=\vec{r}^{(k)}+\vec{m}^{(k)}z^{(k)},\ \left(-\frac{h^{(k)}}{2}\le z^{(k)}\le\frac{h^{(k)}}{2}\right) \tag{2.1}$$

базисні вектори в точці $\alpha_i^{(k)}$, $z^{(k)}$ поверхні $S_z^{(k)}$

$$\vec{\rho}_i^{(k)}=\frac{\partial\vec{\rho}^{(k)}}{\partial\alpha^i}=\vec{r}_j^{(k)}(\delta_i^j-z^{(k)}\delta_i^{j(k)})=\vec{r}_j^{(k)}Z_i^{(k)j}=\vec{r}_i^{(k)}+\vec{m}^{(k)}z^{(k)},\ \vec{\rho}_i^{(k)}=\vec{m}^{(k)}, \tag{2.2}$$

де $\vec{r}^{(k)}$ радіус-вектор точки серединної поверхні $S^{(k)}$; $\vec{m}^{(k)}$ – нормаль одиничної довжини до поверхні $S^{(k)}$; δ_i^j – тензорний запис символу Кронекера;

$$a_{ij}^{(k)}=\vec{r}_i^{(k)}\vec{r}_j^{(k)},\ b_{ij}^{(k)}=-\vec{m}_i^{(k)}\vec{r}_j^{(k)}=\vec{m}_j^{(k)}\vec{r}_i,\ b_i^{(k)j}\vec{r}_j^{(k)}=-\vec{m}_i^{(k)},\ (i=1,2,\,j=1,2)- \tag{2.3}$$

коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні $S^{(k)}$; $\vec{m}^{(k)}=\dfrac{\partial\vec{m}^{(k)}}{\partial a_i^{(k)}}-$ похідна нормалі $\vec{m}^{(k)}$.

Вектор повного переміщення $\vec{u}_z^{(k)}$ точки k – го жорсткого шару згідно з уточненою теорією оболонок Тимошенка можна представити у вигляді

$$\vec{u}_z^{(k)} = \vec{u}^{(k)} + z^{(k)}\vec{\gamma}^{(k)} + \varphi^{(k)}(z)\vec{\psi}^{(k)}, \tag{2.4}$$

де $\vec{u}^{(k)}$ – вектор переміщення точок серединної поверхні $S^{(k)}$; $\vec{\gamma}^{(k)}$ – вектор-функція кутів повороту і обтиснення волокон, перпендикулярних недеформованій серединній поверхні $S^{(k)}$; $\varphi^{(k)}(z)$ – нелінійна безперервна функція розподілу тангенціальних переміщень по товщині k – го шару, аналіз і апроксимація якої наведені в [163 – 164]; $\vec{\psi}^{(k)}(\alpha_1^{(k)},\ \alpha_2^{(k)})$ – вектор функцій зсуву.

Тут для врахування деформацій поперечних зсувів і обтиснень вводиться припущення про те, що перпендикулярний недеформованій (вихідній) координатній поверхні оболонки прямолінійний елемент після деформації виявляється вже не перпендикулярним деформованій поверхні і змінює свою довжину. При цьому вираз (2.4) визначає нелінійний характер зміни тангенціальних переміщень по товщині k – го шару. Коваріантні компоненти векторів $\vec{u}^{(k)},\ \vec{\gamma}^{(k)},\ \vec{\psi}^{(k)}$ записуються за допомогою наступних виразів:

$$\vec{u}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i}u_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)}w^{(k)},\quad \vec{\gamma}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i}\gamma_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)}\gamma^{(k)},\quad \vec{\psi}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i}\psi_i^{(k)}. \tag{2.5}$$

Тоді радіус-вектор точки k – го шару оболонки після деформації буде мати вигляд:

$$\vec{\rho}^{(k)*} = \vec{\rho}^{(k)} + \vec{u}_z^{(k)}, \tag{2.6}$$

а відповідні йому базисні вектори:

$$\vec{\rho}_i^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}},\qquad \vec{\rho}_3^{(k)*} = \vec{m}^{(k)} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}}. \tag{2.7}$$

Коваріантні компоненти тензора кінцевих деформацій у точці $(\alpha_1^{(k)},\ \alpha_2^{(k)},\ z^{(k)})$ визначаються як напіврізниці компонентів метричних тензорів до і після деформації

$$2\varepsilon_{ij}^{(k)z} = g_{ij}^{(k)*} - g_{ij}^{(k)},\ 2\varepsilon_{ij}^{(k)z} = g_{i3}^{(k)*} - g_{i3}^{(k)},\ 2\varepsilon_{33}^{(k)z} = g_{33}^{(k)*} - 1, \tag{2.8}$$

де

$$g_{ij}^{(k)} = \vec{\rho}_i^{(k)}\vec{\rho}_j^{(k)},\quad g_{ij}^{(k)} = \vec{\rho}_i^{(k)*}\vec{\rho}_j^{(k)*},\quad g_{i3}^{(k)} = \vec{\rho}_i^{(k)}\vec{\rho}_3^{(k)},\quad g_{i3}^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)*}\vec{\rho}_3^{(k)*},$$

$$g_{33}^{(k)} = \vec{\rho}_3^{\,(k)}\vec{\rho}_3^{\,(k)} = \vec{m}^{(k)}\vec{m}^{(k)} = 1, \quad g_{33}^{(k)*} = \vec{\rho}_3^{\,(k)*}\vec{\rho}_3^{\,(k)*} \ (i=1{,}2,\ j=1{,}2). \qquad (2.9)$$

Підставляючи в (2.8), (2.9) значення базисних векторів (2.2), (2.7), неважко знайти геометричні залежності між деформаціями і переміщеннями в векторній формі

$$\varepsilon_{i3}^{(k)z} = \frac{1}{2}\left[\vec{\rho}_3^{\,(k)}\frac{\partial \vec{u}_z^{\,(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} + \vec{\rho}_i^{\,(k)}\frac{\partial \vec{u}_z^{\,(k)}}{\partial z^{(k)}} + \frac{\partial \vec{u}_z^{\,(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}}\frac{\partial \vec{u}_z^{\,(k)}}{\partial z^{(k)}}\right],$$

$$\varepsilon_{ij}^{(k)z} = \frac{1}{2}\left[\vec{\rho}_j^{\,(k)}\frac{\partial \vec{u}_z^{\,(k)}}{\partial \alpha_j^{(k)}} + \vec{\rho}_j^{\,(k)}\frac{\partial \vec{u}_z^{\,(k)}}{\partial z^{(k)}} + \frac{\partial \vec{u}_z^{\,(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}}\frac{\partial \vec{u}_z^{\,(k)}}{\partial \alpha_j^{(k)}}\right], \qquad (2.10)$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \vec{\rho}_3^{\,(k)}\frac{\partial \vec{u}_z^{\,(k)}}{\partial z^{(k)}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}_z^{\,(k)}}{\partial z^{(k)}}\right)^2.$$

Використовуючи операції тензорного аналізу і теорію середнього згину [163], співвідношення (2.10) можна привести до вигляду:

$$\varepsilon_{ij}^{(k)z} = \varepsilon_{ij}^{(k)} + z^{(k)}\chi_{ij}^{(k)}, \qquad (2.11)$$

$$2\varepsilon_{i3}^{(k)} = \omega_i^{(k)} + \theta_i^{(k)}, \qquad (2.12)$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \varepsilon_{33}^{(k)} = \gamma^{(k)}, \qquad (2.13)$$

де

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} + e_{ji}^{(k)} + \omega_i^{(k)}\omega_j^{(k)}, \qquad (2.14)$$

$$2\chi_{ij}^{(k)} = \nabla_i\beta_j^{(k)} + \nabla_j\beta_i^{(k)} - B_i^{(k)\gamma}e_{j\gamma}^{(k)} - B_j^{(k)\gamma}e_{i\gamma}^{(k)}. \qquad (2.15)$$

Величини $\beta_i^{(k)}$ і $\theta_i^{(k)}$ визначаються залежностями:

$$\beta_i^{(k)} = \gamma_i^{(k)} + f^{(k)}(z)\psi_i^{(k)}, \quad \theta_i^{(k)} = \gamma_i^{(k)} + \varphi^{(k)\prime}(z)\psi_i^{(k)}. \qquad (2.16)$$

У наведених співвідношеннях (2.11) – (2.15) нехтують впливом нелінійних членів на величини $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\chi_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{i3}^{(k)}$, $\varepsilon_{33}^{(k)}$, за винятком доданків, добутки яких містять компоненти $\omega^{(k)}$. Це викликано, насамперед, тим, що тангенціальні переміщення $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$, оболонки істотно менші переміщень $w^{(k)}$ в напрямку нормалі до серединної поверхні. Застосовуючи правило коваріантного диференціювання і вирази символів Крістофеля 2-го роду, компоненти співвідношень (2.11) – (2.15) в ортогональних координатах, які збігаються з лініями головних кривизн, запишуться таким чином:

$$e_{11}^{(k)} = \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} - \Gamma_{11}^{(k)1} u_1^{(k)} - \Gamma_{11}^{(k)2} u_2^{(k)} - \Gamma_{11}^{(k)3} u_3^{(k)} =$$

$$= \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} - \frac{\partial A^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} u_1^{(k)} + \frac{A^{(k)}}{(B^{(k)})^2} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} u_2^{(k)} + k_1^{(k)} (A^{(k)})^2 w^{(k)}$$

або з урахуванням фізичних компонент тензорів $u_1^{(k)} = A^{(k)} u_{(1)}^{(k)}$, $u_2^{(k)} = B^{(k)} u_{(2)}^{(k)}$, $w^{(k)} = u_{(3)}^{(k)}$, $e_{11}^{(k)} = (A^{(k)})^2 e_{(11)}^{(k)}$, (після перетворень дужки у індексів були прибрані)

$$e_{11}^{(k)} = \frac{\partial u_1^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} - \frac{1}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} u_2^{(k)} + k_1^{(k)} w^{(k)}, \qquad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}). \qquad (2.17)$$

Символ $(1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)})$ означає, що інші формули виходять з наведених перестановкою індексів 1, 2 і параметрів Ламе $A^{(k)}, B^{(k)}$. Аналогічно отримані інші співвідношення:

$$e_{12}^{(k)} = \frac{\partial u_2^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} - \frac{u_1^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} \qquad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \qquad (2.18)$$

$$\omega_1^{(k)} = \frac{\partial w^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} - k_1^{(k)} u_1^{(k)} \qquad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \qquad (2.19)$$

$$\chi_{11}^{(k)} = \frac{\partial \beta_1^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\beta_2^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} + k_1^{(k)} e_{11}^{(k)} \qquad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \qquad (2.20)$$

$$2\chi_{12}^{(k)} = \frac{B^{(k)}}{A^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1^{(k)}} \left(\frac{\beta_2^{(k)}}{B^{(k)}} \right) + \frac{A^{(k)}}{B^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2^{(k)}} \left(\frac{\beta_1^{(k)}}{A^{(k)}} \right) + k_1^{(k)} e_{21}^{(k)} + k_2^{(k)} e_{12}^{(k)}. \qquad (2.21)$$

Співвідношення (2.20), (2.21) можна перетворити, якщо замінити в них $\beta_1^{(k)}$ і $\beta_2^{(k)}$ виразом –

$$\beta_i^{(k)} = \theta_i^{(k)} + g^{(k)}(z) \psi_i^{(k)} = 2\varepsilon_{i3}^{(k)} - \omega_i^{(k)} + g^{(k)}(z) \psi_i^{(k)}. \qquad (2.22)$$

Тоді співвідношення (2.20) і (2.21) приймають вигляд:

$$\chi_{11}^{(k)} = \chi_{11}^{(k)0} + 2\beta_{11}^{(k)} + g^{(k)}(z) \psi_{11}^{(k)} \qquad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \qquad (2.23)$$

$$\chi_{12}^{(k)} = \chi_{12}^{(k)0} + 2\beta_{12}^{(k)} + g^{(k)}(z) \psi_{12}^{(k)} \qquad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \qquad (2.24)$$

де

$$\chi_{11}^{(k)0}=\frac{\partial\omega_1^{(k)}}{A^{(k)}\partial\alpha_1^{(k)}}-\frac{\omega_2^{(k)}}{A^{(k)}B^{(k)}}\cdot\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}}+k_1^{(k)}e_{11}^{(k)}\qquad(1\Leftrightarrow 2, A^{(k)}\Leftrightarrow B^{(k)}),\tag{2.25}$$

$$2\chi_{12}^{(k)0}=-\frac{B^{(k)}}{A^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_1^{(k)}}\left(\frac{\omega_2^{(k)}}{B^{(k)}}\right)-\frac{A^{(k)}}{B^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_2^{(k)}}\left(\frac{\omega_1^{(k)}}{A^{(k)}}\right)+k_1^{(k)}e_{21}^{(k)}+k_2^{(k)}e_{12}^{(k)},\tag{2.26}$$

$$\beta_{11}^{(k)}=\frac{\partial\varepsilon_{13}^{(k)}}{A^{(k)}\partial\alpha_1^{(k)}}-\frac{\varepsilon_{23}^{(k)}}{A^{(k)}B^{(k)}}\cdot\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}}\qquad(1\Leftrightarrow 2, A^{(k)}\Leftrightarrow B^{(k)}),\tag{2.27}$$

$$2\beta_{12}^{(k)}=\frac{B^{(k)}}{A^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_1^{(k)}}\left(\frac{\varepsilon_{23}^{(k)}}{B^{(k)}}\right)+\frac{A^{(k)}}{B^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_2^{(k)}}\left(\frac{\varepsilon_{13}^{(k)}}{A^{(k)}}\right),\tag{2.28}$$

$$\psi_{11}^{(k)}=\frac{\partial\psi_1^{(k)}}{A^{(k)}\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\psi_2^{(k)}}{A^{(k)}B^{(k)}}\cdot\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}}\qquad(1\Leftrightarrow 2, A^{(k)}\Leftrightarrow B^{(k)}),\tag{2.29}$$

$$2\psi_{12}^{(k)}=\frac{B^{(k)}}{A^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_1^{(k)}}\left(\frac{\psi_2^{(k)}}{B^{(k)}}\right)+\frac{A^{(k)}}{B^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_2^{(k)}}\left(\frac{\psi_1^{(k)}}{A^{(k)}}\right),\tag{2.30}$$

де $\chi_{ij}^{(k)0}$ – компоненти тензора зміни кривизни серединної поверхні $k-$го шару згідно лінійної теорії оболонок за гіпотезою Кірхгофа-Лява.

Співвідношення (2.12), (2.20) і (2.21) можна представити в дещо іншому вигляді в порівнянні з формулами (2.23) і (2.24):

$$2\varepsilon_{i3}^{(k)}=2\varepsilon_{i3}^{(k)\gamma}+\varphi^{(k)'}(z)\Psi_i^{(k)},\tag{2.31}$$

$$\chi_{11}^{(k)}=\chi_{11}^{(k)\gamma}+f^{(k)}(z)\Psi_{11}^{(k)}\qquad(1\Leftrightarrow 2, A^{(k)}\Leftrightarrow B^{(k)}),\tag{2.32}$$

$$\chi_{12}^{(k)}=\chi_{12}^{(k)\gamma}+f^{(k)}(z)\Psi_{12}^{(k)}\qquad(1\Leftrightarrow 2, A^{(k)}\Leftrightarrow B^{(k)}),\tag{2.33}$$

де

$$2\varepsilon_{i3}^{(k)}=\omega_i^{(k)}+\gamma_i^{(k)},$$

$$\chi_{11}^{(k)}=\frac{\partial\gamma_1^{(k)}}{A^{(k)}\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\gamma_2^{(k)}}{A^{(k)}B^{(k)}}\cdot\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}}+k_1^{(k)}e_{11}^{(k)}\qquad(1\Leftrightarrow 2, A^{(k)}\Leftrightarrow B^{(k)}),\tag{2.34}$$

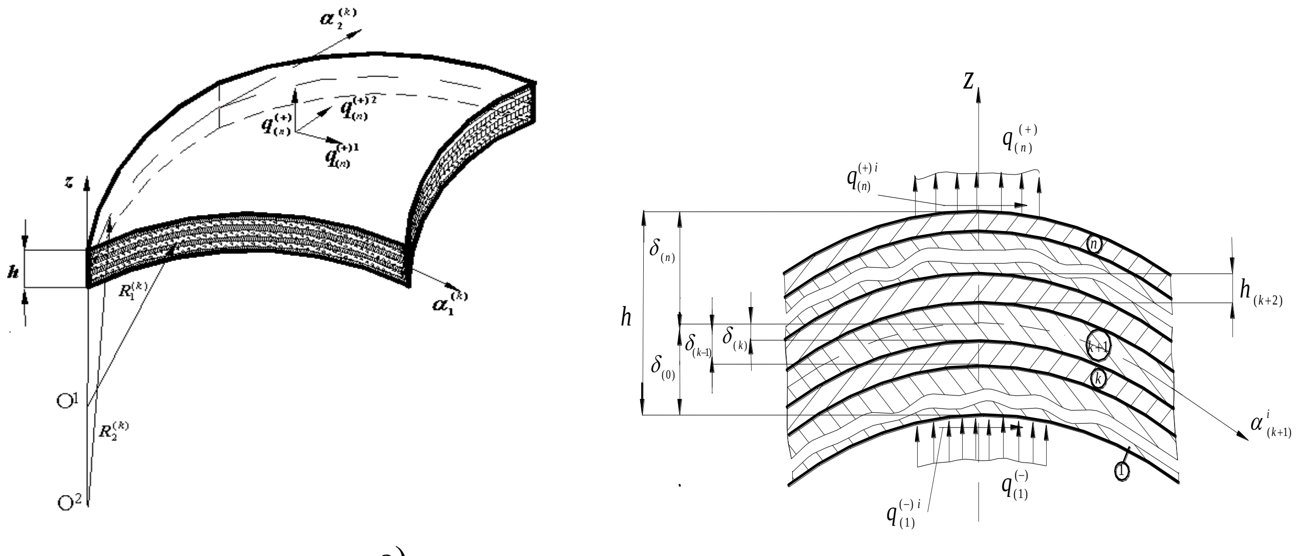
$$2\chi_{12}^{(k)\gamma}=\frac{B^{(k)}}{A^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_1^{(k)}}\left(\frac{\gamma_2^{(k)}}{B^{(k)}}\right)+\frac{A^{(k)}}{B^{(k)}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_2^{(k)}}\left(\frac{\gamma_1^{(k)}}{A^{(k)}}\right)+k_1^{(k)}e_{21}^{(k)}+k_2^{(k)}e_{12}^{(k)}.\tag{2.35}$$

Компоненти $\psi_{ij}^{(k)}$ визначаються залежностями (2.29) і (2.30).

2.2. Розв’язувальні рівняння дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок

Теорія багатошарових оболонок і пластин займає проміжне місце між теорією анізотропних оболонок і точними підходами, заснованими на тривимірних рівняннях теорії пружності. Слід зазначити, що існує загальна методологія побудови теорій тришарових і багатошарових оболонок. Остання з них узагальнюється таким чином, що дозволяє вирішувати задачі з урахуванням дискретного характеру роботи кожного окремо взятого анізотропного шару оболонки, тому порядок розв’язувальних рівнянь тут буде визначатися кількістю розглянутих шарів.

В якості розглянутої тут математичної моделі приймається модель багатошарової оболонки, яка складається з *n* тонких анізотропних шарів (рис.2.1). Тонкою вважається оболонка (шар), якщо відносною товщиною h/R_{min} (R_{min} – мінімальне значення одного з головних радіусів кривизни) такої оболонки можна знехтувати в порівнянні з одиницею.



а)

б)

Рисунок 2.1 – Розрахункова модель багатошарової оболонки.

Нехай анізотропна оболонка розбита на *n* тонких дискретних шарів. При цьому прийняті позначення і гіпотези підрозділу 2.1 щодо розподілу поперечних деформацій по товщині кожного дискретного шару, що розглядається як окремо взята оболонка із заданою локальною системою координат. Задавши напрямок поверхневого навантаження (рис. 2.1), слід визначити властивості локальних систем координат $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$, $z^{(k)}$ кожного k-го шару і загальної системи гаусових координат (α_1, α_2, z). Вважається, що поперечні координатні лінії загальної і локальних систем суміщені, крім того, локальні координатні поверхні поєднані зі серединними поверхнями шарів. Нумерація шарів починається з боку від'ємних значень координати z від одиниці до n.

Варіаційне рівняння принципу Рейснера для багатошарової оболонки запишеться таким чином:

$$\delta R = \sum_{k=1}^{n} \delta R^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} \delta A_R^{(k)} - \sum_{k=1}^{n} \iiint\limits_{V^{(k)}} \delta\left(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{(k)} - F^{(k)}\right) dV = 0, \tag{2.36}$$

де $\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}$ – контраваріантні компоненти тензора напружень (перший індекс "α" вказує на те, що ці напруження віднесені до одиниці площі недеформованої координатної поверхні $x^\alpha = const$ і діють на площадку на деформованій поверхні $x^\alpha = const$, в яку переходить первісна координатна поверхня; другий індекс "β" вказує на базисні вектори недеформованого тіла, щодо яких обчислюються компоненти тензора напружень); $\eta_{\alpha\beta}^{(k)}$ – тензор деформацій Гріна; $F^{(k)}$ – функція додаткової енергії деформації.

Якщо для k-го шару оболонки використовуються наступні умови ідеального контакту між шарами (рис.2.1):

$$u_\beta^{(k,k-1)} = u_\beta^{(k-1,k)}, \qquad X_{(k,k-1)}^{\beta} = X_{(k-1,k)}^{\beta}, \tag{2.37}$$

або у векторному вигляді –

$$\vec{u}_z^{(k)}\left(\alpha_i^{(k)}, -\frac{h^{(k)}}{2}\right) = \vec{u}_z^{(k-1)}\left(\alpha_i^{(k-1)}, \frac{h^{(k-1)}}{2}\right),$$

$$\vec{X}_{(k)}\left(\alpha_i^{(k)}, -\frac{h^{(k)}}{2}\right) = \vec{X}_{(k-1)}\left(\alpha_i^{(k-1)}, \frac{h^{(k-1)}}{2}\right) \quad (i = 1,2), \tag{2.38}$$

тоді варіація елементарної роботи зовнішніх сил δA_R запишеться в такому вигляді:

$$\delta A_R=\sum_{k=1}^{n}\delta A_R^{(k)}=\iint\limits_{S_{(n)}}\Big(\vec X_{(n)}\delta\vec u^{(n)}+M^i_{(n)}\vec r^{(n)}_{i*}\cdot\delta\vec\gamma^{(n)}+B^i_{(n)}\vec r^{(n)}_{i*}\cdot\delta\vec\psi^{(n)}+M^3_{(n)}\delta\varepsilon^{(n)z}_{33}\Big)dS\;+$$

$$+\iint\limits_{S_{(-)}}\Big(\vec X_{(1)}\delta\vec u^{(1)}+M^i_{(1)}\vec r^{(1)}_{i*}\cdot\delta\vec\gamma^{(1)}+B^i_{(1)}\vec r^{(1)}_{i*}\delta\vec\psi^{(1)}+M^3_{(1)}\delta\varepsilon^{(1)z}_{33}\Big)dS\;+\sum_{k=2}^{n-1}\iint\limits_{S_{(k)}}\Big(\vec X_{(k)}\delta\vec u^{(k)}+$$

$$+M^i_{(k)}\vec r^{(k)}_{i*}\delta\vec\gamma^{(k)}+B^i_{(k)}\vec r^{(k)}_{i*}\delta\vec\psi^{(k)}+M^3_{(k)}\delta\varepsilon^{(k)z}_{33}\Big)dS\;+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{l_1^{(k)}}\Big(\vec\Phi^S_{(k)}\delta\vec u^{(k)}+\vec G^S_{(k)}\delta\vec\gamma^{(k)}+$$

$$+\vec L^s_{(k)}\delta\vec\psi^{(k)}\Big)dl\;+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{l_2^{(k)}}\Big(\vec\Phi_{(k)}\delta\vec u^{(k)}+G_{(k)}\delta\vec\gamma^{(k)}+\vec L_{(k)}\delta\vec\psi^{(k)}+\Big(\vec u^{(k)}-\vec u^{(k)}_S\Big)\delta\vec\Phi_{(k)}+$$

$$+\Big(\vec\gamma^{(k)}-\vec\gamma^{(k)}_S\Big)\delta\vec G_{(k)}+\Big(\vec\psi^{(k)}-\vec\psi^{(k)}_S\Big)\delta\vec L_{(k)}\Big)dl\;, \qquad (2.39)$$

де $S_{(n)}, S_{(1)}$ – серединні поверхні граничних шарів оболонки, $S_{(k)}$– серединна поверхня k-го шару; $l_1^{(k)}$, $l_2^{(k)}$ – частини контуру $l^{(k)}$ k-го шару, де виконуються статичні та геометричні граничні умови відповідно. Елемент площі бічної лінійчатої поверхні $d\Gamma_{(k)}$ k-го шару з контуром $l_{(k)}$ дорівнює

$$d\Gamma_{(k)}=dl_{(k)}dz^{(k)}, \qquad (2.40)$$

а елемент об’єму –

$$dV^{(k)}=t^{(k)}dS_{(k)}dz^{(k)}. \qquad (2.41)$$

Вектори зовнішніх зусиль $\vec X_{(k)}$, моментів $\vec M_{(k)}$ і додаткових моментів $\vec B_{(k)}$, які діють в точках деформованої серединної поверхні k-го шару, будуть визначатися рівностями:

$$\vec X_{(1)}=t^{(+)}_{(1)}\vec X^{(+)}_{(1)}+t^{(-)}_{(1)}\vec q^{(-)}_{(1)}+\int\limits_{-h^{(1)}/2}^{h^{(1)}/2}t^{(1)}\vec{\mathrm P}^{(1)}dz\;,\quad \vec M_{(1)}=\frac{h^{(1)}}{2}\Big(t^{(+)}_1\vec X^{(+)}_1-t^{(-)}_{(1)}\vec q^{(-)}_{(1)}\Big)+\int\limits_{-h^{(1)}/2}^{h^{(1)}/2}t^{(1)}\vec P^{(1)}z^{(1)}dz\;,$$

$$\vec B_{(1)}=\frac{h^{(1)}}{2}f^{(1)}\left(\frac{h^{(1)}}{2}\right)\Big(t^{(+)}_1\vec X^{(+)}_1-t^{(-)}_{(1)}\vec q^{(-)}_{(1)}\Big)+\int\limits_{-h^{(1)}/2}^{h^{(1)}/2}t^{(1)}\vec P^{(1)}\varphi^{(1)}(z)dz\;, \qquad (2.42)$$

$$\vec X_{(k)}=t^{(+)}_{(k)}\vec X^{(+)}_{(k)}-t^{(-)}_{(k)}\vec X^{(-)}_{(k)}+\int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2}t^{(k)}\vec{\mathrm P}^{(k)}dz,\;\; \vec M_{(k)}=\frac{h^{(k)}}{2}\Big(t^{(+)}_{(k)}\vec X^{(+)}_{(k)}-t^{(-)}_{(k)}\vec X^{(-)}_{(k)}\Big)+\int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2}t^{(k)}\vec P^{(k)}z^{(k)}dz\,,$$

$$\vec{B}_{(k)} = \varphi^{(k)}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)\left(t_{(k)}^{(+)}\vec{X}_{(k)}^{(+)} - t_{(k)}^{(-)}\vec{X}_{(k)}^{(-)}\right) + \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} t^{(k)}\vec{P}^{(k)}\varphi^{(k)}(z)dz\ , \tag{2.43}$$

$$\vec{X}_{(n)} = t_{(n)}^{(+)}\vec{q}_{(n)}^{(+)} - t_{(n)}^{(-)}\vec{X}_{(n)}^{(-)} + \int\limits_{-h^{(n)}/2}^{h^{(n)}/2} t^{(n)}\vec{\mathrm{P}}^{(n)}dz, \quad \vec{M}_{(n)} = \frac{h^{(n)}}{2}\left(t_{(n)}^{(+)}\vec{q}_{(n)}^{(+)} - t_{(n)}^{(-)}\vec{X}_{(n)}^{(-)}\right) + \int\limits_{-h^{(n)}/2}^{h^{(n)}/2} t^{(n)}\vec{P}^{(n)}z^{(n)}dz,$$

$$\vec{B}_{(n)} = \varphi^{(n)}\left(\frac{h^{(n)}}{2}\right)\left(t_{(n)}^{(+)}\vec{q}_{(n)}^{(+)} - t_{(n)}^{(-)}\vec{X}_{(n)}^{(-)}\right) + \int\limits_{-h^{(n)}/2}^{h^{(n)}/2} t^{(n)}\vec{P}^{(n)}\varphi^{(n)}(z)dz\,, \tag{2.44}$$

де вектори $\vec{X}_{(k)}^{(+)},\ \vec{X}_{(k)}^{(-)}$ визначають контактні напруження відповідно на верхній (індекс «+») і нижній (індекс «-») обмежуючих лицьових поверхнях *k*-го шару.

Контраваріантні компоненти вектора контактних напружень $\vec{X}_{(k)}$ і векторів зовнішнього навантаження $\vec{q}_{(n)}^{(+)},\ \vec{q}_{(1)}^{(-)}$ будуть визначатися наступними залежностями:

$$\vec{X}_{(k)}^{(+)} = \sigma_{(+)}^{(k)i3}\vec{\rho}_i^{(k)*} + \sigma_{(+)}^{(k)33}\vec{m}^{(k)*}, \qquad \vec{X}_{(k)}^{(-)} = \sigma_{(-)}^{(k)i3}\vec{\rho}_i^{(k)*} + \sigma_{(-)}^{(k)33}\vec{m}^{(k)*},$$

$$\vec{q}_{(n)}^{(+)} = q_{(+)}^{(n)i3}\vec{\rho}_i^{(n)*} + q_{(+)}^{(n)33}\vec{m}^{(n)*}, \quad \vec{q}_{(1)}^{(-)} = q_{(-)}^{(1)i3}\vec{\rho}_i^{(1)*} + q_{(-)}^{(1)33}\vec{m}^{(1)*} \quad (i = 1,2). \tag{2.45}$$

Першу варіацію другого доданка рівняння (2.36) можна представити таким чином:

$$\delta\Pi_R = \sum_{k=1}^{n}\left(\delta\Pi_{1R}^{(k)} + \delta\Pi_{2R}^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{n}\iiint\limits_{V^{(k)}}\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}\delta\eta_{\alpha\beta}^{(k)}dV - \sum_{k=1}^{n}\iiint\limits_{V^{(k)}}\left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}} - \eta_{\alpha\beta}^{(k)}\right)\delta\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}dV, \tag{2.46}$$

де
$$\delta\Pi_{1R}^{(k)} = \iiint\limits_{V^{(k)}}\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}\delta\eta_{\alpha\beta}^{(k)}dV = \iiint\limits_{V^{(k)}}\left(\sigma_{(k)}^{ij}\delta\varepsilon_{ij}^{(k)z} + 2\sigma_{(k)}^{i3}\delta\varepsilon_{i3}^{(k)z} + \sigma_{(k)}^{33}\delta\varepsilon_{33}^{(k)z}\right)dV\,; \tag{2.47}$$

$$\delta\Pi_{2R}^{(k)} = -\iiint\limits_{V^{(k)}}\delta W_{(k)}^{f}dV = -\iiint\limits_{V^{(k)}}\left\{\left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial\sigma_{(k)}^{ij}} - \varepsilon_{ij}^{(k)z}\right)\delta\sigma_{(k)}^{ij} + \left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial\sigma_{(k)}^{i3}} - 2\varepsilon_{i3}^{(k)z}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\,\delta\sigma_{(k)}^{i3} + \left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial\sigma_{(k)}^{33}} - \varepsilon_{33}^{(k)z}\right)\delta\sigma_{(k)}^{33}\right\}dV\,. \tag{2.48}$$

Підставляючи співвідношення (2.11) – (2.13) в (2.47) і враховуючи, що елемент недеформованого об’єму $dV^{(k)}$ дорівнює

$$dV^{(k)} = \sqrt{g^{(k)}}d\alpha_1 d\alpha_2 dz^{(k)} \approx \sqrt{a^{(k)}}d\alpha_1 d\alpha_2 dz^{(k)} = dS_{(k)}dz^{(k)}\,, \tag{2.49}$$

можна отримати наступний вираз:

$$\delta\Pi_{1R}^{(k)} = \iint\limits_{S(k)} \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \Big\{\sigma_{(k)}^{ij}\Big[\delta\varepsilon_{ij}^{(k)} + z\delta\chi_{ij}^{(k)\gamma} + \varphi^{(k)}(z)\nabla_i\delta\psi_i^{(k)}\ \Big] + \tag{2.50}$$
$$+\sigma_{(k)}^{i3}\Big(2\delta\varepsilon_{i3}^{(k)} + z\nabla_i\delta\varepsilon_{33}^{(k)z}\Big) + \sigma_{(k)}^{33}\delta\varepsilon_{33}^{(k)z}\ \Big\}dSdz$$

При виведенні рівняння (2.50) розглядався випадок середнього згину тонкого k-го шару оболонки. Якщо в (2.50) ввести віднесені до одиниці довжини координатних ліній недеформованої серединної поверхні k-го шару контраваріантні компоненти тензорів тангенціальних зусиль $T_{(k)}^{ij}$, згинальних і крутних моментів $M_{(k)}^{ij}$, додаткового згинального і крутного моменту $L_{(k)}^{ij}$, а також контраваріантні компоненти вектора поперечних сил і додаткових поперечних сил деформацій зсуву і обтиснення $Q_{(k)}^{i}, Q_{(k)}^{3}, L_{(k)}^{i}, M_{(k)}^{i3}$ щодо базисних векторів $\vec{r}^{(k)*}$, $\vec{\rho}_3^{(k)*}$:

$$T_{(k)}^{ij} = \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{ij}dz, \qquad M_{(k)}^{ij} = \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{ij}zdz,$$

$$L_{(k)}^{ij} = \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{ij}\varphi^{(k)}(z)dz, \qquad Q_{(k)}^{i} = \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i3}dz, \qquad L_{(k)}^{i3} = \frac{1}{2}\int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i3}\varphi^{(k)\prime}(z)dz,$$

$$Q_{(k)}^{3} = \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{33}dz, \qquad M_{(k)}^{i3} = \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i3}zdz, \tag{2.51}$$

то рівняння (2.50) перепишеться так:

$$\delta\Pi_{1R}^{(k)} = \iint\limits_{S(k)} (\mathrm{T}_{(k)}^{ij}\delta\varepsilon_{ij}^{(k)} + M_{(k)}^{ij}\delta\chi_{ij}^{(k)\gamma} + L_{(k)}^{ij}\nabla_i\delta\psi_i^{(k)} + 2Q_{(k)}^{i}\delta\varepsilon_{i3}^{(k)\gamma} + L_{(k)}^{i3}\delta\psi_i^{(k)} +$$
$$+ M_{(k)}^{i3}\nabla_i\delta\varepsilon_{33}^{(k)z} + Q_{(k)}^{3}\delta\varepsilon_{33}^{(k)z})dS. \tag{2.52}$$

Ввівши інтеграл для додаткової роботи деформації k-го шару

$$\int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} F^{(k)}dz^{(k)} = \int\limits_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \Big(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}^{(k)} - W_{(k)}\Big)dz = F_p^{(k)}\Big(\mathrm{T}_{(k)}^{ij}, M_{(k)}^{ij}, L_{(k)}^{ij}, M_{(k)}^{i3}, Q_{(k)}^{i}, L_{(k)}^{i3}, Q_{(k)}^{3}\Big), \tag{2.53}$$

який у разі малих деформацій можна вважати квадратичною функцією від напружень

$$F_p^{(k)} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \left(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}^{(k)} - \frac{1}{2}\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}^{(k)} \right) dz = \frac{1}{2}\int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}^{(k)} dz\,,$$

вираз (2.48) перепишеться так:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_{2R}^{(k)} = -\iint\limits_{S(k)} \Bigg\{ &\left(\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial \mathrm{T}_{(k)}^{ij}} - \varepsilon_{ij}^{(k)} \right)\delta \mathrm{T}_{(k)}^{ij} + \left(\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial M_{(k)}^{ij}} - \chi_{ij}^{(k)\gamma} \right)\delta M_{(k)}^{ij} + \left(\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial L_{(k)}^{ij}} - \nabla_i \psi_i^{(k)} \right)\delta L_{(k)}^{ij} + \\
&+ \left(\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial Q_{(k)}^{i}} - 2\varepsilon_{i3}^{(k)\gamma} \right)\delta Q_{(k)}^{i} + \left(\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial L_{(k)}^{i3}} - \psi_i^{(k)} \right)\delta L_{(k)}^{i3} + \\
&+ \left(\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial M_{(k)}^{i3}} - \nabla_i \varepsilon_{33}^{(k)z} \right)\delta M_{(k)}^{i3} + \left(\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial Q_{(k)}^{3}} - \varepsilon_{33}^{(k)z} \right)\delta Q_{(k)}^{3} \Bigg\} dS.
\end{aligned} \qquad (2.54)$$

Опускаючи цілий ряд громіздких перетворень варіаційних рівнянь, наданих в [162], та переходячи до фізичних компонент, рівняння рівноваги, віднесені до недеформованого стану k-го шару оболонки, запишуться

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\left(B^{(k)}R_{11}^{(k)0}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial\left(A^{(k)}R_{21}^{(k)0}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}} + R_{12}^{(k)0}\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}} - R_{22}^{(k)0}\frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \\
&+ A^{(k)}B^{(k)}\left(k_1^{(k)}R_{13}^{(k)0} + X_1^{(k)0}\right) = 0 \quad \left(1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}\right),\\
&\frac{\partial\left(B^{(k)}R_{13}^{(k)0}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial\left(A^{(k)}R_{23}^{(k)0}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}} - A^{(k)}B^{(k)}\left(k_1^{(k)}R_{11}^{(k)0} + k_2^{(k)}R_{22}^{(k)0} - X_3^{(k)0}\right) = 0,\\
&\frac{\partial\left(B^{(k)}M_{11}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial\left(A^{(k)}M_{21}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}} + M_{12}^{(k)}\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}} - M_{22}^{(k)}\frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \\
&+ A^{(k)}B^{(k)}\left(M_1^{(k)} - Q_1^{(k)}\right) = 0 \quad \left(1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}\right),\\
&\frac{\partial\left(B^{(k)}L_{11}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial\left(A^{(k)}L_{21}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}} + L_{12}^{(k)}\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}} - L_{22}^{(k)}\frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \\
&+ A^{(k)}B^{(k)}\left(B_1^{(k)} - L_{13}^{(k)}\right) = 0 \quad \left(1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}\right).
\end{aligned} \qquad (2.55)$$

При врахуванні обтиснення k-го шару до системи (2.55) необхідно додати восьме рівняння рівноваги

$$H_3^{(k)} = \frac{\partial\left(B^{(k)}M_{13}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial\left(A^{(k)}M_{23}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}} - A^{(k)}B^{(k)}\left(k_1^{(k)}M_{11}^{(k)} + k_2^{(k)}M_{22}^{(k)} + k_1^{(k)}L_{11}^{(k)} + k_2^{(k)}L_{22}^{(k)} + Q_3^{(k)} - M_3^{(k)}\right) = 0. \qquad (2.56)$$

Граничні умови для пружного анізотропного шару. На контурі $l_{(k)}$ k-го шару оболонки мають місце вісім рівнянь рівноваги (2.55), (2.56) і статичні граничні умови:

$$\Phi^{nS}_{(k)0} = R^{n}_{(k)0}, \;\; \Phi^{\tau S}_{(k)0} = R^{\tau}_{(k)0}, \;\; \Phi^{mS}_{(k)0} = R^{m}_{(k)0}, \;\; G^{nS}_{(k)0} = G^{n}_{(k)0}, \;\; H^{\tau S}_{(k)0} = H^{\tau}_{(k)0},$$
$$L^{nS}_{(k)0} = L^{n}_{(k)0}, \;\; L^{\tau S}_{(k)0} = L^{\tau}_{(k)0}, \;\; M^{3n}_{(k)S} + L^{3n}_{(k)S} = M^{i3}_{(k)} n_i^{(k)}. \tag{2.57}$$

Крім граничних умов (2.57), з варіаційних рівнянь виходять геометричні граничні умови і граничні умови змішаного типу:

а) жорстко закріплений контур

$$u_n^{(k)} = u_\tau^{(k)} = w^{(k)} = \gamma_n^{(k)} = \gamma_\tau^{(k)} = \psi_n^{(k)} = \psi_\tau^{(k)} = \varepsilon_{33}^{(k)z} = 0, \tag{2.58}$$

б) шарнірний, нерухомий в тангенціальному і нормальному напрямках контур,

$$u_n^{(k)} = u_\tau^{(k)} = w^{(k)} = G^{n}_{(k)0} = \gamma_\tau^{(k)} = L^{n}_{(k)0} = \psi_\tau^{(k)} = \varepsilon_{33}^{(k)z} = 0, \tag{2.59}$$

в) шарнірний, нерухомий в тангенціальному напрямку контур,

$$u_n^{(k)} = u_\tau^{(k)} = R^{m}_{(k)0} = G^{n}_{(k)0} = \gamma_\tau^{(k)} = L^{n}_{(k)0} = \psi_\tau^{(k)} = M^{i3}_{(k)} n_i^{(k)} = 0, \tag{2.60}$$

г) шарнірний, вільний в тангенціальній площині контур,

$$R^{n}_{(k)0} = R^{\tau}_{(k)0} = w^{(k)} = G^{n}_{(k)0} = \gamma_\tau^{(k)} = L^{n}_{(k)0} = \psi_\tau^{(k)} = \varepsilon_{33}^{(k)z} = 0\,. \tag{2.61}$$

Співвідношення пружності для анізотропного шару. Нехай розглянутий анізотропний шар має одну площину пружної симетрії, дотичну до координатної поверхні, і напрямок осі $z^{(k)}$ перпендикулярний до цієї площини. Тоді число пружних постійних відповідно зводитися до 13, тобто вісім з 21 пружних сталих узагальненого закону Гука повинні дорівнювати нулю:

$$a^{14}_{(k)} = a^{24}_{(k)} = a^{34}_{(k)} = a^{46}_{(k)} = a^{15}_{(k)} = a^{25}_{(k)} = a^{35}_{(k)} = a^{56}_{(k)} = 0,$$
$$в^{(k)}_{14} = в^{(k)}_{24} = в^{(k)}_{34} = в^{(k)}_{46} = в^{(k)}_{15} = в^{(k)}_{25} = в^{(k)}_{35} = в^{(k)}_{56} = 0.$$

Рівняння узагальненого закону Гука для анізотропного шару з однією площиною пружної симетрії, приймають вигляд:

$$\sigma^{11}_{(k)} = a^{11}_{(k)}\varepsilon_{11}^{(k)z} + a^{12}_{(k)}\varepsilon_{22}^{(k)z} + a^{13}_{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)z} + a^{16}_{(k)}\varepsilon_{12}^{(k)z}, \;\; \sigma^{22}_{(k)} = a^{21}_{(k)}\varepsilon_{11}^{(k)z} + a^{22}_{(k)}\varepsilon_{22}^{(k)z} + a^{23}_{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)z} + a^{26}_{(k)}\varepsilon_{12}^{(k)z},$$
$$\sigma^{33}_{(k)} = a^{31}_{(k)}\varepsilon_{11}^{(k)z} + a^{32}_{(k)}\varepsilon_{22}^{(k)z} + a^{33}_{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)z} + a^{36}_{(k)}\varepsilon_{12}^{(k)z},$$

$$\sigma^{23}_{(k)} = a^{44}_{(k)}\varepsilon^{(k)z}_{23} + a^{45}_{(k)}\varepsilon^{(k)z}_{13}, \qquad \sigma^{13}_{(k)} = a^{54}_{(k)}\varepsilon^{(k)z}_{23} + a^{55}_{(k)}\varepsilon^{(k)z}_{13},$$

$$\sigma^{12}_{(k)} = a^{61}_{(k)}\varepsilon^{(k)z}_{11} + a^{62}_{(k)}\varepsilon^{(k)z}_{22} + a^{63}_{(k)}\varepsilon^{(k)z}_{33} + a^{66}_{(k)}\varepsilon^{(k)z}_{12}. \tag{2.62}$$

або

$$\varepsilon^{(k)z}_{11} = \textit{в}^{(k)}_{11}\sigma^{11}_{(k)} + \textit{в}^{(k)}_{12}\sigma^{22}_{(k)} + \textit{в}^{(k)}_{13}\sigma^{33}_{(k)} + \textit{в}^{(k)}_{16}\sigma^{12}_{(k)}, \;\; \varepsilon^{(k)z}_{22} = \textit{в}^{(k)}_{21}\sigma^{11}_{(k)} + \textit{в}^{(k)}_{22}\sigma^{22}_{(k)} + \textit{в}^{(k)}_{23}\sigma^{33}_{(k)} + \textit{в}^{(k)}_{26}\sigma^{12}_{(k)},$$

$$\varepsilon^{(k)z}_{33} = \textit{в}^{(k)}_{31}\sigma^{11}_{(k)} + \textit{в}^{(k)}_{32}\sigma^{22}_{(k)} + \textit{в}^{(k)}_{33}\sigma^{33}_{(k)} + \textit{в}^{(k)}_{36}\sigma^{12}_{(k)},$$

$$\varepsilon^{(k)z}_{23} = \textit{в}^{(k)}_{44}\sigma^{23}_{(k)} + \textit{в}^{(k)}_{45}\sigma^{13}_{(k)}, \qquad \varepsilon^{(k)z}_{13} = \textit{в}^{(k)}_{54}\sigma^{23}_{(k)} + \textit{в}^{(k)}_{55}\sigma^{13}_{(k)},$$

$$\varepsilon^{(k)z}_{12} = \textit{в}^{(k)}_{61}\sigma^{11}_{(k)} + \textit{в}^{(k)}_{62}\sigma^{22}_{(k)} + \textit{в}^{(k)}_{63}\sigma^{33}_{(k)} + \textit{в}^{(k)}_{66}\sigma^{12}_{(k)}. \tag{2.63}$$

Підставляючи співвідношення (2.62) з урахуванням формул (2.31) – (2.33) в (2.51), нескладно отримати залежності між компонентами тензорів внутрішніх зусиль і моментів k-го шару анізотропної оболонки з площиною пружної симетрії, дотичною до координатної поверхні, і компонентами тензора деформацій в матричній формі:

$$T_{(k)} = A_{(k)}\varepsilon_{(k)}, \tag{2.64}$$

$$M_{(k)} = D_{(k)}\chi_{(k)} + K_{(k)}\psi_{(k)}, \quad L_{(k)} = K_{(k)}\chi_{(k)} + F_{(k)}\psi_{(k)}, \tag{2.65}$$

$$Q^{\gamma}_{(k)} = C_{(k)}\varepsilon^{\gamma}_{(k)} + R_{(k)}\psi^{\gamma}_{(k)}, \quad L^{\gamma}_{(k)} = R_{(k)}\varepsilon^{\gamma}_{(k)} + G_{(k)}\psi^{\gamma}_{(k)}. \tag{2.66}$$

Тут прийняті позначення матриць стовпців зусиль і деформацій:

$$T_{(k)} = \left[T^{11}_{(k)}, T^{22}_{(k)}, Q^{3}_{(k)}, T^{12}_{(k)}\right]^T, \; \varepsilon_{(k)} = \left[\varepsilon^{(k)}_{11}, \; \varepsilon^{(k)}_{22}, \; \varepsilon^{(k)}_{33}, \; \varepsilon^{(k)}_{12}\right]^T, \; M_{(k)} = \left[M^{11}_{(k)}, \; M^{22}_{(k)}, \; M^{12}_{(k)}\right]^T,$$

$$\chi_{(k)} = \left[\chi^{(k)\gamma}_{11}, \; \chi^{(k)\gamma}_{22}, \; \chi^{(k)\gamma}_{12}\right]^T, \; L_{(k)} = \left[L^{11}_{(k)}, \; L^{22}_{(k)}, \; L^{12}_{(k)}\right]^T, \; \psi_{(k)} = \left[\psi^{(k)}_{11}, \; \psi^{(k)}_{22}, \; \psi^{(k)}_{12}\right]^T,$$

$$Q^{\gamma}_{(k)} = \left[Q^{2}_{(k)}, \; Q^{1}_{(k)}\right]^T, \; \varepsilon^{\gamma}_{(k)} = \left[\varepsilon^{(k)\gamma}_{23}, \; \varepsilon^{(k)\gamma}_{13}\right]^T,$$

$$L^{\gamma}_{(k)} = \left[L^{23}_{(k)}, \; L^{13}_{(k)}\right]^T, \; \psi^{\gamma}_{(k)} = \left[\psi^{(k)}_{2}, \; \psi^{(k)}_{1}\right]^T \tag{2.67}$$

і матриць жорсткості k-го шару оболонки:

$$A_{(k)} = \begin{bmatrix} A^{(k)}_{11} & A^{(k)}_{12} & A^{(k)}_{13} & A^{(k)}_{16} \\ A^{(k)}_{21} & A^{(k)}_{21} & A^{(k)}_{23} & A^{(k)}_{26} \\ A^{(k)}_{31} & A^{(k)}_{32} & A^{(k)}_{33} & A^{(k)}_{36} \\ A^{(k)}_{61} & A^{(k)}_{62} & A^{(k)}_{63} & A^{(k)}_{66} \end{bmatrix}, \; D_{(k)} = \begin{bmatrix} D^{(k)}_{11} & D^{(k)}_{12} & D^{(k)}_{16} \\ D^{(k)}_{21} & D^{(k)}_{22} & D^{(k)}_{26} \\ D^{(k)}_{61} & D^{(k)}_{62} & D^{(k)}_{66} \end{bmatrix}, \; K_{(k)} = \begin{bmatrix} K^{(k)}_{11} & K^{(k)}_{12} & K^{(k)}_{16} \\ K^{(k)}_{21} & K^{(k)}_{22} & K^{(k)}_{26} \\ K^{(k)}_{61} & K^{(k)}_{62} & K^{(k)}_{66} \end{bmatrix},$$

$$F_{(k)} = \begin{bmatrix} F_{11}^{(k)} & F_{12}^{(k)} & F_{16}^{(k)} \\ F_{21}^{(k)} & F_{22}^{(k)} & F_{26}^{(k)} \\ F_{61}^{(k)} & F_{62}^{(k)} & F_{66}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad C_{(k)} = \begin{bmatrix} C_{44}^{(k)} & C_{45}^{(k)} \\ C_{54}^{(k)} & C_{55}^{(k)} \end{bmatrix},$$

$$R_{(k)} = \begin{bmatrix} R_{44}^{(k)} & R_{45}^{(k)} \\ R_{54}^{(k)} & R_{55}^{(k)} \end{bmatrix}, \qquad G_{(k)} = \begin{bmatrix} G_{44}^{(k)} & G_{45}^{(k)} \\ G_{54}^{(k)} & G_{55}^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{2.68}$$

де

$$A_{ij}^{(k)} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} a_{(k)}^{ij} dz, \quad D_{ij}^{(k)} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} z^2 a_{(k)}^{ij} dz, \quad K_{ij}^{(k)} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} z\varphi^{(k)}(z) a_{(k)}^{ij} dz,$$

$$F_{ij}^{(k)} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \varphi_{(k)}^2(z) a_{(k)}^{ij} dz, \quad C_{ij}^{(k)} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} a_{(k)}^{ij} dz,$$

$$R_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \varphi_{(k)}^{/}(z) a_{(k)}^{ij} dz, \qquad G_{ij}^{(k)} = \frac{1}{4} \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \left[\varphi_{(k)}^{/}(z)\right]^2 a_{(k)}^{ij} dz. \tag{2.69}$$

Вважається, що функція $\varphi_{(k)}(z)$, яка визначає нелінійний характер розподілу тангенціальних переміщень (2.4) по товщині k-го шару оболонки.

Розв'язуючи лінійні системи рівнянь (2.64) – (2.66), нескладно знайти наступні залежності:

$$\varepsilon_{(k)} = A_{(k)}^{-1} T_{(k)}, \tag{2.70}$$

$$\begin{bmatrix} \chi_{(k)} \\ \psi_{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{(k)} & K_{(k)} \\ K_{(k)} & F_{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_{(k)} \\ L_{(k)} \end{bmatrix}, \tag{2.71}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{(k)}^{\gamma} \\ \psi_{(k)}^{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{(k)} & R_{(k)} \\ R_{(k)} & G_{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{(k)}^{\gamma} \\ L_{(k)}^{\gamma} \end{bmatrix}. \tag{2.72}$$

Виведення співвідношень (2.70) – (2.72) у формі аналітичних залежностей досить проблематичне, тому значно простіше отримати такий розв’язок одним з чисельних методів на ЕОМ.

Рівняння дискретно - структурної теорії з ідеальним контактом шарів анізотропного тіла. Відповідно до загальної та місцевої систем координат, які були введені в підрозділі 2.1 для розглянутої багатошарової оболонки (рис.2.1), кінематичні умови ідеального контакту k-го шару оболонки з k+1 і k–1-им шарами в тензорній формі запишуться таким чином:

$$\cancel{z}^{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2} :\ u_i^{(k)} + \frac{h^{(k)}}{2}\gamma_i^{(k)} + \varphi^{(k)}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)\psi_i^{(k)} = u_i^{(k+1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2}\gamma_i^{(k+1)} - \varphi^{(k+1)}\left(\frac{h^{(k+1)}}{2}\right)\psi_i^{(k+1)} \quad (i = 1,2),$$

$$w^{(k)} + \frac{h^{(k)}}{2}\gamma^{(k)} = w^{(k+1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2}\gamma^{(k+1)}; \tag{2.73}$$

$$\cancel{z}^{(k)} = -\frac{h^{(k)}}{2} :u_i^{(k)} - \frac{h^{(k)}}{2}\gamma_i^{(k)} - \varphi^{(k)}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)\psi_i^{(k)} = u_i^{(k-1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2}\gamma_i^{(k-1)} + \varphi^{(k-1)}\left(\frac{h^{(k-1)}}{2}\right)\psi_i^{(k-1)} \quad (i = 1,2),$$

$$w^{(k)} - \frac{h^{(k)}}{2}\gamma^{(k)} = w^{(k-1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2}\gamma^{(k-1)}. \tag{2.74}$$

Розв’язуючи спільно рівняння (2.73) – (2.74), переміщення серединної поверхні k-го шару можна записати через переміщення серединних поверхонь k+1, k–1-го шарів оболонки:

$$2u_i^{(k)} = u_i^{(k+1)} + u_i^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2}\gamma_i^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2}\gamma_i^{(k-1)} - \varphi^{(k+1)}\left(\frac{h^{(k+1)}}{2}\right)\psi_i^{(k+1)} + \varphi^{(k-1)}\left(\frac{h^{(k-1)}}{2}\right)\psi_i^{(k-1)} \quad (i = 1,2),$$

$$2w^{(k)} = w^{(k+1)} + w^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2}\gamma^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2}\gamma^{(k-1)}. \tag{2.75}$$

Вирази (2.73) – (2.74) дещо змінюються для першого і *n*-го шарів:

$$u_i^{(1)} = u_i^{(2)} - \frac{h^{(2)}}{2}\gamma_i^{(2)} - \frac{h^{(1)}}{2}\gamma_i^{(1)} - \varphi^{(2)}\left(\frac{h^{(2)}}{2}\right)\psi_i^{(2)} - \varphi^{(1)}\left(\frac{h^{(1)}}{2}\right)\psi_i^{(1)} \quad (i = 1,2),$$

$$w^{(1)} = w^{(2)} - \frac{h^{(1)}}{2}\gamma^{(1)} - \frac{h^{(2)}}{2}\gamma^{(2)},$$

$$u_i^{(n)} = u_i^{(n-1)} + \frac{h^{(n-1)}}{2}\gamma_i^{(n-1)} + \frac{h^{(n)}}{2}\gamma_i^{(n)} + \varphi^{(n-1)}\left(\frac{h^{(n-1)}}{2}\right)\psi_i^{n-1} + \varphi^{(n)}\left(\frac{h^{(n)}}{2}\right)\psi_i^{(n)} \quad (i = 1,2),$$

$$w^{(n)} = w^{(n-1)} + \frac{h^{(n-1)}}{2}\gamma^{(n-1)} + \frac{h^{(n)}}{2}\gamma^{(n)}. \tag{2.76}$$

Статичні крайові умови ідеального контакту на лицьових поверхнях *k*-го шару приймають вигляд

$$\sigma_{i3}^{(k)+} = \sigma_{i3}^{(k+1)-}, \quad \sigma_{i3}^{(k)-} = \sigma_{i3}^{(k-1)+} \quad (i = 1,2), \quad \sigma_{33}^{(k)+} = \sigma_{33}^{(k+1)-}, \quad \sigma_{33}^{(k)-} = \sigma_{33}^{(k-1)+}. \tag{2.77}$$

Для першого і *n*-го шарів оболонки вирази (2.77) відповідно перепишуть так:

$$\sigma_{i3}^{(1)+}=\sigma_{i3}^{(2)-},\qquad \sigma_{i3}^{(1)-}=q_{(1)}^{(-)i}\qquad (i=1,2),\qquad \sigma_{33}^{(1)+}=\sigma_{33}^{(2)-},\qquad \sigma_{33}^{(1)-}=q_{(1)}^{(-)},$$

$$\sigma_{i3}^{(n)+}=-q_{(n)}^{(+)i},\qquad \sigma_{i3}^{(n)-}=\sigma_{i3}^{(n-1)+}\qquad (i=1,2),\qquad \sigma_{33}^{(n)+}=-q_{(n)}^{(+)},\qquad \sigma_{33}^{(n)-}=\sigma_{33}^{(n-1)+}. \quad (2.78)$$

При цьому напруження $\sigma_{(k)}^{i3}$ $(i=1,2,3)$ на лицьових поверхнях k-го шару, згідно статичним умовам (2.77) і співвідношенням пружності (2.62), приймають вигляд

$$z^{(k)}=-\frac{h^{(k)}}{2}:\ \sigma_{13}^{(k)-}=a_{(k)}^{54}\varepsilon_{23}^{(k)\gamma}+a_{(k)}^{55}\varepsilon_{13}^{(k)\gamma}+\varphi^{(k)/}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)\left(a_{(k)}^{54}\psi_{2}^{(k)}+a_{(k)}^{55}\psi_{1}^{(k)}\right)\qquad (1\leftrightarrow 2,4\leftrightarrow 5),$$

$$\sigma_{33}^{(k)-}=a_{(k)}^{31}\varepsilon_{11}^{(k)}+a_{(k)}^{32}\varepsilon_{22}^{(k)}+a_{(k)}^{33}\varepsilon_{33}^{(k)}+a_{(k)}^{36}\varepsilon_{12}^{(k)}-\frac{h^{(k)}}{2}\left(a_{(k)}^{31}\chi_{11}^{(k)\gamma}+a_{(k)}^{32}\chi_{22}^{(k)\gamma}+a_{(k)}^{36}\chi_{12}^{(k)\gamma}\right)-$$

$$-\varphi^{(k)}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)\left(a_{(k)}^{31}\psi_{11}^{(k)}+a_{(k)}^{32}\psi_{22}^{(k)}+a_{(k)}^{36}\psi_{12}^{(k)}\right),$$

$$z^{(k)}=\frac{h^{(k)}}{2}:\ \sigma_{13}^{(k)+}=a_{(k)}^{54}\varepsilon_{23}^{(k)\gamma}+a_{(k)}^{55}\varepsilon_{13}^{(k)\gamma}+\varphi^{(k)/}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)\left(a_{(k)}^{54}\psi_{2}^{(k)}+a_{(k)}^{55}\psi_{1}^{(k)}\right)\quad (1\leftrightarrow 2,4\leftrightarrow 5),$$

$$\sigma_{33}^{(k)+}=a_{(k)}^{31}\varepsilon_{11}^{(k)}+a_{(k)}^{32}\varepsilon_{22}^{(k)}+a_{(k)}^{33}\varepsilon_{33}^{(k)}+a_{(k)}^{36}\varepsilon_{12}^{(k)}+\frac{h^{(k)}}{2}\left(a_{(k)}^{31}\chi_{11}^{(k)\gamma}+a_{(k)}^{32}\chi_{22}^{(k)\gamma}+a_{(k)}^{36}\chi_{12}^{(k)\gamma}\right)+$$

$$+\varphi^{(k)}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)\left(a_{(k)}^{31}\psi_{11}^{(k)}+a_{(k)}^{32}\psi_{22}^{(k)}+a_{(k)}^{36}\psi_{12}^{(k)}\right). \qquad (2.79)$$

Таким чином, кінематичні умови ідеального контакту лицьових поверхонь k-го шару і зв'язаних з ними лицьових поверхонь k+1 і k–1 шарів (2.73), (2.74) накладають певні обмеження (2.75) на тангенціальні і нормальні переміщення k-го шару. Аналогічно статичні умови ідеального контакту (2.77) вносять деякі зміни в характер розподілу напружень зсуву та обтиснення (2.62) в зонах контакту *k*-го шару (2.79).

Вносячи співвідношення (2.77) у формули (2.42) – (2.44) і вважаючи, що $g^{(k)}\approx a^{(k)}$, компоненти векторів $\vec{X}_{(k)}$, $\vec{M}_{(k)}$, $\vec{B}_{(k)}$ k-го шару оболонки приймають вигляд

$$X_i^{(k)} = \sigma_{i3}^{(k)+} - \sigma_{i3}^{(k)-}, \quad X_3^{(k)} = \sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-},$$

$$M_i^{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2}(\sigma_{i3}^{(k)+} - \sigma_{i3}^{(k)-}), \quad M_3^{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2}(\sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-}),$$

$$B_i^{(k)} = \varphi^{(k)}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)\left(\sigma_{i3}^{(k)+} - \sigma_{i3}^{(k)-}\right) \qquad (i = 1,2). \tag{2.80}$$

Тут не враховується вплив власної ваги k-го шару $\vec{p}^{(k)}$ на компоненти тензорів напружень і деформацій.

Маючи геометричні співвідношення (2.11) – (2.35) для випадку середнього згинання k-го шару, фізичні співвідношення (2.70) – (2.72), рівняння рівноваги (2.55), (2.56), для оболонки обертання, яка включає в себе n шарів з співвісними поверхнями обертання, нескладно скласти n розв'язувальних систем рівнянь для кожного шару. При цьому умови ідеального контакту по суміжних лицьових поверхнях шарів виконуються за допомогою співвідношень (2.75) – (2.76), (2.79) – (2.80). В якості основних невідомих приймаються функції, які входять в граничні умови на бічному контурі k-го шару оболонки. Таким чином, розв'язувальна система диференціальних рівнянь в частинних похідних для k-го шару оболонки має вигляд

$$\frac{\partial \vec{R}^{(k)}}{A_{(\kappa)}\partial \alpha_1^{(k)}} = D_0^{(k)}\vec{R}^{(k)} + D_1^{(k)}\frac{\partial \vec{R}^{(k)}}{B_{(k)}\partial \alpha_2^{(k)}} + \vec{f}^{(k)} \qquad k = 1,2...,n \;, \tag{2.81}$$

де

$\vec{R}^{(k)} = \left\{R_{11}^{(k)},\, R_{12}^{(k)},\, R_{13}^{(k)},\, M_{11}^{(k)},\, M_{12}^{(k)},\, L_{11}^{(k)},\, L_{12}^{(k)}, u_1^{(k)},\, u_2^{(k)},\, w^{(k)},\, \gamma_1^{(k)},\, \gamma_2^{(k)},\, \psi_1^{(k)},\, \psi_2^{(k)}\right\}^T,$

$\vec{f}^{(k)} = \left\{f_1^{(k)}, \;\; f_2^{(k)},..., \;\; f_{14}^{(k)}\right\}^T,$

$D_0^{(k)},\; D_1^{(k)}$ – квадратні матриці 14-го порядку.

Окрім 14 диференціальних рівнянь система рівнянь (2.81) доповнюється двома недиференціальними рівняннями (2.56) і (2.13) при врахуванні поперечного обтиснення k-го шару. На торцях кожного шару оболонки мають місце статичні (2.57), геометричні та змішаного типу граничні умови (2.58) – (2.61).

Після відкидання нелінійних доданків більш високого порядку малості фізичні компоненти тензора тангенціальних зусиль $R_{ij}^{(k)}$ і зусиль поперечного зсуву $R_{iз}^{(k)}$ [162] запишуться таким чином:

$$R_{11}^{(k)} \approx T_{11}^{(k)},\ \ R_{22}^{(k)} \approx T_{22}^{(k)},\ \ R_{12}^{(k)} \approx R_{21}^{(k)} \approx T_{12}^{(k)} \approx T_{21}^{(k)},$$

$$R_{13}^{(k)} \approx T_{11}^{(k)}\omega_1^{(k)} + T_{12}^{(k)}\omega_2^{(\kappa)} + Q_1^{(k)},\ \ R_{23}^{(k)} \approx T_{21}^{(k)}\omega_1^{(k)} + T_{22}^{(k)}\omega_2^{(k)} + Q_2^{(k)}, \qquad (2.82)$$

де $\gamma_1^{(k)} = 2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - \omega_1^{(k)},\ \omega_1^{(k)} = \dfrac{\partial w^{(k)}}{A^{(k)}\partial\alpha_1} - k_1^{(k)}u_1^{(k)} \qquad \left(1 \leftrightarrow 2, A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}\right). \qquad (2.83)$

При цьому система рівнянь (2.81) перепишеться

$$\frac{\partial\vec{Y}^{(k)}}{A_{(k)}\partial\alpha_1} = F\left(\alpha_1, \alpha_2, \vec{Y}^{(k)}, \frac{\partial\vec{Y}^{(k)}}{B_{(k)}\partial\alpha_2}, \vec{f}^{(k)}\right) \qquad k = 1,2,...,n, \qquad (2.\ 84)$$

де вектор розв’язків

$$\vec{Y}^{(k)} = \left\{\vec{Y}_1^{(k)}, \vec{Y}_2^{(\kappa)}, ..., \vec{Y}_{14}^{(k)}\right\}^T = \left\{T_{11}^{(k)}, T_{12}^{(k)}, R_{13}^{(k)}, M_{11}^{(k)}, M_{12}^{(k)}, L_{11}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}\right\}^T$$

і компоненти вектора правих частин F в розгорнутій формі:

$$F_1^{(k)} = \rho_1^{(k)}Y_1^{(k)} + 2\rho_2^{(k)}Y_2^{(k)} - \rho_1^{(k)}T_{22}^{(k)} - k_1^{(k)}Y_3^{(k)} - \frac{\partial Y_2^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - X_1^{(k)},$$

$$F_2^{(k)} = -\rho_2^{(k)}Y_1^{(k)} + 2\rho_1^{(k)}Y_2^{(k)} + \rho_2^{(k)}T_{22}^{(k)} - k_2^{(k)}R_{23}^{(k)} - \frac{\partial T_{22}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - X_2^{(k)},$$

$$F_3^{(k)} = k_1^{(k)}Y_1^{(k)} + \rho_1^{(k)}Y_3^{(k)} + k_2^{(k)}T_{22}^{(k)} + \rho_2^{(k)}R_{23}^{(k)} - \frac{\partial R_{23}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - X_3^{(k)},$$

$$F_4^{(k)} = \rho_1^{(k)}Y_4^{(k)} + 2\rho_2^{(k)}Y_5^{(k)} - \rho_1^{(k)}M_{22}^{(k)} + Q_1^{(k)} - \frac{\partial Y_5^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - \frac{h_{(k)}}{2}X_1^{(k)},$$

$$F_5^{(k)} = -\rho_2^{(k)}Y_4^{(k)} + 2\rho_1^{(k)}Y_5^{(k)} + \rho_2^{(k)}M_{22}^{(k)} + Q_2^{(k)} - \frac{\partial M_{22}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - \frac{h_{(k)}}{2}X_2^{(k)},$$

$$F_6^{(k)} = \rho_1^{(k)}Y_6^{(k)} + 2\rho_2^{(k)}Y_7^{(k)} - \rho_1^{(k)}L_{22}^{(k)} + L_{13}^{(k)} - \frac{\partial Y_7^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - \varphi_{(k)}\left(\frac{h_{(k)}}{2}\right)X_1^{(k)},$$

$$F_7^{(k)} = -\rho_2^{(k)}Y_6^{(k)} + 2\rho_1^{(k)}Y_7^{(k)} + \rho_2^{(k)}L_{22}^{(k)} + L_{23}^{(k)} - \frac{\partial L_{22}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - \varphi_{(k)}\left(\frac{h_{(k)}}{2}\right)X_2^{(k)},$$

$$F_8^{(k)} = \varepsilon_{11}^{(k)} + \rho_2^{(k)}Y_9^{(k)} - k_1^{(k)}Y_{10}^{(k)} - \frac{1}{2}\left(2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)}\right)^2,$$

$$F_9^{(k)} = \varepsilon_{12}^{(k)} - \rho_2^{(k)} Y_8^{(k)} - \rho_1^{(k)} Y_9^{(k)} - \left(2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)}\right)\left(\frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2} - k_2^{(k)} Y_9^{(k)}\right) - \frac{\partial Y_8^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2},$$

$$F_{10}^{(k)} = 2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)} + k_1^{(k)} Y_8^{(k)}, \qquad F_{11}^{(k)} = \chi_{11}^{(k)\gamma} + \rho_2^{(k)} Y_{12}^{(k)},$$

$$F_{12}^{(k)} = 2\chi_{12}^{(k)\gamma} - \rho_2^{(k)} Y_{11}^{(k)} - \rho_1^{(k)} Y_{12}^{(k)} - \frac{\partial Y_{11}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2}, \qquad F_{13}^{(k)} = \psi_{11}^{(k)} + \rho_2^{(k)} Y_{14}^{(k)},$$

$$F_{14}^{(k)} = 2\psi_{12}^{(k)} - \rho_2^{(k)} Y_{13}^{(k)} - \rho_1^{(k)} Y_{14}^{(k)} - \frac{\partial Y_{13}^{(k)}}{B^{(k)}\partial\alpha_2}, \tag{2.85}$$

де $\rho_1 = -\dfrac{\partial B^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)} \partial\alpha_1}, \qquad \rho_2 = -\dfrac{\partial A^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)} \partial\alpha_2}.$

При врахуванні поперечного обтиснення k-го шару система рівнянь (2.84) доповнюється двома недиференціальними рівняннями:

$$Q_3^{(k)} = \frac{h_{(k)}}{2}\left(\sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-}\right) - k_1^{(k)}\left(Y_4^{(k)} + Y_6^{(k)}\right) - k_2^{(k)}\left(M_{22}^{(k)} + L_{22}^{(k)}\right),$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \gamma_{(k)}. \tag{2.86}$$

Враховуючи, що, як правило, тангенціальні компоненти деформацій *k*-го шару не чинять істотного впливу на величину напружень поперечного обтиснення, третє рівняння фізичних співвідношень (2.64) можна переписати у такому вигляді:

$$Q_3^{(k)} \approx A_{33}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)z}. \tag{2.87}$$

Розв'язуючи спільно рівняння (2.86) і (2.87), можна скласти вирази для визначення деформації поперечного обтиснення k-го шару

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \frac{Q_3^{(k)}}{A_{33}^{(k)}} = \left(A_{33}^{(k)}\right)^{-1}\left[\frac{h_{(k)}}{2}\left(\sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-}\right) - k_1^{(k)}\left(Y_4^{(k)} + Y_6^{(k)}\right) - k_2^{(k)}\left(M_{22}^{(k)} + L_{22}^{(k)}\right)\right]. \tag{2.88}$$

У рівнянні (2.88) не враховується доданок, рівний половині добутку товщини k-го шару на різницю напружень поперечного обтиснення, які виникають на лицьових поверхнях, так як відомо, що ці напруження значно менші інших компонент напруженого стану оболонки.

Всі невідомі, які входять в праву частину системи рівнянь (2.84), необхідно записати за допомогою компонент вектора розв’язків. Ці залежності нескладно отримати, використовуючи геометричні та фізичні співвідношення.

2.3. Модель дискретно-структурної теорії багатошарових тонкостінних конструкцій з неідеальним контактом між шарами

В даному підрозділі на основі запропонованого варіанта дискретно-структурної теорії розроблена модель, відповідно до якої враховуються неідеальні умови контакту суміжних лицьових поверхонь сусідніх анізотропних шарів з різними напрямками армування матеріалу.

Внаслідок того, що між жорсткими шарами в процесі виготовлення анізотропних оболонок утворюється міжфазний м’який клейовий шар, товщину цього шару, як правило, вважають рівною нулю. Тоді відповідно до прийнятих допущень передбачається пружне проковзування жорстких шарів один щодо одного, тобто по лицьовим сполученим поверхням виконуються тільки статичні умови контакту. Вважається, що напруження поперечного зсуву та обтиснення на границі контакту однакові.

Статичні умови ідеального контакту по сполученим лицьовим поверхням k-го шару (2.77) можна врахувати, якщо скористатися методом штрафних функцій [56] і в варіацію роботи δA_R (2.39) додатково ввести

$$\vec{P}_{(k)} = K(\vec{X}^{+}_{(k-1)} - \vec{X}^{-}_{(k)})^2, \tag{2.89}$$

де K – коефіцієнт штрафу.

Після нескладних перетворень в праву частину (2.85) системи рівнянь (2.84), складених для шару $2 \le k \le n-1$, увійдуть відповідні штрафні функції:

в перше рівняння - $P^1_{(k)} = 2K(\sigma^{(k-1)+}_{13} - \sigma^{(k)-}_{13})$,

в друге рівняння - $P^2_{(k)} = 2K(\sigma^{(k-1)+}_{23} - \sigma^{(k)-}_{23})$,

в третє рівняння - $P^3_{(k)} = 2K(\sigma^{(k-1)+}_{33} - \sigma^{(k)-}_{33})$. (2.90)

Слід зазначити, що розподіли напружень поперечного зсуву та обтиснення $\sigma^{(k)}_{i3}$, $\sigma^{(k)}_{33}$ $(i = 1,2)$ по товщині k-го шару відповідають припущенням (2.31) про зміну деформацій $\varepsilon_{i3}^{(k)z}$, $\varepsilon_{33}^{(k)z}$ залежно від координати z, а також фізичним співвідношенням узагальненого закону Гука (2.62)

$$\sigma_{13}^{(k)} = a_{(k)}^{45}\varepsilon_{23}^{(k)\gamma} + a_{(k)}^{55}\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} + \frac{1}{2}\varphi_{(z)}^{(k)/}\left(a_{(k)}^{45}\psi_2^{(k)} + a_{(k)}^{55}\psi_1^{(k)}\right) \quad (1 \leftrightarrow 2,\ 4 \leftrightarrow 5), \tag{2.91}$$

$$\sigma_{33}^{(k)} = a_{(k)}^{31}\varepsilon_{11}^{(k)} + a_{(k)}^{32}\varepsilon_{22}^{(k)} + a_{(k)}^{33}\varepsilon_{33}^{(k)z}, \tag{2.92}$$

де $\quad -\dfrac{h^{(k)}}{2} \le z \le \dfrac{h^{(k)}}{2}$.

Вирази (2.91) – (2.92) дозволяють за допомогою методу штрафних функцій виконати статичні умови міжшарового контакту (2.77). Тим не менше, коли в статичних умовах контакту першого і n-го шарів (2.78) анізотропної оболонки мають місце нульові значення горизонтальних або вертикальних складових зовнішнього навантаження $q_{(1)}^{(-)i},\ q_{(n)}^{(+)i},\ q_{(1)}^{(-)},\ q_n^{(+)}\ \ (i=1,2)$, наявність в (2.91) – (2.92) сталих величин, які не залежать від координати z, не дозволяє точно задовольнити граничні умови на поверхнях оболонки $z=\delta_{(0)},\ \ z=\delta_{(n)}$ (рис. 2.1 б).

Таким чином, поряд з припущеннями (2.31) додатково можна вважати, що напруження $\sigma_{i3}^{(k)},\ \sigma_{33}^{(k)}$ змінюються по товщині шару, згідно наступного закону:

$$\sigma_{i3}^{(k)} = (0{,}5 + \frac{z}{h_{(k)}})\sigma_{i3}^{(k)+} + (0{,}5 - \frac{z}{h_{(k)}})\sigma_{i3}^{(k)-} + f_{(k)}^{*}(z)\eta_i^{(k)} \qquad (i=1,2), \tag{2.93}$$

$$\sigma_{33}^{(k)} = \left(0{,}5 + z/h_{(k)}\right)\sigma_{33}^{(k)+} + \left(0{,}5 - z/h_{(k)}\right)\sigma_{33}^{(k)-}, \tag{2.94}$$

де $\sigma_{i3}^{(k)-},\ \sigma_{33}^{(k)-},\ \sigma_{i3}^{(k)+},\ \sigma_{33}^{(k)+}$ – значення напружень поперечного зсуву та обтиснення на нижній $z=-h_{(k)}/2$ і верхній $z=h_{(k)}/2$ поверхнях шару; функція $f_{(k)}^{*}(z)$ неперервна і задовольняє умовам

$$\int_{-\frac{h_{(k)}}{2}}^{\frac{h_{(k)}}{2}} f_{(k)}^{*}(z)dz = 1, \qquad f_{(k)}^{*}\left(-\frac{h_{(k)}}{2}\right) = f_{(k)}^{*}\left(\frac{h_{(k)}}{2}\right) = 0\,; \tag{2.95}$$

функція $\eta_i^{(k)} = \eta_i^{(k)}\left(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}\right)$ дозволяє зв’язати і встановити несуперечливий закон зміни по товщині *k*-го шару деформацій $\varepsilon_{i3}^{(k)z}$ і напружень $\sigma_{i3}^{(k)}$; залежність (2.94) відповідає апроксимації функції $\sigma_{33}^{(k)}$ поліномами Лежандра в першому наближенні [163 – 164], що якісно вірно відображає прийняті допущення про деформації $\varepsilon_{33}^{(k)z}$.

Як випливає з (2.48), співвідношення пружності для напружень поперечного зсуву та обтиснення виконуються інтегрально по товщині k-го шару. Ці вирази з урахуванням залежностей (2.93) – (2.94) приймають вигляд

$$\int_{-\frac{h(k)}{2}}^{\frac{h(k)}{2}} \left(2\varepsilon_{13}^{(k)z} - в_{45}^{(k)}\sigma_{23}^{(k)} - в_{55}^{(k)}\sigma_{13}^{(k)}\right) f_{(k)}^{*}(z)dz = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2,\ 4 \leftrightarrow 5), \tag{2.96}$$

$$\int_{-\frac{h(k)}{2}}^{\frac{h(k)}{2}} \left(\varepsilon_{33}^{(k)z} - в_{31}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)} - в_{32}\sigma_{22}^{(k)} - в_{33}^{(k)}\sigma_{33}^{(k)}\right)dz = 0 \ . \tag{2.97}$$

Підставивши в (2.96) співвідношення (2.31), (2.93), а також задавши вираз ортонормованій функції (2.95) у вигляді $f_{(k)}^{*}(z) = \varphi'_{(k)}(z)$, неважко знайти залежність напружень $\sigma_{i3}^{(k)}$ від координати z:

$$\sigma_{13}^{(k)} = \sigma_1^{(k)+} + \frac{2z}{h_{(k)}}\sigma_1^{(k)-} + \frac{1}{d_{(k)}^{*}}\varphi'_{(k)}(z)\Big\{ a_{(k)}^{45}\left[\varepsilon_{23}^{(k)\gamma} + \frac{1}{2}d_{(k)}^{*}\psi_2^{(k)} - d_{45}^{(k)*}\sigma_1^{(k)+} - d_{44}^{(k)*}\sigma_2^{(k)+}\right] +$$

$$+ a_{(k)}^{55}\left[\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} + \frac{1}{2}d_{(k)}^{*}\psi_1 - d_{55}^{(k)*}\sigma_1^{(k)+} - d_{45}^{(k)*}\sigma_2^{(k)+}\right]\Big\} \quad (1 \leftrightarrow 2,\ 4 \leftrightarrow 5), \tag{2.98}$$

де

$$d_{(k)}^{*} = \int_{-\frac{h(k)}{2}}^{\frac{h(k)}{2}} \left(\varphi'_{(k)}(z)\right)^2 dz, \qquad d_{mn}^{(k)*} = \int_{-\frac{h(k)}{2}}^{\frac{h(k)}{2}} в_{mn}^{(k)}\varphi'_{(k)}(z)dz \qquad (m,n = 4,5),$$

$$\sigma_i^{(k)+} = \frac{\sigma_{i3}^{(k)+} + \sigma_{i3}^{(k)-}}{2}, \qquad \sigma_i^{(k)-} = \frac{\sigma_{i3}^{(k)+} - \sigma_{i3}^{(k)-}}{2} \qquad (i = 1,2).$$

Окрім інтегральної тотожності (2.96), в результаті проведених перетворень можна додатково отримати статичні умови ідеального контакту на лицьових поверхнях k-го шару (2.77).

Аналогічно, з рівняння (2.97) для напружень $\sigma_{33}^{(k)}$ k-го шару мають місце співвідношення

$$\sigma_3^{(k)+} = \frac{\sigma_{33}^{(k)+} + \sigma_{33}^{(k)-}}{2} = a_{(k)}^{31}\varepsilon_{11}^{(k)} + a_{(k)}^{32}\varepsilon_{22}^{(k)} + a_{(k)}^{33}\varepsilon_{33}^{(k)}. \tag{2.99}$$

З урахуванням введених позначень (2.99), вираз (2.94) запишеться так:

$$\sigma_{33}^{(k)} = \sigma_{3}^{(k)+} + \frac{2z}{h_{(k)}}\sigma_{3}^{(k)-}, \tag{2.100}$$

де $\sigma_{3}^{(k)+} = \dfrac{\sigma_{33}^{(k)+} + \sigma_{33}^{(k)-}}{2}$, $\sigma_{3}^{(k)-} = \dfrac{\sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-}}{2}$.

Якщо між $\boldsymbol{k}$ і $\boldsymbol{k+1}$ шарами оболонки відсутній клейовий пшар, то на поверхні суміжних сусідніх шарів $\boldsymbol{S_z^{(k,k+1)}}$ діють невідомі вектори сил $\vec{\boldsymbol{q}}_{(k)}$, $\vec{\boldsymbol{q}}_{(k+1)}$ контактної взаємодії. Згідно 3-му закону Ньютона має місце залежність – $\vec{\boldsymbol{q}}_{(k)} = -\vec{\boldsymbol{q}}_{(k+1)}$. Для обліку впливу сил контактної взаємодії шарів на ділянках непроклею у функціоналі енергії $\boldsymbol{R}$ необхідно ввести доданок, що враховує роботу сили контактної взаємодії на векторі переміщення кожного шару ділянки суміжної поверхні

$$A_q = \sum_{m=k}^{k+1} \iint\limits_{S_z^{(k,k-1)}} \vec{q}_{(m)} \vec{U}_z^{(m)} dS. \tag{2.101}$$

Для випадку однобічного контакту по області $\boldsymbol{S_z^{(k,k+1)}}$, коли між шарами відсутня клейовий шар, з виразу (2.101) виходить, що зусилля контактної взаємодії будуть залежати від величини $(\vec{u}_z^{(k)} - \vec{u}_z^{(k+1)})$, і рівняння рівноваги (2.55) – (2.56) для $\boldsymbol{k}$ – го жорсткого шару у тензорній формі приймають вигляд

$$\nabla_i R_{(k)}^{ij} - b_i^{j(k)} R_{(k)}^{i3} + q_{(k)}^{i} + X_{(k)}^{i} = 0 \quad (i = 1,2),$$

$$\nabla_i R_{(k)}^{i3} + b_{ij}^{(k)} R_{(k)}^{ij} + q_{(k)}^{3} + X_{(k)}^{3} = 0 \quad (i = 1,2),$$

$$\nabla_i M_{(k)}^{ij} - Q_{(k)}^{i} + M_{(k)}^{i} = 0 \quad (i = 1,2),$$

$$\nabla_i L_{(k)}^{ij} - L_{(k)}^{i3} = 0 \quad (i = 1,2). \tag{2.102}$$

Сили контактної взаємодії $\vec{q}_{(k)} = q_{(k)}^{i} \vec{r}_i^{(k)} + q_{(k)}^{3} \vec{m}^{(k)}$ виникають при виконанні умови

$$(\vec{u}_z^{(k)} - \vec{u}_z^{(k+1)}) < 0 \tag{2.103}$$

у зонах контакту жорстких шарів. У випадку, коли нерівність (2.103) не виконується при переміщенні точок області $S_z^{(k,k+1)}$ в процесі деформації, сила $\vec{q}_{(k)}$ у формулах (2.103) приймає значення $\vec{q}_{(k)} = 0$. Статичні і кінематичні граничні умови на контурі області $S_z^{(k,k+1)}$ мають вигляд залежностей (2.57) – (2.61).

Таким чином, маючи рівняння рівноваги (2.102) і (2.103), нескладно із заданою точністю знайти значення контактного тиску за допомогою, наприклад, ітераційного методу, запропонованого в [165].

2.4. Рівняння незв’язаної задачі термопружності багатошарових тонкостінних конструкцій з ослабленим контактом між шарами

Незв'язана теорія термопружності складається з двох послідовно розв'язуваних задач: задачі теплопровідності [108] і безпосередньо задачі термопружності. Задача термопружності розв'язується без урахування впливу зміни температурного поля, викликаного деформаціями. При врахуванні інерційних доданків задача термопружності називається динамічною. Оскільки характерні часи зміни температурного поля і динамічних процесів деформування оболонки значно відрізняються, то при дослідженні задач термопружності можна нехтувати інерційними членами. У тих випадках, коли можна нехтувати інерційними членами, має місце квазістатична задача термопружності. Нарешті, якщо температурне поле не залежить від часу, то нескладно перейти до вирішення стаціонарної задачі теорії термопружності.

На основі фізичних рівнянь Дюамеля-Неймана [166] рівняння узагальненого закону Гука для анізотропного шару з однією площиною пружної симетрії (2.62), (2.63), приймають вигляд:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{11}^{(k)} = a_{11}^{(k)}\varepsilon_{11}^{(k)z} + a_{12}^{(k)}\varepsilon_{22}^{(k)z} + a_{13}^{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)z} + a_{16}^{(k)}\varepsilon_{12}^{(k)z} - \beta_{11}^{(k)}t_{(k)},\\
\sigma_{22}^{(k)} = a_{21}^{(k)}\varepsilon_{11}^{(k)z} + a_{22}^{(k)}\varepsilon_{22}^{(k)z} + a_{23}^{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)z} + a_{26}^{(k)}\varepsilon_{12}^{(k)z} - \beta_{22}^{(k)}t_{(k)},\\
\sigma_{33}^{(k)} = a_{31}^{(k)}\varepsilon_{11}^{(k)z} + a_{32}^{(k)}\varepsilon_{22}^{(k)z} + a_{33}^{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)z} + a_{36}^{(k)}\varepsilon_{12}^{(k)z} - \beta_{33}^{(k)}t_{(k)},\\
\sigma_{12}^{(k)} = a_{61}^{(k)}\varepsilon_{11}^{(k)z} + a_{62}^{(k)}\varepsilon_{22}^{(k)z} + a_{63}^{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)z} + a_{66}^{(k)}\varepsilon_{12}^{(k)z} - \beta_{66}^{(k)}t_{(k)},\\
\sigma_{23}^{(k)} = a_{44}^{(k)}\varepsilon_{23}^{(k)z} + a_{45}^{(k)}\varepsilon_{13}^{(k)z} - \beta_{23}^{(k)}t_{(k)},\\
\sigma_{13}^{(k)} = a_{54}^{(k)}\varepsilon_{23}^{(k)z} + a_{55}^{(k)}\varepsilon_{13}^{(k)z} - \beta_{13}^{(k)}t_{(k)}
\end{gathered}
\tag{2.104}
$$

або

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{11}^{(k)z} = в_{11}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)} + в_{12}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} + в_{13}^{(k)}\sigma_{33}^{(k)} + в_{16}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)} + \alpha_{11}^{t(k)}t_{(k)},\\
\varepsilon_{22}^{(k)z} = в_{21}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)} + в_{22}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} + в_{23}^{(k)}\sigma_{33}^{(k)} + в_{26}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)} + \alpha_{22}^{t(k)}t_{(k)},\\
\varepsilon_{33}^{(k)z} = в_{31}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)} + в_{32}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} + в_{33}^{(k)}\sigma_{33}^{(k)} + в_{36}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)} + \alpha_{33}^{t(k)}t_{(k)},\\
\varepsilon_{12}^{(k)z} = в_{61}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)} + в_{62}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} + в_{63}^{(k)}\sigma_{33}^{(k)} + в_{66}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)} + \alpha_{66}^{t(k)}t_{(k)},\\
\varepsilon_{23}^{(k)z} = в_{44}^{(k)}\sigma_{23}^{(k)} + в_{45}^{(k)}\sigma_{13}^{(k)} + \alpha_{23}^{t(k)}t_{(k)},\\
\varepsilon_{13}^{(k)z} = в_{54}^{(k)}\sigma_{23}^{(k)} + в_{55}^{(k)}\sigma_{13}^{(k)} + \alpha_{13}^{t(k)}t_{(k)}.
\end{gathered} \tag{2.105}$$

Тут $\alpha_{ij}^{t(k)}$ $(i, j = 1,2,3,6) -$ коефіцієнти теплового розширення k-го шару. Коефіцієнти $\beta_{ij}^{(k)}$ $(i, j = 1,2,3,6)$ визначаються як розв'язки системи рівнянь (2.105).

Для подальшого викладання системи рівнянь (2.104), (2.105) зручно представити у вигляді

$$\sigma_{(k)} = a_{(k)}\varepsilon_{(k)} - \beta_{(k)}t_{(k)}, \qquad \sigma_{(k)}^{\alpha 3} = a_{(k)}^{\alpha 3}\varepsilon_{(k)}^{\alpha 3} - \beta_{(k)}^{\alpha 3}t_{(k)} \tag{2.106}$$

або

$$\varepsilon_{(k)} = b_{(k)}\sigma_{(k)} + \alpha_{(k)}^{t}t_{(k)}, \qquad \varepsilon_{(k)}^{\alpha 3} = b_{(k)}^{\alpha 3}\sigma_{(k)}^{\alpha 3} + \alpha_{(k)}^{t\alpha 3}t_{(k)}. \tag{2.107}$$

В (2.106), (2.107) введені позначення:

$$\begin{gathered}
\sigma_{(k)} = [\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}]^T, \qquad \sigma_{(k)}^{\alpha 3} = [\sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}]^T,\\
\beta_{(k)} = [\beta_{11}^{(k)}, \beta_{22}^{(k)}, \beta_{33}^{(k)}, \beta_{66}^{(k)}]^T, \qquad \beta_{(k)}^{\alpha 3} = [\beta_{23}^{(k)}, \beta_{13}^{(k)}]^T,\\
\varepsilon_{(k)} = [\varepsilon_{11}^{(k)z}, \varepsilon_{22}^{(k)z}, \varepsilon_{33}^{(k)z}, \varepsilon_{12}^{(k)z}]^T, \qquad \varepsilon_{(k)}^{\alpha 3} = [\varepsilon_{23}^{(k)z}, \varepsilon_{13}^{(k)z}]^T,\\
\alpha_{(k)}^{t} = [\alpha_{11}^{t(k)}, \alpha_{22}^{t(k)}, \alpha_{33}^{t(k)}, \alpha_{66}^{t(k)}]^T, \qquad \alpha_{(k)}^{t\alpha 3} = [\alpha_{23}^{t(k)}, \alpha_{13}^{t(k)}]^T,\\
a_{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & a_{16}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & a_{26}^{(k)} \\ a_{31}^{(k)} & a_{32}^{(k)} & a_{33}^{(k)} & a_{36}^{(k)} \\ a_{61}^{(k)\beta} & a_{62}^{(k)\beta} & a_{63}^{(k)\beta} & a_{66}^{(k)\beta} \end{bmatrix}, \quad a_{(k)}^{\alpha 3} = \begin{bmatrix} a_{44}^{(k)} & a_{45}^{(k)} \\ a_{54}^{(k)} & a_{55}^{(k)} \end{bmatrix},
\end{gathered}$$

$$b_{(k)} = \begin{bmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & b_{13}^{(k)} & b_{16}^{(k)} \\ b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & b_{23}^{(k)} & b_{26}^{(k)} \\ b_{31}^{(k)} & b_{32}^{(k)} & b_{33}^{(k)} & b_{36}^{(k)} \\ b_{61}^{(k)\beta} & b_{62}^{(k)\beta} & b_{63}^{(k)\beta} & b_{66}^{(k)\beta} \end{bmatrix}, \quad b_{(k)}^{\alpha 3} = \begin{bmatrix} b_{44}^{(k)} & b_{45}^{(k)} \\ b_{54}^{(k)} & b_{55}^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{2.108}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (2.106), нескладно знайти напруження $\sigma_{(k)}$, $\sigma^{\alpha 3}_{(k)}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{(k)} &= [b_{(k)}]^{-1}(\varepsilon_{(k)} - \alpha^{t}_{(k)} t_{(k)}) = [b_{(k)}]^{-1}\varepsilon_{(k)} - [b_{(k)}]^{-1}\alpha^{t}_{(k)} t_{(k)},\\ \sigma^{\alpha 3}_{(k)} &= [b^{\alpha 3}_{(k)}]^{-1}(\varepsilon^{\alpha 3}_{(k)} - \alpha^{t\alpha 3}_{(k)} t_{(k)}) = [b^{\alpha 3}_{(k)}]^{-1}\varepsilon^{\alpha 3}_{(k)} - [b^{\alpha 3}_{(k)}]^{-1}\alpha^{t\alpha 3}_{(k)} t_{(k)}.\end{aligned} \tag{2.109}$$

Порівнюючи рівняння (2.106), (2.109) можна записати наступні тотожності

$$a_{(k)} = [b_{(k)}]^{-1}, \quad a^{\alpha 3}_{(k)} = [b^{\alpha 3}_{(k)}]^{-1}, \tag{2.110}$$

$$\beta_{(k)} = [b_{(k)}]^{-1}\alpha^{t}_{(k)}, \quad \beta^{\alpha 3}_{(k)} = [b^{\alpha 3}_{(k)}]^{-1}\alpha^{t\alpha 3}_{(k)}. \tag{2.111}$$

Таким чином, матриці жорсткості $a_{(k)}$, $a^{\alpha 3}_{(k)}$ рівні оберненим матрицям піддатливості $b_{(k)}$, $b^{\alpha 3}_{(k)}$ відповідно, а коефіцієнти $\beta^{(k)}_{ij}$ $(i, j = 1,2,3,6)$ визначаються з виразів (2.111). При цьому система рівнянь (2.106) з урахуванням виразів (2.109) – (2.111) перепишеться:

$$\begin{aligned}\sigma^{t}_{(k)} &= a_{(k)}(\varepsilon_{(k)} - \alpha^{t}_{(k)} t_{(k)}) = a_{(k)}\varepsilon^{t}_{(k)},\\ \sigma^{t\alpha 3}_{(k)} &= a^{\alpha 3}_{(k)}(\varepsilon^{\alpha 3}_{(k)} - \alpha^{t\alpha 3}_{(k)} t_{(k)}) = a^{\alpha 3}_{(k)}\varepsilon^{t\alpha 3}_{(k)},\end{aligned} \tag{2.112}$$

де
$$\begin{aligned}\varepsilon^{t}_{(k)} &= [\varepsilon^{(k)z}_{11} - \alpha^{t(k)}_{11} t_{(k)},\ \varepsilon^{(k)z}_{22} - \alpha^{t(k)}_{22} t_{(k)},\ \varepsilon^{(k)z}_{33} - \alpha^{t(k)}_{33} t_{(k)},\ \varepsilon^{(k)z}_{12} - \alpha^{t(k)}_{12} t_{(k)}]^{T},\\ \varepsilon^{t\alpha 3}_{(k)} &= [\varepsilon^{(k)z}_{23} - \alpha^{t(k)}_{23} t_{(k)},\ \varepsilon^{(k)z}_{13} - \alpha^{t(k)}_{13} t_{(k)}]^{T}.\end{aligned} \tag{2.113}$$

Якщо прийняти, що зміна температури по товщині шару апроксимується лінійною залежністю, то підставляючи співвідношення (2.112) з урахуванням формул (2.11) – (2.13), (2.31) – (2.33) в (2.51), нескладно отримати фізичні співвідношення між компонентами тензорів внутрішніх зусиль і моментів k-го шару анізотропної оболонки з площиною пружної симетрії, дотичної до координатної поверхні, і компонентами тензора деформацій, які також включають і температурні деформації, в матричної формі:

$$T^{t}_{(k)} = A_{(k)}\varepsilon^{t}_{(k)}, \tag{2.114}$$

$$M^{t}_{(k)} = D_{(k)}\chi^{t}_{(k)} + K_{(k)}\psi^{t}_{(k)}, \quad L^{t}_{(k)} = K_{(k)}\chi^{t}_{(k)} + F_{(k)}\psi^{t}_{(k)}, \tag{2.115}$$

$$Q^{t\gamma}_{(k)} = C_{(k)}\varepsilon^{t\gamma}_{(k)} + R_{(k)}\psi^{t\gamma}_{(k)}, \quad L^{t\gamma}_{(k)} = R_{(k)}\varepsilon^{t\gamma}_{(k)} + G_{(k)}\psi^{t\gamma}_{(k)}. \tag{2.116}$$

Тут прийняті наступні позначення матриць стовпців зусиль і деформацій:

$$T^{t}_{(k)} = \left[T^{t11}_{(k)}, T^{t22}_{(k)}, Q^{t3}_{(k)}, T^{t12}_{(k)}\right]^{T}, \quad M^{t}_{(k)} = \left[M^{t11}_{(k)},\ M^{t22}_{(k)},\ M^{t12}_{(k)}\right]^{T},$$

$$L^{t}_{(k)} = \left[L^{t11}_{(k)},\ L^{t22}_{(k)},\ L^{t12}_{(k)}\right]^{T}, \quad Q^{t\gamma}_{(k)} = \left[Q^{t2}_{(k)},\ Q^{t1}_{(k)}\right]^{T}, \quad L^{t\gamma}_{(k)} = \left[L^{t23}_{(k)},\ L^{t13}_{(k)}\right]^{T},$$

$$\varepsilon^{t}_{(k)} = \left[\varepsilon^{(k)}_{11} - \alpha^{t(k)}_{11} t^{(k)}_{0},\ \varepsilon^{(k)}_{22} - \alpha^{t(k)}_{22} t^{(k)}_{0},\ \varepsilon^{(k)}_{33} - \alpha^{t(k)}_{33} t^{(k)}_{0},\ \varepsilon^{(k)}_{12} - \alpha^{t(k)}_{12} t^{(k)}_{0}\right]^{T},$$

$$\chi^{t}_{(k)} = \left[\chi^{(k)\gamma}_{11} - \alpha^{t(k)}_{11}\theta^{(k)},\ \chi^{(k)\gamma}_{22} - \alpha^{t(k)}_{22}\theta^{(k)},\ \chi^{(k)\gamma}_{12} - \alpha^{t(k)}_{22}\theta^{(k)}\right]^{T},$$

$$\varepsilon^{t\gamma}_{(k)} = \left[\varepsilon^{(k)\gamma}_{23} - \alpha^{t(k)}_{23} t^{(k)}_{0},\ \ \varepsilon^{(k)\gamma}_{13} - \alpha^{t(k)}_{13} t^{(k)}_{0}\right]^{T},$$

$$\psi^{t}_{(k)} = \left[\psi^{(k)}_{11} - \alpha^{t(k)}_{11}\theta^{(k)},\ \psi^{(k)}_{22} - \alpha^{t(k)}_{22}\theta^{(k)},\ \psi^{(k)}_{12} - \alpha^{t(k)}_{22}\theta^{(k)}\right]^{T},$$

$$\psi^{t\gamma}_{(k)} = \left[\psi^{(k)}_{2} - \alpha^{t(k)}_{23} t^{(k)}_{0},\ \ \psi^{(k)}_{1} - \alpha^{t(k)}_{13} t^{(k)}_{0}\right]^{T}. \tag{2.117}$$

Матриці жорсткості k-го шару оболонки $A_{(k)},\ D_{(k)},\ K_{(k)},\ F_{(k)},\ C_{(k)},\ R_{(k)}$ визначаються згідно виразів (2.68).

Використовуючи алгоритм підрозділу 2.2, який визначається формулами (2.70) – (2.72), нескладно отримати фізичні співвідношення, що зв'язують деформації $\varepsilon^{t}_{(k)},\ \chi^{t}_{(k)},\ \varepsilon^{t\gamma}_{(k)},\ \psi^{t}_{(k)},\ \psi^{t\gamma}_{(k)}$ і внутрішні зусилля $T^{t}_{(k)},\ M^{t}_{(k)},\ L^{t\gamma}_{(k)},\ Q^{t}_{(k)},\ L^{t\gamma}_{(k)}$ k-го шару оболонки.

Узагальнюючи варіаційне рівняння принципу Рейснера для багатошарової оболонки на випадок задачі термопружності, першу варіацію другого доданка рівняння (2.36) з урахуванням виразів (2.114) – (2.117) можна подати так:

$$\delta\Pi^{t}_{R} = \sum_{k=1}^{n}\left(\delta\Pi^{t(k)}_{1R} + \delta\Pi^{t(k)}_{2R}\right), \tag{2.118}$$

де

$$\delta\Pi^{t(k)}_{1R} = \iint\limits_{S(k)} (\mathrm{T}^{tij}_{(k)}\delta\varepsilon^{\,t(k)}_{ij} + M^{tij}_{(k)}\delta\chi^{\,t(k)\gamma}_{ij} + L^{tij}_{(k)}\nabla_i\delta\psi^{\,t(k)}_{i} + 2Q^{ti}_{(k)}\delta\varepsilon^{\,t(k)\gamma}_{i3} + L^{ti3}_{(k)}\delta\psi^{\,t(k)}_{i} +$$

$$+ M^{ti3}_{(k)}\nabla_i\delta\varepsilon^{\,t(k)z}_{33} + Q^{t3}_{(k)}\delta\varepsilon^{\,t(k)z}_{33})dS, \tag{2.119}$$

$$\delta\Pi^{t(k)}_{2R} = -\iint\limits_{S(k)}\left\{\left(\frac{\partial G^{(k)}_{t}}{\partial \mathrm{T}^{tij}_{(k)}} - \varepsilon^{t(k)}_{ij}\right)\delta\mathrm{T}^{tij}_{(k)} + \left(\frac{\partial G^{(k)}_{t}}{\partial M^{tij}_{(k)}} - \chi^{t(k)\gamma}_{ij}\right)\delta M^{tij}_{(k)} + \left(\frac{\partial G^{(k)}_{t}}{\partial L^{tij}_{(k)}} - \nabla_i\psi^{t(k)}_{i}\right)\delta L^{tij}_{(k)} +\right.$$

$$+\left(\frac{\partial G^{(k)}_{t}}{\partial Q^{ti}_{(k)}} - 2\varepsilon^{t(k)\gamma}_{i3}\right)\delta Q^{ti}_{(k)} + \left(\frac{\partial G^{(k)}_{t}}{\partial L^{ti3}_{(k)}} - \psi^{t(k)}_{i}\right)\delta L^{ti3}_{(k)} + \left(\frac{\partial G^{(k)}_{t}}{\partial M^{ti3}_{(k)}} - \nabla_i\varepsilon^{t(k)z}_{33}\right)\delta M^{ti3}_{(k)} +$$

$$\left.+\left(\frac{\partial G^{(k)}_{t}}{\partial Q^{t3}_{(k)}} - \varepsilon^{t(k)z}_{33}\right)\delta Q^{t3}_{(k)}\ \right\}dS. \tag{2.120}$$

У (2.120) для k-го шару оболонки введений термодинамічний потенціал Гіббса [166], який, будучи функцією стану, виражається формулою

$$G_t^{(k)} = f_t^{(k)} - \sigma_{ij}^{t(k)}\,\varepsilon_{ij}^{t(k)}. \qquad (2.121)$$

У разі ізометричного процесу потенціал Гіббса дорівнює з протилежним знаком додатковій роботі деформації k-го шару $F_p^{(k)}$, $f_t^{(k)}-$ функція вільної енергії Гельмгольца.

Опускаючи цілий ряд громіздких перетворень варіаційних рівнянь, наведених в [162] і переходячи до фізичних компонент, рівняння незв'язаної стаціонарної задачі термопружності в змішаній формі, складені на основі дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок, приймають вигляд рівнянь (2.84) – (2.88). В силу громіздкості зазначених рівнянь тут представлений їх запис тільки в матричній формі:

$$\frac{\partial \vec{Y}_t^{(k)}}{A_{(k)}\partial\alpha_1} = F\left(\alpha_1,\alpha_2,\vec{Y}_t^{(k)},\frac{\partial \vec{Y}_t^{(k)}}{B_{(k)}\partial\alpha_2},g_t^{(k)}\right) \qquad k=1,2,...,n, \qquad (2.122)$$

де вектор розв’язків

$$\vec{Y}_t^{(k)} = \left\{\vec{Y}_1^{t(k)},\vec{Y}_2^{t(k)},...,\vec{Y}_{14}^{t(k)}\right\}^T =$$
$$= \left\{T_{11}^{t(k)},T_{12}^{t(k)},R_{13}^{t(k)},M_{11}^{t(k)},M_{12}^{t(k)},L_{11}^{t(k)},L_{12}^{t(k)},u_1^{(k)},u_2^{(k)},w^{(k)},\gamma_1^{(k)},\gamma_2^{t(k)},\psi_1^{(k)},\psi_2^{(k)}\right\}^T$$

При врахуванні поперечного обтиснення k-го шару система рівнянь (2.122) доповнюється двома недиференціальними рівняннями:

$$Q_3^{t(k)} = \frac{h_{(k)}}{2}\left(\sigma_{33}^{t(k)+}-\sigma_{33}^{t(k)-}\right) - k_1^{(k)}\left(Y_4^{t(k)}+Y_6^{t(k)}\right) - k_2^{(k)}\left(M_{22}^{t(k)}+L_{22}^{t(k)}\right),$$

$$\varepsilon_{33}^{t(k)z} = \gamma_{(k)}. \qquad (2.123)$$

Для розв'язання поставленої задачі систему рівнянь (2.122), (2.123) необхідно доповнити статичними і кінематичними умовами контакту сполучених лицьових поверхонь сусідніх шарів, наведених у підрозділах 2.2 і 2.3.

Таким чином, незв'язана стаціонарна задача термопружності включає розв’язання двох задач. Спочатку вирішується задача теплопровідності [108].

Отримана функція розподілу температури по товщині багатошарової оболонки, підставляється в праву частину рівнянь (2.122), (2.123).

2.5. Висновки по другому розділу

У другому розділі були структуровані і узагальнені рівняння дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок і пластин з дефектами структури матеріалу по товщині. Виведення рівнянь рівноваги, геометричних і фізичних співвідношень, коли враховуються геометрична нелінійність деформацій, деформації поперечного зсуву та трансверсального обтиснення, здійснювався за допомогою принципу Рейснера.

Показана фізична коректність розрахункової моделі багатошарових тонкостінних конструкцій, згідно якої реалізуються як ідеальні умови контакту сполучених поверхонь анізотропних шарів з різними напрямками армування матеріалу, так і умови контакту з міжфазним ослабленим шаром.

Міжфазний ослаблений шар – непроклей або розшарування, моделюється поверхнею нульової товщини, на якій зазнають розрив компоненти вектора переміщень. Можливий контактний тиск між шарами приймається пропорційним різниці нормальних зміщень суміжних шарів.

Для розв'язання контактної крайової задачі в змішаній формі складена повна система розв’язувальних рівнянь дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок. Статичні умови контакту по лицьовим сполученим поверхням сусідніх шарів виконуються за допомогою методу штрафних функцій. Для оболонок обертання, які включають в себе n шарів зі співвісними поверхнями, отримана система з $14 \cdot n$ диференціальних рівнянь в частинних похідних.

На основі узагальненого варіаційного принципу Рейснера і дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок отримані розв’язувальні рівняння термопружності в змішаній формі. Для випадку, коли температурне поле не залежить від часу, запропонований алгоритм рішення стаціонарної незв’язаної задачі теорії термопружності багатошарових оболонок.

3. МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СКЛОПЛАСТИКОВИХ ТРУБ

Як відомо елементи тонкостінних конструкцій з композитів, як правило, складаються з комбінації по-різному орієнтованих односпрямованих шарів. Властивості міцності шаруватих композитів на відміну від ізотропних матеріалів мають чітко визначену анізотропію. При цьому руйнування більш ”слабкого” шару при статичному навантаженні може відбутися завчасно, коли наступить момент граничного стану композита в цілому.

Властивості матеріалів під час проектування конструкцій з композитів та можливі варіанти схем їх армування досить різноманітні. Тому теоретичне визначення фізико-механічних характеристик композиційного матеріалу при мінімальних витратах на експеримент є актуальним завданням.

У композиційному матеріалі з регулярною структурою, як правило, присутні повторювані елементи у вигляді односпрямованих шарів. Зневажаючи неоднорідністю структури на мікрорівні кожного шару, можна знайти ефективні характеристики окремих шарів на макрорівні. При цьому деформаційна модель матеріалу має квазіоднорідну структуру, складену з різних шарів.

Аналіз різних підходів [74, 108, 127] до розрахунку пружних характеристик композиційного матеріалу показує, що коректну оцінку впливу схем укладання арматури на фізико-механічні характеристики матеріалу можна отримати, розв’язуючи крайові задачі теорії пружності. Однак такий розрахунок не виключає розбіжностей теоретичних і експериментальних результатів, обумовлених відхиленням реальної структури матеріалу від її ідеалізованої моделі. Для врахування зазначених відхилень використовуються статистичні методи та визначаються кореляційні функції констант матеріалу. Як правило, зазначений підхід пов’язаний із трудомістким чисельним аналізом.

В основу наближеного розрахунку по Фойгту та Рейссу пружних характеристик композиційних матеріалів покладений принцип підсумовування повторюваних елементарних шарів. Пружні характеристики елементарного шару визначаються у два етапи [74, 108, 127]. Спочатку визначають зведені пружні характеристики за рахунок усереднення пружних властивостей волокон ортогонально-армованого матеріалу шару та матриці. Вважається, що компоненти матеріалу (волокно і матриця) ізотропні, лінійно пружні та працюють спільно на всіх етапах деформування. Крім того, прийняті припущення, згідно яким: не враховуються напруження, перпендикулярні до волокон при дії нормального навантаження вздовж волокон; поперечні деформації при розтяганні та стисканні кожної компоненти пропорційні її об'ємному змісту в матеріалі; на границі волокно-матриця не розглядається концентрація напружень. На другому етапі здійснюється розрахунок характеристик шару, виходячи із пружних властивостей волокон і модифікованої матриці.

Експериментальні дані [160] добре збігаються зі значеннями пружних характеристик композиційних матеріалів, обчислених на основі методів [74, 108, 127].

3.1. Зведені пружні характеристики багатошарового анізотропного матеріалу

Для ортотропного односпрямованого матеріалу розрахункові залежності пружних характеристик армованого високо модульними волокнами шару мають вигляд:

$$
\begin{gathered}
E_1^{(k)} = \psi_1^{(k)} E_в + \frac{\left(1-\psi_1^{(k)}\right)\left(1+\psi_3^{(k)}\right)}{1-\psi_3^{(k)}} E_м, \qquad E_2^{(k)} = \frac{\left(1+\psi_3^{(k)}\right)}{\left(1-\psi_1^{(k)}\right)\left(1-\psi_3^{(k)}\right)\left(1-\nu_в^2\right)} E_м, \\
E_3^{(k)} = \psi_3^{(k)} E_в + \frac{\left(1+\psi_3^{(k)}\right)}{\left(1-\psi_1^{(k)}\right)\left(1-\nu_в^2\right)} E_м, \qquad \nu_{12}^{(k)} = \frac{\nu_в \psi_1 + \left(1-\psi_1^{(k)}\right)\nu_м}{\left(1+\psi_3^{(k)}\right)}, \\
\nu_{13}^{(k)} = \nu_в \psi_3^{(k)} + \left(1-\psi_3^{(k)}\right)\nu_м, \qquad \nu_{23}^{(k)} = \nu_В \psi_3^{(k)} + \left(1-\psi_3^{(k)}\right)\nu_м, \\
G_{12}^{(k)} = \frac{1+\psi_1^{(k)}}{\left(1-\psi_1^{(k)}\right)\left(1+\psi_3^{(k)}\right)} G_м, \qquad G_{23}^{(k)} = \frac{1+\psi_3^{(k)}}{\left(1-\psi_3^{(k)}\right)\left(1-\psi_1^{(k)}\right)} G_м, \\
G_{13}^{(k)} = \frac{\left(1+\psi_1^{(k)}\right)\left(1+\psi_3^{(k)}\right)}{\left(1-\psi_1^{(k)}\right)\left(1-\psi_3^{(k)}\right)} G_м,
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

де індекс “в” відноситься до арматур, “м” – до матриці (в’яжучого); $\psi_1^{(k)}$, $\psi_3^{(k)}$ – відносний об'ємний зміст арматури шару в напрямку осей 1 і 3 (рис. 3.1 а));

$$g = E_в / E_м,\ G_в = \frac{E_в}{2(1+\nu_в)},\ G_м = \frac{E_м}{2(1+\nu_м)}, \tag{3.2}$$

де $\nu_в$, $\nu_м$ – коефіцієнти Пуассона.

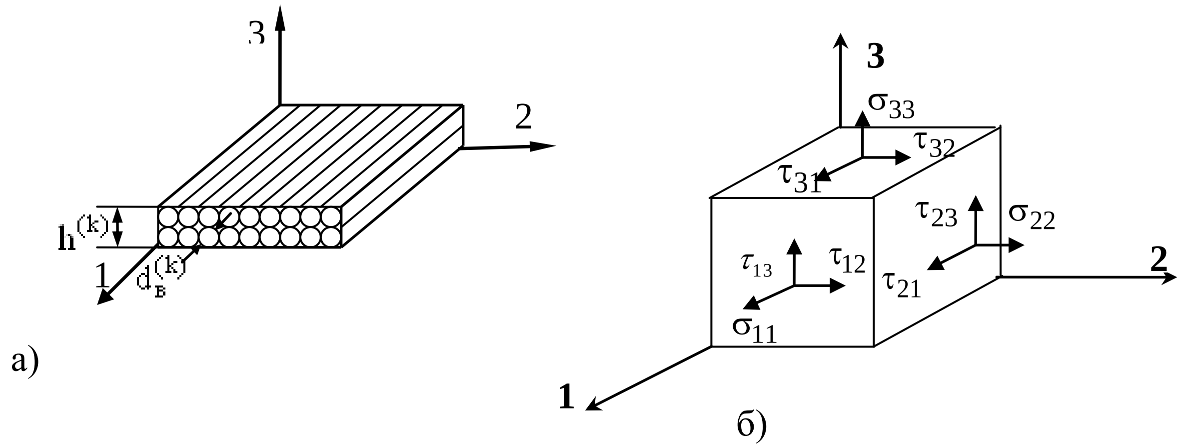


Рисунок 3.1 – Об'ємний напружений стан у точці односпрямованого матеріалу

Коефіцієнт армування $\psi_1^{(k)}$, що характеризує відносний об'ємний зміст волокон, можна визначити по формулі:

$$\psi_1^{(k)} = \frac{\pi (d_в^{(k)})^2}{4h^{(k)}} i_в^{(k)}, \tag{3.3}$$

де $h^{(k)}$ – товщина армованого шару; $d_в^{(k)}$ – діаметр волокон; $i_в^{(k)}$ – частота армування. Величина ψ_3 визначається за допомогою емпіричних залежностей, отриманих на основі експериментальних досліджень, і, як правило, змінюється в інтервалі $\psi_3 = (0.05 - 0.15)\psi_1$. Геометрія односпрямованого армованого шару показана на рис. 3.1 а. Всі величини з індексом k відносяться до k-го шару оболонки.

Співвідношення пружності для односпрямованого ортотропного шару в його осях симетрії 1, 2 з обліком фізико-технічних сталих (2.1) – (2.3) у матричній формі мають вигляд:

$$\{\sigma^{(k)}\}=[A^{(k)}]\{\varepsilon^{(k)}\}, \qquad \{\varepsilon^{(k)}\}=[B^{(k)}]\{\sigma^{(k)}\}, \tag{3.4}$$

де $\sigma_{(k)}=[\sigma_{11}^{(k)},\sigma_{22}^{(k)},\sigma_{33}^{(k)},\sigma_{23}^{(k)},\sigma_{13}^{(k)},\sigma_{12}^{(k)}]^T$, $\varepsilon_{(k)}=[\varepsilon_{11}^{(k)},\varepsilon_{22}^{(k)},\varepsilon_{33}^{(k)},\gamma_{23}^{(k)},\gamma_{13}^{(k)},\gamma_{12}^{(k)z}]^T$ – матриці-стовпці напружень і деформацій шару в напрямку осей симетрії 1, 2 (рис. 2.1 б));

$$A^{(k)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}^{(k)} & a_{32}^{(k)} & a_{33}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66}^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

$$B^{(k)}=\begin{bmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & b_{13}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & b_{23}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31}^{(k)} & b_{32}^{(k)} & b_{33}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66}^{(k)} \end{bmatrix} - \tag{3.6}$$

матриці жорсткості і піддатливості k-го ортотропного шару в напрямку осей симетрії 1, 2 відповідно.

Розв’язуючи одночасно системи рівнянь (3.4) – (3.5) щодо коефіцієнтів жорсткості $a_{ij}^{(k)}$, можна скласти наступні залежності:

$$a_{11}^{(k)}=\left[b_{22}^{(k)}b_{33}^{(k)}-\left(b_{23}^{(k)}\right)^2\right]\Delta^{-1}, \quad a_{22}^{(k)}=\left[b_{11}^{(k)}b_{33}^{(k)}-\left(b_{13}^{(k)}\right)^2\right]\Delta^{-1},$$

$$a_{33}^{(k)}=\left[b_{11}^{(k)}b_{22}^{(k)}-\left(b_{12}^{(k)}\right)^2\right]\Delta^{-1}, \quad a_{12}^{(k)}=\left[b_{13}^{(k)}b_{23}^{(k)}-b_{12}^{(k)}b_{33}^{(k)}\right]\Delta^{-1},$$

$$a_{13}^{(k)}=\left[b_{12}^{(k)}b_{23}^{(k)}-b_{22}^{(k)}b_{13}^{(k)}\right]\Delta^{-1}, \quad a_{23}^{(k)}=\left[b_{12}^{(k)}b_{13}^{(k)}-b_{11}^{(k)}b_{23}^{(k)}\right]\Delta^{-1},$$

$$\Delta=b_{11}^{(k)}b_{22}^{(k)}b_{33}^{(k)}+b_{12}^{(k)}b_{23}^{(k)}b_{31}^{(k)}+b_{21}^{(k)}b_{32}^{(k)}b_{13}^{(k)}-b_{13}^{(k)}b_{22}^{(k)}b_{31}^{(k)}-b_{21}^{(k)}b_{12}^{(k)}b_{33}^{(k)}-b_{11}^{(k)}b_{32}^{(k)}b_{23}^{(k)},$$

$$a_{44}^{(k)}=\frac{1}{b_{44}^{(k)}}, \quad a_{55}^{(k)}=\frac{1}{b_{55}^{(k)}}, \quad a_{66}^{(k)}=\frac{1}{в_{66}^{(k)}}. \tag{3.7}$$

Як відомо, коефіцієнти піддатливості $b_{ij}^{(k)}$ дорівнюють:

$$b_{11}^{(k)}=\frac{1}{E_1^{(k)}},\ \ b_{12}^{(k)}=-\frac{\nu_{21}^{(k)}}{E_2^{(k)}},\ \ b_{13}^{0}=-\frac{\nu_{31}^{(k)}}{E_3^{(k)}},\ \ b_{21}^{0}=-\frac{\nu_{12}^{(k)}}{E_1^{(k)}},$$

$$b_{22}^{(k)}=\frac{1}{E_2^{(k)}},\ \ b_{23}^{(k)}=-\frac{\nu_{32}^{(k)}}{E_3^{(k)}},\ \ b_{31}^{(k)}=-\frac{\nu_{13}^{(k)}}{E_1^{(k)}},\ \ b_{32}^{(k)}=-\frac{\nu_{23}^{(k)}}{E_2^{(k)}},$$

$$b_{33}^{(k)}=\frac{1}{E_3^{(k)}},\ \ b_{44}^{(k)}=\frac{1}{G_{23}^{(k)}},\ \ b_{55}^{(k)}=\frac{1}{G_{13}^{(k)}},\ \ b_{66}^{(k)}=\frac{1}{G_{12}^{(k)}}\ . \qquad (3.8)$$

Нехай композит складається з декількох по-різному орієнтованих шарів односпрямованого матеріалу. Відповідно рис. 3.2 прийняті такі системи координат: основна – α, β, z, і локальна $1^{(k)}, 2^{(k)}, z$ $(k = 1,2, ... , n)$. Тут k – номер односпрямованого шару в пакеті багатошарового матеріалу, n – кількість шарів, $\varphi^{(k)}$ – кут між осями загальної системи координат та осями локальної системи координат k- шару композита.

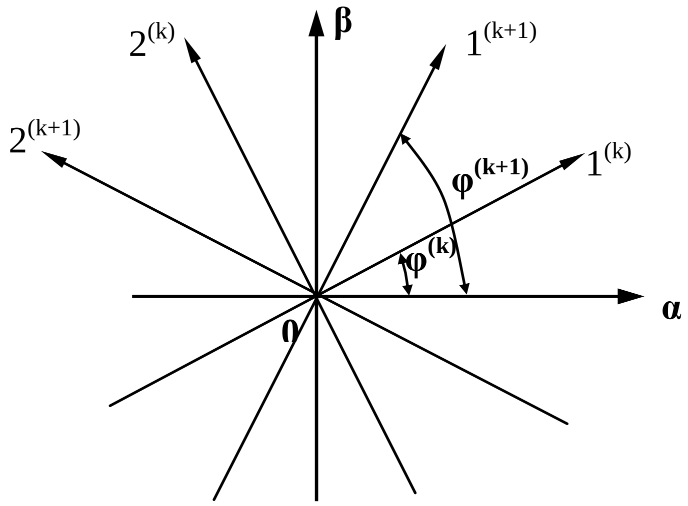


Рисунок 2.2 – Багатошаровий композит

Таким чином, у повернутих осях $1^{(k)}, 2^{(k)}, z$ армований шар має властивості анізотропного матеріалу з однією площиною пружної симетрії. Тоді співвідношення пружності такого шару запишуться:

$$\left\{\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}\right\}=\left[A^{\varphi(k)}\right]\left\{\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}\right\},\quad \left\{\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}\right\}=\left[B^{\varphi(k)}\right]\left\{\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}\right\}\ , \qquad (3.9)$$

де $\left\{\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}\right\}=\left\{\sigma_{\alpha}^{(k)}, \sigma_{\beta}^{(k)}, \sigma_{z}^{(k)}, \tau_{\beta z}^{(k)}, \tau_{\alpha z}^{(k)}, \tau_{\alpha\beta}^{(k)}\right\}^T$, $\left\{\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}\right\}=\left\{\varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \varepsilon_{\beta}^{(k)}, \varepsilon_{z}^{(k)}, \gamma_{\beta z}^{(k)}, \gamma_{\alpha z}^{(k)}, \gamma_{\alpha\beta}^{(k)}\right\}^T$ – матриці – стовпці напруг і деформацій k-шаруючи в напрямку осей *α, β*, z;

$$\left[A^{\varphi(k)}\right]=\begin{bmatrix} a_{11}^{\varphi(k)} & a_{12}^{\varphi(k)} & a_{13}^{\varphi(k)} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22}^{\varphi(k)} & a_{23}^{\varphi(k)} & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33}^{\varphi(k)} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & a_{44}^{\varphi(k)} & a_{45}^{\varphi(k)} & 0 \\ & & & & a_{55}^{\varphi(k)} & 0 \\ & & & & & a_{66}^{\varphi(k)} \end{bmatrix}, \qquad (3.10)$$

$$\left[B^{\varphi(k)}\right]=\begin{bmatrix} b_{11}^{\varphi(k)} & b_{12}^{\varphi(k)} & b_{13}^{\varphi(k)} & 0 & 0 & 0 \\ & b_{22}^{\varphi(k)} & b_{23}^{\varphi(k)} & 0 & 0 & 0 \\ & & b_{33}^{\varphi(k)} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & b_{44}^{\varphi(k)} & b_{45}^{\varphi(k)} & 0 \\ & & & & b_{55}^{\varphi(k)} & 0 \\ & & & & & b_{66}^{\varphi(k)} \end{bmatrix} - \qquad (3.11)$$

матриці жорсткості і піддатливості пружного тіла з однією площиною пружної симетрії. Опускаючи проміжні викладення, які наведені в [162], вирази коефіцієнтів матриці (3.10) мають вигляд:

$$
\begin{gathered}
a_{11}^{\varphi(k)} = c^4 a_{11}^{(k)} + s^4\, a_{22}^{(k)} + 2\left(a_{12}^{(k)} + 2a_{66}^{(k)}\right)s^2c^2 + s^4 a_{44}^{(k)}, \\
a_{22}^{\varphi(k)} = s^4 a_{11}^{(k)} + c^4 a_{22}^{(k)} + 2\left(a_{12}^{(k)} + 2a_{66}^{(k)}\right)s^2c^2 + c^4 a_{44}^{(k)}, \\
a_{12}^{\varphi(k)} = \left(a_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)} - 2a_{12}^{(k)} - 4a_{66}^{(k)}\right)s^2c^2 + a_{12}^{(k)}, \\
a_{16}^{\varphi} = \left(s^2 a_{22}^{(k)} - c^2 a_{11}^{(k)} + \left(a_{12}^{(k)} + 2a_{66}^{(k)}\right)\left(c^2 - s^2\right)\right)sc, \\
a_{26}^{\varphi(k)} = \left(c^2 a_{22}^{0(k)} - s^2 a_{11}^{0(k)} - \left(a_{12}^{0(k)} + 2a_{66}^{0(k)}\right)\left(c^2 - s^2\right)\right)sc, \\
a_{33}^{\varphi(k)} = a_{33}^{(k)}, \quad a_{13}^{\varphi(k)} = c^2 a_{13}^{(k)} + s^2 a_{23}^{(k)}, \quad a_{23}^{\varphi(k)} = s^2 a_{13}^{(k)} + c^2 a_{23}^{(k)}, \\
a_{44}^{\varphi(k)} = c^2 a_{44}^{(k)} + s^2 a_{55}^{(k)}, \quad a_{55}^{\varphi(k)} = s^2 a_{44}^{(k)} + c^2 a_{55}^{(k)}, \\
a_{45}^{\varphi(k)} = (a_{44}^{(k)} - a_{55}^{(k)})sc, \quad a_{36}^{\varphi(k)} = (a_{23}^{(k)} - a_{13}^{(k)})sc, \\
a_{66}^{\varphi(k)} = \left(a_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)} - 2a_{12}^{(k)} - 4a_{66}^{(k)}\right)s^2c^2 + a_{66}^{(k)}, \qquad (3.12)
\end{gathered}
$$

де $c = \cos\varphi, \quad s = \sin\varphi$.

Аналогічно коефіцієнти матриці (3.11) запишуться так:

$$b_{11}^{\varphi(k)} = c^4 b_{11}^{(k)} + s^4\, b_{22}^{(k)} + \left(2b_{12}^{(k)} + b_{66}^{(k)}\right)s^2c^2,$$
$$b_{12}^{\varphi(k)} = \left(b_{11}^{(k)} + b_{22}^{(k)} - 2b_{12}^{(k)} - b_{66}^{(k)}\right)s^2c^2 + b_{12}^{(k)},$$
$$b_{22}^{\varphi(k)} = s^4 b_{11}^{(k)} + c^4 b_{22}^{(k)} + \left(2b_{12}^{(k)} + b_{66}^{(k)}\right)s^2c^2,$$
$$b_{16}^{\varphi(k)} = \left(2s^2 b_{22}^{(k)} - 2c^2 b_{11}^{(k)} + \left(2b_{12}^{(k)} + b_{66}^{(k)}\right)\left(c^2 - s^2\right)\right)sc,$$
$$b_{26}^{\varphi(k)} = \left(2c^2 b_{22}^{(k)} - 2s^2 b_{11}^{(k)} - \left(2b_{12}^{(k)} + b_{66}^{(k)}\right)\left(c^2 - s^2\right)\right)sc,$$
$$b_{33}^{(k)\varphi} = b_{33}^{(k)},\quad b_{13}^{(k)\varphi} = c^2 b_{13}^{(k)} + s^2 b_{23}^{(k)},\quad b_{23}^{(k)\varphi} = s^2 b_{13}^{(k)} + c^2 b_{23}^{(k)},$$
$$b_{44}^{\varphi(k)} = c^2 b_{44}^{(k)} + s^2 b_{55}^{(k)},\quad b_{55}^{\varphi(k)} = s^2 b_{44}^{(k)} + c^2 b_{55}^{(k)},$$
$$b_{45}^{\varphi(k)} = (b_{44}^{(k)} - b_{55}^{(k)})sc,\quad b_{36}^{\varphi(k)} = 2(b_{23}^{(k)} - b_{13}^{(k)})sc,$$
$$b_{66}^{\varphi} = \left(b_{11}^{(k)} + b_{22}^{(k)} - 2b_{12}^{(k)} - b_{66}^{(k)}\right)4s^2c^2 + b_{66}^{(k)}. \qquad (3.13)$$

Слід зазначити, що перетворення співвідношень пружності (3.4) – (3.6) у співвідношення (3.9) – (3.11) за допомогою рівнянь (3.12) – (3.13), залишаються дійсними як для анізотропних тіл прямолінійно ортотропних, так і для криволінійно ортотропних тіл.

Першу систему рівнянь (3.9) зручно записувати у вигляді

$$\left\{\sigma_\alpha^{(k)}\right\} = \left[A_\alpha^{\varphi(k)}\right]\left\{\varepsilon_\alpha^{(k)}\right\},\quad \left\{\sigma_{\alpha 3}^{(k)}\right\} = \left[A_{\alpha 3}^{\varphi(k)}\right]\left\{\varepsilon_{\alpha 3}^{(k)}\right\}, \qquad (3.14)$$

де
$$\left\{\sigma_\alpha^{(k)}\right\} = \left\{\sigma_\alpha^{(k)},\, \sigma_\beta^{(k)},\, \sigma_z^{(k)},\, \tau_{\alpha\beta}^{(k)}\right\}^T,\ \left\{\sigma_{\alpha 3}^{(k)}\right\} = \left\{\tau_{\beta z}^{(k)},\, \tau_{\alpha z}^{(k)}\right\}^T,$$
$$\left\{\varepsilon_\alpha^{(k)}\right\} = \left\{\varepsilon_\alpha^{(k)},\, \varepsilon_\beta^{(k)},\, \varepsilon_z^{(k)},\, \gamma_{\alpha\beta}^{(k)}\right\}^T,\quad \left\{\varepsilon_{\alpha 3}^{(k)}\right\} = \left\{\gamma_{\beta z}^{(k)},\, \gamma_{\alpha z}^{(k)}\right\}^T,$$

$$\left[A_\alpha^{\varphi(k)}\right] = \begin{bmatrix} a_{11}^{\varphi(k)} & a_{12}^{\varphi(k)} & a_{13}^{\varphi(k)} & a_{16}^{\varphi(k)} \\ & a_{22}^{\varphi(k)} & a_{23}^{\varphi(k)} & a_{26}^{\varphi(k)} \\ & \text{сим.} & a_{33}^{\varphi(k)} & a_{36}^{\varphi(k)} \\ & & & a_{66}^{\varphi(k)} \end{bmatrix},\quad \left[A_{\alpha 3}^{\varphi(k)}\right] = \begin{bmatrix} a_{44}^{\varphi(k)} & a_{45}^{\varphi(k)} \\ \text{сим.} & a_{55}^{\varphi(k)} \end{bmatrix}. \qquad (3.15)$$

Коли композит є набором n по різному орієнтованих шарів односпрямованого матеріалу, інтегральні пружні характеристики розглянутого пакета шарів знаходять зі співвідношень:

$$\left\{\sigma_\alpha\right\} = \left[A_\alpha\right]\left\{\varepsilon_\alpha\right\},\quad \left\{\sigma_{\alpha 3}\right\} = \left[A_{\alpha 3}\right]\left\{\varepsilon_{\alpha 3}\right\} \qquad (3.16)$$

або

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \sigma_\beta \\ \sigma_z \\ \tau_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{26} \\ & \text{сим.} & a_{33} & a_{36} \\ & & & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\alpha\beta} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \tau_{\beta z} \\ \tau_{\alpha z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} \\ \text{сим.} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\beta z} \\ \gamma_{\alpha z} \end{Bmatrix}, \tag{3.17}$$

де $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{\varphi(k)} \bar{h}^{(k)}$, (3.18)

$\bar{h}^{(k)} = \dfrac{h^{(k)}}{h}$ (k = 1,2,3,…n) – відносна товщина k-шару.

Технічні сталі багатошарового композита при розтяганні можна отримати, записавши першу систему рівнянь (3.16) у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= a_{11}\varepsilon_\alpha + a_{12}\varepsilon_\beta + a_{13}\varepsilon_z + a_{16}\gamma_{\alpha\beta}, \\ 0 &= a_{12}\varepsilon_\alpha + a_{22}\varepsilon_\beta + a_{23}\varepsilon_z + a_{26}\gamma_{\alpha\beta}, \\ 0 &= a_{13}\varepsilon_\alpha + a_{23}\varepsilon_\beta + a_{33}\varepsilon_z + a_{36}\gamma_{\alpha\beta}, \\ 0 &= a_{16}\varepsilon_\alpha + a_{26}\varepsilon_\beta + a_{36}\varepsilon_z + a_{66}\gamma_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Підставивши вираз $E_\alpha = \sigma_\alpha / \varepsilon_\alpha$ в перше рівняння системи рівнянь (3.19), попередньо записавши деформації ε_β, ε_z, $\gamma_{\alpha\beta}$ як функції параметра ε_α за допомогою 3 останніх рівнянь (3.19), неважко знайти значення E_α:

$$E_\alpha = \frac{\det[A_\alpha]}{M_{11}}. \tag{3.20}$$

У формулі (3.20) M_{11} – мінор елемента a_{11} узагальненої матриці $[A_\alpha]$. Аналогічним шляхом знаходять інші значення технічних сталих:

$$E_\beta = \frac{\det[A_\alpha]}{M_{22}}, \qquad E_z = \frac{\det[A_\alpha]}{M_{33}}, \tag{3.21}$$

де E_β, E_z – модулі пружності першого роду;

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\det[A_\alpha]}{M_{44}}, \qquad G_{\alpha 3} = a_{55} - \frac{(a_{45})^2}{a_{44}}, \quad G_{\beta 3} = a_{44} - \frac{(a_{45})^2}{a_{55}}, \tag{3.22}$$

де $G_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha 3}$, $G_{\beta 3}$ – модулі зсуву;

$$\nu_{\alpha\beta} = \frac{M_{12}}{M_{11}}, \quad \nu_{\alpha z} = \frac{M_{13}}{M_{11}}, \quad \nu_{\beta z} = \frac{M_{23}}{M_{22}}, \tag{3.23}$$

де $\nu_{\alpha\beta}$, $\nu_{\alpha z}$, $\nu_{\beta z}$ – коефіцієнти Пуассона. Інші три значення коефіцієнтів Пуассона $\nu_{\beta\alpha}, \nu_{z\alpha}, \nu_{z\beta}$ знаходять за допомогою співвідношень

$$\nu_{ij}E_j = \nu_{ji}E_i \quad (i, j = \alpha, \beta, z). \qquad (3.24)$$

Тут перший індекс коефіцієнта Пуассона вказує на напрямок дії сили, а другий – на напрямок поперечної деформації, викликаною цією силою.

Як приклад розрахунків пружних характеристик багатошарового матеріалу розглядається вуглепластик, що складається з 31 шару з кодом $[0^\circ_2/90^\circ/0^\circ_2/\pm 45^\circ/(0^\circ_2/90)_2/\pm 45^\circ/\overline{0}^\circ]_S$, і склопластик з поздовжньо поперечною схемою армування з 21 шару $[(0^\circ/90^\circ)_5/\overline{0}^\circ]_S$.

Властивості складових композицій.

В у г л е п л а с т и к. Згідно паспортним даним модулі пружності $E_в$, зсуву $G_в$ і коефіцієнт Пуассона $\nu_в$ вуглецевого волокна ЛУ-03 відповідно дорівнюють 235000МПа, 90400МПа та 0,3. Механічні характеристики матриці вуглепластика (композиція сополімер епокситрифенольної і анилінформальдегидної смол): $E_м$=3500МПа, $G_м$=1320МПа, $\nu_м$=0,32. У кожному шарі товщиною 0,171мм зміст волокон становить 55% загального об’єму.

С к л о п л а с т и к. Як матриця склопластику використовувався епоксидний полімер 5-211Б с такими параметрами пружності $E_м$= 4200МПа, $G_м$=1500МПа, $\nu_м$=0,4. Армуючий елементом композиції є тканина сатинової структури Т-10-80. Товщина тканини дорівнює 0,25мм. Щільність тканини по основі становить 36 ниток/см, по утоці – 20 ниток/см. Тканина виготовлена шляхом переплетення алюмоборосилікатних ниток БС6-26×1×1 (Е-скло). Діаметр волокна становить $6 \cdot 10^{-3}$мм. Механічні характеристики волокна: $E_в$= 74800МПа, $G_в$= 31000МПа, $\nu_в$= 0,2. Кількість волокон в одній нитці досягає 800 шт. Модуль пружності нитки дорівнює 74506МПа, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона нитки приймаються також як і для волокна. Зміст волокна по основі тканини склало 52%, по утку – 48%.

Технічні сталі пружності розглянутих багатошарових композитів, отримані за допомогою залежностей (3.20) – (3.24), наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Фізико-механічні характеристики вугле і склопластиків

Композит	E_{ii}, МПа	G_{ij}, МПа	ν_{ij}	ν_{ji}
Вуглепластик	$E_{11}=84457$ $E_{22}=42026$ $E_{33}=14703$	$G_{12}=12410$ $G_{13}=4287$ $G_{23}=3677$	$\nu_{12}=0{,}21$ $\nu_{13}=0{,}28$ $\nu_{23}=0{,}3$	$\nu_{21}=0{,}11$ $\nu_{31}=0{,}05$ $\nu_{32}=0{,}1$
Склопластик	$E_{11}=25280$ $E_{22}=23660$ $E_{33}=11720$	$G_{12}=4680$ $G_{13}=4097$ $G_{23}=4018$	$\nu_{12}=0{,}091$ $\nu_{13}=0{,}42$ $\nu_{23}=0{,}43$	$\nu_{21}=0{,}085$ $\nu_{31}=0{,}2$ $\nu_{32}=0{,}21$

При цьому вважалося, що склопластик є трансверсально ізотропним матеріалом і складається з 21 односпрямованих, армованих 30 нитками/см, шарів товщиною 0,25мм. Кількість ниток у шарі визначали в результаті розрахунків та експериментально визначеної величини модуля пружності $E_1^{э}$. Відносний зміст волокна шару в напрямку осі z дорівнює $\psi_3^{(k)} = 0{,}015\psi_1^{(k)}$.

Порівняння значень технічних сталих розглянутих матеріалів (табл. 3.1) з результатами робіт [162, 167 – 168] підтверджує коректність наведеної методики визначення інтегральних фізико-механічних характеристик багатошарового композита.

Для визначення поздовжнього зусилля у волокні k-шару із прийнятної для інженерних розрахунків точністю можна використати формулу

$$N_{в}^{(k)} = \frac{\pi(d_{в}^{(k)})^2}{4} E_{в}\varepsilon_{11}^{(k)}(z),$$

де z – поперечна координата серединної поверхні k-шару

3.2. Узагальнені жорсткості багатошарових армованих оболонок

Особливу увагу варто приділити складанню фізичних співвідношень, які будуть визначати закон деформування всього пакета шарів відповідно до теорії С.П.Тимошенко. Якщо тонкостінний елемент складається з n тонких армованих шарів, осі локальних систем координат яких не збігаються з осями глобальної системи координат, що має місце, наприклад, у перехресно армованих оболонках, з'являється можливість варіювати властивостями матеріалу за рахунок кута армування.

Нехай кожний шар недеформованої оболонки (рис. 3.3) віднесений до ортогональної криволінійної системи координат α^i $(i=1,2)$, $z^{(k)}$. Координата $z^{(k)}$ спрямована по загальній нормалі $\vec{m}^{(k)}$ до серединної поверхні $S^{(k)}$ і еквідестантної поверхні $S_z^{(k)}$; k – номер шару. Індекс "z" при введенні інших символів означає, що відповідні величини ставляться у відповідність до точки $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)})$ еквідестантної поверхні $S_z^{(k)}$.

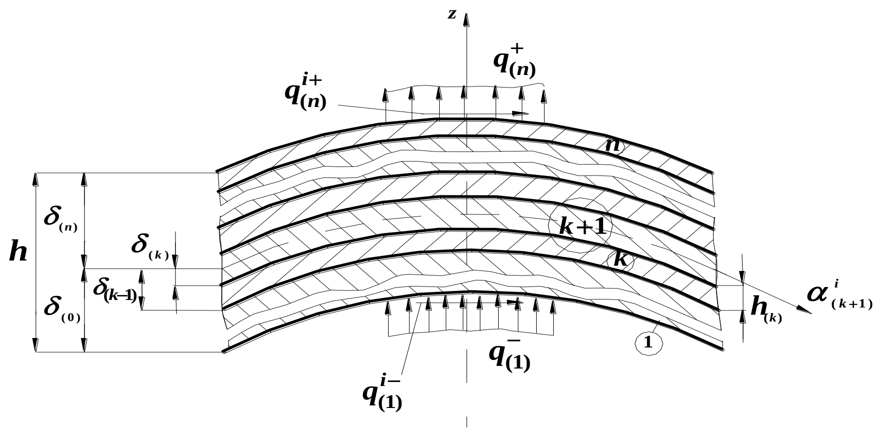


Рисунок 3.3 – Розрахункова схема багатошарового елемента

Вводячи глобальну декартову систему координат 123 таким чином, що площина 102 збігається із серединною по верхньою багатошарового елемента симетричної структури по товщині, фізичні співвідношення всього пакета шарів мають вигляд

$$\{T\} = [A]\{\varepsilon\}, \tag{3.25}$$

$$\begin{Bmatrix} M \\ L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D & K \\ K & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi \\ \psi \end{Bmatrix}, \tag{3.26}$$

$$\begin{Bmatrix} Q^\gamma \\ L^\gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & R \\ R & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^\gamma \\ \psi^\gamma \end{Bmatrix}. \tag{3.27}$$

Тут $\{T\}=\{T^{11}, T^{22}, Q^{3}, T^{12}\}^{T}$, $\{M\}=\{M^{11}, M^{22}, M^{12}\}^{T}$, $\{L\}=\{L^{11}, L^{22}, L^{12}\}^{T}$, $\{Q^{\gamma}\}=\{Q^{2}, Q^{1}\}^{T}$, $\{L^{\gamma}\}=\{L^{23}, L^{13}\}^{T}$ – віднесені до одиниці довжини недеформованої серединної поверхні багатошарового елемента контраваріантні компоненти тензорів тангенціальних зусиль T^{ij}, згинальних та крутних моментів M^{ij}, додаткового згинального та крутного моментів L^{ij}, поперечних сил деформацій зсуву та обтиснення Q^{i}, Q^{3}; $\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}\}^{T}$, $\{\chi\}=\{\chi_{11}^{\gamma}, \chi_{22}^{\gamma}, \chi_{12}^{\gamma}\}^{T}$, $\{\psi\}=\{\psi_{11}, \psi_{22}, \psi_{12}\}^{T}$, $\{\varepsilon^{\gamma}\}=\{\varepsilon_{23}^{\gamma}, \varepsilon_{13}^{\gamma}\}^{T}$, $\{\psi^{\gamma}\}=\{\psi_{2}, \psi_{1}\}^{T}$ – відповідно компоненти тензорів тангенціальних деформацій ε_{ij} і зміни кривизн χ_{ij}^{γ}, ψ_{ij} серединної поверхні багатошарового матеріалу, а також деформацій поперечного зсуву $\varepsilon_{i3}^{\gamma}$, ψ_{i3} і обтиснення ε_{33}.

Компоненти матриць жорсткості A, D, K, F, C, R, G обчислюються в результаті підсумовування інтегрувальних по товщині оболонки відповідних жорсткостей шару:

$$A_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\int_{\delta_{K-1}}^{\delta_{K}} a_{ij}^{(k)}dz \quad (i,j=1,2,3,6),$$

$$(D_{ij},K_{ij},F_{ij})=\sum_{k=1}^{n}\int_{\delta_{K-1}}^{\delta_{K}} (z^{2}, z\varphi(z), \varphi^{2}(z))a_{ij}^{(k)}dz \ (i,\ j=1,2,6), \tag{3.28}$$

$$(C_{ij}, R_{ij}, G_{ij})=\sum_{k=1}^{n}\int_{\delta_{K-1}}^{\delta_{K}} a_{ij}^{(k)}[1,\ 0{,}5\varphi^{/}(z),\ (0{,}25\varphi^{/}(z))^{2}]dz \quad (i,j=4,5).$$

де $a_{ij}^{(k)}$ – параметри жорсткості k- шару, n – кількість шарів, $\varphi(z)$ – функція, що визначає нелінійний характер розподілу тангенціальних переміщень по товщині багатошарового пакета.

Можна надати функцію $\varphi(z)$ у вигляді

$$\varphi(z)=zf(z)=\frac{z[-2z^{2}+3(\delta_{0}-\delta_{N})z-6\delta_{0}\delta_{N}]}{h^{3}}, \tag{3.29}$$

де $f(z)=[-2z^2+3(\delta_0-\delta_N)z-6\delta_0\delta_N]/h^3$ – функція, що характеризує параболічний закон розподілу поперечних дотичних напружень по товщині пакета h. Функція $f(z)$ задовольняє умові нормування, тобто $\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{\delta_{K-1}}^{\delta_K} f(z)dz=1$.

Припускаючи, що механічні характеристики в межах кожного шару оболонки не залежать від поперечної координати, вирази для матриць жорсткості (3.28) перепишуться в спрощеній формі:

$$A_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(\delta_k-\delta_{k-1})a_{ij}^{(k)} \quad (i,j=1,2,3,6), \qquad D_{ij}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(\delta_k^3-\delta_{k-1}^3)a_{ij}^{(k)} \quad (i,j=1,2,6),$$

$$K_{ij}=\sum_{k=1}^{n}[\lambda_1(\delta_k)-\lambda_1(\delta_{k-1})]a_{ij}^{(k)} \quad (i,j=1,2,6), \quad F_{ij}=\sum_{k=1}^{n}[\lambda_2(\delta_k)-\lambda_2(\delta_{k-1})]a_{ij}^{(k)} \quad (i,j=1,2,6),$$

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(\delta_k-\delta_{k-1})a_{ij}^{(k)} \quad (i,j=4,5), \qquad R_{ij}=\sum_{k=1}^{n}[\lambda_3(\delta_k)-\lambda_3(\delta_{k-1})]a_{ij}^{(k)} \quad (i,j=4,5)$$

$$G_{ij}=\sum_{k=1}^{n}[\lambda_4(\delta_k)-\lambda_4(\delta_{k-1})]a_{ij}^{(k)} \quad (i,j=4,5). \tag{3.30}$$

Тут введені позначення:

$$\lambda_1(z)=\frac{6z^3[-z^2/15+(\delta_0+\delta_N)z/8-\delta_0\delta_N/3]}{h^3},$$

$$\lambda_2(z)=36z^3[z^4/63-(\delta_0+\delta_N)z^3/18+3(\delta_0+\delta_N)^2z^2/60+$$
$$+8\delta_0\delta_N z^2/60-\delta_0\delta_N(\delta_0+\delta_N)z/4+(\delta_0\delta_N)^2/3]/h^6,$$

$$\lambda_3(z)=\frac{0{,}5z\ [-2z^2+3(\delta_0+\delta_N)z-6\delta_0\delta_N/3]}{h^3},$$

$$\lambda_4(z)=9z^3[z^2/5-(\delta_0+\delta_N)z\ /2+(\delta_0+\delta_N)^2/3+2\delta_0\delta_N/3-$$
$$-9z^2\delta_0\delta_N(\delta_0+\delta_N)+9z(\delta_0\delta_N)^2]/h^6.$$

Можна одержати залежності, що зв’язують деформації і зусилля, які виникають в елементах багатошарової структури під час навантаження:

$$\{\varepsilon\}=[B]\{T\}, \quad \begin{Bmatrix}\chi\\ \psi\end{Bmatrix}=[J]\begin{Bmatrix}M\\ L\end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix}\varepsilon^\gamma\\ \psi^\gamma\end{Bmatrix}=[G]\begin{Bmatrix}Q^\gamma\\ L^\gamma\end{Bmatrix}, \tag{3.31}$$

де $[B]$, $[J]$, $[G]$ – матриці піддатливості. Після нескладних перетворень матриці піддатливості приймають вигляд

$$[B]=[A]^{-1}, \qquad [J]=\begin{bmatrix} D & K \\ K & F \end{bmatrix}^{-1}, \qquad [G]=\begin{bmatrix} C & R \\ R & G \end{bmatrix}^{-1}. \tag{3.32}$$

Використовуючи інтеграл додаткової роботи деформації F_p функціонала Рейсснера, можна отримати уточнені залежності фізичних співвідношень (3.31), (3.32) для всього пакту шарів у цілому.

Розподіл напружень поперечного зсуву і обтиснення σ_{i3}, σ_{33} $(i=1,2)$ по товщині пакета шарів відповідає припущенням про зміну деформацій $\varepsilon_{i3}^{(k)z}$, $\varepsilon_{33}^{(k)z}$ залежно від координати z для k- шару, а також фізичним співвідношенням узагальненого закону Гука:

$$\sigma_{13}=a^{45}\varepsilon_{23}^{\gamma}+a^{55}\varepsilon_{13}^{\gamma}+\frac{1}{2}\varphi'_{(z)}\left(a^{45}\psi_2+a^{55}\psi_1\right) \qquad (1\leftrightarrow 2,\ 4\leftrightarrow 5), \tag{3.33}$$

$$\sigma_{33}=a^{31}\varepsilon_{11}+a^{32}\varepsilon_{22}+a^{33}\varepsilon_{33}. \tag{3.34}$$

Статичні умови контакту на лицьових поверхнях першого та n- шару анізотропної оболонки можуть містити ненульові значення горизонтальних або вертикальних складових зовнішнього навантаження $q_{(1)}^{(-)i}$, $q_{(n)}^{(+)i}$, $q_{(1)}^{(-)}$, $q_{n}^{(+)}$. Наявність в умовах контакту сталих величин, які не залежать від координати z, не дозволяє тільки за допомогою функції (3.29) точно задовольнити крайовим умовам на поверхнях оболонки – $z=\delta_0$, $z=\delta_N$ (рис. 3.3).

3.3. Термопружні сталі багатошарового композита

Коефіцієнти теплового лінійного розширення $\alpha_{ij}^{(k)t}$ $(i,j=1,2,3,4,6)$ k- шару під час визначення температурних напружень поруч зі зміною температури є одним з основних параметрів, що впливає на напружений стан конструкції та точність розрахунків, які в свою чергу залежать від величини зведеного коефіцієнта теплового лінійного розширення всього пакету різноорієнтованих шарів композиційного матеріалу.

Коефіцієнти $\alpha_{ij}^{(k)t}$ визначають зміну розмірів односпрямованого шару оболонки як за рахунок підвищення температури, так і за рахунок внутрішніх температурних напружень, які виникають у композиційному матеріалі внаслідок різниці між коефіцієнтами теплового розширення арматури та в'яжучого:

$$\alpha_{11}^{(k)} = \alpha_{м} - \frac{(\alpha_{м} - \alpha_{в})\psi_1^{(k)} E_{в}}{\psi_1^{(k)} E_{в} + E_{м}(1 - \psi_1^{(k)})},$$

$$\alpha_{22}^{(k)} = \alpha_{в}\psi_1^{(k)} + \alpha_{м}(1 - \psi_1^{(k)}) + v_{м}\frac{E_{в}(\alpha_{м} - \alpha_{в})(1 - \psi_1^{(k)})}{E_{в}(1 - \psi_1^{(k)}) + E_{м}\psi_1^{(k)}},$$

$$\alpha_{33}^{(k)} = \alpha_{м} - \frac{(\alpha_{м} - \alpha_{в})E_{в}\psi_3^{(k)}}{E_{в}\psi_3^{(k)} + E_{м}(1 - \psi_1^{(k)})}, \qquad \alpha_{44}^{(k)} = \frac{(1 - \psi_1^{(k)})(1 + \psi_3^{(k)})\alpha_{33}^{(k)}}{2(1 - \psi_3^{(k)})(1 + v_{32}^{(k)})},$$

$$\alpha_{55}^{(k)} = \frac{(1 + \psi_3^{(k)})\psi_1^{(k)}\alpha_{33}^{(k)}}{2(1 - \psi_3^{(k)})(1 + v_{31}^{(k)})}, \tag{3.35}$$

де $\alpha_{в}$ і $E_{в}$, $\alpha_{м}$ і $E_{м}$ – коефіцієнти лінійного теплового розширення та модулі пружності матеріалу арматури і в'яжучого відповідно; $v_{м}$ – коефіцієнт Пуассона в'яжучого.

Вважаючи структуру односпрямованого k- шару симетричної щодо головних координатних ліній локальної системи координат, можна стверджувати, що коефіцієнти лінійного теплового розширення $\alpha_{12}^{(k)}$, $\alpha_{23}^{(k)}$, $\alpha_{13}^{(k)}$, $\alpha_{66}^{(k)}$ дорівнюють нулю, тобто виконується умова

$$\alpha_{12}^{(k)} = \alpha_{21}^{(k)} = \alpha_{23}^{(k)} = \alpha_{32}^{(k)} = \alpha_{13}^{(k)} = \alpha_{31}^{(k)} = \alpha_{66}^{(k)} = 0.$$

Таким чином, температурна складова пружних деформацій ортотропного k-шару запишеться у вигляді

$$\left\{\varepsilon^{t(k)}\right\} = \left[\alpha^{(k)}\right]\left\{t_{(k)}\right\}, \qquad \left\{\varepsilon_{\alpha 3}^{t(k)}\right\} = \left[\alpha_{\alpha 3}^{(k)}\right]\left\{t_{(k)}^{\gamma}\right\}, \tag{3.36}$$

де $\left\{\varepsilon^{t(k)}\right\} = \left\{\varepsilon_{11}^{t(k)},\ \varepsilon_{22}^{t(k)},\ \varepsilon_{33}^{t(k)},\ \gamma_{12}^{t(k)}\right\}^{T}$, $\left\{t_{(k)}\right\} = \left\{t_{(k)},\ t_{(k)},\ t_{(k)},\ t_{(k)}\right\}^{T}$,

$$\left\{\varepsilon_{\alpha 3}^{t(k)}\right\} = \left\{\gamma_{23}^{t(k)},\ \gamma_{13}^{t(k)}\right\}^{T}, \qquad \left\{t_{(k)}^{\gamma}\right\} = \left\{t_{(k)},\ t_{(k)}\right\}^{T},$$

$$\left[\alpha^{(k)}\right]=\begin{bmatrix}\alpha_{11}^{(k)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_{22}^{(k)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_{33}^{(k)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{66}^{(k)}\end{bmatrix},\qquad \left[\alpha_{\alpha 3}^{(k)}\right]=\begin{bmatrix}\alpha_{44}^{(k)} & 0\\ 0 & \alpha_{55}^{(k)}\end{bmatrix}.$$

В повернених осях α, β, z (рис. 3.2) армований шар має властивості анізотропного матеріалу з однією площиною пружної симетрії. За аналогією з виразами (3.14) – (3.15) температурна складова пружних деформацій (3.36) k-шару перепишеться:

$$\left\{\varepsilon_{\alpha}^{t(k)}\right\}=\left[\alpha^{\varphi(k)}\right]\left\{t_{(k)}\right\},\qquad \left\{\varepsilon_{\alpha 3}^{t(k)}\right\}=\left[\alpha_{\alpha 3}^{\varphi(k)}\right]\left\{t_{(k)}^{\gamma}\right\},\tag{3.37}$$

Тут прийняті позначення:

$$\left\{\varepsilon_{\alpha}^{t(k)}\right\}=\left\{\varepsilon_{\alpha}^{t(k)},\ \varepsilon_{\beta}^{t(k)},\ \varepsilon_{z}^{t(k)},\ \gamma_{\alpha\beta}^{t(k)}\right\}^{T},\qquad \left\{\varepsilon_{\alpha 3}^{t(k)}\right\}=\left\{\gamma_{\beta z}^{t(k)},\ \gamma_{\alpha z}^{t(k)}\right\}^{T},$$

$$\left[\alpha^{\varphi(k)}\right]=\begin{bmatrix}\alpha_{11}^{\varphi(k)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_{22}^{\varphi(k)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_{33}^{\varphi(k)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{66}^{\varphi(k)}\end{bmatrix},\qquad \left[\alpha_{\alpha 3}^{\varphi(k)}\right]=\begin{bmatrix}\alpha_{44}^{\varphi(k)} & 0\\ 0 & \alpha_{55}^{\varphi(k)}\end{bmatrix},$$

де

$$\alpha_{11}^{\varphi(k)}=c^2\alpha_{11}^{(k)}+s^2\alpha_{22}^{(k)},\quad \alpha_{22}^{\varphi(k)}=s^2\alpha_{11}^{(k)}+c^2\alpha_{22}^{(k)},\quad \alpha_{33}^{\varphi(k)}=\alpha_{33}^{(k)},$$
$$\alpha_{66}^{\varphi(k)}=2(\alpha_{22}^{(k)}-\alpha_{12}^{(k)})sc,\quad \alpha_{55}^{\varphi(k)}=c\,\alpha_{44}^{(k)}+s\,\alpha_{55}^{(k)},\quad \alpha_{44}^{\varphi(k)}=-s\,\alpha_{44}^{(k)}+c\,\alpha_{55}^{(k)}.$$

Для випадку, коли композит являє собою набір n по-різному орієнтованих шарів односпрямованого матеріалу, наведені коефіцієнти теплового лінійного розширення всього пакету неважко знайти, дотримуючись алгоритму (3.16 – 3.17).

Тоді

$$\left\{\varepsilon^{t}\right\}=\left[\alpha\right]\left\{t\right\},\qquad \left\{\varepsilon_{\alpha 3}^{t}\right\}=\left[\alpha_{\alpha 3}\right]\left\{t^{\gamma}\right\},\tag{3.38}$$

де $\left\{\varepsilon^{t}\right\}=\left\{\varepsilon_{\alpha}^{t},\ \varepsilon_{\beta}^{t},\ \varepsilon_{z}^{t},\ \varepsilon_{\alpha\beta}^{t}\right\}^{T},\qquad \left\{\varepsilon_{\alpha 3}^{t(k)}\right\}=\left\{\gamma_{\beta z}^{t},\ \gamma_{\alpha z}^{t}\right\}^{T},$

$$\left[\alpha\right]=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{66}\end{bmatrix},\qquad \left[\alpha_{\alpha 3}\right]=\begin{bmatrix}\alpha_{44} & 0\\ 0 & \alpha_{55}\end{bmatrix}.\tag{3.39}$$

Тут $\alpha_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ij}^{\varphi(k)}\bar{h}^{(k)}$, $\bar{h}^{(k)}=\dfrac{h^{(k)}}{h}$ $(k = 1,2,3,\ldots n)$– відносна товщина k-шаруючи.

Виходячи з вище зазначеного алгоритму нескладно знайти зведені значення коефіцієнтів теплопровідності багатошарового анізотропного матеріалу. При цьому вважається, що між вектором теплового потоку та градієнтом температури у всіх фазах композиції виконується лінійний закон теплопровідності Фур'є. Крім того, на границях армуючих елементів та матриці, а також на границях сусідніх односпрямованих шарів, реалізується ідеальний термомеханічний контакт (безперервність полів температур, переміщень і векторів теплових потоків).

Коефіцієнти теплопровідності $\lambda_{ij}^{(k)}$ визначають усереднену величину теплового потоку через відповідні елементарні площадки односпрямованого шару і з достатньою точністю для інженерних розрахунків можуть бути наведені у вигляді

$$\lambda_{11}^{(k)}=\lambda_в\psi_1^{(k)}+\lambda_м(1-\psi_1^{(k)}),\qquad \lambda_{22}^{(k)}=\lambda_в\frac{\lambda_м}{\lambda_в(1-\psi_1^{(k)})+\lambda_м\psi_1^{(k)}},$$

$$\lambda_{33}^{(k)}=\lambda_в\frac{\lambda_м(1-\psi_3^{(k)})}{(1+\psi_3^{(k)})[\lambda_в(1-\psi_1^{(k)})+\lambda_м\psi_1^{(k)}]},$$

де $\lambda_в$, $\lambda_м$ – коефіцієнти теплопровідності матеріалу арматури і матриці відповідно.

Нехай у кожній точці розглянутого односпрямованого k- шару є площина теплової симетрії, до якої перпендикулярна вісь 03. Тоді можна стверджувати, що коефіцієнти теплопровідності $\lambda_{23}^{(k)}$, $\lambda_{13}^{(k)}$, $\lambda_{12}^{(k)}$ дорівнюють нулю, тобто виконується умова

$$\lambda_{23}^{(k)}=\lambda_{13}^{(k)}=\lambda_{12}^{(k)}=0.$$

Таким чином, закон Фур’є для ортотропного k- шару запишеться

$$\{q^{(k)}\}=-[\lambda^{(k)}]\{t_{,j}^{(k)}\},$$

де $\{q^{(k)}\}=\{q_1^{(k)},\ q_2^{(k)},\ q_3^{(k)}\}^T$, $\{t_{,j}^{(k)}\}=\{t_{,1}^{(k)},\ \ t_{,2}^{(k)},\ \ t_{,3}^{(k)}\}^T$,

$$\left[\lambda^{(k)}\right]=\begin{bmatrix}\lambda_{11}^{(k)} & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{22}^{(k)} & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{33}^{(k)}\end{bmatrix}.$$

Тут $q_i^{(k)}$ $(i=1,2,3)-$ складові компоненти вектора теплового потоку $\vec{q}$ в напрямку і-ї координатної лінії, що $t,_j^{(k)}$ $(j=1,2,3)-$ становлять компоненти градієнта температури t, $\lambda_{ij}^{(k)}$ $(i,j=1,2,3)-$ коефіцієнти теплопровідності.

В повернених осях α, β, z (рис. 3.2) армований шар має властивості анізотропного матеріалу з однією площиною пружної симетрії. За аналогією з виразами (3.14) – (3.15) складова теплового потоку k- шару перепишеться:

$$\left\{q_\alpha^{(k)}\right\}=-\left[\lambda^{\varphi(k)}\right]\left\{t,_\alpha^{(k)}\right\}. \tag{3.40}$$

Тут

$$\left\{q_\alpha^{(k)}\right\}=\left\{q_\alpha^{(k)},\ q_\beta^{(k)},\ q_z^{(k)}\right\}^T,\qquad \left\{t,_\alpha^{(k)}\right\}=\left\{t,_\alpha^{(k)},\ \ t,_\beta^{(k)},\ \ t,_z^{(k)}\right\}^T;$$

$$\left[\lambda^{\varphi(k)}\right]=\begin{bmatrix}\lambda_{11}^{\varphi(k)} & \lambda_{12}^{\varphi(k)} & 0\\ \text{сим} & \lambda_{22}^{\varphi(k)} & 0\\ & & \lambda_{33}^{\varphi(k)}\end{bmatrix},$$

де $\lambda_{11}^{\varphi(k)}=c^2\lambda_{11}^{(k)}+s^2\lambda_{22}^{(k)},\quad \lambda_{22}^{\varphi(k)}=s^2\lambda_{11}^{(k)}+c^2\lambda_{22}^{(k)},\quad \lambda_{33}^{\varphi(k)}=\lambda_{33}^{(k)},$
$\lambda_{12}^{\varphi(k)}=2(\lambda_{22}^{(k)}-\lambda_{11}^{(k)})sc.$

У випадку, коли композит являє собою набір n по-різному орієнтованих шарів односпрямованого матеріалу, наведені коефіцієнти теплопровідності всього пакета неважко знайти, дотримуючись алгоритму (3.16 – 3.17):

$$\lambda_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ij}^{\varphi(k)}\bar{h}^{(k)},$$

де $\bar{h}^{(k)}=\dfrac{h^{(k)}}{h}$ (k = 1,2,3,…n)– відносна товщина k-шаруючи.

Тоді

$$\left\{q_\alpha\right\}=-\left[\lambda\right]\left\{t,_\alpha\right\}, \tag{3.41}$$

де $$\{q_\alpha\} = \{q_\alpha,\ q_\beta,\ q_z\}^T, \qquad \{t,_\alpha\} = \{t,_\alpha,\ \ t,_\beta,\ \ t,_z\}^T,$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 \\ \text{сим} & \lambda_{22} & 0 \\ & & \lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Рівняння узагальненого закону Гука для анізотропного шару з однією площиною пружної симетрії на основі фізичних співвідношень Дюамеля-Неймана, коли враховується вплив температурних деформацій, у формі (3.16)–(3.17), (3.38) – (3.39) запишуться:

$$\{\sigma_\alpha\} = [A_\alpha]\{\varepsilon_\alpha\} - [\beta]\{t\}, \qquad \{\sigma_{\alpha 3}\} = [A_{\alpha 3}]\{\varepsilon_{\alpha 3}\} - [\beta_{\alpha 3}]\{t^\gamma\} \tag{3.42}$$

або

$$\{\varepsilon_\alpha\} = [B_\alpha]\{\sigma_\alpha\} + [\alpha]\{t\}, \qquad \{\varepsilon_{\alpha 3}\} = [B_{\alpha 3}]\{\sigma_{\alpha 3}\} + [\alpha_{\alpha 3}]\{t^\gamma\}, \tag{3.43}$$

де

$$\{\sigma_\alpha\} = \{\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_z,\ \tau_{\alpha\beta}\}^T, \qquad \{\sigma_{\alpha 3}\} = \{\tau_{\beta z}, \tau_{\alpha z}\}^T,$$

$$\{\varepsilon_\alpha\} = \{\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_z, \gamma_{\alpha\beta}\}^T, \qquad \{\varepsilon_{\alpha 3}\} = \{\gamma_{\beta z}, \gamma_{\alpha z}\}^T,$$

$$[A_\alpha] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{26} \\ & \text{сим.} & a_{33} & a_{36} \\ & & & a_{66} \end{bmatrix}, \qquad [A_{\alpha 3}] = \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} \\ \text{сим.} & a_{55} \end{bmatrix},$$

$$[B_\alpha] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{16} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{26} \\ & \text{сим.} & b_{33} & b_{36} \\ & & & b_{66} \end{bmatrix}, \qquad [B_{\alpha 3}] = \begin{bmatrix} b_{44} & b_{45} \\ \text{сим.} & b_{55} \end{bmatrix},$$

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{66} \end{bmatrix}, \qquad [\beta_{\alpha 3}] = \begin{bmatrix} \beta_{44} & 0 \\ 0 & \beta_{55} \end{bmatrix},$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{66} \end{bmatrix}, \qquad [\alpha_{\alpha 3}] = \begin{bmatrix} \alpha_{44} & 0 \\ 0 & \alpha_{55} \end{bmatrix}.$$

Тут $\alpha_{ij}\,(i, j = 1,2,3,6)$ – коефіцієнти теплового розширення багатошарової оболонки. Коефіцієнти $\beta_{ij}\,(i, j = 1,2,3,6)$ – визначаються як рішення системи рівнянь (3.42):

$$\{\varepsilon_\alpha\} = [A_\alpha]^{-1}\{\sigma_\alpha\} + [A_\alpha]^{-1}[\beta]\{t\},$$

$$\{\varepsilon_{\alpha 3}\} = [A_{\alpha 3}]^{-1}\{\sigma_{\alpha 3}\} + [A_{\alpha 3}]^{-1}[\beta_{\alpha 3}]\{t^\gamma\}. \qquad (3.44)$$

Порівнюючи рівняння (3.42), (3.43) можна записати наступні тотожності

$$[\beta] = [A_\alpha][\alpha], \qquad [\beta_{\alpha 3}] = [A_{\alpha 3}][\alpha_{\alpha 3}], \qquad (3.45)$$

$$[B_\alpha] = [A_\alpha]^{-1}, \qquad [B_{\alpha 3}] = [A_{\alpha 3}]^{-1}. \qquad (3.46)$$

Таким чином, матриці піддатливості $[B_\alpha]$, $[B_{\alpha 3}]$ дорівнюють зворотним матрицям жорсткості $[A_\alpha]^{-1}$, $[A_{\alpha 3}]^{-1}$ відповідно, а коефіцієнти $\beta_{ij}\,(i, j = 1,2,3,6)$ визначаються з виразів (3.46).

Фізико-механічні характеристики волокон і матриці, розглянутих композитів наведені нижче, а інтегральні характеристики багатошарового композиту із заданим кодом армування в табл. 3.2.

Склопластик. Модуль пружності $E_в$ і коефіцієнт Пуассона $\nu_в$ намотуваних стрічок, набраних з алюмоборосилікатних ниток, відповідно дорівнюють $E_в = 55000$ $МПа$, $\nu_в = 0{,}25$. Як матриця склопластику використовувався епоксидний полімер з наступними параметрами пружності: $E_м = 3550\,МПа$, $\nu_м = 0{,}4$. У кожному односпрямованому шарі товщиною 0,157мм зміст, займаний стрічками, становить $V_в = 0{,}7$ від загального об’єму. Фізичні властивості: $\alpha_в = 5 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, $\alpha_м = 45 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ – коефіцієнти лінійного теплового розширення волокна і матриці;

$\lambda_{в} = 1{,}05\, Вт/(м \cdot К)$, $\lambda_{м} = 0{,}133\, Вт/(м \cdot К)$ – коефіцієнти теплопровідності. Анізотропний пакет шарів склопластику складається з 21 односпрямованих шарів з кодом армування: $[45^\circ/90^\circ/\pm 45^\circ/(0^\circ/90^\circ_2)_2/\overline{0}^\circ]_S$.

Таблиця 3.2 – Фізико-механічні характеристики анізотропного пакету шарів

Матеріал	E_{ij}, $МПа$	G_{ij}, $МПа$	ν_{ij}	ν_{ji}	α_j, $К^{-1}$	λ_j, $Вт/(м \cdot К)$
Скло-пластик	$E_z = 23980$ $E_\theta = 32470$ $E_r = 14040$	$G_{\theta z} = 11200$ $G_{rz} = 5636$ $G_{r\theta} = 6378$	$\nu_{z\theta} = 0{,}147$ $\nu_{zr} = 0{,}338$ $\nu_{\theta r} = 0{,}335$	$\nu_{\theta z} = 0{,}199$ $\nu_{rz} = 0{,}198$ $\nu_{r\theta} = 0{,}145$	$\alpha_z = 20{,}5 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_\theta = 14{,}9 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_r = 25{,}3 \cdot 10^{-6}$	$\lambda_z = 0{,}507$ $\lambda_\theta = 0{,}61$ $\lambda_r = 0{,}332$

3.4. Висновки по третьому розділу

Надано теоретичний розв’язок завдання визначення фізико-механічних характеристик композиційного матеріалу при мінімальних витратах на експеримент. Розглядається композиційний матеріал регулярної структури, коли присутні повторювані елементи у вигляді односпрямованих шарів.

4. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТРУБ ЗІ СКЛОПЛАСТИКУ ТА ТИПІВ ЇХ З'ЄДНАНЬ

Конструкційні переваги орієнтованих склопластиків загальновідомі. В першу чергу – це висока питома міцність в напрямку армування. Однак реалізація цієї основної переваги натрапила на ряд труднощів, пов’язаних з порівняно низькою жорсткістю склопластиків при поперечному зсуві і трансверсальному відриві. Опір міжшаровому зсуву і поперечному відриву склопластиків відповідно дорівнює $\tau^{\pm}_{xz}$ = 25÷50 МПа, G_{xz} = 2000÷2500 МПа і σ^{+}_{z} = 20÷55 МПа.

Втрата несучої здатності склопластикових пластин і оболонок при дії стискаючого навантаження через слабкий опір поперечному відриву і міжшаровому зсуву відбувається задовго до досягнення напруженнями граничних значень. Зазначені недоліки особливо помітні, якщо композиційний матеріал має різного роду дефекти структури.

4.1. Технологія виготовлення та технічні характеристики зразків зі склопластику

В якості арматури при виготовленні конструкцій зі склопластику використовуються високомодульні скловолокно або алюмоборосілікатне волокно. Міцність моноволокна знаходиться в межах від 3,4 ГПа до 4,5 ГПа. Стандартне відхилення становить приблизно + 10%. Основною причиною такого широкого розкиду є наявність дефектів у волокнах і вплив на них атмосферної вологи.

В якості зв’язуючого широко застосовуються епоксидні смоли марки ЕД-20, а також поліефірні смоли. Знаходять застосування й інші типи епоксидних смол: бромовані – з підвищеним опором до займання; еластичні епоксидні смоли – з підвищеним коефіцієнтом ударної в’язкості і пластичності. У складі композицій з епоксидною смолою додатково застосовуються різного роду отверджувачі, прискорювачі і пластифікатори. Найбільш широко застосовуваний затверджувач – метілнадікангідрід і триетаноламін. В якості пластифікатора можна застосовувати дибутилфталат. Міцність на розрив зразків з епоксидної смоли знаходиться в межах 55 – 130МПа, модуль пружності при розтяганні – 2,8 - 4,2ГПа, границя міцності при згинанні – 120 МПа.

4.1.1. Матеріал і структура зразків. Результати досліджень, викладені в даному розділі, отримані для трьох типів зразків (рис. 4.1), які були виготовлені на основі склопластикових труб, що випускаються ТОВ «СКЛОПЛАСТИКОВІ ТРУБИ» м. Харків: кільцеві зразки (рис. 4.1 а); частина склопластикової труби зі сталевим фланцем на одному з її торців (рис. 4.1 б); сталева труба з дефектами структури посилена склопластиковим бандажем (рис. 4.1 в).

а) б) в)

Рисунок 4.1 – Типи зразків для експериментальних досліджень

Склопластикова труба включає 16 односпрямованих армованих шарів із заданою схемою укладки $[0^\circ_4/-75^\circ/0^\circ_2/-75^\circ/75^\circ/0^\circ_2/-75^\circ/0^\circ_4]$. Модулі пружності $E_\text{в}$, зсуву $G_\text{в}$ і коефіцієнт Пуассона $\nu_\text{в}$ намотуваних алюмоборосилікатних стрічок, набраних з ровінгу Е-600, відповідно рівні $E_\text{в} = 55000\,\text{МПа},\ G_\text{в} = 22000\,\text{МПа},\ \nu_\text{в} = 0{,}25$. Матриця склопластику – епоксидний полімер з наступними параметрами пружності: $E_\text{м} = 3550\text{МПа},\ G_\text{м} = 1270\,\text{МПа},\ \nu_\text{м} = 0{,}4$. У кожному моношарі товщиною 0,25мм об'єм , займаний стрічками, становить 70% загального об'єму.

Склопластикова труба виготовлялася методом намотування на розбірну циліндричну оправку. Єднальна композиція включала 100 масових частин (мас.ч.) епоксидної смоли Epicot 828, попередньо прогрітої до температури 70^0С. У приготовлений об'єм епоксидної смоли додавали 2 мас.ч. прискорювача УП-606/2 і 80 мас. ч. затверджувача MTHPA.

В якості експериментальних зразків 1-го типу для визначення модуля пружності і границі міцності в коловому напрямку при розтяганні зі склопластикової труби згідно ГОСТ 25.603-82 були вирізані п’ять кілець.

Об'єкт досліджень являв собою фрагмент сталевий безшовної гаряче деформованої труби –ГОСТ 8731-74, ГОСТ 8732-78, зі сталі марки 09М2С. Основні характеристики труби наведені в таблиці 4.1. До труби довжиною 1 м приварювали фланці. На зовнішній поверхні труби за допомогою фрези наносили штучні дефекти. Загальний вид труби з дефектами й схемою їхні розташування наведені на рис. 4.6. Внутрішній робочий тиск труби дорівнював 20 МПа.

Таблиця 4.1 – Основні геометричні і механічні параметри досліджуваної труби

Об’єм, мм^3	Діаметр, мм	Товщина стінки, мм	Довжина корпуса, мм	Механічні властивості	
				σ_B, МПа	σ_T, МПа
2,243*10^7	169	5,8 – 6,2	1000	490	340

Наведена труба задовольняє вимогам до довгих оболонок. Крайові ефекти, які виникають в області фланцевих з’єднань, швидко вщухають, і не впливають на напружений стан в області нанесених дефектів.

На поверхню труби нанесені шість сегментів виточень шириною 30мм і кільцеве виточення шириною 50 мм. Мінімальна товщина труби в зоні сегментних і кільцевих виточень варіюється в межах від 1,6 мм до 3,1мм.

4.1.2. Пружні сталі склопластику. Для визначення технічних сталих склопластику пропонується наступна теоретико-експериментальна методика. Спочатку, згідно з ГОСТ 25.603 - 82 і ГОСТ 25.601-80, визначається модуль пружності і коефіцієнт Пуассона при розтяганні зразків зі склопластику. Проведені механічні випробування дозволяють стверджувати, що матеріал розглянутих пластинок можна класифікувати як анізотропний матеріал з однією площиною пружної симетрії.

Визначення деформацій двох партій зразків проводилось методом тензометрування за допомогою розривної машини Р-20 у сертифікованій лабораторії Сумського державного університету.

Відповідно до ГОСТ 25.603 – 82 зразок навантажують за допомогою спеціального пристрою (рис. 4.2). Різниця між внутрішнім діаметром кільцевого зразка і діаметром напівдиска в зборі не повинна перевищувати 0,4 мм; шорсткість опорних поверхонь напівдиска повинна бути не більше 0,63 мкм. Кріплення пристосування у випробувальній машині повинно забезпечувати самоцентрування, тобто напрямок прикладеного розтягувального навантаження має бути перпендикулярним до площини роз'єму напівдиска і проходити через центр випробуваного кільця. Конструктивне оформлення пристрою може бути різним. Конструкція пристрою для випробування на розтягання кільцевих зразків наведена на рис 4.2 і складається з двох тяг 1 з фіксуючими штіфтами 3, двох сталевих напівдисків 2 зі зкругленими кромкам 4 і кільцевого зразка, який встановлюється на півдиски. Окрім цього, на рис. 4.2 наведені додаткові позначення: а – напрям прикладання навантаження, с – розходження на півдисків.

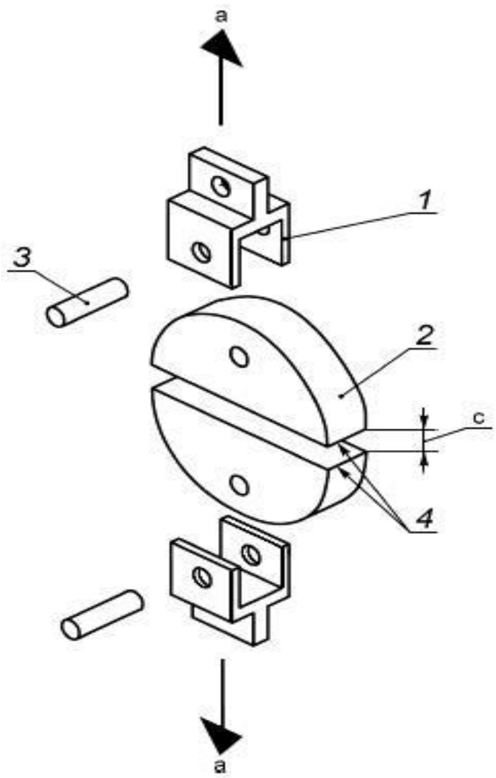


Рисунок 4.2 – Спеціальний пристрій для випробування кільцевих зразків

Такий метод визначення колових напружень, деформацій та модулів пружності при розтяганні має назву методу розрізного диску.

За результатами вимірювань були отримані усереднені значення напружень і деформацій, а також довірчі інтервали на основі критерію Стьюдента із заданою вірогідністю $1-\alpha=0{,}95$. При цьому похибка апроксимації **s** експериментальної прямої: $\varepsilon\ =\sigma/E$ при розтягуванні склопластику і значення модулів пружності кожного типу зразків наведені в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 – Експериментально - теоретичні значення пружних характеристик склопластиків

<table>
<tr><td rowspan="2">№ типо-розміру</td><td colspan="2">Результати експерименту</td><td colspan="4">Експериментально - теоретичні значення</td></tr>
<tr><td>$E_i^{\text{Э}}$, МПа</td><td>$S, \%$</td><td>E_{ii}, МПа</td><td>G_{ij}, МПа</td><td>ν_{ij}</td><td>ν_{ji}</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$E_\theta^{\text{Э}}=36050$</td><td>0,91</td><td rowspan="2">$E_z=23800$
$E_\theta=35500$
$E_r=22900$</td><td rowspan="2">$G_{\theta z}=7340$
$G_{rz}=4870$
$G_{r\theta}=6760$</td><td rowspan="2">$\nu_{z\theta}=0{,}069$
$\nu_{zr}=0{,}399$
$\nu_{\theta r}=0{,}406$</td><td rowspan="2">$\nu_{\theta z}=0{,}107$
$\nu_{rz}=0{,}415$
$\nu_{r\theta}=0{,}272$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$E_z^{\text{Э}}=24100$</td><td>0,92</td></tr>
</table>

Решта експериментально-теоретичних значень механічних характеристик склопластику (табл. 4.2) визначалися інтегрально для всього пакету шарів за методикою, яка викладена в розділі 3, за допомогою залежностей (3.1) – (3.16).

4.2. Навантаження зразків

4.2.1. Навантаження склопластикової труби внутрішнім тиском. Навантаження склопластикової труби внутрішнім тиском. Схема установки для випробування зразків 2-го типу під дією внутрішнього тиску показана на рис. 4.3. Загальний вигляд установки наведено на рис. 4.4.

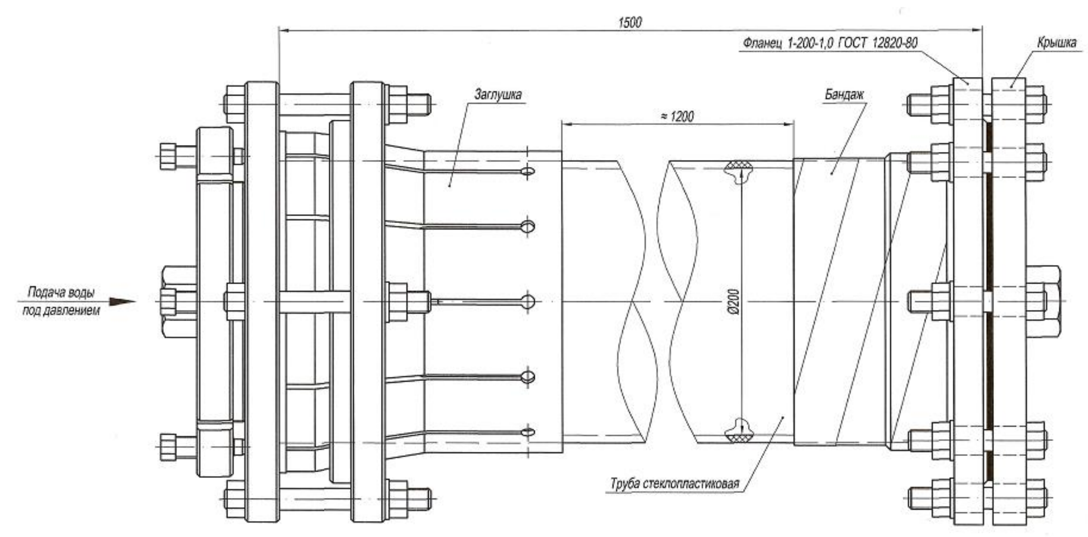


Рисунок 4.3 – Схема установки для проведення гідростатичних випробувань

Рисунок 4.4 – Загальний вигляд установки для проведення гідростатичних випробувань

Випробувальна установка, створена на заводі ТОВ «СКЛОПЛАСТИКОВІ ТРУБИ» м. Харків, включає насосну станцію з можливістю створювати будь-який заданий тиск в діапазоні (0 - 25,0 МПа). Вода подається через спеціальний штуцер, розміщений в одній з заглушок, всередину склопластикової труби. Для захисту від бризок води під час можливого руйнування зразка в процесі випробування, об’єкт поміщений в спеціальний похилий короб. Нахил короба забезпечує швидкий злив води при позаштатних ситуаціях і в кінці випробувань.

Заглушка складається з 3-х сталевих циліндрів з канавками, в які поміщені 2 торові гумові прокладки. Ці циліндри жорстко прикріплені до круглого сталевого диску діаметром 300мм і товщиною 20мм. Диск має 4 прохідні отвори, через які проходять болти, які притискають торові прокладки до повної герметизації випробуваного об’єкта.

Крім того, по периметру диска є 16 отворів діаметром 16 мм для болтових з'єднань розрізного багатопелюсткового конуса, який накладається зовні випробуваного циліндра. Таким чином, зусилля передається від диска на спеціальне кільце, яке стискає розрізний багатопелюстковий конус, обтискуючи випробовуваний циліндр зовні і тим самим створює необхідне зусилля.

З іншого торця зразок кріпиться до випробувальної установки за допомогою сталевого фланця.

Об’єкт випробувань: склопластикова труба діаметром 200мм, товщиною стінки 4 мм і довжиною – 1200мм.

4.2.2. Навантаження внутрішнім тиском сталевої труби з дефектом структури, зміцненої склопластиковим бандажем. Експериментальні дослідження проводилися в 2 етапи: навантажування внутрішнім тиском сталевої труби з дефектом структури до її руйнування в районі дефекту; посилення цієї труби склопластиковим бандажем і подальше її навантаження внутрішнім тиском.

Для проведення першого етапу випробувань в сталевій трубі були виконані 6 сегментів виточок шириною 30 мм і товщиною труби 1,6-3,1 мм та кільцева виточка шириною 50 мм і товщиною 3 мм (рис. 4.5).

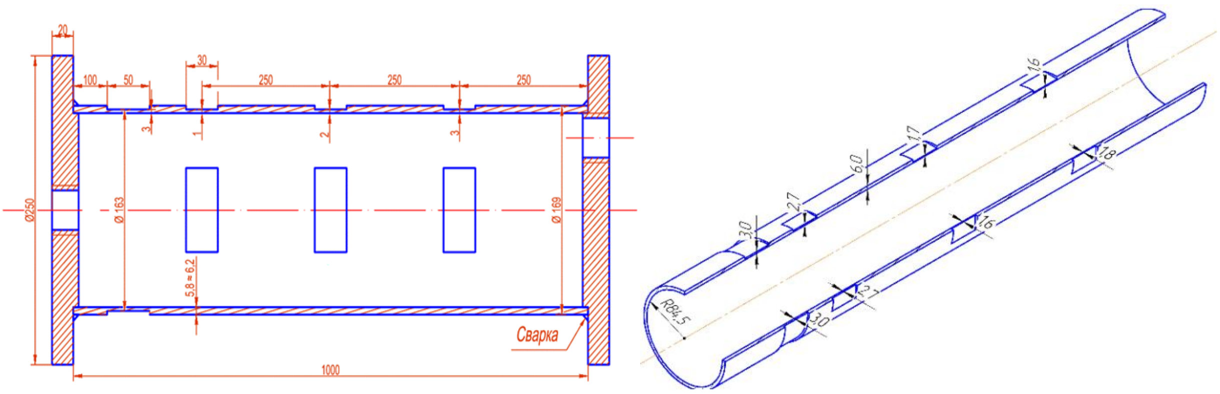


Рисунок 4.5 – Схема труби для проведення випробувань

Загальний вигляд установки наведено на рис. 4.6. Вона включає насосну станцію з можливістю створювати будь-який заданий тиск в діапазоні (0 - 20МПа) і вимірювальну систему СІІТ-3. Вода подається через спеціальний штуцер, розміщений в одній з заглушок, всередину труби.

Об'єкт випробувань: сталева труба діаметром 160мм, товщиною стінки 6мм і довжиною – 1000 мм.

Рисунок 4.6 – Загальний вигляд експериментальної установки для гідростатичних випробувань

Для проведення другого етапу на сталеву трубу, яка дала течу в районі одного з сегментів виточки, наклали склопластиковий бандаж товщиною 10мм. Загальний вигляд установки наведено на рис. 4.7. Вона включає насосну станцію з можливістю створювати будь-який заданий тиск в діапазоні (0 - 20,0 МПа) і вимірювальну систему СІІТ-3.

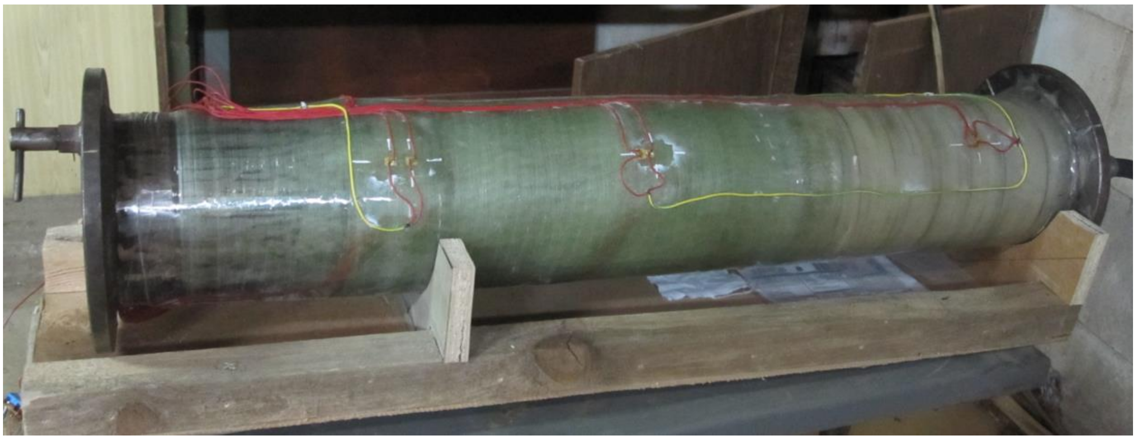
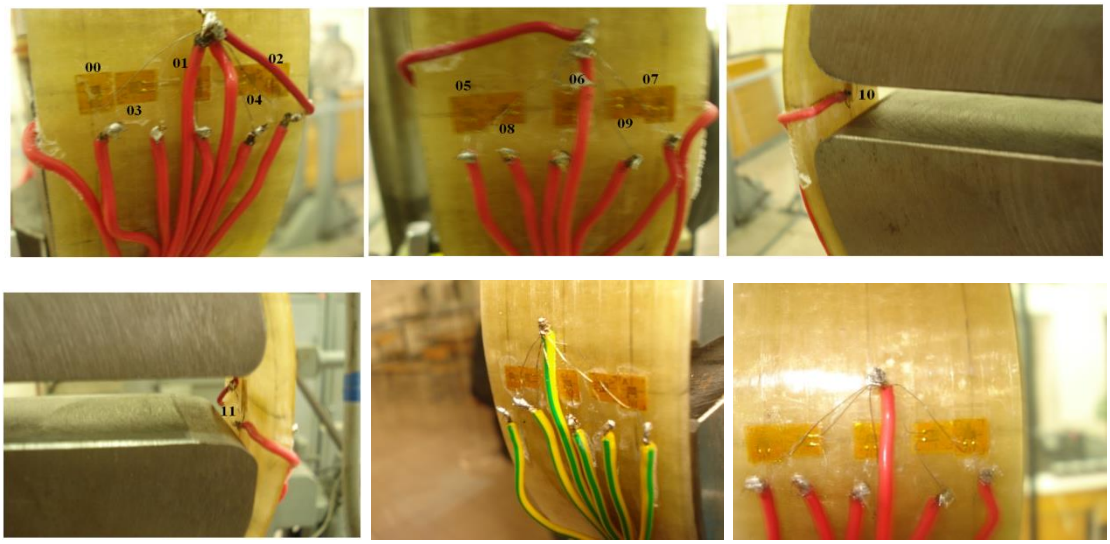


Рисунок 4.7 – Загальний вигляд експериментальної установки для проведення гідростатичних випробувань труби з бандажем

4.3. Вимірювання та реєстрація деформацій та напружень

Для вимірювання деформацій використовувалися тензорезистори КФ4П1-3-200 з базою 3мм, 5мм і 10мм. Розетки складалися з двох тензодатчиків. Середнє значення коефіцієнта тензочутливості – $K = 2 \cdot 10^{-6}$.

4.3.1. Кільцеві зразки. На рис. 4.9 наведено загальний вигляд випробувальної установки, за допомогою якої кільце розтягується двома зосередженими і протилежно спрямованими зовнішніми силами. Випробовуване кільце являє собою три рази статично невизначену систему.



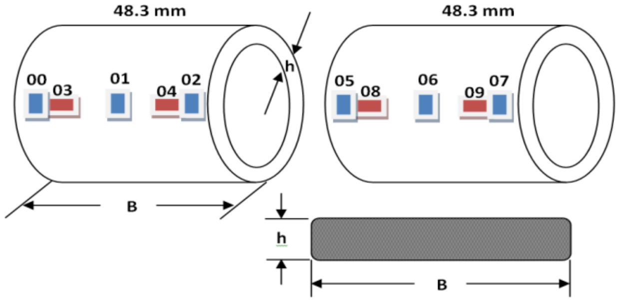


Рисунок 4.8 – Точки наклейки тензорезисторів на кільцеві зразки

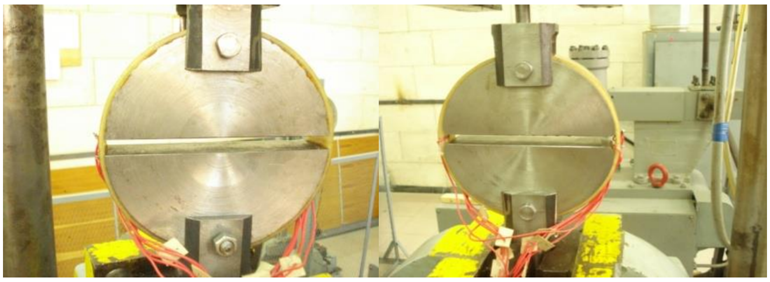
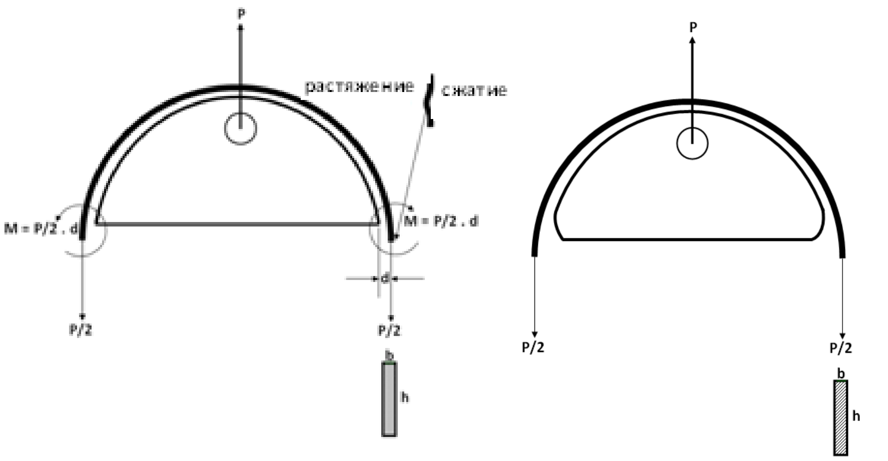


Рисунок 4.9 – Схема навантаження кільцевого зразка

Розрахункова схема розглянутого кільця дана на рис. 4.10. Подано аналіз сил і моментів в моделі 1 і моделі 2. Для розрахунків будемо використовувати наступне рівняння $\sigma_\theta = \dfrac{P}{2A} \pm \dfrac{M}{W}$.

Як видно, в розглянутих поперечних перетинах кільця виникають поздовжні зусилля рівні половині зовнішньої розтягувальної сили і невідомі згинальні моменти. Визначення невідомих моментів M в анізотропному криволінійному брусі являє собою досить складну математичну задачу. Тому пропонується простий алгоритм визначення модуля пружності кільця в коловому напрямку.



а) б)

Рисунок 4.10 – Еквівалентна система

У точках внутрішньої та зовнішньої поверхні кільця (рис. 4.8) приклеєні тензорезистори для вимірювання деформацій в коловому напрямку. Величину напружень, які виникають в точках наклейки тензорезисторів, можна знайти за допомогою таких рівнянь:

$$\sigma_{\theta}^{+} = E_{\theta}\varepsilon^{+} = \frac{P}{2A} + \frac{M}{W}, \qquad \sigma_{\theta}^{-} = E_{\theta}\varepsilon^{-} = \frac{P}{2A} - \frac{M}{W}$$

де E_{θ} – невідомий модуль пружності, $W = \frac{bh^2}{6}$ – момент опору поперечного перерізу розглянутого кільця, ε^{+}, ε^{-} – величини деформацій у точках внутрішньої і зовнішньої поверхонь кільця.

Додаючи праві і ліві частини цих рівнянь, отримаємо вираз для визначення модуля пружності E_{θ}: $E_{\theta} = \dfrac{P}{A(\varepsilon^{+} + \varepsilon^{-})}$

4.3.2. Склопластикова труба з фланцем на одному з торців.

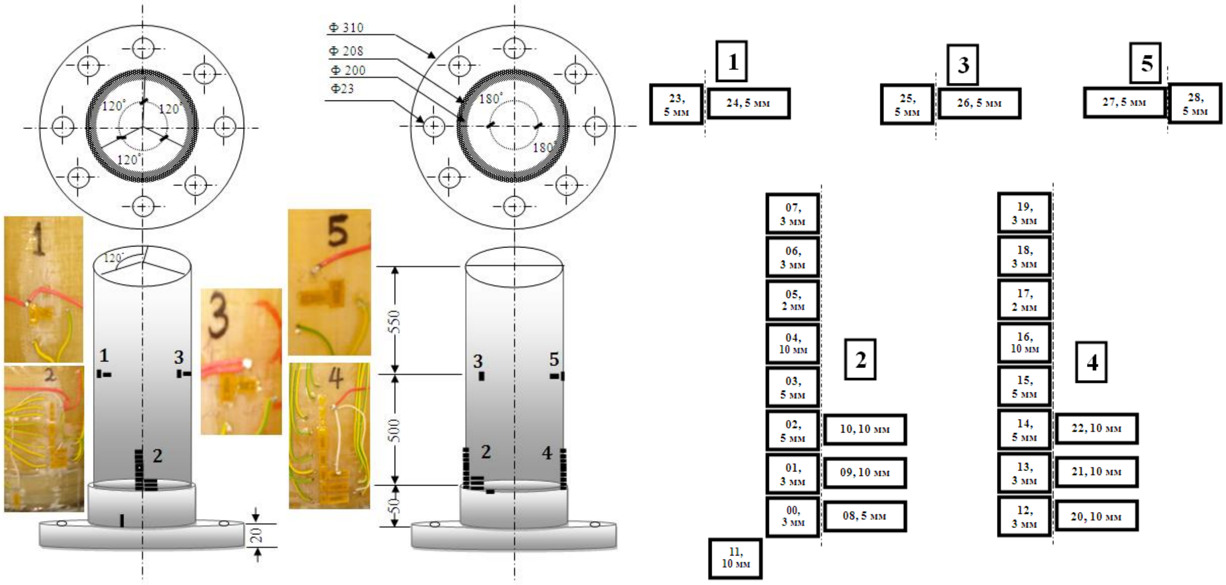


Рисунок 4.11 – Точки наклейки тензорезисторів на склопластикову трубу

4.3.3. Сталева труба з дефектом структури, зміцнена склопластиковим бандажем. Схема розміщення тензорезисторів була визначена на етапі планування експерименту з орієнтуванням на виточки в сталевій трубі (рис. 4.12). Напружено-деформований стан труби досліджували з метою встановлення спільної роботи труби і бандажа на всіх етапах навантаження, що відповідають роботі трубопроводу. Для виміру відносних деформацій використали дротові тензорезистори типу КФ4П1-3-200 з базою 3мм, 5мм та 10мм. Розетки складалися із двох тензодатчиків. Середнє значення коефіцієнтів тензочутливості в $K=2*10^{-6}$. Всі тензодатчики включені в електровимірювальний ланцюг відповідно до документації на прилад СИИТ-3, до якого вони підключаються. Деформації в точках стінки труби і на поверхні ремонтного бандажа вимірювали в поздовжньому та кільцевому напрямках. Схема розміщення датчиків наведена на рис. 4.12 – 4.14.

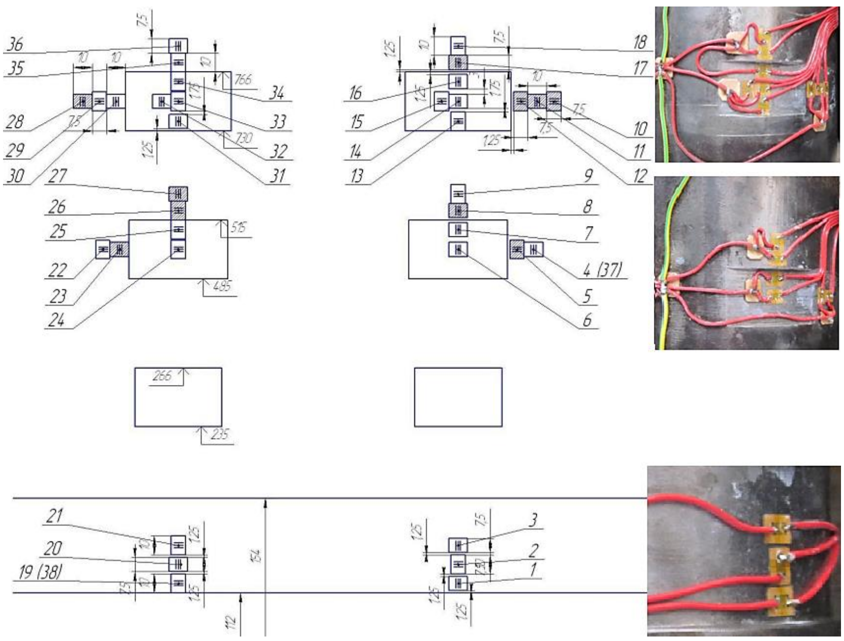


Рисунок 4.12 – Схема розташування тензорезисторів на сталевій трубі

Після першого етапу навантаження велика кількість тензорезисторів вийшла з ладу. Схема розташування справних тензорезисторів показана на рис. 4.13. Розташування тензорезисторів на склопластиковому бандажі було визначено з орієнтуванням головним чином на виточку, де сталася теча. Ще кілька тензорезисторів розмістили в районах інших виточок. Схема розташування тензорезисторів на склопластиковому бандажі показана на рис. 4.14.

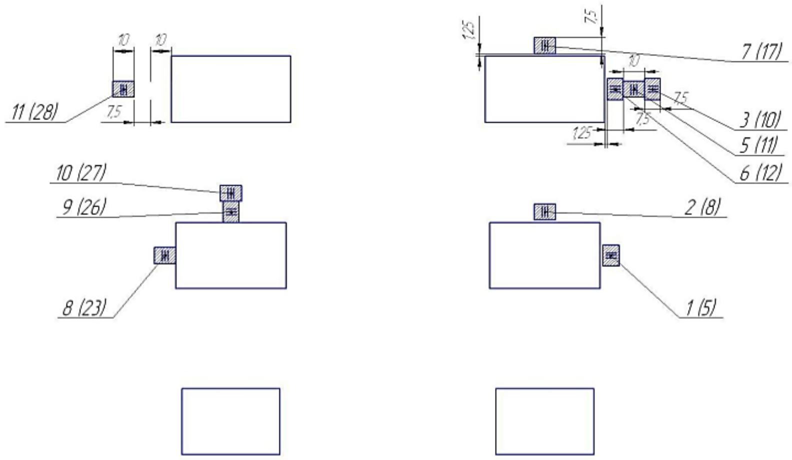


Рисунок 4.13 – Схема розташування справних тензорезисторів на сталевій трубі

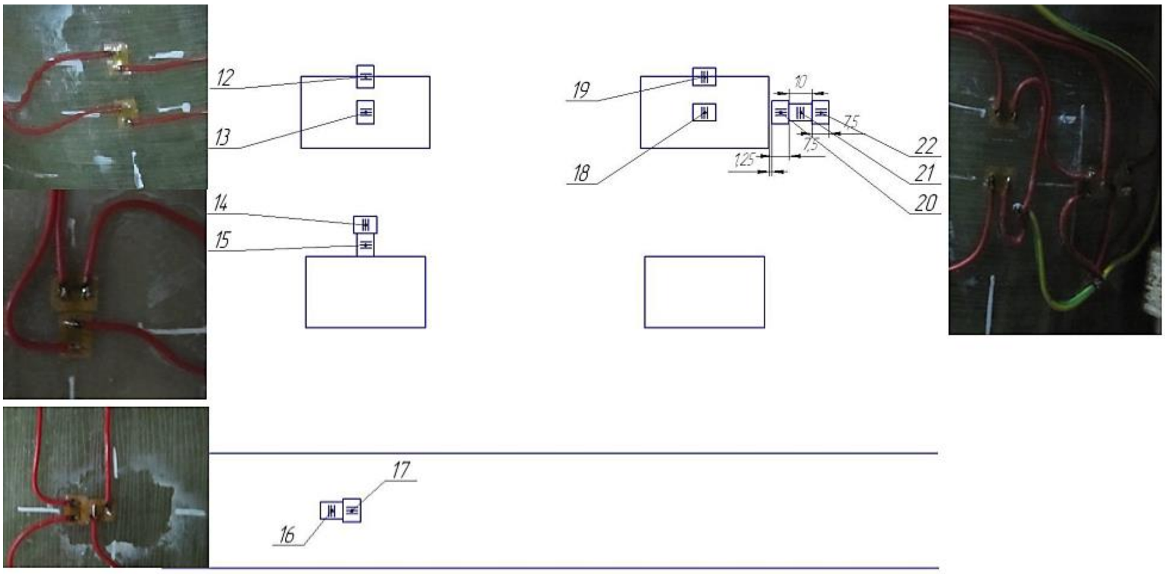


Рисунок 4.14 – Схема розташування тензорезисторів на склопластиковому бандажі

4.4. Визначення границі міцності кільцевих зразків зі склопластику методом розрізного диску

Експериментальне зачення границі міцності при розтяганні за методом розрізного диску σ_{θ}^{+}, МПа, визначалось за формулою

$$\sigma_{\theta}^{+} = \frac{F_{u\ell t}}{S_1 + S_2},$$

де F_{ult} – граничне навантаження, кН; S_1+S_2 – початкова площа поперечних перерізів зразка у місті роз’єднання на півдисків, мм^2.

Експериментальні значення границі міцності σ_θ^+ склопластикових кільцевих зразків наведені в табл. 4.3.

Таблиці 4.3 – Границя міцності склопластикових кільцевих зразків у коловому напрямі

№	Товщина, мм	Ширина, мм	Радіус, мм	Граничне навантаження, кН	Границя міцності σ_θ^+, МПа	Коефіцієнт анізотропії
1	3,5	30	37,8	75,80	360,9	1,2
2				74,00	352,4	
3				62,40	297,1	
4	3,1		50	66,00	354,8	
5				63,00	338,7	
6				73,00	392,4	
7				92,00	494,6	2,0
8				92,00	494,6	
9				82,00	440,9	
10				98,00	526,9	3,0
11				95,00	510,7	
12				90,00	483,9	
13	3,2	30,8	65	85,40	433,0	2,97
14	3,1	31,5		96,60	483,0	
15	3,0	30,3		86,30	475,0	
16	5,5	19,5		90,00	420,0	3,19
17	3,2	20,6		61,20	510,0	
18		19,8		64,80	511,0	
19		31,0		94,00	474,0	
20		30,2		96,00	497,0	
21	5,4	19,8		91,20	426,0	
22	3,2	20,8		59,60	448,0	
23		21,0		59,20	440,0	
24		20,8		60,00	451,0	
25		30,3		92,80	479,0	
26		31,0		92,00	464,0	
27		30,8		84,00	426,0	
28	5,5	20,8		82,80	362,0	
29	5,2	20,8		88,00	407,0	
30	5,4	20,3		86,40	394,0	
31	5,2	19,8		83,40	405,0	
32	3,2	20,8		57,00	428,0	
33	3,0	30,6		66,60	363,0	
34	3,2	21,4		59,00	431,0	
35	3,1	30,8		78,30	410,0	
36	3,0	21,4		51,60	402,0	
37		30,1		74,60	413,0	
38		20,8		54,20	434,0	
39	3,0	30,3	65	76,50	421,0	3,19
40		20,7		50,60	412,0	
41	3,1	30,7		82,80	435,0	

Зауваження: коефіцієнтом анізотропії вважається відношення модулів пружності в коловому та поздовжньому напрямках склопластикової труби.

Аналіз результатів табл. 4.3 доводить, що границя міцності σ_θ^+ в значній мірі залежить від значення коефіцієнта анізотропії та розміов кільцевого зразка.

4.5. Експериментальні дослідження склопластикової труби

Об'єкт випробувань: композитний циліндр діаметром 200мм, товщина стінки 4мм, довжина – 1200мм. Крок навантаження – 0,5 МПа.

Під дією тиску $p_{IЭ}^* = 3{,}5МПа$ сталося руйнування склопластику в зоні контакту склопластикової оболонки і сталевого фланця. Після руйнування фланцевого з'єднання було прийнято рішення: зрізати фланець і продовжити випробування до руйнування циліндра (рис. 4.15).

Рисунок 4.15 – Картина руйнування склопластику в зоні фланця

Замість зрізаного фланця встановили ще одну заглушку, описану вище. Навантаження, як і раніше, проводили з кроком $\Delta p = 0{,}5МПа$.

Починаючи з тиску $p = 4{,}0МПа$, на кожному етапі навантаження було чути характерний тріск, яким супроводжується утворення мікротріщин в зв’язуючому матриці. При дії тиску $p_{IIЭ}^* = 14{,}9МПа$ сталося руйнування склопластикової труби. Величина прогину *w* в точці 3 циліндра відрізняється від теоретичних значень, знайдених за методикою підрозділу 5.4, не більше ніж на 12%.

Окремо слід зазначити, що у разі безмоментного плоского напруженого стану перша модель багатошарової трансверсально-ізотропної оболонки дає результат, який досить точно збігається з величиною колових $\sigma_\theta = \dfrac{pr}{h}$ і поздовжніх $\sigma_z = \frac{pr}{2h}$ напружень. Знаючи ці напруження і деформації в точках 1, 3, 5 (рис. 4.11) наклейки тензорезисторів, нескладно експериментально знайти середнє значення модулів пружності $E_\theta^Э$, $E_z^Э$, остаточні значення яких наведені в табл. 4.4.

Таблиця 4.4 – Експериментальне визначення пружних властивостей

Кількість експериментів	Крок навантаження (МПа)	Максимальне навантаження (МПа)	Кількість тензодатчиків	Модуль пружності, Е (МПа)	Середній модуль пружності, Е (МПа)
1	0,5	3	6	$3{,}984.10^4$	$3{,}632.10^4$
2	0,5	3	6	$4{,}034.10^4$	
3	0,5	3	6	$3{,}539.10^4$	
4	0,5	6,5	6	$3{,}333.10^4$	
5	1	13	6	$3{,}269.10^4$	

На рис. 4.16 показані експериментальні результати напруженого стану склопластикової труби в районі фланцевого з'єднання. Ці результати відрізняються від теоретичних, наведених у вигляді графіків в підрозділі 5.4, менш ніж на 10%.

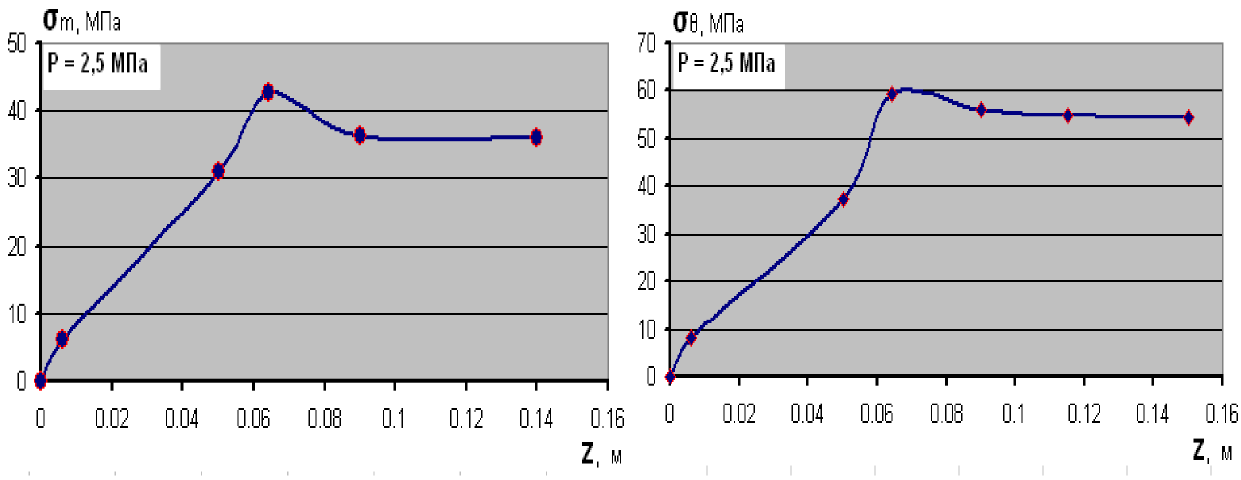


Рисунок 4.16 – Напружений стан склопластикової труби в зоні фланцевого з'єднання

4.6. Експериментальні дослідження сталевої труби з дефектами матеріалу на лицьовій поверхні (іржі), посиленої бандажем зі склопластику

Випробовувана труба навантажується внутрішнім тиском. Оскільки стінка труби ослаблена поверхневими дефектами, при проведенні експерименту створюваний гідростатичний тиск буде нижче за робочий тиск труби.

Для створення в трубі внутрішнього тиску в нього накачується вода за допомогою плунжерного насоса. Параметри навантаження контролювали високоточним манометром. Загальний вид експериментального стенда показаний на рис. 4.7. Проведення експерименту включало три етапи.

На першому етапі вивчався напружено-деформований стан труби в зонах нанесених дефектів. Крок збільшення гідростатичного тиску становив 0,2 МПа. При тиску 14,6 МПа в т. 33 з’явилася тріщина в поздовжньому напрямку довжиною 3 мм і шириною розкриття 0,5 мм. З появою тріщина почалася теча і падіння гідростатичного тиску. Слід зазначити, що пластичні деформації в т. 33 почалися при тиску 4,8 МПа, тобто задовго до настання руйнівного навантаження.

Посилення дефектних ділянок здійснювали шляхом накладення багатошарового бандажа. Після підготовки поверхні труби за допомогою піскоструминної обробки, а також згладжування наносили композитний бандаж. В якості матриці склопластикового бандажа використовувався епоксидний полімер 5-211Б з наступними параметрами пружності: $E_м = 4200 МПа,\ G_м = 1500\ МПа,\ \nu_м = 0{,}4$. Армуючим елементом композиції є тканина сатинової структури Т-10-80. Тканина отримана шляхом переплетення алюмоборосилікатних ниток БС6-26×1×1(Е стекло). Технічні сталі пружності розглянутого багатошарового композита наведені в табл. 4.5. Таким чином, склопластик являє собою трасверсально ізотропний матеріал і складається з 25 односпрямованих армованих шарів товщиною 0,25 мм. Композитний бандаж укладався по всій довжині труби і товщина бандажа приблизно становила 6 мм.

Таблиця 4.5 – Пружні характеристики склопластику

Схема армування	E, МПа	G, МПа	ν_{ij}	ν_{ji}
$[(0^{\circ}/90^{\circ})_6]_S$	$E_z = 24260$ $E_\theta = 24260$ $E_r = 9989$	$G_{\theta z} = 4254$ $G_{rz} = 2947$ $G_{r\theta} = 2947$	$\nu_{z\theta} = 0{,}15$ $\nu_{zr} = 0{,}39$ $\nu_{\theta r} = 0{,}39$	$\nu_{\theta z} = 0{,}15$ $\nu_{rz} = 0{,}16$ $\nu_{r\theta} = 0{,}16$

Примітка: E_z, E_θ, E_r – модулі пружності першого роду в поздовжньому, коловому та радіальному напрямках; $G_{\theta z}, G_{rz}, G_{r\theta}$ – модулі зсуву; $\nu_{z\theta} = \nu_{\theta z}$, $\nu_{\theta r} = \nu_{r\theta}$, $\nu_{rz} = \nu_{zr}$ – коефіцієнти Пуассона.

Після полімеризації бандажа в місцях розташування дефектів труби на зовнішню поверхню бандажа наклеювалися тензорезистори (рис. 4.17).

Рисунок 4.17 – Загальний вид розташування тензодатчиків на лицьовій поверхні бандажа

На другому етапі досліджувався напружено-деформований стан труби в зонах нанесених дефектів. Крок збільшення гідростатичного тиску становив 0,2МПа. Застосування ремонтного бандажа дозволило збільшити гідростатичний тиск до робочої величини, тобто до 20 МПа. Напружено-деформований стан зразка досліджували з метою встановлення спільної роботи труби та бандажа на всіх етапах навантаження, що відповідають роботі трубопроводу. Отримані методом тензометрування дані свідчать про те, що деформування бандажа відбувається разом із трубою.

Предметом дослідження третього етапу експерименту був наскрізний дефект труби круглої форми і діаметром 30 мм. Площа дефекту склала 730 мм^2. На ділянку труби з дефектом був накладений ремонтний бандаж товщиною 10 мм і шириною 400 мм. Фізико-механічні характеристики склопластикового бандажа наведені в табл. 4.3. Після полімеризації бандажа із кроковим навантаженням 0,2МПа проводилося дослідження міцності системи трубопровід – композитний бандаж при наявності наскрізного дефекту. Вже при гідростатичному тиску 3,5МПа в зоні контакту композитного бандажа і труби з'явилася вода і почалося падіння гідростатичного тиску.

4.7. Міцність бандажних та муфтових з'єднань

Достатньо поширеним видом з'єднання склопластикових труб є муфтове клейове з'єднання, коли кінець труби проточується під наружний конус, а з'єднувальна муфта проточується під внутрішній конус з обох сторін. В технологічному процесі клейовий компаунд наноситься на наружню поверхню проточеного кінця труби та на внутрішню поверхню муфти, далі в муфту з обох сторін вставляються труби, та жорстко фіксуються за допомогою спеціальних пристосувань до закінчення процесу затвердження клейового компаунду. Такі з'єднання витримують навантаження внутрішнім тиском до 10МПа при внутрішньому діаметрі трубопроводу до 100мм.

Під час монтажу трубопроводів, коли не вдається заздалегідь точно визначити місце кінцевого з'єднання труб при зміні напряму трубопроводу, чи при встановленні запірної арматури застосовують бандажне з'єднання. При бандажному з'єднанні попередньо встановленні та жорстко закріплені кінці з'єднувальних труб один біля одного обмотують скломатеріалом просоченим клейовим компаундом. Жорстке закріплення залишається до закінчення затвердження клейового компаунду.

При виконанні цієї роботи виготовлялися зразки муфтових клейових з'єднань та бандажних з'єднань з відрізків труб довжиною до 500 мм. Загальна довжина зразків дорівнювала приблизно одному метру. Виготовлені зразки навантажували внутрішнім тиском за допомогою випробувальної установки. Герметизація торців зразків влаштовувалась в такій спосіб що випробуваний зразок вільно деформувався як в коловому, так і в поздовжньому напрямку. Результати випробувань наведені у таблиці 4.6.

Таблиця 4.6 – Результати випробувань муфтових та бандажних клейових з’єднань.

Бандаж/Муфта	Внутр. діа-метр, мм	Товщи-на стінки труби, мм	Товщи-на стінки банд/ муфт, мм	Граничний тиск, МПа	Довжина клейо-вого шва, мм	Характер руйнування
Муфта	100	7,5		15	100	Не зруйнувався
Муфта	76	5,3		18	140	Не зруйнувався
Муфта	100	7,5		15	100	Не зруйнувався
Муфта	76	5,3	9	15	105	Протікання по шву
Муфта	76	5,3	9	17	105	Протікання по шву
Муфта	76	5,3	10	11	140	16 из 18 герметичні протягом 30 хвилин
Муфта	76	5,3	10	11	140	3 из 10 герметичні протягом 30 хвилин
Муфта	76	5,3	10	11	140	2 из 2 герметичні протягом 120 хвилин
Муфты	76	5,3	10	16	141	3 из 3 герметичні протягом 120 хвилин
Муфта	76	5,3	5	16	50	Герметичний
Муфта	76	5,3	5	16	50	Герметичний
Бандаж	100	3	2	3	40	Протікання по шву
Бандаж	100	3	3	4	50	Протікання по шву
Бандаж	100	3	2,5	8	120	Протікання по шву
Бандаж	100	5	5	100	100	Свищ по краю
Бандаж	76	5,3	10	120	135	Протікання по трем зразкам
Бандаж	76	5,3	10	130	180	Протікання по шву
Бандаж	76	5,3	10	145	140	Протікання по шву
Бандаж	76	5,3	15	120	140	Протікання по шву
Бандаж	76	5,3	10	150	280	Протікання по шву
Бандаж	76	1,5	8	170	140	Не зруйнувався
Бандаж	76	1,5	8	130	140	Протікання с обох сторін
Бандаж	76	5,3	10	110	140	Герметичний протягом 120 хвилин
Бандаж	76	5,3	10	110	140	Герметичний протягом 120 хвилин
Бандаж	76	5,3	10	110	140	Герметичний протягом 120 хвилин
Бандаж	76	5,3	10	110	140	Герметичний протягом 120 хвилин

4.8. Висновки по четвертому розділу

У четвертому розділі розроблена експериментальна методика для перевірки достовірності теоретичних результатів і оцінки похибок, які вносять різного роду допущення в розрахунки на міцність елементів з міжшаровими дефектами. Наведено фізико-механічні характеристики основних компонент склопластику – скловолокна і зв'язуючих матеріалів, надано стислий опис технології виготовлення зразків.

Створено експериментальні установки, які були розроблені і виготовлені для проведення випробувань: кільцевих зразків, труб зі склопластику, і сталевої труби з дефектам, посиленої склопластиковим бандажем. Розроблено методику проведення експериментальних досліджень. Конструкції експериментальних установок дозволяють проводити виміри прогинів зразків за допомогою індикаторів годинникового типу з точністю вимірювань до $0{,}5\cdot10^{-5}$м. Вимірювання відносних деформацій проводиться методом тензометрування.

Для оцінки достовірності результатів, отриманих на основі запропонованої експериментально-теоретичної методики, додатково були проведені гідростатичні випробування склопластикових труб. При цьому досліджувалися несуча здатність експериментальних зразків та вплив жорсткості сталевих фланців на напружено-деформований стан склопластикових труб у зоні їх з'єднань, конструкційна міцність муфтових та бандажних клейових з'єднань, граничний тиск, який витримує сталева труба з дефектами матеріалу на лицьовій поверхні (іржі), посиленої бандажем зі склопластику.

Порівняння експериментальних даних із теоретичними результатами дозволило зробити висновок, що в результаті порівняно низької жорсткості склопластиків на згинання і слабкого опору деформаціям поперечного зсуву, застосування традиційної структурно-безперервної теорії моделі розрахунку тонкостінних армованих елементів конструкцій навіть на початковій стадії навантаження призводить до значних похибок.

5. МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ НА МІЦНІСТЬ СКЛОПЛАСТИКОВИХ ТРУБ З ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРИ МАТЕРІАЛУ

5.1. Модифікований критерій міцності композиту шаруватої структури з концентраторами напружень на границі розділу шарів

Найбільш загальне формулювання критерію міцності анізотропних тіл має вигляд [74]:

$$\left(R_{ij}\sigma_{ij}\right)^{\alpha}+\left(R_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\right)^{\beta}+\left(R_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}\right)^{\gamma}+\ldots=1, \qquad (i,j,k,l=1,2,3), \quad (5.1)$$

де $R_{ij}, R_{ijkl}, R_{ijklmn}$ – тензорні позначення тензорів поверхні міцності другого, четвертого, шостого та наступних парних рангів.

В інженерній практиці більш зручним у плані практичного застосування виявився критерій міцності наступної тензорно-поліноміальної форми:

$$\mathrm{R}_{ij}\sigma_{ij}+\mathrm{R}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}+\mathrm{R}_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}+\ldots=1 \qquad (i,j,k,l,m,n=1,2,3), \quad (5.2)$$

який легко отримати з (5.1), приймаючи $\alpha,\beta,\gamma,\ldots=1$. Більшість відомих поліноміальних критеріїв міцності є, як правило, окремим випадком критерію (5.2).

Використовуючи критерій міцності (5.2) у формі

$$\mathrm{R}_{ij}\sigma_{ij}+\mathrm{R}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}+\mathrm{R}_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}=1 \qquad (i,j,k,l,m,n=1,2,3), \quad (5.3)$$

можна розглянути умови руйнування шаруватого композиту в цілому. Припущення про незалежність шляху навантаження, про лінійно-пружну поведінку матеріалу і про відсутність міжшарових взаємодій дозволили зменшити число тензорів міцності в рівнянні (5.3) для ортотропного композиту при плоскому напруженому стані до десяти. Критерій міцності шаруватого композиту (5.3) для практичного застосування виявився досить складним, оскільки передбачає проведення складних експериментів для знаходження коефіцієнтів тензорів поверхні міцності.

У більшості випадків руйнування шаруватого композиту починається з руйнування одного шару або зв'язків між ними. Тому під час побудови граничних поверхонь вважається, що руйнування локалізоване в одному шарі і критерій міцності слід складати саме для цього шару.

Апроксимація граничної поверхні міцності ортотропного шару поліномом другого ступеня розглянута в [74, 127]. Рівняння (5.3) приводиться до вигляду

$$\mathrm{R}_{ij}\sigma_{ij} + \mathrm{R}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 1 \qquad (i, j, k, l, m, n = 1,2,3), \tag{5.4}$$

де R_{ij}, R_{ijkl} – тензори поверхні міцності шару другого і четвертого порядків.

У випадку плоского напруженого стану рівняння (5.4) зображує граничну поверхню (еліпсоїд) в тривимірному просторі напружень

$$\begin{gathered} R_{11}\sigma_{11} + R_{22}\sigma_{22} + 2R_{12}\sigma_{12} + R_{1111}\sigma_{11}^2 + R_{2222}\sigma_{22}^2 + 4R_{1212}\sigma_{12}^2 + \\ + 2R_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 4R_{1112}\sigma_{11}\sigma_{12} + 4R_{2212}\sigma_{22}\sigma_{12} = 1. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Коефіцієнти рівняння (5.5) визначаються з використанням експериментально встановлених граничних характеристик міцності $\sigma_{ij}^-, \sigma_{ij}^+ \ (i, j = 1,2)$. Індекс "+" означає, що дана компонента – максимальне напруження при розтягуванні, індексом "–" позначено максимальне напруження при стисканні. Для компонент тензорів поверхні міцності (5.5) в [127] запропоновані наступні співвідношення

$$R_{11} = \frac{\sigma_{11}^- - \sigma_{11}^+}{\sigma_{11}^-\sigma_{11}^+}, \quad R_{22} = \frac{\sigma_{22}^- - \sigma_{22}^+}{\sigma_{22}^-\sigma_{22}^+}, \quad R_{12} = \frac{\sigma_{12}^- - \sigma_{12}^+}{\sigma_{12}^-\sigma_{12}^+}, \quad R_{1111} = \frac{1}{\sigma_{11}^-\sigma_{11}^+},$$

$$R_{2222} = \frac{1}{\sigma_{22}^-\sigma_{22}^+}, \quad 4R_{1212} = \frac{1}{\sigma_{12}^-\sigma_{12}^+},$$

$$2R_{1122} = \frac{R_{11} - R_{22}}{\sigma_{12}^-} + R_{1111} + R_{2222} - \frac{1}{\left(\sigma_{12}^-\right)^2}. \tag{5.6}$$

В (5.5) – (5.6) тензори міцності враховують можливе розбіжність характеристик міцності матеріалу при розтяганні та стисканні. Слід зазначити, що міцність матеріалу не залежить від знака граничних значень дотичних напружень: $\sigma_{ij}^- = \sigma_{ij}^+$. Для ортотропного матеріалу в осях симетрії справедлива тотожність $R_{1112} = R_{2212} = 0$. Знання величин $\sigma_{ij}^-, \sigma_{ij}^+ \ (i, j = 1,2)$, які вдається визначити експериментальним шляхом, недостатньо для визначення компонент тензорів міцності типу R_{1112}, що, в свою чергу, обумовлює необхідність проведення ретельно спланованих експериментів для отримання та обґрунтування емпіричних залежностей, складених для R_{1122}. Велика частина методів побудови граничних поверхонь заснована на уявленні армованого матеріалу як набору анізотропних шарів. Тому вивчення фізико-механічних властивостей окремих шарів при навантаженні представляється актуальною задачею. За допомогою теорії шаруватих середовищ можна перейти від усереднених напружень і деформацій композиту до локальних напружень і деформацій в будь-якому шарі. Слід зазначити, що, виключаючи одиничні роботи, у всіх підходах не враховуються напруження і деформації поперечного зсуву $\sigma_{i3}^{-}, \sigma_{i3}^{+}$ $(i, j = 1,2)$, і трансверсального відриву або стискання $\sigma_{33}^{-}, \sigma_{33}^{+}$. Значна відмінність граничних характеристик несучих шарів і властивостей проміжних міжфазних шарів обумовлює вибір тієї чи іншої моделі дискретно-структурної теорії пластин і оболонок. Стає очевидним, що розшарування слід розглядати не як окремий вид руйнування, а як фактор, що визначає вигляд дискретно-структурної моделі багатошарової конструкції. Таким чином, для оцінки ступеня впливу ослабленого міжфазного контакту шарів критерій (5.5) слід записувати в модифікованому вигляді

$$\begin{aligned} &R_{11}\sigma_{11} + R_{22}\sigma_{22} + R_{33}\sigma_{33} + R_{1111}\sigma_{11}^2 + R_{2222}\sigma_{22}^2 + \\ &+ R_{3333}\sigma_{33}^2 + 4R_{1212}\sigma_{12}^2 + 4R_{1313}\sigma_{13}^2 + 4R_{2323}\sigma_{23}^2 + \\ &+ 2R_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2R_{1133}\sigma_{11}\sigma_{33} + 2R_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33} = 1, \end{aligned} \tag{5.7}$$

де до тензорів поверхні міцності (5.6) слід за аналогією додати додаткові компоненти:

$$R_{33} = \frac{\sigma_{33}^{-} - \sigma_{33}^{+}}{\sigma_{33}^{-}\sigma_{33}^{+}}, \quad R_{3333} = \frac{1}{\sigma_{33}^{-}\sigma_{33}^{+}}, \quad 4R_{1313} = \frac{1}{\sigma_{13}^{-}\sigma_{13}^{+}}, \quad 4R_{2323} = \frac{1}{\sigma_{23}^{-}\sigma_{23}^{+}},$$
$$2R_{1133} = \frac{R_{11} - R_{33}}{\sigma_{13}^{-}} + R_{1111} + R_{3333} - \frac{1}{\left(\sigma_{13}^{-}\right)^2}, \; 2R_{2233} = \frac{R_{22} - R_{33}}{\sigma_{23}^{-}} + R_{2222} + R_{3333} - \frac{1}{\left(\sigma_{23}^{-}\right)^2}. \tag{5.8}$$

При цьому вважається, що міжшарова міцність матеріалу на зсув не залежить від знака поперечних дотичних напружень, тобто $\sigma_{13}^{-} = \sigma_{13}^{+}, \; \sigma_{23}^{-} = \sigma_{23}^{+}$.

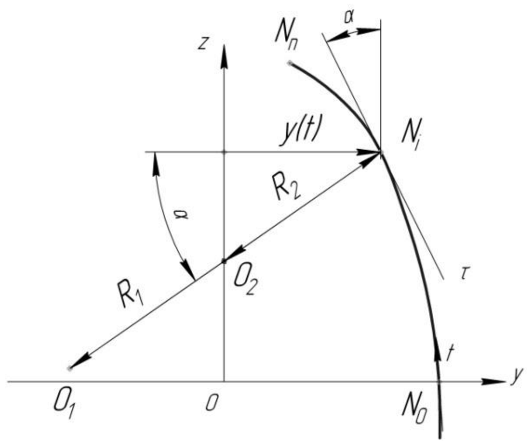
Для використання модифікованого критерію (5.7), (5.8) необхідно експериментально визначити граничні характеристики шару на поперечний зсув та трансверсальне стискання або відрив.

5.2. Осесиметрична деформація тонкостінних конструкцій шаруватої структури

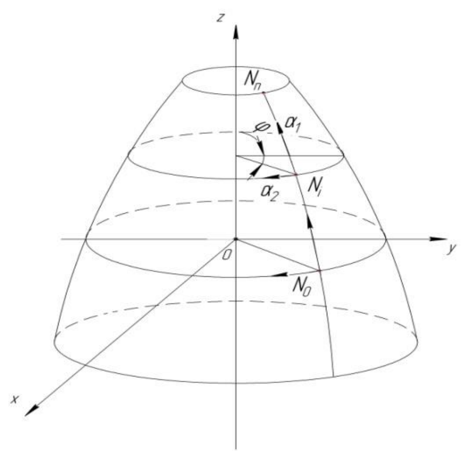
5.2.1. Спосіб обчислення геометричних параметрів оболонок обертання. Відомо, що поверхня оболонок обертання утворюється обертанням кривої лінії, що лежить у площині $y0z$, навколо осі $0z$ (рис. 5.1 а).

Положення точки N_i на поверхні оболонки обертання визначається за допомогою криволінійних координат α_1, α_2, які співпадають з лініями головних кривизн. При цьому компонента тензора другої квадратичної форми поверхні, що характеризує кручення поверхні, дорівнює нулю.

Для оболонок обертання характерні наступні геометричні параметри, які входять до геометричних співвідношення і рівнянь рівноваги: коефіцієнти Ламе A і B, головні кривизни $k_1 = 1/R_1$, $k_2 = 1/R_2$, і додаткові параметри – $\rho_1 = -\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}$, $\rho_2 = -\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \alpha_2}$.



а)



б)

Рисунок 5.1 – Поверхня оболонки обертання

Так як коефіцієнт Ламе A не залежить від координати α_2, додатковий параметр $\rho_2 = 0$.

Криву N_0N_n (рис.5.1 б) називають меридіаном. Нехай рівняння меридіана задано в параметричній формі – $z = z(t)$, $y = y(t)$, де t – дугова координата, яка відраховується від початкової точки N_0 до кінцевої точки N_n. Використовуючи відомі співвідношення кривизн для дуги N_0N_n в точці $N_i - k_1 = \dfrac{d\alpha}{dt}$ і похідні від функцій $z = z(t)$, $y = y(t)$ (рис. 5.1 а) –

$$z'_t = \frac{dz}{dt} = \cos\alpha, \quad y'_t = \frac{dy}{dt} = \sin\alpha, \quad z''_t = \frac{d^2z}{dt^2} = -k_1\sin\alpha, \quad y''_t = \frac{d^2y}{dt^2} = k_1\cos\alpha,$$

нескладно отримати наступну формулу кривизни меридіана

$$k_1 = z'_t y''_t - y'_t z''_t. \tag{5.9}$$

Квадрат довжини поверхневого лінійного елемента, кінці якого розташовані в точках $N(t,\varphi)$ і $N'(t+dt,\varphi+d\varphi)$, запишеться

$$(ds)^2 = (dt)^2 + (yd\varphi)^2, \tag{5.10}$$

де φ - кут циліндричної системи координат $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

Таким чином, для обчислення параметрів Ламе можна записати вирази

$$A = 1, \quad B = y(t). \tag{5.11}$$

Кривизна перерізу, нормального до меридіану оболонки обертання, визначається виразом (рис. 5.1 а)

$$k_2 = \cos\alpha / y = z'_t / y. \tag{5.12}$$

Додатковий параметр ρ_1 приймає вигляд

$$\rho_1 = -\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha_1} = -\frac{1}{AB}\frac{dB}{dt} = -y'_t / y. \tag{5.13}$$

Коли оболонка обертання має складну форму поверхні, меридіан такої поверхні зручно апроксимувати у вигляді – сплайнів, заданих у вигляді параметричних функцій $(z(t),\ y(t))$ на рівномірній сітці

$$z_i = (i-1)\Delta t, \qquad y_i = (i-1)\Delta t \qquad i = 1,\ldots,n.$$

В основу процедури покладені алгоритми реалізації B-сплайн апроксимацій. Задача апроксимації розв’язується як відома задача найменших квадратів для заданих граничних умов за допомогою B-сплайнів:

$$z(t) = \sum_{j=1}^{k} C_j B_j(t), \qquad y(t) = \sum_{j=1}^{k} C'_j B_j(t),$$

де C_j, C'_j – коефіцієнти, k – порядок сплайн-функції.

5.2.2. Осесиметрична деформація багатошарових оболонок обертання з ослабленим контактом між шарами. Нехай оболонка обертання шаруватої структури є осесиметричною конструкцією щодо механічних, геометричних параметрів у напрямку колової координати, яка також знаходиться під дією осесиметричного зовнішнього навантаження. Таким чином, якщо не розглядати можливість переходу від осесиметричної форми рівноваги до неосесиметричних форм, всі величини, що характеризують напружено-деформований стан таких конструкцій, не залежать від координати α_2 і є функціями, лише однієї координати α_1.

З урахуванням введених припущень система рівнянь (2.102) – (2.108) запишеться

$$\frac{d\vec{Y}^{(k)}}{A_{(k)}d\alpha_1} = F(\alpha_1, \vec{Y}^{(k)}, \vec{f}^{(k)}) \qquad k = 1,2,\ldots,n. \tag{5.14}$$

Тут

$$\vec{Y}^{(k)} = \left\{\vec{Y}_1^{(k)}, \vec{Y}_2^{(k)}, \ldots, \vec{Y}_{14}^{(k)}\right\}^T =$$
$$= \left\{T_{11}^{(k)}, T_{12}^{(k)}, R_{13}^{(k)}, M_{11}^{(k)}, M_{12}^{(k)}, L_{11}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \omega^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \Psi_1^{(k)}, \Psi_2^{(k)}\right\}^T$$

– вектор розв'язків; компоненти вектора правих частин в розгорнутій формі мають вигляд

$$F_1^{(k)} = \rho_1^{(k)}Y_1^{(k)} - \rho_1^{(k)}T_{22}^{(k)} - k_1^{(k)}Y_3^{(k)} - X_1^{(k)}, \; F_2^{(k)} = 2\rho_1^{(k)}Y_2^{(k)} - k_2^{(k)}R_{23}^{(k)} - X_2^{(k)},$$

$$F_3^{(k)} = k_1^{(k)}Y_1^{(k)} + \rho_1^{(k)}Y_3^{(k)} + k_2^{(k)}T_{22}^{(k)} - X_3^{(k)},$$

$$F_4^{(k)} = \rho_1^{(k)}Y_4^{(k)} - \rho_1^{(k)}M_{22}^{(k)} + Q_1^{(k)} - \frac{h_{(k)}}{2}X_1^{(k)},$$

$$F_5^{(k)} = 2\rho_1^{(k)}Y_5^{(k)} + Q_2^{(k)} - \frac{h_{(k)}}{2}X_2^{(k)}, \; F_6^{(k)} = \rho_1^{(k)}Y_6^{(k)} - \rho_1^{(k)}L_{22}^{(k)} + L_{13}^{(k)} - \varphi_{(k)}\left(\frac{h_{(k)}}{2}\right)X_1^{(k)},$$

$$F_7^{(k)} = 2\rho_1^{(k)}Y_7^{(k)} + L_{23}^{(k)} - \varphi_{(k)}\left(\frac{h_{(k)}}{2}\right)X_2^{(k)}, \quad F_8^{(k)} = \varepsilon_{11}^{(k)} - k_1^{(k)}Y_{10}^{(k)} - \frac{1}{2}(2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)})^2,$$

$$F_9^{(k)} = \varepsilon_{12}^{(k)} - \rho_1^{(k)}Y_9^{(k)} + k_2^{(k)}Y_9^{(k)}(2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)})^2, \quad F_{10}^{(k)} = 2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)} + k_1^{(k)}Y_8^{(k)},$$

$$F_{11}{}^{(k)} = \chi_{11}^{(k)\gamma},\ F_{12}{}^{(k)} = 2\chi_{12}^{(k)\gamma} - \rho_1^{(k)} Y_{12}^{(k)},\ \ F_{13}{}^{(k)} = \Psi_{12}^{(k)},\ \ F_{14}{}^{(k)} = 2\Psi_{12}^{(k)} - \rho_1^{(k)} Y_{14}^{(k)}, \qquad (5.15)$$

де $\qquad \rho_1 = -\dfrac{\partial B}{A^{(k)} B^{(k)} \partial \alpha_1}.$

Всі невідомі, які входять в праву частину системи рівнянь (5.14), необхідно визначити через компоненти вектора розв'язків $\vec{Y}^{(k)}$. Ці залежності, якщо знехтувати нелінійними доданками більш високого порядку малості і ввести допущення

$$C_{55}{}^{(k)} + 2Y_1^{(k)} \approx C_{55}{}^{(k)}, \qquad (5.16)$$

можна отримати:

$$M_{22}{}^{(k)} = m_1{}^{(k)} Y_4{}^{(k)} - m_2{}^{(k)} Y_5{}^{(k)} + m_3{}^{(k)} Y_6{}^{(k)} - m_4{}^{(k)} Y_7{}^{(k)} + m_5{}^{(k)} \rho_1{}^{(k)} Y_{11}{}^{(k)} + m_6{}^{(k)} \rho_1{}^{(k)} Y_{13}{}^{(k)},$$

$$L_{22}{}^{(k)} = l_1{}^{(k)} Y_4{}^{(k)} - l_2{}^{(k)} Y_5{}^{(k)} + l_3{}^{(k)} Y_6{}^{(k)} - l_4{}^{(k)} Y_7{}^{(k)} + l_5{}^{(k)} \rho_1{}^{(k)} Y_{11}{}^{(k)} + l_6{}^{(k)} \rho_1{}^{(k)} Y_{13}{}^{(k)};$$

$$T_{22}{}^{(k)} = t_1{}^{(k)} Y_1{}^{(k)} + t_2{}^{(k)} Y_2{}^{(k)} + t_3{}^{(k)} Y_4{}^{(k)} - t_4{}^{(k)} Y_5{}^{(k)} + t_5{}^{(k)} Y_6{}^{(k)} - t_6{}^{(k)} Y_7{}^{(k)} -$$
$$- t_7{}^{(k)} Y_8{}^{(k)} - t_8{}^{(k)} (Y_9{}^{(k)})^2 + t_9{}^{(k)} Y_{10}{}^{(k)} + t_{10}{}^{(k)} Y_{11}{}^{(k)} + t_{11}{}^{(k)} Y_{12}{}^{(k)},$$

$$Q_2{}^{(k)} = \frac{C_{44}{}^{(k)}}{2} (-k_2{}^{(k)} Y_9{}^{(k)} + Y_{12}{}^{(k)}) + \frac{C_{45}{}^{(k)}}{C_{55}{}^{(k)}} \left(Y_3{}^{(k)} + \frac{1}{2} C_{54}{}^{(k)} k_2{}^{(k)} Y_9{}^{(k)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} C_{54}{}^{(k)} Y_{12} - R_{55}{}^{(k)} Y_{13}{}^{(k)} - R_{54}{}^{(k)} Y_{14}{}^{(k)} + Y_1^{(k)} Y_{11}{}^{(k)} \right) + R_{44}{}^{(k)} Y_{14}{}^{(k)} + R_{45}{}^{(k)} Y_{13}{}^{(k)},$$

$$Q_1{}^{(k)} = Y_3{}^{(k)} + Y_1^{(k)} Y_{11}{}^{(k)},$$

$$L_{23}{}^{(k)} = \frac{R_{44}{}^{(k)}}{2} (-k_2{}^{(k)} Y_9{}^{(k)} + Y_{12}{}^{(k)}) + \frac{C_{45}{}^{(k)}}{C_{55}{}^{(k)}} \left(Y_3{}^{(k)} + \frac{1}{2} C_{54}{}^{(k)} k_2{}^{(k)} Y_9{}^{(k)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} C_{54}{}^{(k)} Y_{12} - R_{55}{}^{(k)} Y_{13}{}^{(k)} - R_{54}{}^{(k)} Y_{14}{}^{(k)} + Y_1^{(k)} Y_{11}{}^{(k)} \right) + G_{44}{}^{(k)} Y_{14}{}^{(k)} + G_{45}{}^{(k)} Y_{13}{}^{(k)},$$

$$L_{23}{}^{(k)} = \frac{R_{54}{}^{(k)}}{2} (-k_2{}^{(k)} Y_9{}^{(k)} + Y_{12}{}^{(k)}) + \frac{R_{45}{}^{(k)}}{C_{55}{}^{(k)}} \left(Y_3{}^{(k)} + \frac{1}{2} C_{54}{}^{(k)} k_2{}^{(k)} Y_9{}^{(k)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} C_{54}{}^{(k)} Y_{12} - R_{55}{}^{(k)} Y_{13}{}^{(k)} - R_{54}{}^{(k)} Y_{14}{}^{(k)} + Y_1^{(k)} Y_{11}{}^{(k)} \right) + G_{54}{}^{(k)} Y_{14}{}^{(k)} + G_{55}{}^{(k)} Y_{13}{}^{(k)},$$

$$R_{23}{}^{(k)} = Q_2{}^{(k)} - \frac{Y_2{}^{(k)}}{C_{55}{}^{(k)}} (C_{54}{}^{(k)} Y_{12}{}^{(k)} + 2R_{55}{}^{(k)} Y_{13}{}^{(k)} + 2R_{54}{}^{(k)} Y_{14}{}^{(k)}) - Y_2{}^{(k)} Y_{11}{}^{(k)}. \qquad (5.17)$$

Відповідно до допущень першого варіанту моделі дискретно-структурної теорії шаруватих пластин і оболонок передбачається пружне проковзування жорстких шарів один щодо одного, тобто по лицьовим сполученим поверхням виконуються тільки статичні умови контакту. Статичні умови контакту по сполученим лицьовим поверхням *k*-го шару враховуються за допомогою методу штрафних функцій.

Введення допущення про те, що розглянутий напружено-деформований стан оболонки буде симетричним щодо осі обертання, істотно спрощує алгоритм розв'язання. Враховуючи геометричну нелінійність в квадратичному наближенні, вихідну крайову задачу можна звести до розв'язання системи $14 \times k$ звичайних диференціальних рівнянь (5.14) щодо вектор-функції $\vec{Y}^{(k)}$. Систему диференціальних рівнянь (5.14) слід доповнити граничними умовами– по сім на кожному торці жорсткого шару оболонки обертання. З урахуванням введених позначень вони мають вигляд

$$Y_j^{(k)}(\alpha_1^0)l_j + Y_{j+6}^{(k)}(\alpha_1^0)(l - l_j) = 0, \quad Y_j^{(k)}(\alpha_1^z)l_{j+6} + Y_{j+6}^{(k)}(\alpha_1^z)(l - l_{j+6}) = 0. \qquad (5.18)$$

Параметри $l_j,\ l_{j+6}(j = 1,2,....,7)$ приймають значення 0, 1 і визначають однорідні як статичні, так і кінематичні граничні умови на торцях жорстких шарів оболонки $\alpha_1 = \alpha_1^0,\ \alpha_1 = \alpha_1^z$.

Розв'язок геометрично нелінійної крайової задачі (5.14) – (5.18) можна отримати на основі ітераційного методу Ньютона-Канторовича, алгоритм якого наведено в підрозділі 5.2.3, та методу дискретної ортогоналізації С.К.Годунова [68].

На основі представлених вище залежностей геометрично нелінійної дискретно-структурної теорії шаруватих елементів конструкцій досліджено напружено-деформований стан анізотропних оболонок. Сполучення жорстких анізотропних шарів на міжшарових межах моделюються двома розрахунковими моделями, в яких враховуються умови їх ідеального і ослабленого контакту.

5.2.3. Лінеаризація розв'язувальною системи звичайних диференціальних рівнянь. Розвя'зок геометрично нелінійної задачі нескладно отримати на основі ітераційного методу Ньютона-Канторовича. Можна представити систему диференційно-алгебраїчних співвідношень у вигляді:

$$\Phi(\vec{Y}) = 0, \tag{5.19}$$

де Ф – диференційно-алгебраїчний оператор. Тоді згідно з методом Ньютона-Канторовича система (5.19) перепишеться

$$\Phi(\vec{Y} + \Delta\vec{Y}) = \Phi(\vec{Y}) + \Phi'_y(\vec{Y})\Delta\vec{Y} = 0.. \tag{5.20}$$

Тут $\Delta\vec{Y}$ – малий приріст вектор – функції $\vec{Y}$.

Задаючи два послідовних наближення у вигляді $\vec{Y}^{(i+1)} = \vec{Y}^{(i)} + \Delta\vec{Y}$ систему (5.20) можна переписати

$$\Phi(\vec{Y}^{(i)}) + \Phi'_y(\vec{Y}^{(i)})(\vec{Y}^{(i+1)} - \vec{Y}^{(i)}) = 0. \tag{5.21}$$

Оператор $\Phi(\vec{Y})$ (5.19) слід представити у формі

$$\Phi(\vec{Y}) = \Phi^{л}(\vec{Y}) + \Phi^{н}(\vec{Y}) = 0. \tag{5.22}$$

де $\Phi^{л}(\vec{Y}), \Phi^{н}(\vec{Y})$ – лінійний і нелінійний оператори. Тоді, враховуючи співвідношення $\Phi_Y^{л\,\prime}(\vec{Y}^{(i)})\vec{Y}^{(i)} = \Phi^{л}(\vec{Y}^{(i)})$, $\Phi_Y^{л\,\prime}(\vec{Y}^{(i)})\vec{Y}^{(i+1)} = \Phi^{л}(\vec{Y}^{(i+1)})$, складемо замість системи (5.21) ітераційну схему методу Ньютона-Канторовича

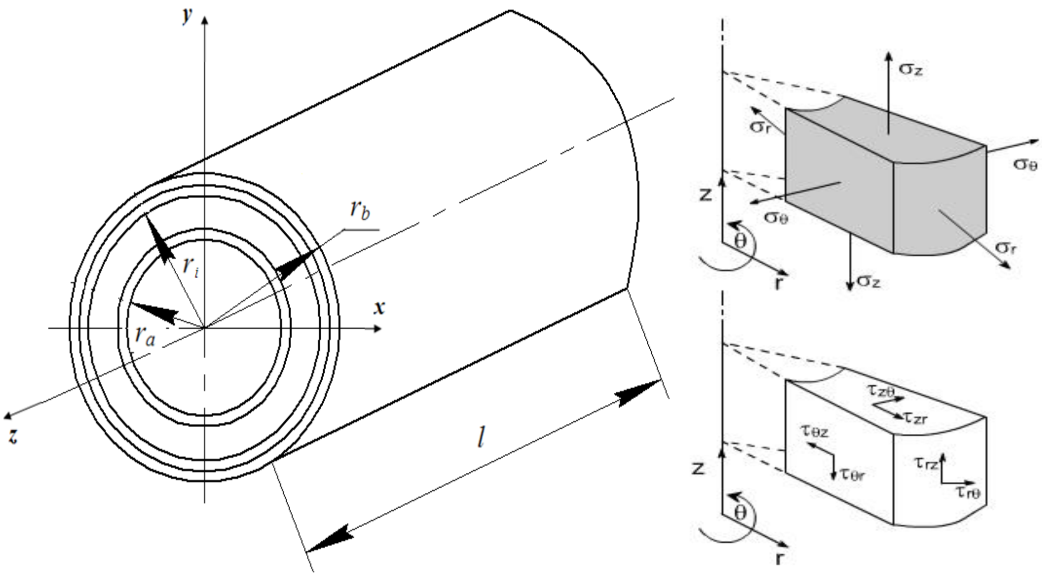
$$\Phi^{л}(\vec{Y}^{(i+1)}) + \Phi_Y^{н\,\prime}(\vec{Y}^{(i)})\vec{Y}^{(i+1)} + \Phi^{н}(\vec{Y}^{(i)}) - \Phi_Y^{н\,\prime}(\vec{Y}^{(i)})\vec{Y}^{(i)} = 0. \tag{5.23}$$

Таким чином, на $i+1$-ій ітерації методу Ньютона - Канторовича система зберігає той же вигляд, виключаючи нелінійні доданки.

Ітераційний процес закінчується, коли різниця двох останніх величин виявляється меншою заданої величини ε. В якості першого наближення рекомендується використовувати розв'язки лінійної крайової задачі.

5.3. Термопружний напружений стан багатошарової циліндричної оболонки неоднорідної структури по товщині з урахуванням ідеального і неідеального контакту між шарами

Основні рівняння. Нехай круговий порожнистий циліндр навантажений по циліндричним поверхням $r = r_a$ і $r = r_b$ стаціонарними температурними навантаженнями $t_a(z)$ і $t_b(z)$ і рівномірно розподіленими по окружній координаті зусиллями $q_a(z)$ і $q_b(z)$. Напрямок осей циліндричної системи координат вказано на рис. 5.2 а. Напруження, які виникають в точці циліндра при дії зовнішнього навантаження, показані на рис. 5.2 б.



а) б)

Рисунок 5.2 – Багатошаровий круговий порожнистий циліндр кінцевої довжини.

Вважається, що температурні навантаження і заданий по лицьовим поверхням циліндра тиск є осесиметричними щодо поздовжньої осі циліндра. Але при цьому їх величина змінюється вздовж меридіана і залежить від координати *z*. Крім того, циліндр має кінцеву довжину *l*. Також при розв’язанні задачі може враховуватися ефект прослизання шарів циліндра один щодо одного в поздовжньому напрямку.

На основі класичної теорії анізотропного пружного тіла для вирішення поставленої задачі були складені рівняння рівноваги, фізичні та геометричні співвідношення.

Фізичні співвідношення. Прийнявши циліндричну систему координат r, θ, z і задавши напрям осі *x*, від якої відраховується кут θ (рис. 5.2 а), фізичні співвідношення для i-го ортотропного шару з циліндричною анізотропією запишуться у вигляді

$$\left\{\varepsilon_r^i\right\} = \left[B_r^i\right]\left\{\sigma_r^i\right\} + \left\{\alpha_r^i \Delta t\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{5.24}$$

де

$$\left\{\sigma_r^i\right\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r^i \\ \sigma_\theta^i \\ \sigma_z^i \\ \tau_{\theta z}^i \\ \tau_{rz}^i \\ \tau_{r\theta}^i \end{Bmatrix}, \qquad \left\{\varepsilon_r^i\right\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^i \\ \varepsilon_\theta^i \\ \varepsilon_z^i \\ \gamma_{\theta z}^i \\ \gamma_{rz}^i \\ \gamma_{r\theta}^i \end{Bmatrix}, \qquad \left\{\alpha_r^i \Delta t\right\} = \begin{Bmatrix} \alpha_r^i \Delta t \\ \alpha_\theta^i \Delta t \\ \alpha_z^i \Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\left[B_r^i\right] = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & b_{13}^i & 0 & 0 & 0 \\ & b_{22}^i & b_{23}^i & 0 & 0 & 0 \\ & & b_{33}^i & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & b_{44}^i & 0 & 0 \\ & & & & b_{55}^i & 0 \\ & & & & & b_{66}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_r^i} & -\dfrac{\nu_{\theta r}^i}{E_\theta^i} & -\dfrac{\nu_{zr}^i}{E_z^i} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\nu_{r\theta}^i}{E_r^i} & \dfrac{1}{E_\theta^i} & -\dfrac{\nu_{z\theta}^i}{E_z^i} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\nu_{rz}^i}{E_r^i} & -\dfrac{\nu_{\theta z}^i}{E_\theta^i} & \dfrac{1}{E_z^i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{G_{\theta z}^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{G_{rz}^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{G_{r\theta}^i} \end{bmatrix} -$$

матриці-стовпці напружено-деформованого стану та температурних деформацій, а також матриця коефіцієнтів податливості $[B_r^i]$ відповідно. Тут E_r^i, E_θ^i, E_z^i – модулі пружності відповідно в радіальному, круговому і поздовжньому напрямках; $G_{\theta z}^i$, G_{rz}^i, $G_{r\theta}^i$ – модулі зсуву в площинах θ0z, r0z, r0θ відповідно; ν_{kj}^i $(k, j = r, \theta, z)$ – коефіцієнти Пуассона; α_j^i $(j = r, \theta, z)$ – температурний коефіцієнт лінійного розширення в напрямках осей циліндричної системи; Δt – зміна температури на лицьових поверхнях циліндра; N – кількість шарів циліндра. Розв'язуючи систему рівнянь (5.24) щодо напружень, нескладно знайти такі фізичні співвідношення:

$$\left\{\sigma_r^i\right\} = \left[A_r^i\right]\left\{\varepsilon_r^i\right\} - \left\{\alpha_r^i \Delta t\right\}, \tag{5.25}$$

де

$$\left[A_r^i\right]=\begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & a_{13}^i & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22}^i & a_{23}^i & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33}^i & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & a_{44}^i & 0 & 0 \\ & & & & a_{55}^i & 0 \\ & & & & & a_{66}^i \end{bmatrix}, \quad \left\{\alpha_r^i \Delta t\right\}=\begin{Bmatrix} (a_{11}^i+a_{12}^i+a_{13}^i)\alpha_r^i\,\Delta t \\ (a_{12}^i+a_{22}^i+a_{23}^i)\alpha_\theta^i\,\Delta t \\ (a_{13}^i+a_{23}^i+a_{33}^i)\alpha_z^i\,\Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Тут коефіцієнти матриці жорсткості $[A_r^i]$ визначаються виразами

$$a_{11}^i=\left[b_{22}^i b_{33}^i-\left(b_{23}^i\right)^2\right]\Delta^{-1}, \quad a_{22}^i=\left[b_{11}^i b_{33}^i-\left(b_{13}^i\right)^2\right]\Delta^{-1},$$

$$a_{33}^i=\left[b_{11}^i b_{22}^i-\left(b_{12}^i\right)^2\right]\Delta^{-1}, \quad a_{12}^i=\left[b_{13}^i b_{23}^i-b_{12}^i b_{33}^i\right]\Delta^{-1},$$

$$a_{13}^i=\left[b_{12}^i b_{23}^i-b_{22}^i b_{13}^i\right]\Delta^{-1}, \quad a_{23}^i=\left[b_{12}^i b_{13}^i-b_{11}^i b_{23}^i\right]\Delta^{-1},$$

$$\Delta=b_{11}^i b_{22}^i b_{33}^i+b_{12}^i b_{23}^i b_{31}^i+b_{21}^i b_{32}^i b_{13}^i-b_{13}^i b_{22}^i b_{31}^i-b_{21}^i b_{12}^i b_{33}^i-b_{11}^i b_{32}^i b_{23}^i,$$

$$a_{44}^i=\frac{1}{b_{44}^i}, \quad a_{55}^i=\frac{1}{b_{55}^i}, \quad a_{66}^i=\frac{1}{в_{66}^i}.$$

Геометричні співвідношення.

$$\varepsilon_r^i=\frac{\partial u_r^i}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta^i=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta^i}{\partial\theta}+\frac{u_r^i}{r}, \quad \varepsilon_z^i=\frac{\partial u_z^i}{\partial z},$$

$$\gamma_{\theta z}^i=\frac{\partial u_\theta^i}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z^i}{\partial\theta}, \quad \gamma_{rz}^i=\frac{\partial u_z^i}{\partial r}+\frac{\partial u_r^i}{\partial z},$$

$$\gamma_{r\theta}^i=\frac{\partial u_r^i}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta^i}{\partial r}-\frac{u_\theta^i}{r} \quad (i=1,2,\ldots,N), \tag{5.26}$$

де u_r^i, u_θ^i, u_z^i – переміщення в радіальному, коловому і поздовжньому напрямку *i*-го ортотропного шару циліндра $(r_i<r<r_{i+1})$ відповідно. У зв'язку з тим, що розглянута задача в осесимметричній постановці щодо осі *z*, переміщення u_θ^i не змінюється в коловому напрямку. Тому виразу (5.26) можна переписати в наступному вигляді:

$$\varepsilon_r^i=\frac{\partial u_r^i}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta^i=\frac{u_r^i}{r}, \quad \varepsilon_z^i=\frac{\partial u_z^i}{\partial z}, \quad \gamma_{\theta z}^i=0,$$

$$\gamma^{i}_{rz}=\frac{\partial u^{i}_{z}}{\partial r}+\frac{\partial u^{i}_{r}}{\partial z},\quad \gamma^{i}_{r\theta}=-\frac{u^{i}_{\theta}}{r}\qquad (i=1,2,...,N). \tag{5.27}$$

Рівняння рівноваги. В осесимметричній двовимірній постановці задачі рівняння рівноваги класичної анізотропної теорії пружності приймають вигляд:

$$\frac{\partial\sigma^{i}_{r}}{\partial r}+\frac{\partial\tau^{i}_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma^{i}_{r}-\sigma^{i}_{\theta}}{r}=0,$$

$$\frac{\partial\tau^{i}_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma^{i}_{z}}{\partial z}+\frac{\tau^{i}_{rz}}{r}=0. \tag{5.28}$$

Система з двох рівнянь рівноваги доповнюється третім рівнянням теплопровідності

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+f^{i}_{z}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)t_i=0. \tag{5.29}$$

У рівнянні (5.29) параметр $f^{i}_{z}=\lambda^{i}_{z}/\lambda^{i}_{r}$ являє собою відношення коефіцієнта теплопровідності i-шару в поздовжньому напрямку до коефіцієнта теплопровідності в радіальному напрямку.

Для вирішення поставленої задачі, складено систему з трьох диференціальних рівнянь в частинних похідних (5.28) – (5.29), необхідно задати граничні умови на торцях і лицьових поверхнях циліндра, а також умови контакту по зв'язаних поверхнях сусідніх шарів.

Граничні умови:

– на торцях і лицьових поверхнях циліндра

$$u^{i}_{r}(r,0)=0,\;\; \sigma^{i}_{z}(r,0)=\tau^{i}_{rz}(r,0)=0,\qquad u^{i}_{r}(r,l)=0,\;\; \sigma^{i}_{z}(r,l)=\tau^{i}_{rz}(r,l)=0,$$

$$\sigma^{1}_{r}(r_a,z)=q_a(z),\quad \tau^{1}_{rz}(r_a,z)=0,\qquad \sigma^{N}_{r}(r_b,z)=q_b(z),\quad \tau^{N}_{rz}(r_b,z)=0,$$

$$t^{i}(r,0)=t^{i}(r,l)=0\quad (i=1,2,..,N),\quad t^{1}(r_a,z)=t_a(z),\quad t^{N}(r_b,z)=t_b(z); \tag{5.30}$$

– по зв’язаних поверхнях сусідніх шарів

$$\sigma^{i-1}_{r}(r_i,z)=\sigma^{i}_{r}(r_i,z),\qquad \tau^{i-1}_{rz}(r_i,z)=\tau^{i}_{rz}(r_i,z),$$

$$u^{i-1}_{r}(r_i,z)=u^{i}_{r}(r_i,z),\qquad u^{i-1}_{z}(r_i,z)-u^{i}_{z}(r_i,z)=K\cdot\tau^{i}_{rz}(r_i,z),$$

$$t^{i-1}(r_i,z)=t^{i}(r_i,z),\quad \lambda^{i-1}\frac{\partial t^{i-1}(r_i,z)}{\partial r}=\lambda^{i}\frac{\partial t^{i}(r_i,z)}{\partial r}\quad (i=1,2,..,N). \tag{5.31}$$

В останній умові (5.31) параметр λ_i відповідає коефіцієнту теплопровідності *i*-го шару.

Безрозмірні параметри.

Для спрощення введення вихідних даних та узагальнення отриманих чисельних результатів, дотримуючись роботи [169], вводяться наступні безрозмірні величини:

$$R=\frac{r}{r_b},\quad R_a=\frac{r_a}{r_b},\quad R_b=\frac{r_b}{r_b}=1,\quad Z=\frac{z}{r_b},\quad L=\frac{l}{r_b},\quad A_{kl}^i=\frac{a_{kl}^i}{E_0},\quad \Gamma_k^i=\frac{\gamma_k^i}{\alpha_0 E_0},$$

$$T^i=\frac{t^i}{t_0},\quad \Lambda^i=\frac{\lambda^i}{\lambda_0},\quad U_r^i=\frac{u_r^i}{\alpha_0 E_0 r_b},\quad U_z^i=\frac{u_z^i}{\alpha_0 E_0 r_b},$$

$$S_r^i=\frac{\sigma_r^i}{\alpha_0 E_0 t_0},\quad S_z^i=\frac{\sigma_z^i}{\alpha_0 E_0 t_0},\quad S_\theta^i=\frac{\sigma_\theta^i}{\alpha_0 E_0 t_0},$$

$$TU_{rz}^i=\frac{\tau_{rz}^i}{\alpha_0 E_0 t_0},\quad Q_a(z)=\frac{q_a(z)}{\alpha_0 E_0 t_0},\quad Q_b(z)=\frac{q_b(z)}{\alpha_0 E_0 t_0},$$

$$T_a(z)=\frac{t_a(z)}{t_0},\quad T_b(z)=\frac{t_b(z)}{t_0}. \tag{5.32}$$

де E_0, λ_0**,** і α_0 – значення модуля Юнга, теплопровідності і коефіцієнта теплового лінійного розширення еталонного матеріалу t_0 – еталонна температура циліндра.

Постановка крайової задачі. Підставляючи геометричні співвідношення (5.27) в рівняння (5.25) та (5.28), а також з урахуванням безрозмірних параметрів введених вище, можна отримати

$$\left[A_{11}^i\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right)-\frac{A_{22}^i}{R^2}+A_{55}^i\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right]U_r^i+\left[\left(A_{13}^i+A_{55}^i\right)\frac{\partial^2}{\partial R\partial Z}+\left(A_{13}^i-A_{23}^i\right)\frac{\partial}{\partial Z}\right]U_z^i=$$
$$=\Gamma_r^i\frac{\partial T^i}{\partial R}+\frac{\Gamma_r^i-\Gamma_\theta^i}{R}T^i,$$

$$\left[\left(A_{13}^i+A_{55}^i\right)\frac{\partial^2}{\partial R\partial Z}+\left(A_{23}^i+A_{55}^i\right)\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial Z}\right]U_r^i+\left[A_{55}^i\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right)+A_{33}^i\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right]U_z^i=\Gamma_r^i\frac{\partial T^i}{\partial Z},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right)T^i+f_z^i\frac{\partial^2 T^i}{\partial Z^2}=0. \tag{5.33}$$

Граничні умови (5.30), (5.31), які записані за допомогою безрозмірних параметрів (5.32), приймають вигляд:

– на торцях і лицьових поверхнях циліндру

$$U_r^i(R,0)=0,\quad S_z^i(R,0)=TU_{rz}^i(R,0)=0,\quad U_r^i(R,l)=0,\ \ S_z^i(R,l)=TU_{rz}^i(R,l)=0,$$

$$S_r^1(R_a,z)=Q_a(z),\ \ TU_{rz}^1(R_a,z)=0,\quad S_r^N(R_b,z)=Q_b(z),\ \ TU_{rz}^N(R_b,z)=0,$$

$$T^i(R,0)=T^i(R,l)=0\quad (i=1,2,..,N),\ \ T^1(R_a,z)=T_a(z),\ \ T^N(R_b,z)=T_b(z);\qquad (5.34)$$

– по сполучених поверхнях сусідніх шарів

$$S_r^{i-1}(R_i,z)=S_r^i(R_i,z),\quad TU_{rz}^{i-1}(R_i,z)=TU_{rz}^i(R_i,z),$$

$$U_r^{i-1}(R_i,z)=U_r^i(R_i,z),\ \ U_z^{i-1}(R_i,z)-U_z^i(R_i,z)=K\cdot TU_{rz}^i(R_i,z),$$

$$T^{i-1}(R_i,z)=T^i(R_i,z),\ \ \Lambda^{i-1}\frac{\partial T^{i-1}(R_i,z)}{\partial R}=\Lambda^i\frac{\partial T^i(R_i,z)}{\partial R}\ \ (i=1,2,..,N).\qquad (5.35)$$

Вільне обпирання торців циліндра. Розв’язки крайової задачі (5.33) – (5.35) в напрямку повздовжньої осі знаходяться у вигляді тригонометричних рядів

$$U_r^i(R,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n^i(R)\sin(\beta z),\qquad U_z^i(R,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n^i(R)\cos(\beta z),$$

$$T_r^i(R,z)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n^i(R)\sin(\beta z),\qquad (5.36)$$

де $\beta=\dfrac{n\pi\chi_b}{L}$.

Підставляючи (5.36) в систему рівнянь (5.33), нескладно отримати її у наступному вигляді:

$$\left[A_{11}^i\left(\frac{d^2}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)-\frac{A_{22}^i}{R^2}+A_{55}^i\beta^2\right]\Phi_n^i(R)+$$

$$\left[\left(A_{13}^i+A_{55}^i\right)\beta\frac{d}{dR}+\left(A_{13}^i-A_{23}^i\right)\frac{\beta}{R}\right]\Psi_n^i(R)=\Gamma_r^i\frac{dF_n^i(R)}{dR}+\frac{\Gamma_r^i-\Gamma_\theta^i}{R}F_n^i(R),$$

$$\left[\left(A_{13}^i+A_{55}^i\right)\beta\frac{d}{dR}+\left(A_{23}^i+A_{55}^i\right)\frac{\beta}{R}\right]\Phi_n^i(R)+\left[\left[A_{55}^i\left(\frac{d^2}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)+A_{33}^i\beta^2\right]\right]\Psi_n^i(R)=\Gamma_r^iF_n^i(R),$$

$$\left[\left(\frac{d^2}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)-f_z^i\beta^2\right]F_n^i(R)=0.\qquad (5.37)$$

За аналогічною схемою перетворюються і граничні умови (5.34), (5.35):

– на лицьових поверхнях циліндру

$$A_{11}^1\frac{d\Phi_n^1(R_a)}{dR}+A_{12}^1\frac{\Phi_n^1(R_a)}{R}-\beta A_{13}^1\Psi_n^1(R_a)=Q_{an},\quad \beta\Phi_n^1(R_a)+\frac{d\Psi_n^1(R_a)}{dR}=0,$$

$$A_{11}^{N}\frac{d\Phi_n^N(R_b)}{dR}+A_{12}^{N}\frac{\Phi_n^N(R_b)}{R}-\beta A_{13}^{N}\Psi_n^N(R_b)=Q_{bn},\quad \beta\Phi_n^N(R_b)+\frac{d\Psi_n^N(R_b)}{dR}=0,$$

$$F_n^1(R_a)=T_{an}, F_n^N(R_b)=T_{bn};\qquad(5.38)$$

– на сполучених поверхнях сусідніх шарів

$$A_{11}^{i-1}\frac{d\Phi_n^{i-1}(R^i)}{dR}+A_{12}^{i-1}\frac{\Phi_n^{i-1}(R^i)}{R}-\beta A_{13}^{i-1}\Psi_n^{i-1}(R^i)=A_{11}^{i}\frac{d\Phi_n^{i-1}(R^i)}{dR}+A_{12}^{i}\frac{\Phi_n^{i-1}(R^i)}{R}-\beta A_{13}^{i}\Psi_n^{i}(R^i),$$

$$\beta\Phi_n^{i-1}(R^i)+\frac{d\Psi_n^{i-1}(R^i)}{dR}=\beta\Phi_n^{i}(R^i)+\frac{d\Psi_n^{i}(R^i)}{dR},\qquad \Phi_n^{i-1}(R^i)=\Phi_n^{i-1}(R^i),$$

$$\Psi_n^{i-1}(R^i)-\Psi_n^{i}(R^i)=K\left(\beta\Phi_n^{i}(R^i)+\frac{d\Psi_n^{i}(R^i)}{dR}\right),\quad F_n^{i-1}(R^i)=F_n^{i-1}(R^i),$$

$$\Lambda^{i-1}\frac{dF_n^{i-1}(R^i)}{dR}=\Lambda^{i}\frac{dF_n^{i}(R^i)}{dR}.\qquad(5.39)$$

Тут

$$Q_{an}=\frac{1}{L}\int_0^{2L}Q_a(Z)\sin(\beta Z)dZ,\quad Q_{bn}=\frac{1}{L}\int_0^{2L}Q_b(Z)\sin(\beta Z)dZ,$$

$$T_{an}=\frac{1}{L}\int_0^{2L}T_a(Z)\sin(\beta Z)dZ,\quad T_{bn}=\frac{1}{L}\int_0^{2L}T_b(Z)\sin(\beta Z)dZ.$$

Вважається, що в радіальному напрямі функціїи $\Phi_n^i(R^i)$, $\Psi_n^i(R^i)$, $F_n^i(R^i)$неперервні по товщині *i*-го шару, тоді за допомогою рядів Тейлора їх можна буде записати у вигляді:

$$\Phi_n^i(R)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^i(R-1)^k,\quad \Psi_n^i(R)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k^i(R-1)^k,\quad F_n^i(R)=\sum_{k=0}^{\infty}D_k^i(R-1)^k.\qquad(5.40)$$

Підставивши (5.40) в рівняння (5.38) і прийнявши коефіцієнти при $(R-1)^k$ до нуля, нескладно отримати наступні рекурентні співвідношення

$$C_{k+2}^i=\frac{1}{(k+2)(k+1)}\left[\begin{array}{l}-(k+1)C_{k+1}^i+\dfrac{A_{22}^i+\beta^2A_{55}^i}{A_{11}^i}C_k^i-\\ (k+1)\beta\dfrac{A_{13}^i+A_{55}^i}{A_{11}^i}B_{k+1}^i-\beta\dfrac{A_{13}^i-A_{23}^i}{A_{11}^i}B_k^i+\dfrac{\Gamma_r^i(k+1)}{A_{11}^i}D_{k+1}^i\end{array}\right],$$

$$B_{k+2}^i=\frac{1}{(k+2)(k+1)}\left[\begin{array}{l}-(k+1)B_{k+1}^i+\dfrac{\beta^2A_{33}^i}{A_{55}^i}B_k^i-\\ (k+1)\beta\dfrac{A_{13}^i+A_{55}^i}{A_{55}^i}C_{k+1}^i-\beta\dfrac{A_{55}^i+A_{23}^i}{A_{55}^i}C_k^i+\dfrac{\Gamma_z^i}{A_{55}^i}D_k^i\end{array}\right],$$

$$D^i_{k+2} = \frac{1}{(k+2)(k+1)}\left[-(k+1)D^i_{k+1} + \beta^2 B^i_k\right]. \tag{5.41}$$

Із рекурентних співвідношень (5.41) виходить, що всі коефіцієнти C_k^i, B_k^i і D_k^i можуть бути визначені через C_0^i, C_1^i, B_0^i, B_1^i, D_0^i , D_1^i, коли k > 1. Тоді розв'язки системи рівнянь (5.39) можуть бути записані в компактній формі

$$\Phi^i_n(R) = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} g^i_c(k,1)C^i_0 + g^i_c(k,2)C^i_1 + g^i_c(k,3)B^i_0 \\ + g^i_c(k,4)B^i_1 + g^i_c(k,5)D^i_0 + g^i_c(k,6)D^i_1 \end{bmatrix}(R-1)^k,$$

$$\Psi^i_n(R) = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} g^i_b(k,1)C^i_0 + g^i_b(k,2)C^i_1 + g^i_b(k,3)B^i_0 \\ + g^i_b(k,4)B^i_1 + g^i_b(k,5)D^i_0 + g^i_b(k,6)D^i_1 \end{bmatrix}(R-1)^k,$$

$$F^i_n(R) = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} g^i_d(k,1)C^i_0 + g^i_d(k,2)C^i_1 + g^i_d(k,3)B^i_0 \\ + g^i_d(k,4)B^i_1 + g^i_d(k,5)D^i_0 + g^i_d(k,6)D^i_1 \end{bmatrix}(R-1)^k, \tag{5.42}$$

де $g^i_b(k,o)$, $g^i_c(k,j)$, $g^i_d(k,j)$ константи, які визначаються за допомогою рекурентних співвідношень (5.42). Невідомі константи C_0^i, C_1^i, B_0^i, B_1^i, D_0^i, D_1^i, число яких визначається кількістю дискретних шарів циліндру N, знаходяться шляхом підстановки виразів (5.42) в граничні умови (5.38), (5.39). Отримана при цьому лінійна алгебраїчна система рівнянь включає 6N невідомих констант.

Визначивши значення виразів (5.42) і підставивши їх до заданих розв'язків (5.36), неважко за допомогою геометричних и фізичних співвідношень, що наведені вище, отримати розв'язок розглянутої термопружної крайової задачі.

5.4. Конструкційна міцність багатошарових тонкостінних елементів у формі оболонок обертання

5.4.1. Напружений стан багатошарової циліндричної оболонки із композиційного матеріалу з урахуванням температурного навантаження.

Геометричні параметри циліндричної оболонки: r_a= 0,05м, r_b= 0,06 м и l= 0,05 м. У результаті контакту обертових і нерухомих деталей під час нерозрахункового режиму виникає теплове навантаження на внутрішній поверхні:

$$t_a(z) = \Delta t \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{\ell}\right), \quad t_b(z) = 0,$$

де $\Delta t = t_a(\ell/2) - t_b(\ell/2)$. Вважається, що зміна температурного навантаження на лицьових поверхнях оболонки дорівнює $-\Delta t = 80\,K$.

Багатошарова оболонка складається з N=3 дискретних анізотропних шарів. Розглядається кілька варіантів таких циліндрів, виготовлених з композиційних матеріалів: вуглепластика, склопластику, боропластика і композитів на основі волокна кевлар-49. Всі три шари мають однакові пружні та фізичні властивості, які визначаються за методикою, запропонованої в главі 3.

Фізико-механічні характеристики волокон і матриці, розглянутих композитів представлені нижче, а інтегральні характеристики дискретного шару із заданими кодами армування в табл. 5.1 і табл. 5.2.

Склопластик. Модуль пружності $E_в$ і коефіцієнт Пуассона $\nu_в$ намотуваних стрічок, набраних з алюмоборосилікатних ниток, відповідно дорівнюють $E_в = 55000\ МПа,\ \ \nu_в = 0{,}25$. Як матриця склопластику використовувався епоксидний полімер з наступними параметрами пружності: $E_м = 3550\,МПа,\ \ \nu_м = 0{,}4$. У кожному односпрямованому шарі товщиною 0,157мм зміст, займаний стрічками, становить $V_в = 0{,}7$ від загального об'єму. Фізичні властивості: $\alpha_в = 5 \cdot 10^{-6}\,K^{-1},\ \ \alpha_м = 45 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}$ – коефіцієнти лінійного теплового розширення волокна і матриці; $\lambda_в = 1{,}05\,Вт/(м \cdot K),\ \ \lambda_м = 0{,}133\,Вт/(м \cdot K)$ – коефіцієнти теплопровідності. Кожен дискретний анізотропний шар склопластику складається з 21 односпрямованих шарів з кодами армування: $[45^\circ/90^\circ/\pm 45^\circ/(0^\circ/90^\circ_2)_2/\bar{0}^\circ]_S$ – перший варіант; $[45^\circ/0^\circ/\pm 45^\circ/(90^\circ/0^\circ_2)_2/\bar{0}^\circ]_S$ – другий варіант.

Вуглепластик. Згідно паспортним даним модулі пружності $E_в$ і коефіцієнт Пуассона $\nu_в$ вуглецевого волокна ЛУ-03 відповідно дорівнюють 235000МПа та 0,3. Механічні характеристики матриці вуглепластика (сополімер епокситрифенольної та аніліноформальдегідної смол) – $E_м = 3500\,МПа$, $\nu_м = 0{,}32$. У кожному моношарі товщиною 0,107мм зміст, займаний волокнами, становить $V_в = 0{,}55$ від загального об'єму. Фізичні властивості: $\alpha_{в} = -1{,}2 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, $\alpha_{м} = 45 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ – коефіцієнти лінійного теплового розширення волокна і матриці; $\lambda_{в} = 20{,}0\, Вт/(м \cdot K)$, $\lambda_{м} = 0{,}133\, Вт/(м \cdot K)$ – коефіцієнти теплопровідності. Кожен дискретний анізотропний шар вуглепластика складається з 31односпрямованого шару з кодами армування: $[0^{\circ}/90^{\circ}_{2}/90^{\circ}_{2}/\pm 45^{\circ}/(90^{\circ}_{2}/0)_{2}/\pm 45^{\circ}/\overline{0}^{\circ}]_{S}$ – перший варіант;

$[90^{\circ}/0^{\circ}_{2}/0^{\circ}_{2}/\pm 45^{\circ}/(0^{\circ}_{2}/90)_{2}/\pm 45^{\circ}/\overline{0}^{\circ}]_{S}$ – другий варіант.

Анізотропний шар на основі волокна кевлар-49. Модуль пружності $E_{в}$ і коефіцієнт Пуассона $\nu_{в}$ волокна кевлар-49 дорівнюють $E_{в} = 131000\ МПа$, $\nu_{в} = 0{,}35$. Як матриця використався епоксидний полімер з наступними параметрами пружності: $E_{м} = 3500\, МПа$, $\nu_{м} = 0{,}35$. У кожному односпрямованому шарі товщиною 0,157мм зміст, займаний стрічками, становить $V_{в} = 0{,}6$ від загального об’єму. Фізичні властивості: $\alpha_{в} = -2 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, $\alpha_{м} = 60 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ – коефіцієнти лінійного теплового розширення волокна і матриці; $\lambda_{в} = 4{,}816\, Вт/(м \cdot K)$, $\lambda_{м} = 0{,}133\, Вт/(м \cdot K)$ – коефіцієнти теплопровідності.

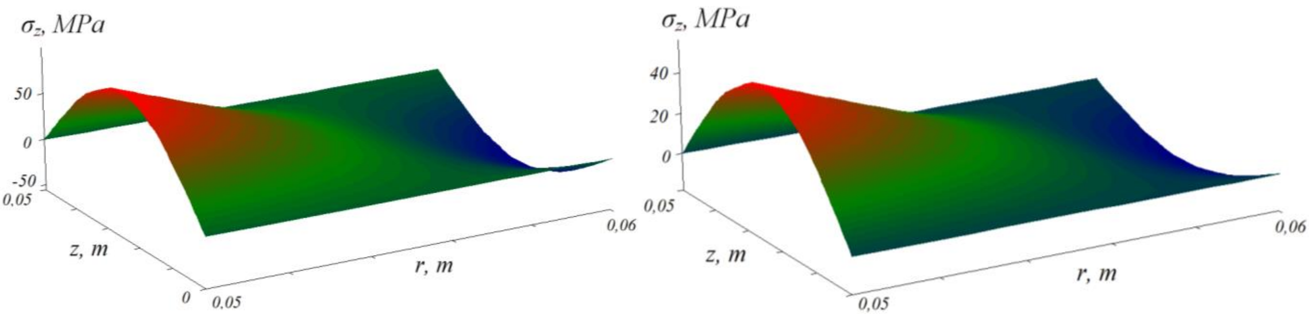
Кожен дискретний анізотропний шар склопластику складається з 21односпрямованих шарів кодами армування: $[45^{\circ}/90^{\circ}/\pm 45^{\circ}/(0^{\circ}/90^{\circ}_{2})_{2}/\overline{0}^{\circ}]_{S}$ – перший варіант; $[45^{\circ}/0^{\circ}/\pm 45^{\circ}/(90^{\circ}/0^{\circ}_{2})_{2}/\overline{0}^{\circ}]_{S}$ – другий варіант.

Боропластик. Модуль пружності $E_{в}$ і коефіцієнт Пуассона $\nu_{в}$ высокомодульнтх борних волокон відповідно дорівнюють 400000МПа і 0,2. Механічні характеристики епоксидної матриці – $E_{м} = 4200\ МПа$, $\nu_{м} = 0{,}35$. У кожному моношарі товщиною 0,107мм зміст, займаний волокнами, становить $V_{в} = 0{,}5$ від загального об’єму. Фізичні властивості: $\alpha_{в} = 4{,}0 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, $\alpha_{м} = 40{,}0 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ – коефіцієнти лінійного теплового розширення волокна і матриці; $\lambda_{в} = 38{,}0\, Вт/(м \cdot K)$, $\lambda_{м} = 0{,}133\, Вт/(м \cdot K)$ – коефіцієнти теплопровідності. Кожен дискретний анізотропний шар боропластика складається з 31односпрямованого шару з кодами армування: $[0^\circ/90^\circ_2/90^\circ_2/\pm 45^\circ/(90^\circ_2/0)_2/\pm 45^\circ/\overline{0}^\circ]_S$ – перший варіант; $[90^\circ/0^\circ_2/0^\circ_2/\pm 45^\circ/(0^\circ_2/90)_2/\pm 45^\circ/\overline{0}^\circ]_S$ – другий варіант.

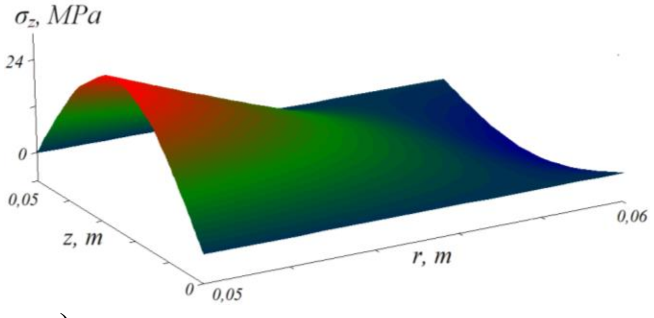
Таблиця 5.1 – Фізико-механічні характеристики дискретних шарів оболонки (перший варіант)

Матеріал	E_{ij}, МПа	G_{ij}, МПа	ν_{ij}	ν_{ji}	α_j, $К^{-1}$	λ_j, $Вт/(м \cdot К)$
Вугле-пластик	$E_z = 45390$ $E_\theta = 79210$ $E_r = 13700$	$G_{\theta z} = 12070$ $G_{r\theta} = 4113$ $G_{rz} = 3628$	$\nu_{z\theta} = 0{,}126$ $\nu_{zr} = 0{,}312$ $\nu_{\theta r} = 0{,}308$	$\nu_{\theta z} = 0{,}219$ $\nu_{rz} = 0{,}094$ $\nu_{r\theta} = 0{,}053$	$\alpha_z = 21{,}8 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_\theta = 11{,}7 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_r = 13{,}1 \cdot 10^{-6}$	$\lambda_z = 4{,}114$ $\lambda_\theta = 7{,}239$ $\lambda_r = 0{,}285$
Скло_-пластик	$E_z = 23980$ $E_\theta = 32470$ $E_r = 14040$	$G_{\theta z} = 11200$ $G_{rz} = 5636$ $G_{r\theta} = 6378$	$\nu_{z\theta} = 0{,}147$ $\nu_{zr} = 0{,}338$ $\nu_{\theta r} = 0{,}335$	$\nu_{\theta z} = 0{,}199$ $\nu_{rz} = 0{,}198$ $\nu_{r\theta} = 0{,}145$	$\alpha_z = 20{,}5 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_\theta = 14{,}9 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_r = 25{,}3 \cdot 10^{-6}$	$\lambda_z = 0{,}507$ $\lambda_\theta = 0{,}61$ $\lambda_r = 0{,}332$
Композит на основі волокна кевлар 49	$E_z = 33190$ $E_\theta = 48690$ $E_r = 13280$	$G_{\theta z} = 9582$ $G_{rz} = 4100$ $G_{r\theta} = 4578$	$\nu_{z\theta} = 0{,}156$ $\nu_{zr} = 0{,}343$ $\nu_{\theta r} = 0{,}343$	$\nu_{\theta z} = 0{,}228$ $\nu_{rz} = 0{,}137$ $\nu_{r\theta} = 0{,}093$	$\alpha_z = 26{,}7 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_\theta = 16{,}1 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_r = 23{,}8 \cdot 10^{-6}$	$\lambda_z = 1{,}319$ $\lambda_\theta = 1{,}943$ $\lambda_r = 0{,}31$
Боро-пластик	$E_z = 65790$ $E_\theta = 119700$ $E_r = 17880$	$G_{\theta z} = 16770$ $G_{r\theta} = 4240$ $G_{rz} = 3775$	$\nu_{z\theta} = 0{,}119$ $\nu_{zr} = 0{,}336$ $\nu_{\theta r} = 0{,}328$	$\nu_{\theta z} = 0{,}216$ $\nu_{rz} = 0{,}091$ $\nu_{r\theta} = 0{,}049$	$\alpha_z = 23{,}8 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_\theta = 15{,}1 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_r = 13{,}3 \cdot 10^{-6}$	$\lambda_z = 6{,}937$ $\lambda_\theta = 12{,}4$ $\lambda_r = 0{,}257$

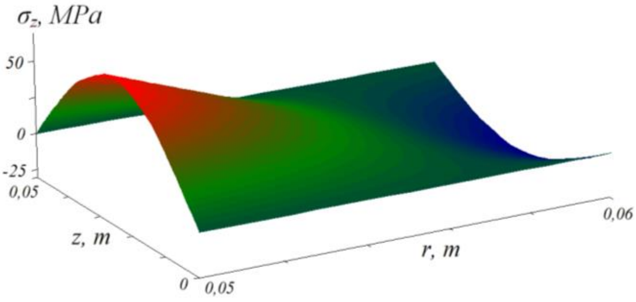
На рис. 5.3 – 5.6 показані графіки розподілу напружень в точках розглянутого варіанту циліндра, для першого варіанта армування. Фізико-механічні характеристики матеріалу першого варіанта циліндра наведені в табл. 5.1.



а) б)

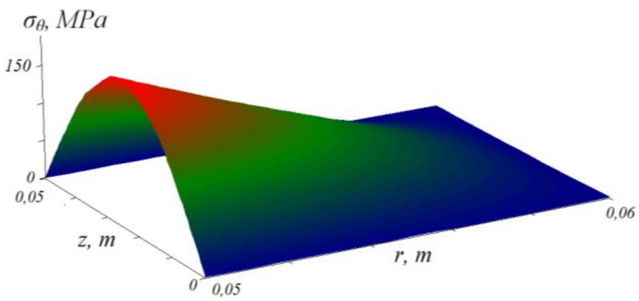


в)

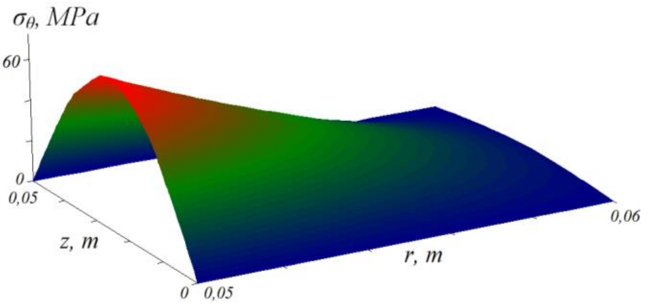


г)

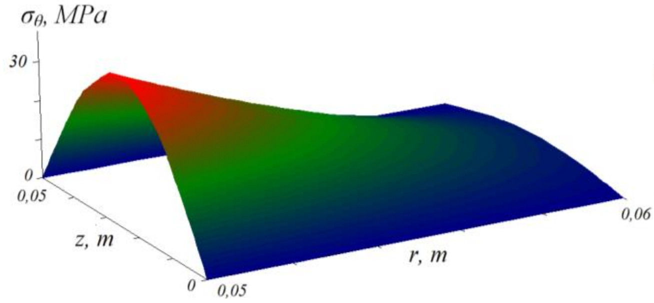
Рисунок 5.3 – Розподіл осьових напружень (перший варіант):
а) боропластик; б) кевлар; в) склопластик; г) вуглепластик



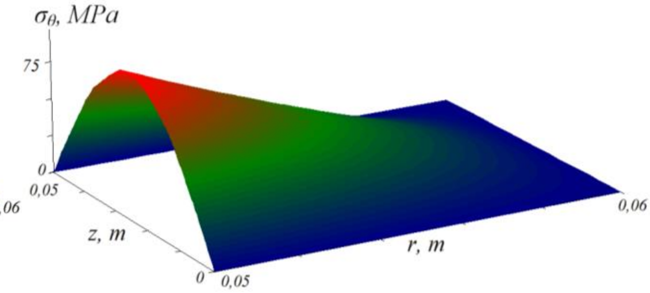
а)



б)

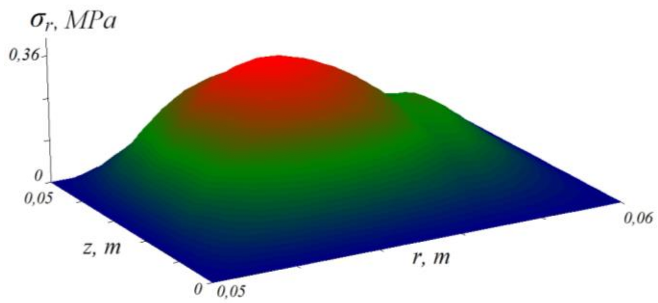


в)

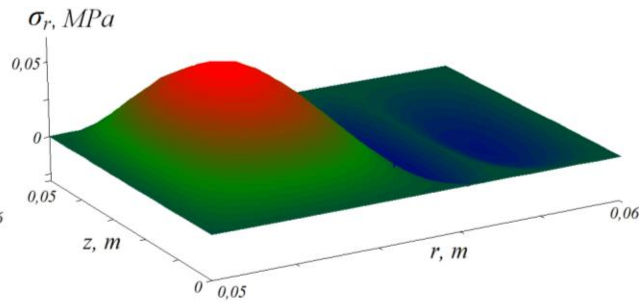


г)

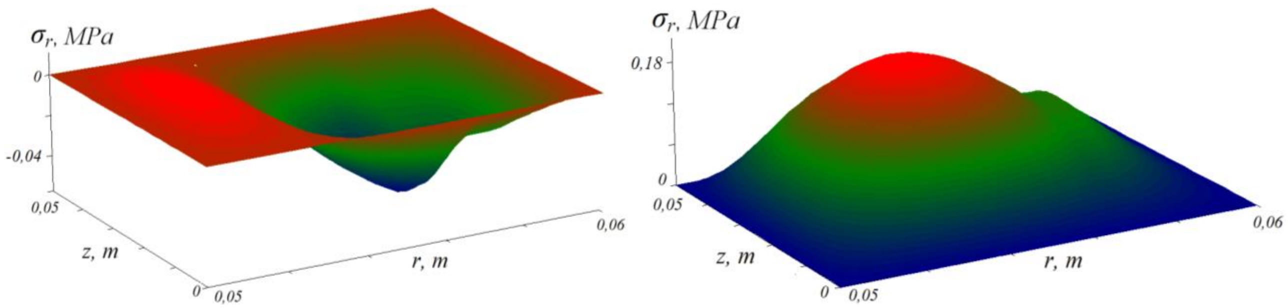
Рисунок 5.4 – Розподіл колових напружень (перший варіант):
а) боропластик; б) кевлар; в) склопластик; г) вуглепластик



а)

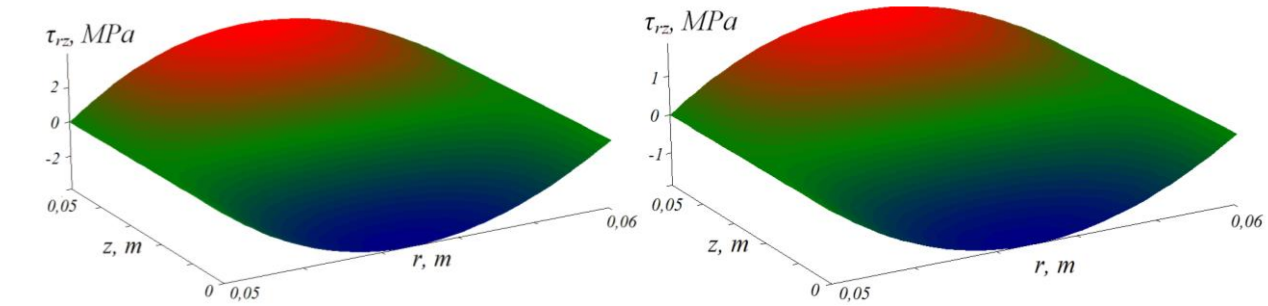


б)

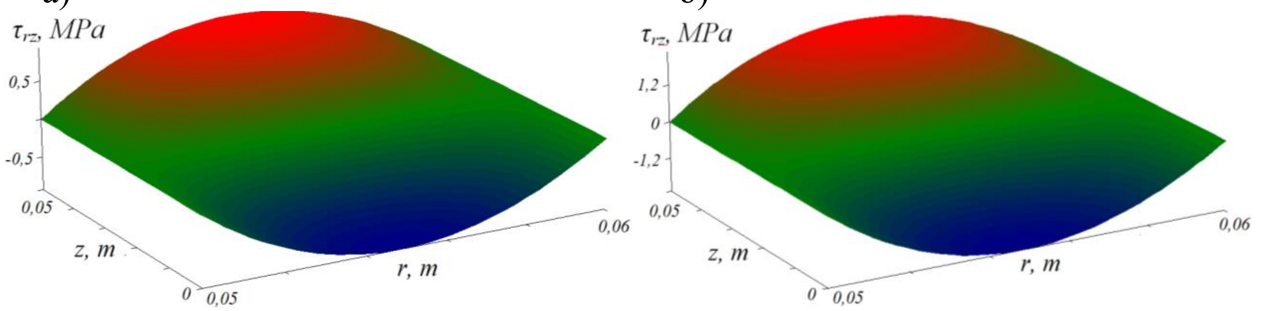


в) г)

Рисунок 5.5 – Розподіл радіальних напружень (перший варіант):
а) боропластик; б) кевлар; в) склопластик; г) вуглепластик



а) б)



в) г)

Рисунок 5.6 – Розподіл напружень поперечного зсуву (перший варіант):
а) боропластик; б) кевлар; в) склопластик; г) вуглепластик

Таблиця 5.2 – Фізико-механічні характеристики дискретних шарів оболонки (другий варіант)

Матеріал	E_{ij}, МПа	G_{ij}, МПа	ν_{ij}	ν_{ji}	α_j, K^{-1}	λ_j, Вт/(м·К)
Вугле-пластик	$E_z = 82870$ $E_\theta = 41580$ $E_r = 13670$	$G_{\theta z} = 12070$ $G_{r\theta} = 3574$ $G_{rz} = 4167$	$\nu_{z\theta} = 0{,}239$ $\nu_{zr} = 0{,}305$ $\nu_{\theta r} = 0{,}311$	$\nu_{\theta z} = 0{,}12$ $\nu_{rz} = 0{,}053$ $\nu_{r\theta} = 0{,}102$	$\alpha_z = 10{,}6 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_\theta = 22{,}9 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_r = 13{,}1 \cdot 10^{-6}$	$\lambda_z = 7{,}587$ $\lambda_\theta = 3{,}766$ $\lambda_r = 0{,}285$

Скло_-пластик	$E_z = 34140$ $E_\theta = 22270$ $E_r = 14010$	$G_{\theta z} = 11190$ $G_{rz} = 6526$ $G_{r\theta} = 5488$	$\nu_{z\theta} = 0{,}214$ $\nu_{zr} = 0{,}332$ $\nu_{\theta r} = 0{,}338$	$\nu_{\theta z} = 0{,}14$ $\nu_{rz} = 0{,}136$ $\nu_{r\theta} = 0{,}212$	$\alpha_z = 13{,}7 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_\theta = 21{,}6 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_r = 25{,}3 \cdot 10^{-6}$	$\lambda_z = 0{,}631$ $\lambda_\theta = 0{,}486$ $\lambda_r = 0{,}332$
Композит на основі волокна кевлар 49	$E_z = 51720$ $E_\theta = 30040$ $E_r = 13240$	$G_{\theta z} = 9577$ $G_{rz} = 4673$ $G_{r\theta} = 4005$	$\nu_{z\theta} = 0{,}252$ $\nu_{zr} = 0{,}339$ $\nu_{\theta r} = 0{,}341$	$\nu_{\theta z} = 0{,}146$ $\nu_{rz} = 0{,}087$ $\nu_{r\theta} = 0{,}150$	$\alpha_z = 13{,}9 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_\theta = 28{,}8 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_r = 23{,}8 \cdot 10^{-6}$	$\lambda_z = 2{,}068$ $\lambda_\theta = 1{,}194$ $\lambda_r = 0{,}31$
Боро-пластик	$E_z = 125500$ $E_\theta = 59730$ $E_r = 17850$	$G_{\theta z} = 16770$ $G_{r\theta} = 3723$ $G_{rz} = 4292$	$\nu_{z\theta} = 0{,}238$ $\nu_{zr} = 0{,}323$ $\nu_{\theta r} = 0{,}335$	$\nu_{\theta z} = 0{,}113$ $\nu_{rz} = 0{,}046$ $\nu_{r\theta} = 0{,}1$	$\alpha_z = 14{,}1 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_\theta = 24{,}7 \cdot 10^{-6}$ $\alpha_r = 13{,}3 \cdot 10^{-6}$	$\lambda_z = 13{,}0$ $\lambda_\theta = 6{,}33$ $\lambda_r = 0{,}257$

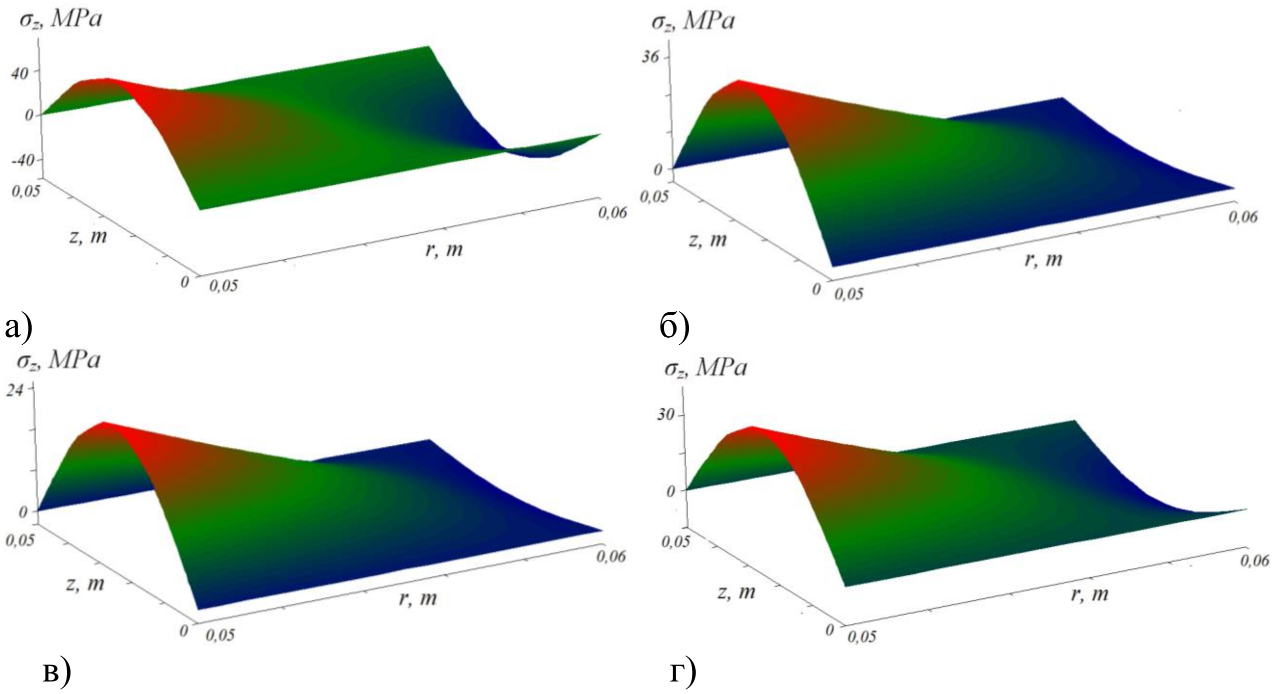
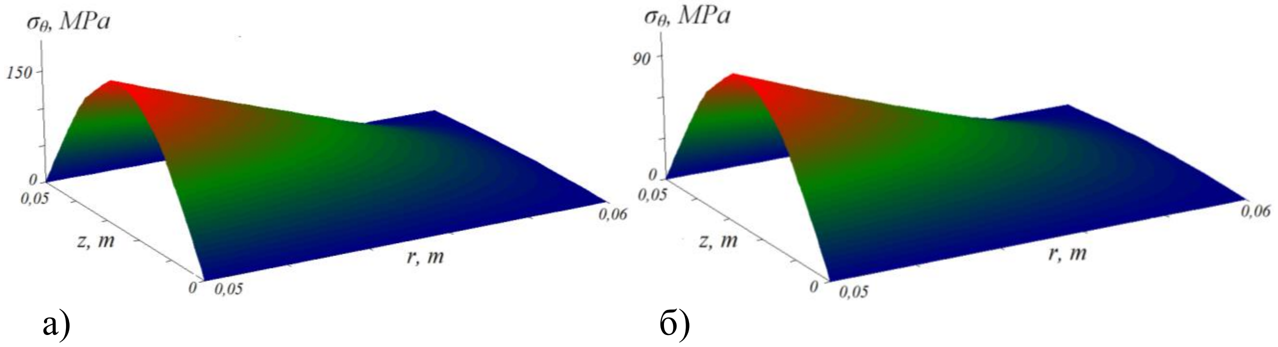
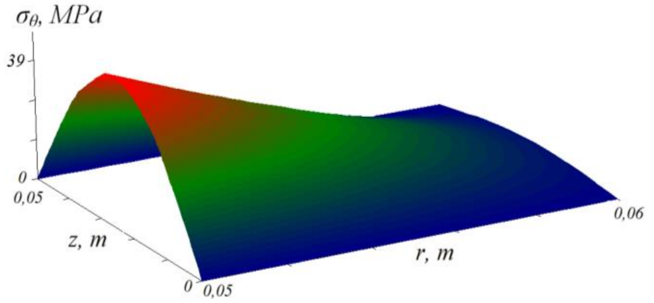
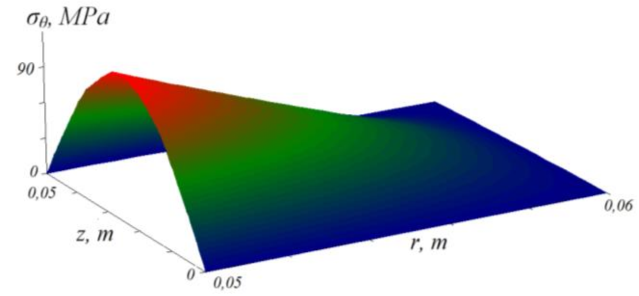


Рисунок 5.7 – Розподіл осьових напружень(другий варіант):
а) боропластик; б) кевлар; в) склопластик; г) вуглепластик



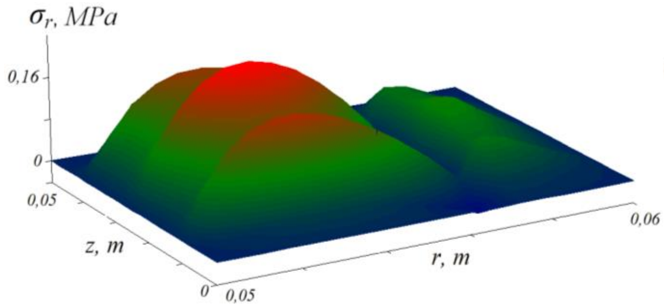


в)

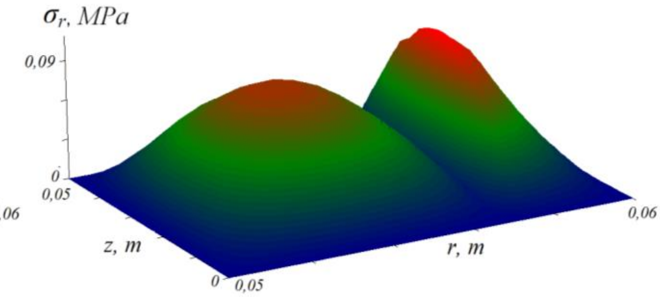


г)

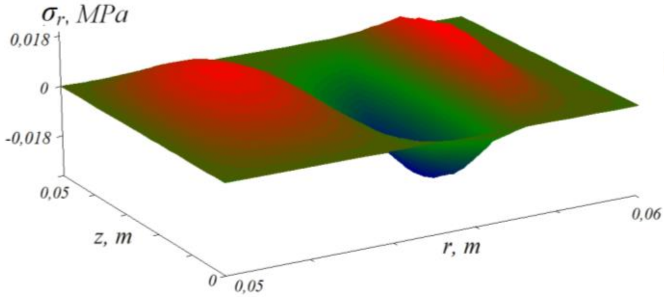
Рисунок 5.8 – Розподіл колових напружень (другий варіант):
а) боропластик; б) кевлар; в) склопластик; г) вуглепластик



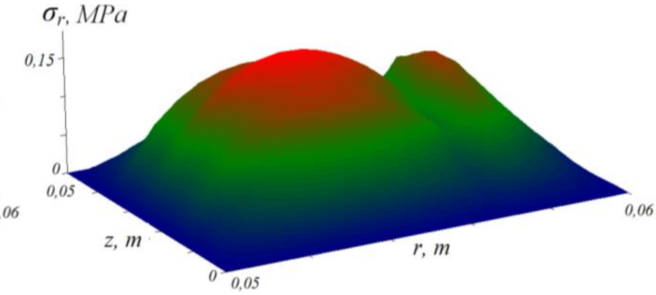
а)



б)

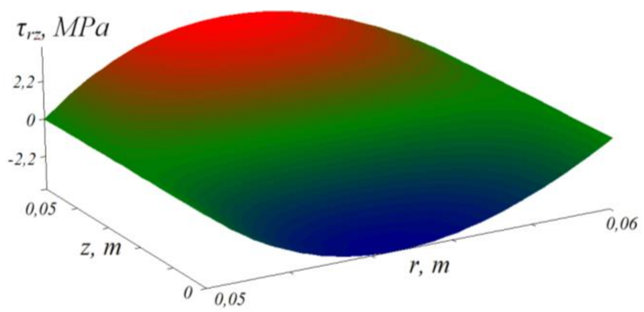


в)

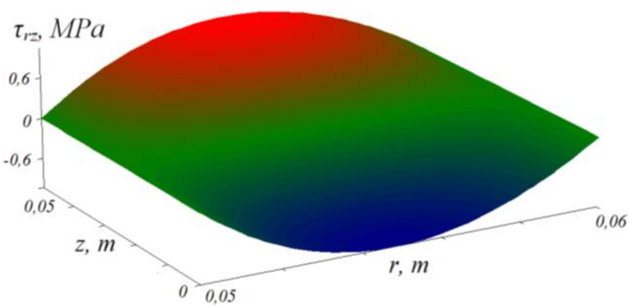


г)

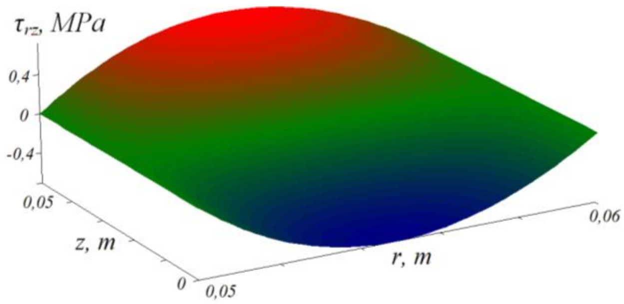
Рисунок 5.9 – Розподіл радіальних напружень (другий варіант):
а) боропластик; б) кевлар; в) склопластик; г) вуглепластик



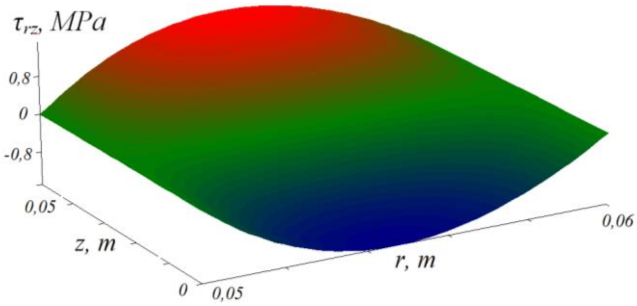
а)



б)



в)



г)

Рисунок 5.10 – Розподіл напружень поперечного зсуву (другий варіант): а) боропластик; б) кевлар; в) склопластик; г) вуглепластик

Слід зазначити, що отримані значення фізико-механічних характеристик композиційних матеріалів задовільно співпадають з експериментальними даними, наведеними в роботі [170].

Максимальні значення тангенціальних нормальних напружень виникають у середній частині оболонки, в точках внутрішньої лицьової поверхні. Так, наприклад, нормальні напруження в поздовжньому напрямку σ_z залежно від матеріалу оболонки змінюються від $\sigma_z = 31$ МПа (склопластик) до $\sigma_z = 100$ МПа (боропластик). В коловому напрямку напруження σ_θ у циліндрі з боропластика в 5 разів перевищують відповідні напруження, які виникають у циліндрі зі склопластику: $\sigma_\theta = 188$ МПа (боропластик), $\sigma_\theta = 97$ МПа (вуглепластик), $\sigma_\theta = 72$ МПа (кевлар), $\sigma_\theta = 38$ МПа (склопластик).

Максимальне значення радіальних напружень у кільці з боропластика не перевищує $\sigma_r = 0{,}4$ МПа. У циліндрі зі склопластику ці напруження практично відсутні і не впливають на його міцність. Слід зазначити, помітне збільшення дотичних напружень поперечного зсуву τ_{rz} на торцях оболонки: $\tau_{rz} = 4$ МПа (боропластик), $\tau_{rz} = 2{,}2$ МПа (вуглепластик), $\tau_{rz} = 1{,}8$ МПа (кевлар), $\tau_{rz} = 0{,}9$ МПа (склопластик).

Таким чином, можна стверджувати що, запропонована експериментально-теоретична методика визначення пружних і термопружних сталих композиційних матеріалів. Наведено фізико-механічні характеристики армованих матеріалів: боропластиков, склопластиків, вуглепластиков і композиційного матеріалу, виготовленого на основі волокон кевлар 49. Розглянуто різні варіанти армування таких матеріалів. На основі дискретно-структурної теорії проведені дослідження напружено-деформованого стану багатошарових циліндричних оболонок при дії теплового навантаження. При цьому враховуються як статичні, так і кінематичні умови взаємодії сполучених шарів. Як ілюстрація були проведені чисельні розрахунки багатошарових оболонок, виконаних з різних армованих пластиків. Запропонований алгоритм рішення, розглянутого тут класу задач, дозволяє одержувати розрахункові дані для оцінки впливу фізико-механічних характеристик окремих шарів на термопружний деформований стан неоднорідних по товщині циліндрів. Показано, що в менш жорстких циліндрах зі склопластику тангенціальні напруження, які виникають від дії температурного навантаження, приблизно в 3 рази менше напружень у кільці з вуглепластика.

5.4.2. Розрахунок на міцність бандажного та муфтового з’єднань склопластикових труб.

Розрахунок на міцність бандажного з'єднання. На рис. 5.11 показаний загальний вид бандажного з'єднання склопластикових труб (L = 240 мм, L_1 = 140мм, D = 113 мм). Пружні сталі труб наведені в табл. 5.3, бандажа – у табл. 5.5. Тут розглядається 2 варіанти бандажного з'єднання. У першому класичному варіанті товщина труб у місці їхнього стику приймається постійною. У другому варіанті приймається з'єднання у вус (рис. 5.11), коли товщина труби лінійно зменшується із зовнішньої сторони до торців труб, що з'єднують.

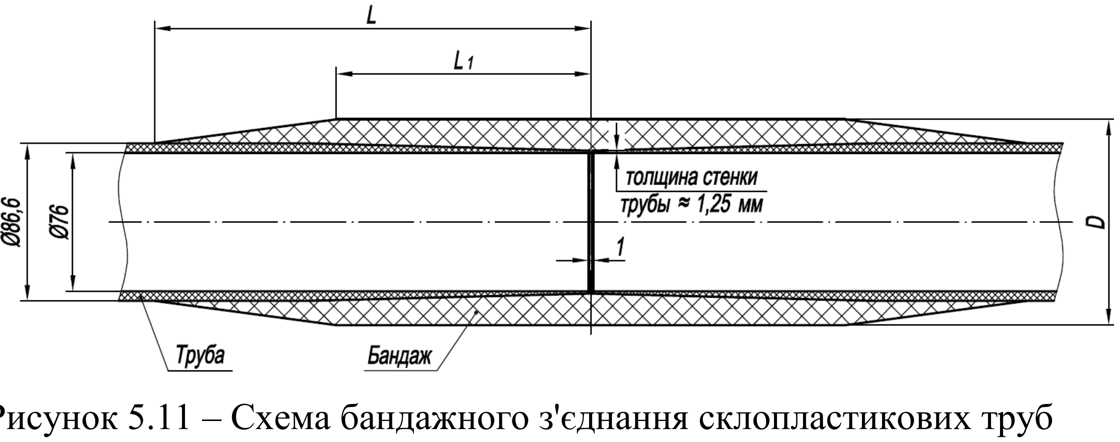


Рисунок 5.11 – Схема бандажного з'єднання склопластикових труб

Склопластикова труба містить 16 односпрямованих армованих шарів із заданою схемою укладання: $[0^{\circ}_{4}/-75^{\circ}/0^{\circ}_{2}/-75^{\circ}/75^{\circ}/0^{\circ}_{2}/-75^{\circ}/0^{\circ}_{4}]$. Модулі пружності – $E_в$, $G_в$, коефіцієнт Пуассона $\nu_в$, алюмоборосилікатних стрічок, набраних з ровинга Е-600 (виготовлено в КНР), відповідно дорівнюють $E_в$=55000МПа, $G_в$=22000МПа, $\nu_в$=0,25. Матриця склопластику – епоксидний полімер з наступними параметрами пружності: $E_м$=3550МПа, $G_м$=1270МПа, $\nu_м$=0,4. У кожному моношарі товщиною 0,25 мм об'єм, займаний стрічками, становить 70% від загального.

Таблиця 5.3 – Експериментально-теоретичні значення пружних характеристик склопластикової труби

№ типо-розміру	Результати експерименту		Експериментально – теоретичні значення			
	$E_i^Э$, МПа	S, %	E_{ii}, МПа	G_{ij}, МПа	ν_{ij}	ν_{ji}
1	$E_\theta^Э = 36050$	0,91	$E_z = 23800$ $E_\theta = 35500$ $E_r = 22900$	$G_{\theta z} = 7340$ $G_{rz} = 4870$ $G_{r\theta} = 6760$	$\nu_{z\theta} = 0,069$ $\nu_{zr} = 0,399$ $\nu_{\theta r} = 0,406$	$\nu_{\theta z} = 0,107$ $\nu_{rz} = 0,415$ $\nu_{r\theta} = 0,272$
2	$E_z^Э = 24100$	0,92				

Примітка: E_z, E_θ, E_r – модулі пружності 1-го роду в поздовжньому,коловому і радіальному напрямках; $G_{\theta z}, G_{rz}, G_{r\theta}$ – модулі зсуву; $\nu_{z\theta} = \nu_{\theta z}$, $\nu_{\theta r} = \nu_{r\theta}$, $\nu_{rz} = \nu_{zr}$ – коефіцієнти Пуассона.

Склопластикова труба виготовлялася методом намотування на розбірне циліндричне оправлення. Сполучна композиція включала 100 масових частин (мас. ч.) епоксидної смоли Epicot 828, попередньо прогрітої до температури 70^{0}С. У приготовлений об'єм епоксидної смоли додавали 2 мас.ч. прискорювачі УП-606/2 й 80 мас. ч. та отверджувача MTHPA (виготовлено в КНР).

Інші експериментально-теоретичні значення механічні характеристика склопластику (табл. 5.3) визначалися інтегрально для всього пакета шарів за методикою, наведеною в розділі 3. Для визначення граничних напружень зразки кожної серії доводили до руйнування при випробуванні на розтягання (ДЕРЖСТАНДАРТ 25.601 – 80), на стискання (ДЕРЖСТАНДАРТ 25.602 – 80). Вважаючи, що певні значення граничних напружень являють собою нормально розподілену генеральну сукупність параметрів, у табл. 5.4 наведені довірчі інтервали середнього значення граничних напруг $\pm a_{\sigma cp}$ при довірчій імовірності $1-\alpha = 0{,}95$.

Як відзначається в роботах [170, 171] розкид експериментальних значень граничних руйнівних напружень поперечного зсуву та обтиснення досить

Таблиця 5.4 – Експериментальні значення граничних напружень склопластиків

σ_θ^+, МПа	$\pm a_{\sigma cp}$, МПа	σ_z^+, МПа	$\pm a_{\sigma cp}$, МПа	σ_θ^-, МПа	$\pm a_{\sigma cp}$, МПа	σ_z^+, МПа	$\pm a_{\sigma cp}$, МПа
410	5	240	6	360	7	190	5

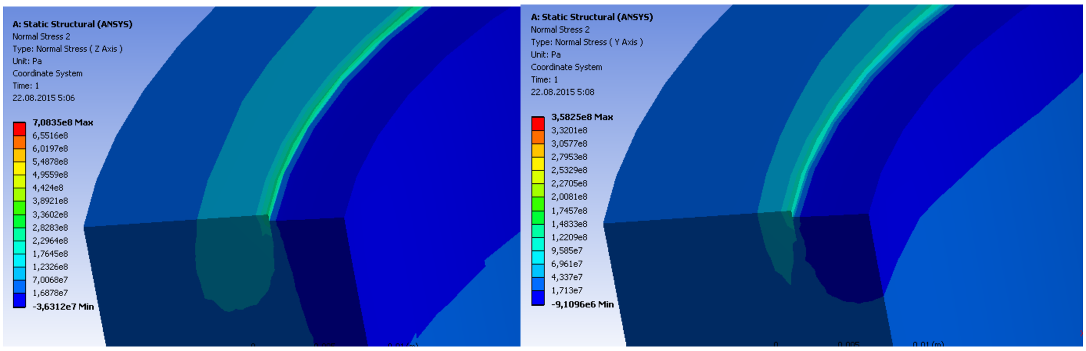
великий, що в першу чергу пов'язане з особливістю будови армованих пластиків, трудомісткістю й складністю проведення експерименту. Тому для проведення подальших досліджень були прийняті середні значення граничних напружень: $\sigma_{33}^- = 90\,\text{МПа}$, $\sigma_{33}^+ = 16\,\text{МПа}$, $\sigma_{13}^- = \sigma_{13}^+ = \sigma_{23}^- = \sigma_{23}^+ = 30\,\text{МПа}$, $\sigma_{12}^- = \sigma_{12}^+ = 50\,\text{МПа}$.

Таблиця 5.5 – Фізико-механічні характеристики бандажа

Схема армування	E_{ii}, МПа	G_{ij}, МПа	ν_{ij}	ν_{ji}
$[(0^\circ/90^\circ)_6]_S$	$E_z = 20260$ $E_\theta = 20260$ $E_r = 9989$	$G_{\theta z} = 4254$ $G_{rz} = 2947$ $G_{r\theta} = 2947$	$\nu_{z\theta} = 0{,}15$ $\nu_{zr} = 0{,}39$ $\nu_{\theta r} = 0{,}39$	$\nu_{\theta z} = 0{,}15$ $\nu_{rz} = 0{,}16$ $\nu_{r\theta} = 0{,}16$

Розрахунок і аналіз напружено-деформованого стану досліджуваних з'єднань проводиться на основі результатів рішення осесиметричної задачі теорії пружності для неоднорідного тіла в пакеті прикладних програм ANSYS. При цьому деформування як бандажного, так і муфтового з'єднань супроводжується значними деформаціями згинання. Дослідження збіжності рішення показало, що для розрахунку на міцність даних з'єднань досить використати сітку з характерним розміром елемента 0,075 – 0,1 товщини шару. Найнебезпечніший, визначальний початок розшарування конструкції, є міжшарові напруження поперечного зсуву і трансверсального відриву. Максимальні значення цих напружень виникають у зоні контакту торців труб, що з'єднуються, і бандажа. Тому для підвищення міцності бандажних з'єднань, у першу чергу, необхідно збільшувати міжшарову міцність склопластику на відрив.

Нехай склопластикова труба навантажена внутрішнім тиском 17 МПа. Напружений стан першого варіанта бандажного з'єднання наведений на рис. 5.12 – 5.14.



а) б)

Рисунок 5.12 – Розподіл нормальних напружень: а) тангенціальних – σ_Θ ; б) поздовжніх – σ_z

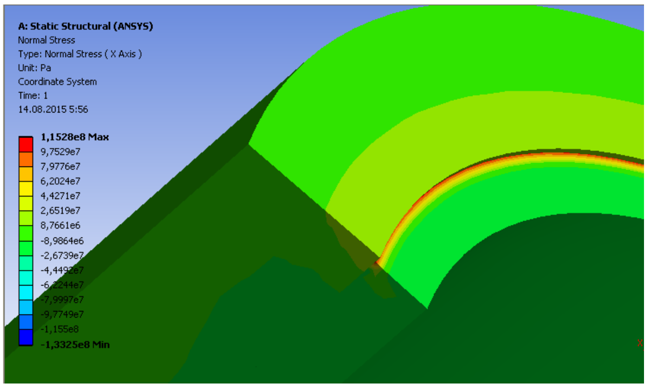
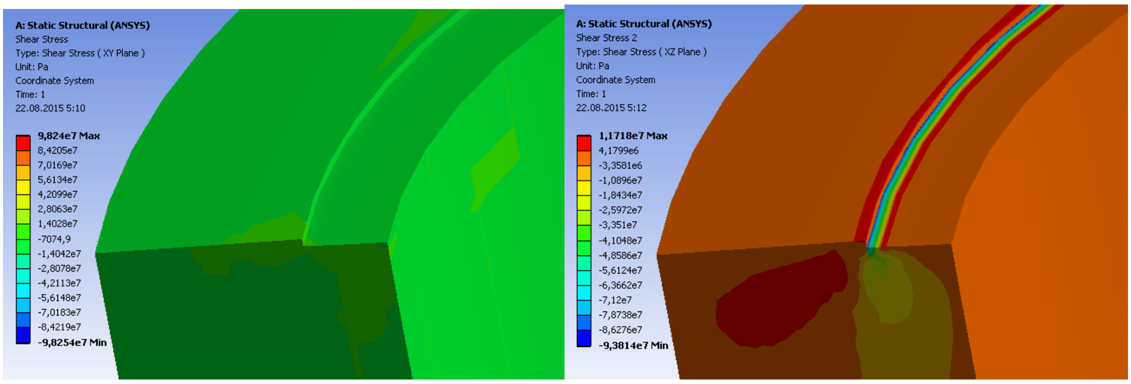


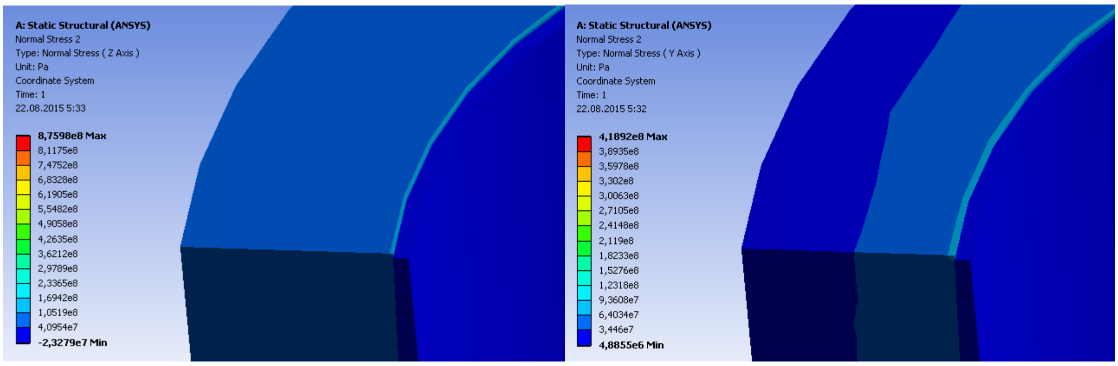
Рисунок 5.13 – Розподіл трансверсальних (радіальних) напружень σ_r



а) б)

Рисунок 5.14 – Розподіл дотичних напружень поперечного зсуву: а) $\tau_{r\Theta}$; б) τ_{rz}

Напружений стан другого варіанту бандажного з'єднання наведений на рис. 5.15 – 5.17.



а) б)

Рисунок 5.15 – Розподіл нормальних напружень: а) тангенціальних – σ_{Θ} ; б) поздовжніх – σ_z

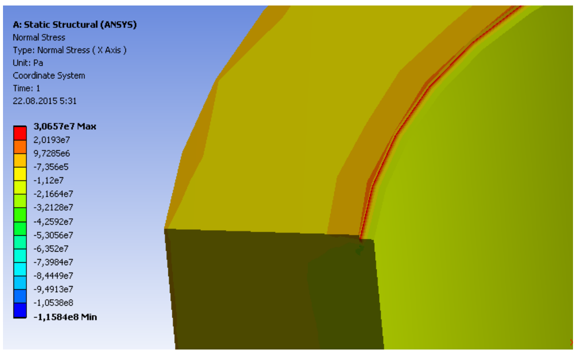
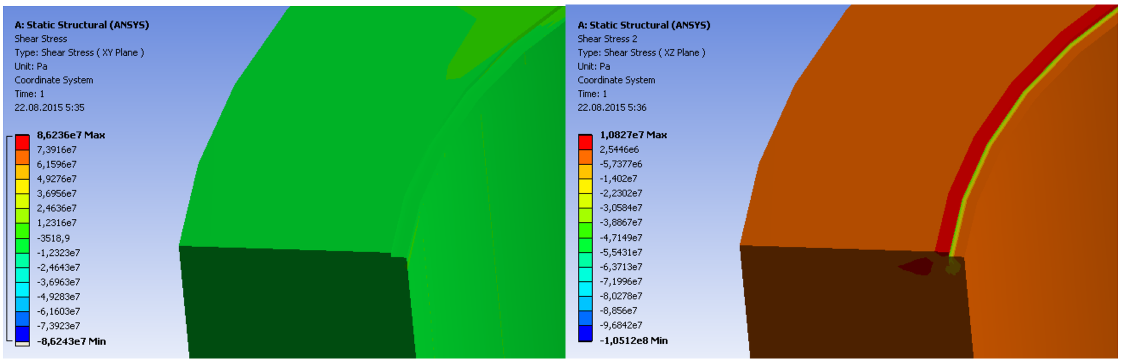


Рисунок 5.16 – Розподіл радіальних напружень σ_r



а) б)

Рисунок 5.17 – Розподіл дотичних напружень поперечного зсуву: а) $\tau_{r\Theta}$; б) τ_{rz}

Аналіз результатів, проведеного чисельного експерименту, дозволяє відзначити наступне. При застосуванні другого варіанта нормальні радіальні напруження в зоні з'єднання труб дорівнюють σ_r = 21 МПа, для першого класичного варіанта бандажного з'єднання значення цих напружень становлять σ_r = 86 МПа. Так само зменшується величина нормальних осьових напружень у центрі бандажа з σ_z = 123МПа (1 варіант) до σ_z=68 МПа (2 варіант). При цьому безпосередньо в склопластиковій трубі ці напруження збільшуються з σ_z =75 МПа (1варіант) до σ_z = 90 МПа (2 варіант). Така ж картина має місце і для нормальних колових напружень – з σ_Θ = 174 МПа (1 варіант) до σ_Θ =105МПа (2 варіант) у бандажі та з σ_Θ = 50 МПа (1варіант) до σ_Θ =70 МПа (2 варіант) у трубі. Слід також зазначити зменшення дотичних напружень із τ_{rz} = 20МПа (1варіант) до τ_{rz} =12 МПа (2 варіант) у небезпечній зоні.

Для розрахунку на міцність приймаються максимальні напруження другого варіанта бандажного з'єднання, які виникають у точках поверхні контакту труба-бандаж (клейовий прошарок) у місці з'єднання труб: $\sigma_z = 64\,\text{МПа}$, $\sigma_\theta = 105\,\text{МПа}$, $\sigma_r = 20\,\text{МПа}$, $\tau_{rz} = 11\,\text{МПа}$, $\tau_{r\theta} = 12\,\text{МПа}$, $\tau_{z\theta} = 1\,\text{МПа}$.

Для оцінки несучої здатності розглянутої склопластикової оболонки можна використати модифікований критерій міцності (5.5) – (5.8), що включає трансверсальні напруження і враховує впливи ослабленого міжфазного контакту шарів. Слід зазначити, що при переході до циліндричної системи координат виконуються тотожності:

$$\sigma_{11} = \sigma_z, \quad \sigma_{22} = \sigma_\theta, \quad \sigma_{33} = \sigma_r, \quad \tau_{31} = \tau_{rz}, \quad \tau_{21} = \tau_{\theta z}, \quad \tau_{32} = \tau_{r\theta}.$$

Для оцінки несучої здатності розглянутих з'єднань експериментально визначалися наступні значення границь міцності бандажа зі склопластику:

$$\sigma_{11}^{+} = \sigma_{22}^{+} = 200\text{МПа}, \quad \sigma_{11}^{-} = \sigma_{22}^{-} = -180\text{МПа}, \quad \sigma_{33}^{-} = -90\text{МПа}, \quad \sigma_{33}^{+} = 60\ \text{МПа},$$

$$\sigma_{12}^{-} = \sigma_{12}^{+} = 50\text{МПа}, \qquad \sigma_{13}^{-} = \sigma_{13}^{+} = \sigma_{23}^{-} = \sigma_{23}^{+} = 24\ \text{МПа}..$$

Границі міцності труби зі склопластику наведені в табл.5.4. Значення коефіцієнтів критерію міцності (5.5) – (5.8) наведені в табл.5.6.

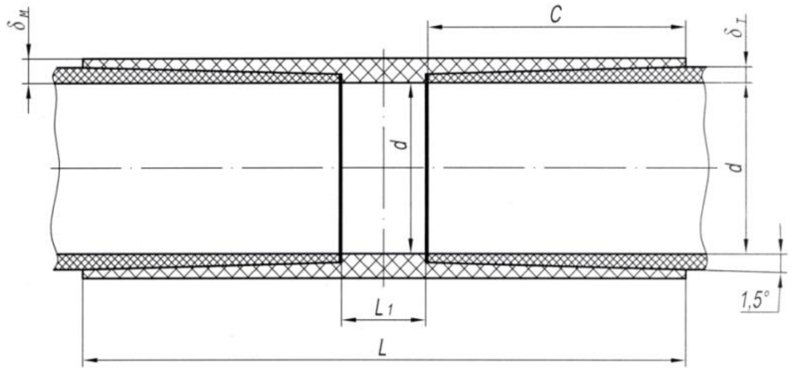
Таблиця 5.6 – Значення тензорів поверхні міцності склопластику

R_{11}, 1/МПа	R_{22}, 1/МПа	R_{33}, 1/МПа	R_{1111}, 1/(МПа)^2	R_{2222}, 1/(МПа)^2	R_{3333}, 1/(МПа)^2	R_{1212}, 1/(МПа)^2	R_{1313}, 1/(МПа)^2	R_{2323}, 1/(МПа)^2
$-5{,}6\cdot10^{-4}$	$-5{,}6\cdot10^{-4}$	$5{,}6\cdot10^{-3}$	$2{,}78\cdot10^{-4}$	$2{,}78\cdot10^{-4}$	$1{,}85\cdot10^{-4}$	$0{,}4\cdot10^{-3}$	$0{,}17\cdot10^{-2}$	$0{,}17\cdot10^{-2}$

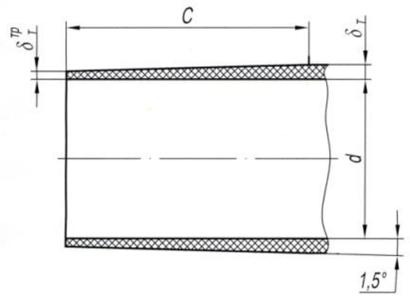
Аналізуючи коефіцієнти табл. 5.6, слід зазначити, що найнебезпечнішим видом руйнування є деформації поперечного зсуву і трансверсального відриву. Теоретичне значення руйнівного гідростатичного тиску $q_T = 17{,}35\text{МПа}$, що трохи вище експериментально отриманого руйнівного тиску $q_Э^* = 17{,}0\text{МПа}$.

Експериментальні дослідження проводилися на підприємстві ТОВ"Склопластикові труби" м.Харків. Труби, що з'єднують, містилися в експериментальний стенд, де торці жорстко закріплювалися спеціальними захопленнями. Для створення в трубі внутрішнього тиску в неї подається вода за допомогою плунжерного насоса. Параметри навантаження контролювали високоточним манометром.

Розрахунок на міцність муфтового з'єднання. На рис. 5.18 наведена схема і розміри муфтового з'єднання склопластикових труб (L= 240 мм, L_1 = 140 мм, D = 113 мм). Фізико-механічні характеристики труби і муфти однакові та наведені в табл. 5.3– 5.4. Тут d – внутрішній діаметр труби, δ_T – товщина стінки труби, δ_T^{TP}– товщина стінки торця труби, C – довжина проточки під клейовий шов, d – внутрішній діаметр муфти, δ_M – товщина стінки муфти, δ_M^{TP}– товщина стінки торця муфти, $\delta_M^{TP} = \delta_M^{B}$, δ_M^{B} – товщина виточки муфти.



Труба Муфта



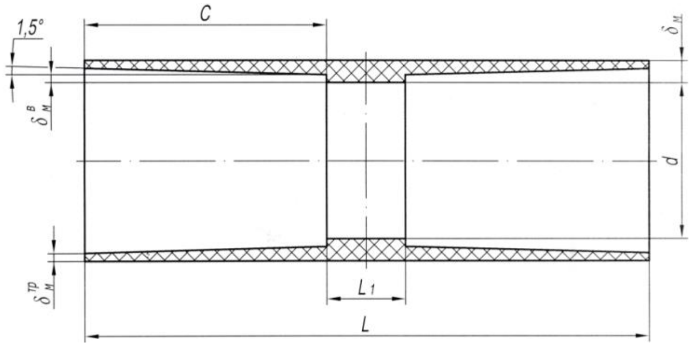


Рисунок 5.18 – Схема муфтового з'єднання склопластикових труб

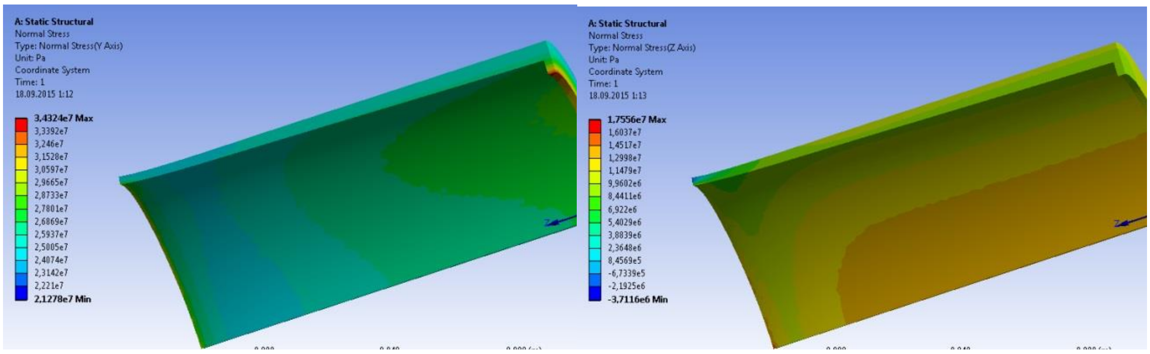
Геометричні розміри муфтового з'єднання, внутрішній розрахунковий тиск q, площа клейового з'єднання $S_{кл}$ представлені нижче у вигляді таблиці.

№ п/п	Труба							
	q, МПа	d, мм	δ_T , мм	Маса* 1п/м, кг	δ_T^{TP}, мм	α, гр.	C_1, мм	C, мм
1	8	76	8,5	4,287	4,832	1,5	140,12	140,08

№ п/п	Муфта						
	d, мм	$\delta_М$, мм	$\delta_М^{ТР}$, мм	L_1, мм	L, мм	Маса* заготівки, кг	$S_{кл}$, $см^2$
1	83	11,04	6,37	5	285,15	1,767	393,25

Маса* – розрахункова маса при щільності γ =1,9 г/см^3.

Труба з муфтовим з'єднанням навантажена внутрішнім тиском q=8МПа. Напружений стан муфти наведений на рис. 5.19 – 5.21. Для чисельного рішення розглянутої задачі в системі ANSYS була побудована осесиметрична геометрична модель муфти з урахуванням заданої схеми армування і анізотропії шарів. Дискретизація моделі проводилася з використанням чотирикутних восьми вузлових скінчених елементів PLANE183. Розмір скінчених елементів приймався на основі досліджень збіжності отриманого рішення.



а) б)

Рисунок 5.19 – Розподіл нормальних напружень: а) тангенціальних – σ_Θ ; б) поздовжніх – σ_z

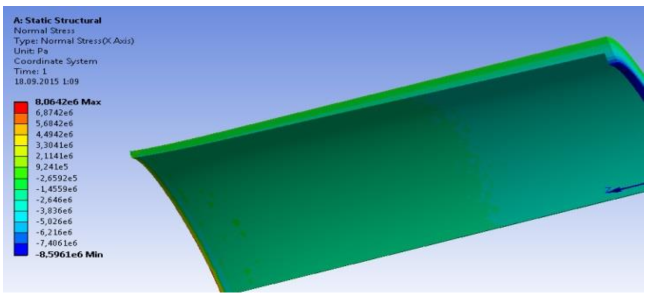
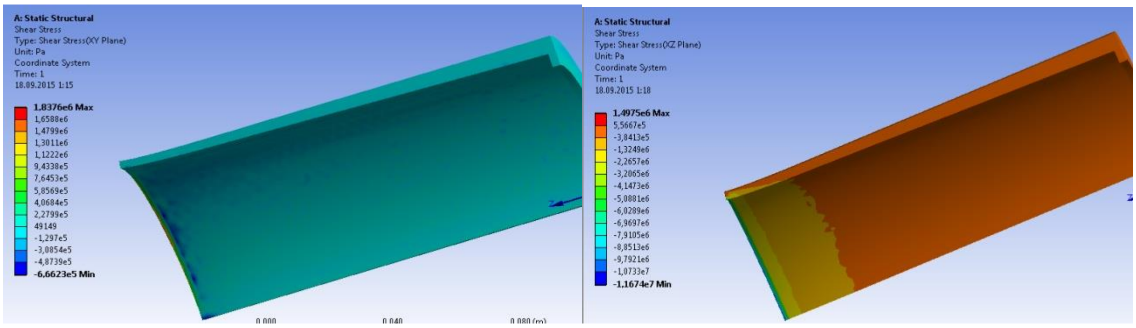


Рисунок 5.20 – Розподіл радіальних напружень σ_r



а) б)

Рисунок 5.21 – Розподіл дотичних напружень поперечного зсуву: а) $\tau_{r\Theta}$; б) τ_{rz}

Максимальні напруження в муфті розглянутого з'єднання виникають в точках внутрішньої поверхні на відстані С від торців труб, що з'єднують:
$\sigma_z = 17\,\text{МПа}$, $\sigma_\theta = 29\,\text{МПа}$, $\sigma_r = 8{,}6\,\text{МПа}$, $\tau_{rz} = 12\,\text{МПа}$, $\tau_{r\theta} = 1{,}8\,\text{МПа}$, $\tau_{z\theta} = 2{,}1\,\text{МПа}$.

Беручи до уваги технологію виготовлення муфтового клейового з'єднання, коли на підготовлені торці труб за допомогою епоксидної смоли кріпиться муфта, основним фактором, який визначає міцність такого з'єднання стають адгезійні властивості клейового шва. Тому граничні значення нормальних напружень склопластикової муфти приймалися з табл. 5.4, а граничні напруження поперечного зсуву і трансверсального відриву згідно даним роботи [144, 170 – 171]:

$\sigma_{11}^{+} = 240\,\text{МПа}$, $\sigma_{22}^{+} = 410\,\text{МПа}$, $\sigma_{11}^{-} = -190\,\text{МПа}$, $\sigma_{22}^{-} = -360\,\text{МПа}$, $\sigma_{33}^{-} = -90\,\text{МПа}$,

$\sigma_{33}^{+} = 60\ \text{МПа}$, $\sigma_{12}^{-} = \sigma_{12}^{+} = 50\,\text{МПа}$, $\sigma_{13}^{-} = \sigma_{13}^{+} = \sigma_{23}^{-} = \sigma_{23}^{+} = 14\ \text{МПа}$..

Значення коефіцієнтів критерію міцності (5.5) – (5.8) наведені в табл. 5.7.

Аналізуючи коефіцієнти табл. 5.7, слід зазначити, що найнебезпечнішим видом руйнування є деформації поперечного зсуву і трансверсального відриву. Вже при значенні границі міцності напружень при деформаціях поперечного зсуву $\sigma_{13}^{-} = \sigma_{13}^{+} = \sigma_{23}^{-} = \sigma_{23}^{+} = 12{,}5\ \text{МПа}$. відбувається руйнування клейового шару муфта-труба.

Таблиця 5.7 – Значення тензорів поверхні міцності склопластику

R_{11}, 1/МПа	R_{22}, 1/МПа	R_{33}, 1/МПа	R_{1111}, 1/(МПа)^2	R_{2222}, 1/(МПа)^2	R_{3333}, 1/(МПа)^2	R_{1212}, 1/(МПа)^2	R_{1313}, 1/(МПа)^2	R_{2323}, 1/(МПа)^2
$-1{,}1\cdot10^{-3}$	$-1{,}1\cdot10^{-3}$	$5{,}6\cdot10^{-3}$	$5{,}6\cdot10^{-4}$	$6{,}8\cdot10^{-6}$	$1{,}85\cdot10^{-4}$	$0{,}4\cdot10^{-3}$	$0{,}17\cdot10^{-2}$	$0{,}17\cdot10^{-2}$

Таким чином, у даному підрозділі запропонована експериментально-теоретична методика розрахунку на міцність бандажних і муфтових з'єднань стеклопластиковых труб. Розглянуто два варіанти бандажних з'єднань, які мають конструктивні відмінності. У першому класичному варіанті товщина труб у місці їхнього стику приймається постійної. У другому варіанті приймається з'єднання у вус, коли товщина труби лінійно зменшується із зовнішньої сторони до торців труб, що з'єднують. Другий варіант бандажного з'єднання виявився більше раціональним, виходячи з умов міцності. Зменшуючи товщину стінки труби в місці стику й тим самим зменшуючи її жорсткість, можна домогтися умов оптимального перерозподілу зусиль у розглянутих з'єднаннях.

Щодо муфтового з'єднання, порівняння результатів розрахунку на міцність за запропонованою методикою з експериментальними даними доводить її ефективність. Відзначається, що руйнування муфтового з'єднання можливо через низьку граничну міцність клейового шару при деформаціях зсуву і трансверсального відриву. Щоб забезпечити можливість перерозподілу навантажень між трубами, що з'єднують, і муфтою при внутрішньому тиску, потрібно створити їх надійне зчеплення з подальшим спільним деформуванням труби та муфти за рахунок підвищення адгезійних властивостей клейового шару. Ці умови можна виконати, приймаючи конструктивні рішення в плані зміни форми муфти та способів підготовки поверхні кінців труб.

5.5. Розрахунок на міцність склопластикової труби в зоні фланцевих з’єднань

У різних галузях промисловості застосовуються більше 40 різних типів фланців. Створено ряд методик розрахунку фланцевих з'єднань. Але в ряді випадків виникає необхідність конструювати і розраховувати фланцеві з'єднання спеціального призначення, не висвітлені в технічній літературі. Як відомо, задача розрахунку фланцевих з'єднань відноситься до загальної проблеми міцності пластин та оболонок. Під час розрахунку комбінованого фланцевого з'єднання, що включає металевий фланець та композитну оболонку, виникає багато спеціальних питань, на які загальна теорія розрахунку оболонок ще не може відповісти.

Руйнування склопластикових оболонок через слабкий опір трансверсальному відриву і між шаровому зсуву відбувається, як правило, задовго до досягнення напружень у фланці та оболонці своїх граничних значень. Тому проведення чисельного аналізу впливу жорсткості металевих фланців на напружено-деформований стан склопластикових труб у зоні їхнього з'єднання визначає мету цього підрозділу.

На рис.5.22 показана схема трубопроводу із окремих секцій склопластикових труб, які з'єднані між собою металевими фланцями або склопластиковими бандажами. У даному трубопроводі використається склопластикова труба виготовлена методом КППН (косо шарового поздовжньо-поперечного намотування). Коефіцієнт анізотропії – 1,2 (відношення об’єму армуючого матеріалу, покладеного в коловому напрямку до об’єму армуючого матеріалу, покладеному в поздовжньому напрямку). Модуль пружності при розтяганні в поздовжньому напрямку матеріалу такої труби становить: E_z = 23 500 МПа.

Термічний коефіцієнт лінійного розширення в діапазоні 100 – 300К становить: (9,6-30)*10^{-6}1/К. Тиск у трубопроводі змінюється від 1,5 до 5,0МПа. Експлуатаційна температура змінюється від – 35℃ до + 50℃. Статичний розрахунок даного трубопроводу за допомогою програмного комплексу ANSYS показав, що внутрішні зусилля в поздовжньому напрямку, викликані зміною температури, можуть привести до втрати несучої здатності склопластикової труби.

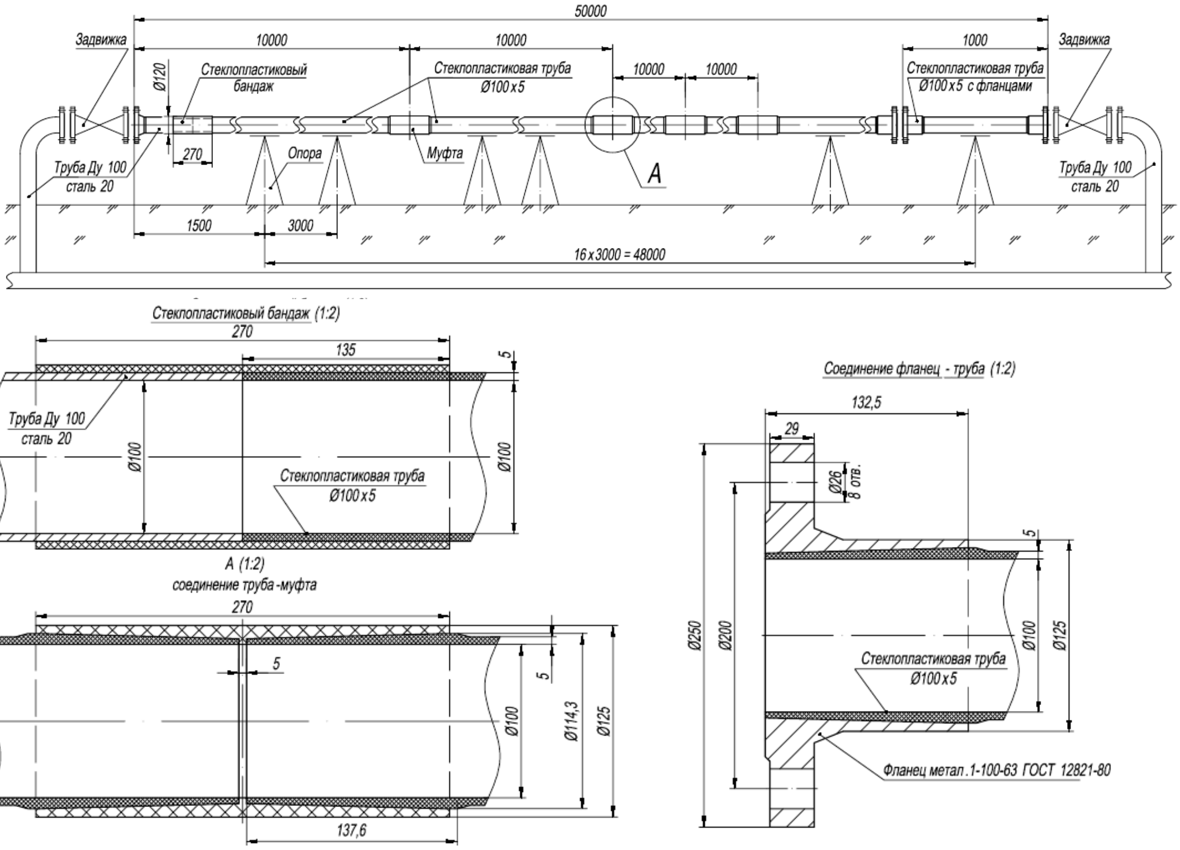
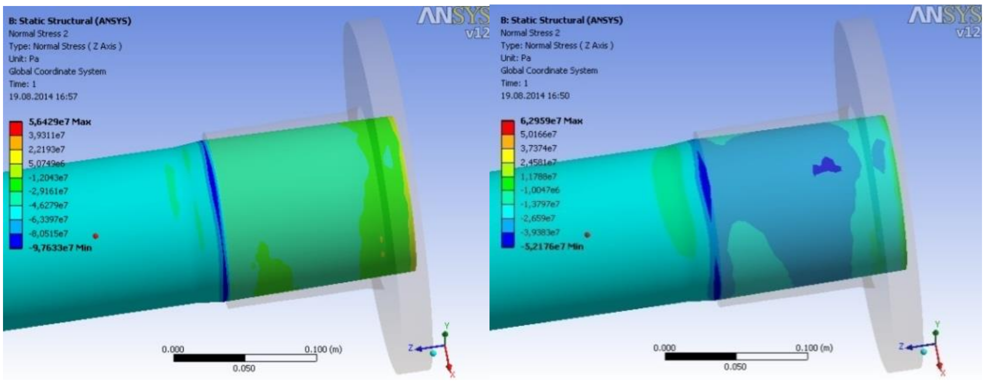


Рисунок 5.22 – Схема трубопроводу

Так при зміні температури на 50 ℃ величина поздовжньої стискаючої сили становить 60 кН, що істотно впливає на міцність склопластикової труби в зоні її з'єднання з металевим фланцем (рис. 5.22), а також може привести до втрати стійкості труби. Використання компенсатора температурних напружень приводить до зменшення поздовжньої стискаючої сили до 56 Н.

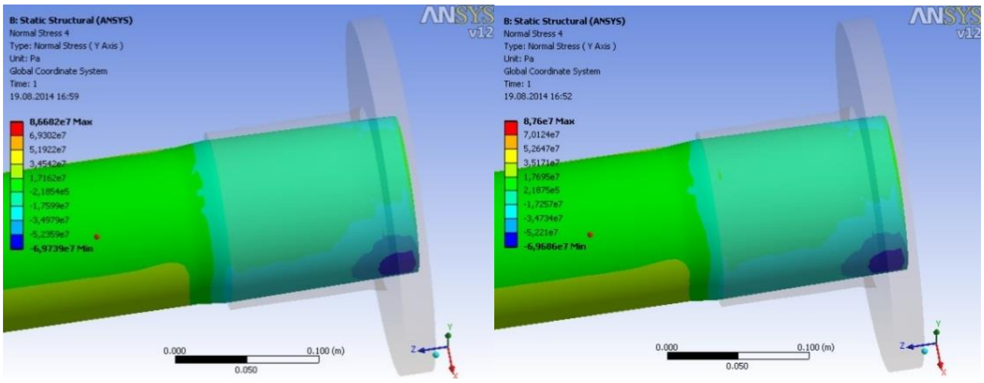
Розрахунок з'єднання фланець-труба

Як показують чисельні розрахунки і експериментальні дані найбільш небезпечним місцем у наведеному вище трубопроводі є з'єднання фланець-труба. Труба навантажена внутрішнім тиском 5МПа, температура у середині труби 20˚С, на зовнішній поверхні труби і фланця 70˚С. Напружений стан на поверхні склопластикової труби в зоні з'єднання її із фланцем наведені на рис. 5.23 – 5.28.



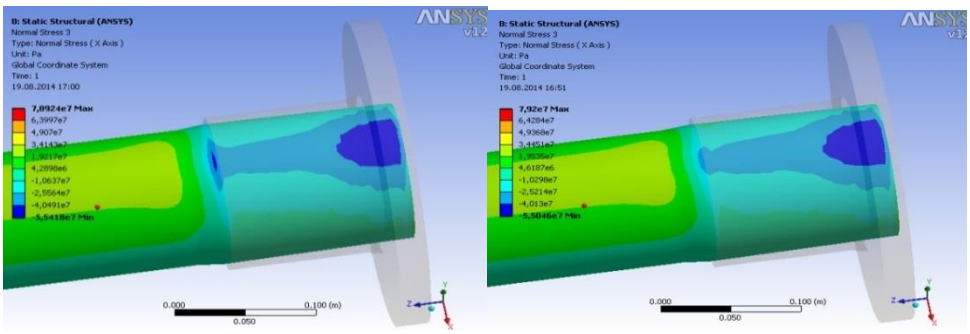
а) б)

Рисунок 5.23 – Розподіл нормальних напружень σ_z на поверхні труби: а) трубопровід без компенсатора; б) трубопровід з компенсатором



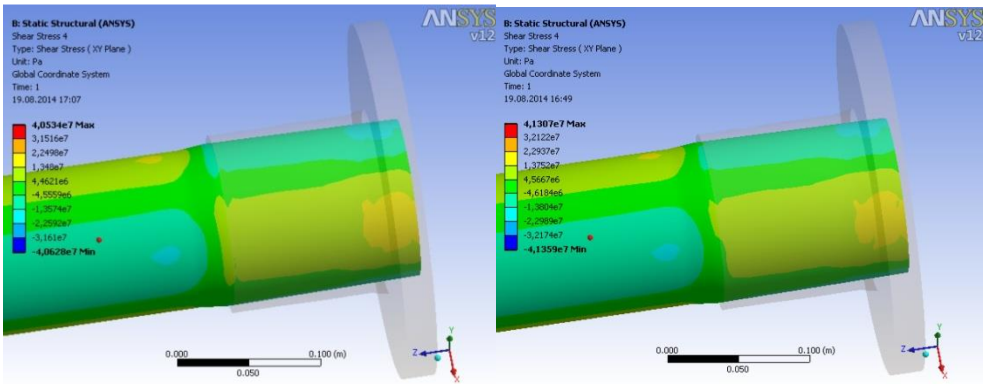
а) б)

Рисунок 5.24 – Розподіл нормальних напружень σ_y: а) трубопровід без компенсатора; б) трубопровід з компенсатором



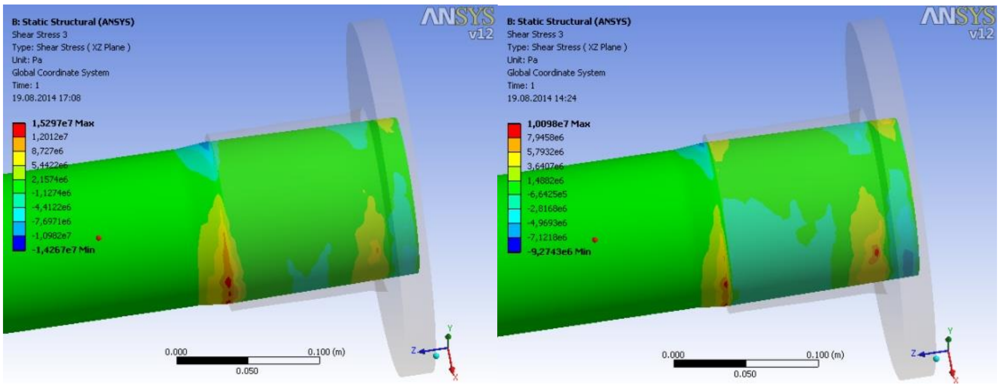
а) б)

Рисунок 5.25 – Розподіл нормальних напружень σ_x на поверхні труби: а) трубопровід без компенсатора; б) трубопровід з компенсатором



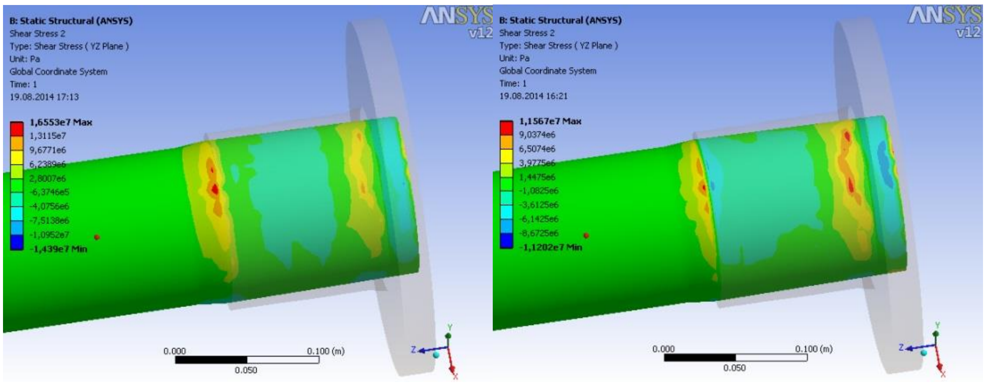
а) б)

Рисунок 5.26 – Розподіл дотичних напружень τ_{xy} на поверхні труби: а) трубопровід без компенсатора; б) трубопровід з компенсатором



а) б)

Рисунок 5.27 – Розподіл дотичних напружень τ_{xz} на поверхні труби: а)трубопровід без компенсатора; б) трубопровід з компенсатором



а) б)

Рисунок 5.28 – Розподіл дотичних напружень τ_{zy} на поверхні труби: а)трубопровід без компенсатора; б) трубопровід з компенсатором

Як видно з рис. 5.23 – 5.26 зміна типу трубопроводу практично не впливає на величину і розподіл нормальних напружень σ_z , σ_y , σ_x , а також дотичних напружень τ_{xy}. Відомо, що граничні напруження поперечного зсуву склопластику можуть змінюватися в діапазоні 15 – 30 МПа, тому при аналізі рис. 5.27 – 5.28 можна переконатися в доцільності встановлення компенсатора. Такий конструктивний захід знижує величину дотичних напружень τ_{xz} і τ_{zy} в 1,5 – 2 рази.

За допомогою програмного комплексу ANSYS вивчений напружений стан склопластикової труби в зоні з'єднання її з металевим фланцем при зміні температури навколишнього середовища. Виявлено, що під час використання трубопроводу без компенсатора, дотичні напруження поперечного зсуву можуть привести до руйнування склопластику, що у свою чергу приведе до втрати несучої здатності трубопроводу.

Вивчено напружено-деформований стан склопластикової труби, що виготовлена методом КППН (косошарового поздовжньо-поперечного намотування). Коефіцієнт анізотропії – 1,2. Модуль пружності при розтяганні в поздовжньому напрямку матеріалу такої труби становить: E_z = 23500 МПа. Термічний коефіцієнт лінійного розширення в діапазоні 100 – 300К становить (9,6-30)*10^{-6}1/К. Тиск у трубопроводі змінюється від 1,5 до 5,0МПа. Експлуатаційна температура змінюється від – 35 ℃ до + 50 ℃.

Відзначено, що внутрішні зусилля в поздовжньому напрямку склопластикової труби, викликані зміною температури, можуть привести до втрати несучої здатності склопластикової труби. Так при зміні температури на 50˚С величина поздовжньої стискаючої сили становить 60 кН, що істотно впливає на міцність склопластикової труби в зоні її з'єднання з металевим фланцем. Як, доведено, використання компенсатора приводить до зменшення поздовжньої стискаючої сили до 56 Н при аналогічній зміні температури.

Під час експериментальних досліджень граничного стану склопластикової труби, що випускалася ТОВ "Склопластикові труби" (розділ 4), на першому етапі було зафіксовано руйнування склопластику в зоні фланцевого з’єднання при внутрішньому гідростатичному тиску $p_1^{*E} = 3{,}5 МПа$.

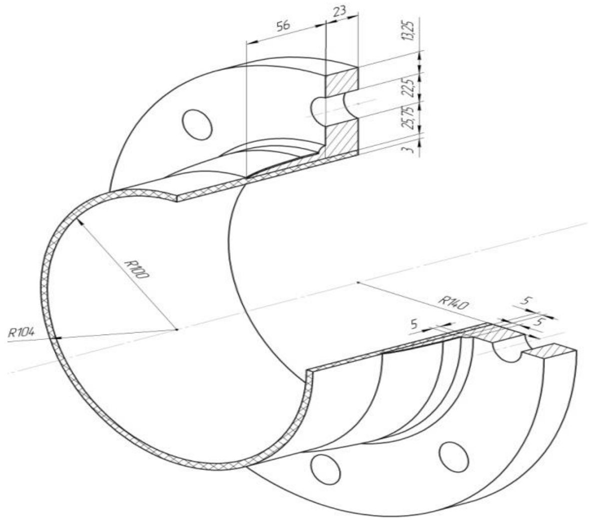


Рисунок 5.29 – Геометричні розміри фланця

Геометричні розміри фланця, виготовленого зі сталі, показані на рис.5.29. Як уже відмічалося, склопластикова труба – це багатошарова циліндрична оболонка діаметром 200 мм із товщиною стінки 4 мм і довжиною 1200 мм.

Технічні пружні сталі й граничні характеристики склопластику визначалися за методикою, наведеною в розділі 3. Фізико-механічні характеристики сталевого фланця мали такі значення: Е=210000 МПа, ν=0,25. Як альтернатива сталевому фланцю розглядався фланець, виконаний із дюралюмінію В-95: Е=70000 МПа, ν=0,3.

На основі методу переміщень складені алгоритм і програма розрахунку на міцність багатошарових оболонок обертання складної форми. Для оцінки достовірності отриманих теоретичних і експериментальних даних використаний метод кінцевих елементів, реалізований у програмному комплексі ANSYS. Задача вирішується в осесиметричній постановці. Склопластикова труба розглядається як багатошарова оболонка обертання.

Аналіз результатів показує, що максимальні напруження виникають у точках контакту металевого фланця і склопластикової труби вздовж поверхні контакту (рис. 5.30 – 5.32). При цьому величини поперечних дотичних і трансверсальних напружень значно перевищують аналогічні напруження, що виникають на внутрішній і зовнішній поверхнях труби, під час дії одного і того самого навантаження.

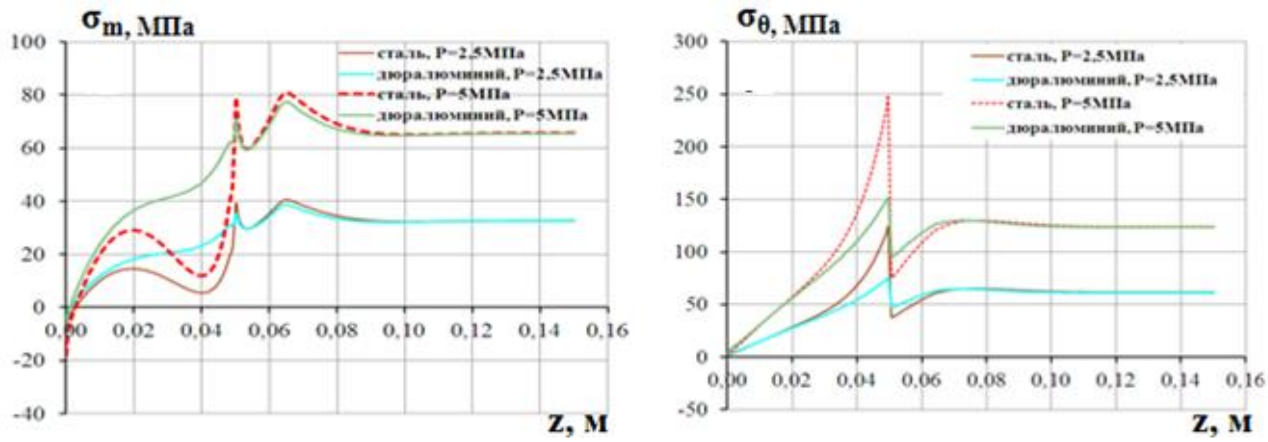


Рисунок 5.30 – Графіки зміни меридіональних σ_m і колових напружень σ_θ в зоні фланцевого з’єднання

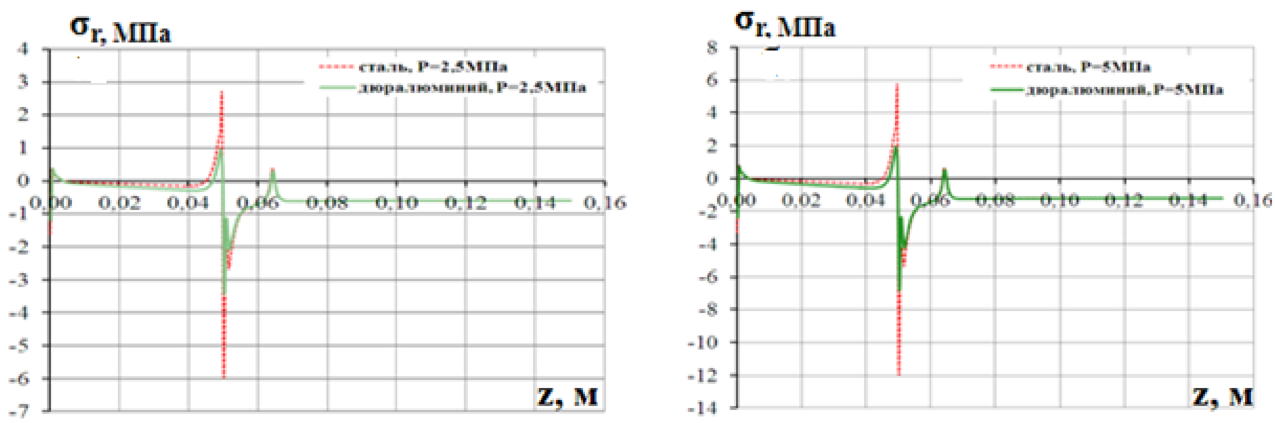


Рисунок 5.31 – Графіки зміни трансверсальних напружень σ_r в зоні фланцевого з’єднання

Порівнюючи значення дотичних і трансверсальних напружень, які виникають в точках контакту сталевих і дюралюмінієвих фланців зі склопластиковою оболонкою, можна відзначити, що зазначені напруження відрізняються майже в 1,5 рази. Отримані теоретичні значення величин граничного тиску, при якому відбувається руйнування склопластикової труби в точках контакту її поверхні з металевими фланцями, за допомогою модифікованого поліноміального критерію міцності, рівні: для сталевих фланців – 3,4МПа; для дюралюмінієвих фланців – 4,9МПа. Таким чином, варіюючи жорсткістю фланців, можна досягти оптимальних умов роботи розглянутої конструкції склопластикової труби.

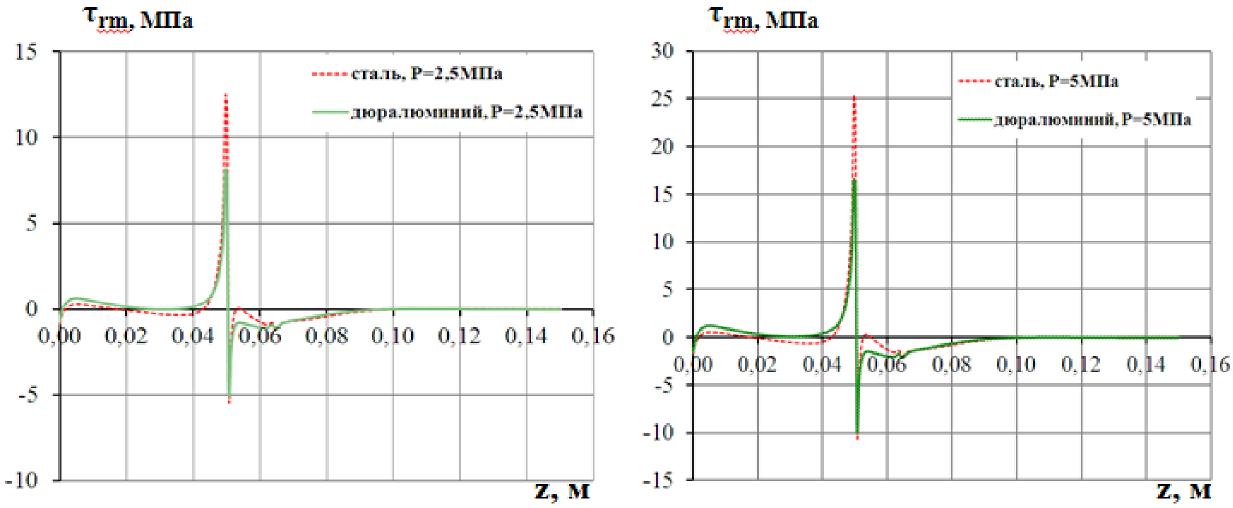


Рисунок 5.32 – Графіки зміни дотичних напружень τ_{rm}
в зоні фланцевого з'єднання

5.6. Міцність сталевої труби з дефектами матеріалу (іржі), посиленої бандажем зі склопластику

Слід зазначити, що ремонт корозійних ділянок трубопроводів із застосуванням різного роду зварювальних технологій, як правило, приводить до тривалої зупинки процесу транспортування енергоносіїв і спричиняє значні фінансові та матеріальні збитки. Тому розробка ефективних ремонтних конструкцій у вигляді багатошарових бандажів з високоміцних неметалевих матеріалів, які будуть використовуватись для ремонту дефектів трубопроводів без зупинки процесу транспортування енергоносіїв, є актуальним завданням.

В останні роки, найбільше використаються композитні бандажі на основі скляних та вуглецевих волокон [172 – 179], створена нормативна база на ремонт трубопроводів композитними системами [180 – 183], розширюється номенклатура використовуваних композитних матеріалів [178]. Так, наприклад, американська компанія ClockSpring розробила унікальну технологію ремонту дефектних ділянок сталевих труб за допомогою спеціальних манжет ClockSpring (clock spring – годинна пружина). Манжета ClockSpring являє собою односпрямований композиційний матеріал на основі спеціального скловолокна з матричною пам'яттю згортання. Автори зазначеної розробки відзначають, що манжета "забирає на себе" 1/6 частину від загального навантаження, тому межі зони “первинних” пружних деформацій труби підвищується на 18%. В Україні для локального ремонту трубопроводів використають композитні бандажі фірми «Поліпромсинтез», що виготовляються на основі склопластиків і поліефірної смоли.

Теоретичні та експериментальні дослідження з оцінки міцності системи трубопровід – композитний бандаж, вивчення механічних властивостей композитного бандажа, розробка конструктивно-технологічних схем посилення дефектних ділянок трубопроводів, а також методики їхнього розрахунку, наведені в роботах [184 – 191].

Розроблено технологію виготовлення композитних бандажів шляхом багатошарового намотування склопластикової тканини на трубу. Істотне розходження фізико-механічних характеристик матеріалів труби та композита, вимагає більш глибокого вивчення їхньої спільної роботи як у пружній, так і в пластичній області деформування.

Діючі на цей час норми на розміри припустимих дефектів об’єктів енергетичного машинобудування висувають досить жорсткі обмеження до їхніх розмірів (табл. 5.8).

Таблиця 5.8 – Основні вимоги до припустимих дефектів по найпоширеніших стандартах

<table>
<tr><td>Типи дефектів</td><td>$\delta_{ост}$ на ділянці з дефектом після зачищення, %</td><td>Припустима площа дефекту, мм^2</td><td>Примітка</td></tr>
<tr><td>Наскрізний площинний</td><td>0</td><td>Не більше 150</td><td rowspan="2">Відстань між сусідніми дефектами ≥ 1000 мм

$\sum П \le 0,5$ м^2</td></tr>
<tr><td>Ненаскрізні</td><td>> 90
80 – 90
70 – 80
60 – 70
50 – 60
<50</td><td>≤ 300000
≤ 200000
≤ 150000
≤ 100000
≤ 50000
Розміри ушкоджень і технологія ремонту аналогічні відповідному типу наскрізного дефекту</td></tr>
</table>

Примітка: $\delta_{ост}$ = ($\delta_ф$ /δ)· 100 – відносна товщина стінки труби на ділянці з дефектом, $\delta_ф$, δ – фактична і номінальна товщина стінки труби; ∑П – загальна площа ділянок з дефектами.

Прийнято наступну класифікацію дефектів: не наскрізні – корозійного, ерозійного та металургійного типу; наскрізні – площинні (отвори, свищі) і лінійні (тріщини).

На жаль, відсутність уточнених методик оцінки впливу дефектів на міцність конструкцій приводить до того, що значно зростає обсяг ремонтних робіт з усунення дефектних ділянок без особливою на те необхідністю. Уточнена методика оцінки впливу виявлених дефектів на міцність системи трубопровід – композитний бандаж дозволить робити більш точний прогноз доцільності ремонту корозійних ділянок трубопроводів.

У цьому зв'язку особливу увагу варто приділити як теоретичному, так і експериментальному вивченню напруженого стану в точках сполученої поверхні сталевої труби та бандажа, а також визначенню найбільш ефективних критеріїв міцності, які з достатньою точністю нададуть оцінку граничного стану ремонтних конструкцій у процесі їхньої експлуатації.

Для досягнення цієї мети за допомогою програмного комплексу ANSYS вивчений напружений стан системи «трубопровід – композитний бандаж», що дозволяє визначити конструктивні параметри композитного бандажа залежно від пошкоджуваності матеріалу труби та геометричних розмірів дефектів. Отримані теоретичні результати та проведені експериментальні дослідження дозволили вибрати критерій міцності і визначити величини граничних напружень у точках сполучення композитного бандажа і сталевої труби.

Об'єкт дослідження являв собою фрагмент сталевий безшовної труби зі сталі марки 09М2С. Основні характеристики труби наведені в розділі 4.

Для гідростатичного тиску 3 МПа за допомогою програмного комплексу ANSYS отримані графіки рис. 5.33 – 5.39 напруженого стану системи «трубопровід – композитний бандаж».

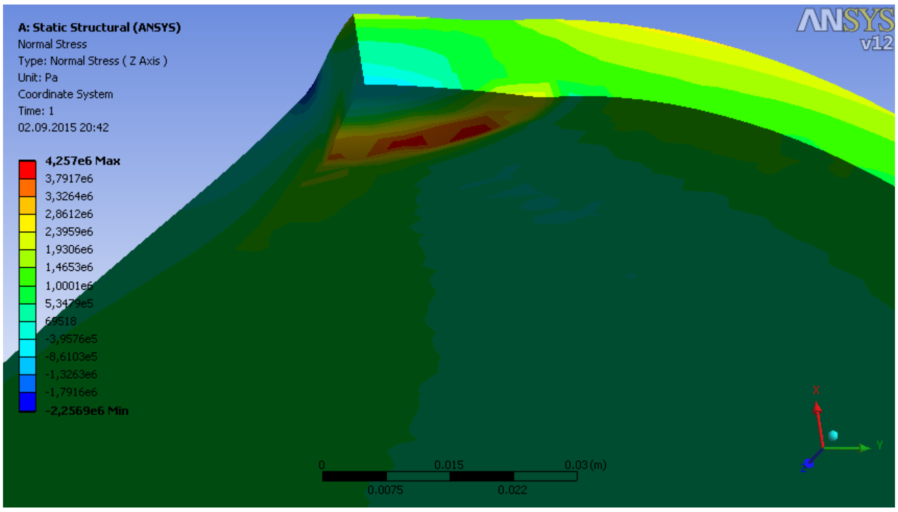


Рисунок 5.33 – Розподіл нормальних осьових напружень σ_z

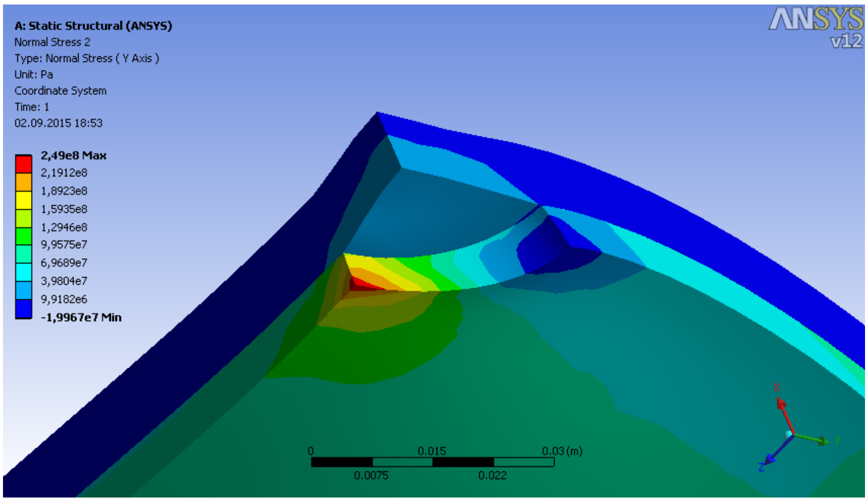


Рисунок 5.34 – Розподіл нормальних колових напружень σ_Θ

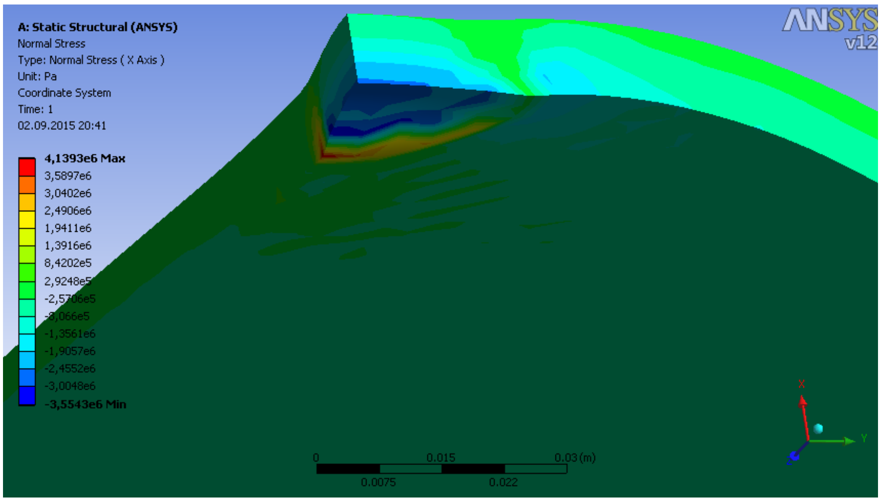


Рисунок 5.35 – Розподіл нормальних радіальних напружень σ_r

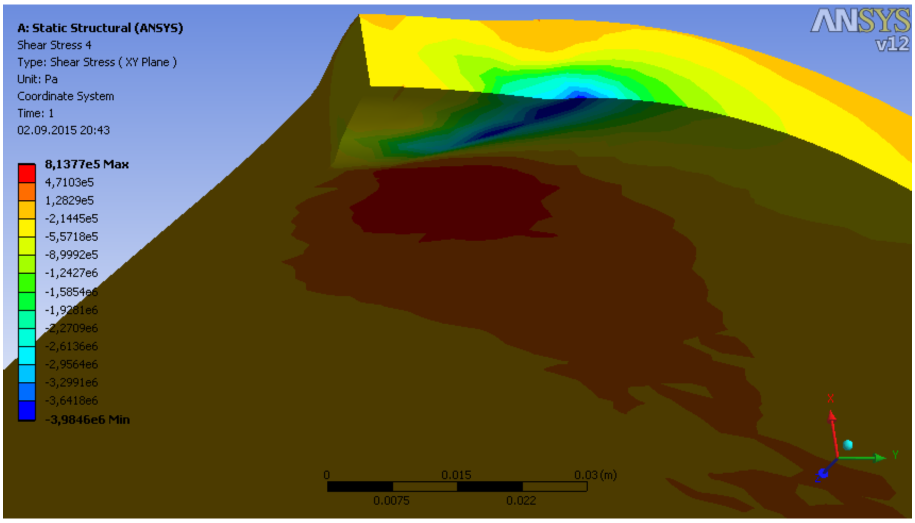


Рисунок 5.36 – Розподіл дотичних напружень $\tau_{r\Theta}$

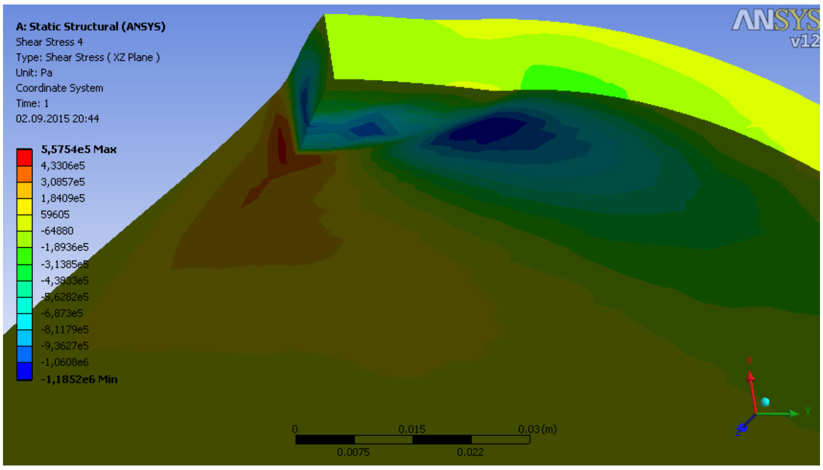


Рисунок 5.37 – Розподіл дотичних напружень τ_{rz}

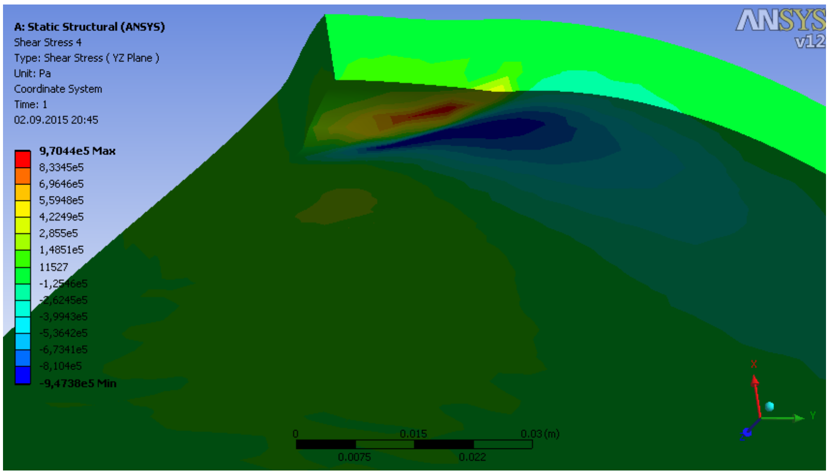


Рисунок 5.38 – Розподіл дотичних напружень $\tau_{z\Theta}$

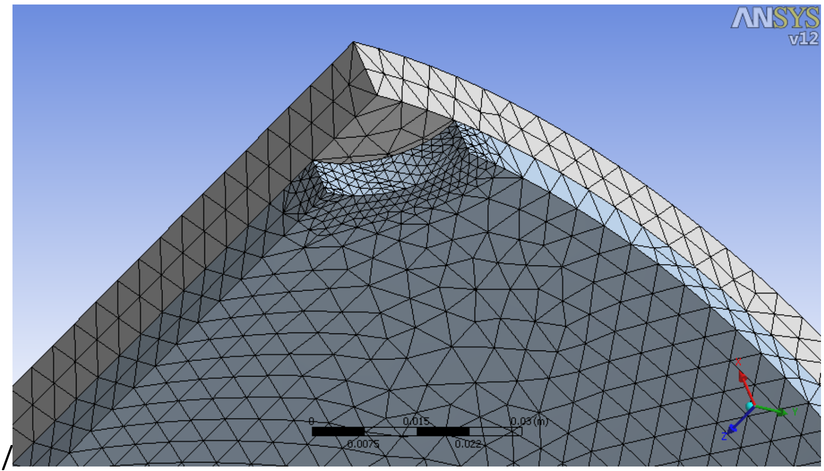


Рисунок 5.39 – Математична модель ремонтного бандажа

Аналіз результатів, проведеного чисельного експерименту, показав, що максимальні напруження в композитному бандажі виникають у точках сполучної поверхні контакту склопластик – метал (клейовий прошарок) на границі наскрізного дефекту:

$$\sigma_z = 4{,}5\,МПа,\quad \sigma_\theta = 24{,}5\,МПа,\quad \sigma_r = 4{,}2\,МПа,\quad \tau_{rz} = 1{,}2\,МПа,\quad \tau_{r\theta} = 4{,}1\,МПа\,.$$

Для оцінки несучої здатності розглянутої склопластикової оболонки можна використати модифікований критерій міцності (5.5) – (5.8), який включає трансверсальні напруження і враховує впливи ослабленого міжфазного контакту шарів. Слід зазначити, що при переході до циліндричної системи координат виконуються тотожності:

$$\sigma_{11} = \sigma_z\,,\quad \sigma_{22} = \sigma_\theta\,,\quad \sigma_{33} = \sigma_r\,,\quad \tau_{31} = \tau_{rz}\,,\quad \tau_{21} = \tau_{\theta z}\,,\quad \tau_{32} = \tau_{r\theta}\,.$$

При цьому вважається, що міжшарова міцність матеріалу на зсув не залежить від знака поперечних дотичних напружень, тобто $\sigma_{13}^{+} = \sigma_{13}^{-};\ \sigma_{23}^{+} = \sigma_{23}^{-}$.

Необхідною умовою надійної роботи таких бандажних систем є забезпечення надійного зчеплення бандажа з металом труби, тобто виконання ідеальних умов контакту по сполучених поверхнях металу та композита. Для оцінки несучої здатності дефектної ділянки трубопроводу експериментально визначалися наступні значення границь міцності бандажа зі склопластику:

$$\sigma_{11}^{+} = \sigma_{22}^{+} = 200\,МПа\,,\quad \sigma_{11}^{-} = \sigma_{22}^{-} = -180\,МПа\,,\quad \sigma_{33}^{-} = -90\,МПа\,,$$

$$\sigma_{33}^{+} = 15\ МПа\,,\ \sigma_{12}^{-} = \sigma_{12}^{+} = 50\,МПа\ ,\ \sigma_{13}^{-} = \sigma_{13}^{+} = \sigma_{23}^{-} = \sigma_{23}^{+} = 8\ МПа..$$

Значення коефіцієнтів критерію міцності (5.5) – (5.8) наведені в табл. 5.9.

Таблиця 5.9 – Значення тензорів поверхні міцності склопластику

R_{11}, 1/МПа	R_{22}, 1/МПа	R_{33}, 1/МПа	R_{1111}, 1/(МПа)^2	R_{2222}, 1/(МПа)^2	R_{3333}, 1/(МПа)^2	R_{1212}, 1/(МПа)^2	R_{1313}, 1/(МПа)^2	R_{2323}, 1/(МПа)^2
$0{,}1056\cdot10^{-1}$	$0{,}1\cdot10^{-1}$	$-0{,}778\cdot10^{-1}$	$-0{,}28\cdot10^{-4}$	$-0{,}31\cdot10^{-4}$	$-0{,}741\cdot10^{-3}$	$0{,}4\cdot10^{-3}$	$0{,}156\cdot10^{-1}$	$0{,}156\cdot10^{-1}$

Аналізуючи коефіцієнти табл. 5.9, слід зазначити, що найнебезпечнішим видом руйнування є деформації поперечного зсуву та трансверсального відриву. Теоретичне значення граничного гідростатичного тиску $q_T = 3{,}35$МПа, що трохи нижче експериментально отриманого граничного тиску $q^*_Э = 3{,}5$МПа .

Таким чином, у результаті проведених експериментальних і теоретичних досліджень, були досягнуті певні результати:

– розроблена методика визначення граничного гідростатичного тиску ремонтних композитних бандажів, створених шляхом багатошарового намотування склотканини на трубу з одночасним її просочуванням у місці дефекту;

– визначено, що усунення дефектів трубопроводу за допомогою композитного бандажа призводить до перерозподілу кільцевого (колового) навантаження між трубою і композитним бандажем при подальшому навантаженні трубопроводу внутрішнім тиском;

– особливо важливим фактором для забезпечення можливості перерозподілу навантажень між трубою і композитним бандажем при навантаженні трубопроводу внутрішнім тиском є створення надійного контакту композитного бандажа з металом труби за рахунок адгезійних властивостей клейового прошарку;

– доведено, що за рахунок ефективного виконання композитних бандажів та визначення їх реальних фізико-механічних характеристик можна домогтися часткового або повного відновлення несучої здатності дефектної ділянки трубопроводу, і, хоча сталь усе ще може піддаватися пластичній деформації, її ступінь обмежується зовнішнім бандажем з композитного матеріалу, а цей фактор, в свою чергу, забезпечує безпеку трубопроводу при максимально припустимому робочому тиску.

5.7. Висновки по п'ятому розділу

У п'ятому розділі на основі методу ортогональної прогонки С.К.Годунова розроблений алгоритм розв'язання задач міцності та несучої здатності тонкостінних осесиметричних конструкцій складної геометрії уздовж меридіана. На основі запропонованих розрахункових моделей, а також розглянутих раніше алгоритмів розрахунку такого класу задач на мові програмування ФОРТРАН створено пакет прикладних програм.

Для оцінки несучої здатності труб зі склопластику запропонована нова методика розрахунку його конструкційної міцності. Застосовуючи алгоритм покрокового навантаження і модифікований тензорно-поліноміальний критерій міцності, який включає напруження поперечного зсуву $\sigma_{i3}^{-}, \sigma_{i3}^{+}$ $(i, j = 1{,}2)$ і трансверсального відриву або стискання $\sigma_{i3}^{-}, \sigma_{i3}^{+}$, нескладно знайти момент руйнування зв'язуючого і порушення статичних і кінематичних умов контакту між шарами.

Встановлено вплив жорсткості фланців на напружено-деформований та граничний стан склопластикових труб в зоні їх з'єднання. Порівнюючи значення дотичних і трансверсальних напружень, які виникають в точках контакту сталевих і дюралюмінієвих фланців зі склопластиковою оболонкою, можна відзначити, що зазначені напруження відрізняються майже в 1,5 рази. Отримані за допомогою модифікованого поліноміального критерію міцності теоретичні значення величин граничного тиску, при якому відбувається руйнування склопластикової труби в точках контакту її поверхні з металевими фланцями, дозволяють стверджувати, що застосування дюралюмінієвих фланців у порівнянні зі сталевими фланцями дозволяють збільшити граничний тиск майже на 25%. Таким чином, варіюючи жорсткістю фланців, можна досягти оптимальних умов роботи розглянутої конструкції склопластикової труби.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішений ряд важливих науково-технічних завдань, які включають в себе обґрунтування моделей і методик розрахунку напружено-деформованого та термопружного стану багатошарових оболонок обертання з міжшаровими дефектами структури. Розроблені алгоритми, програми, методики досліджень та отримані на їх основі теоретико-експериментальні результати показали наявність нових особливостей деформованого стану розглянутих конструкцій.

1. Створено методику дослідження термопружного стану багатошарових оболонок обертання, коли на одній частині міжфазної поверхні контакту суміжних шарів виконуються умови ідеального контакту, а на іншій спостерігаються ділянки з неідеальним контактом (непроклеї, розшарування, проковзування).

2. Побудовано замкнену систему диференціальних рівнянь та відповідні крайові умови незв'язаної стаціонарної задачі термопружного деформування багатошарової композитної оболонки, що дозволяють врахувати деформації поперечного зсуву і трансверсального обтиснення, забезпечити умови механічного і теплового сполучення шарів і умови термомеханічного навантаження на лицьових поверхнях такої оболонки.

3. Розроблено та апробовано методику визначення інтегральних термопружних характеристик композитів шаруватої структури. Запропоновано алгоритм визначення коефіцієнтів теплового лінійного розширення та теплопровідності багатошарового анізотропного матеріалу. Це дозволило на основі класичної теорії пружності анізотропного тіла розробити чисельно-аналітичний підхід розв’язання термопружних незв’язних крайових задач для циліндричних товстостінних оболонок за умови як ідеального, так і неідеального контакту суміжних шарів по сполученим поверхням, який реалізовано на мові програмування VISUAL FORTRAN. Встановлено вплив температурних навантажень та схем армування окремих шарів на напружено-деформований стан багатошарової циліндричної оболонки, виготовленої із композиційних матеріалів.

4. Розв’язано задачу конструкційної міцності і створено методику визначення граничного внутрішнього тиску багатошарових циліндричних оболонок, досліджено напружено-деформований стан склопластикових труб в зоні фланцевих, бандажних та муфтових з’єднань. Відзначається, що руйнування муфтового з'єднання можливо через низьку граничну міцність клейового шару при деформаціях зсуву і трансверсального відриву. Щоб забезпечити можливість перерозподілу навантажень між трубами, що з'єднують, і муфтою при внутрішньому тиску, потрібно створити їх надійне зчеплення з подальшим спільним деформуванням труби та муфти за рахунок підвищення адгезійних властивостей клейового шару. Ці умови можна виконати, приймаючи конструктивні рішення в плані зміни форми муфти та способів підготовки поверхні кінців труб, що з'єднують. Методом тензометрування досліджено деформований стан труб зі склопластику з дефектами структури матеріалу, фланцеві та клейові типи з‘єднань таких труб. Порівняння теоретичних та експериментальних результатів доводять адекватність обраної розрахункової моделі. Отримані за допомогою модифікованого поліноміального критерію міцності теоретичні значення величин граничного тиску, при якому відбувається руйнування склопластикової труби в точках контакту її поверхні з металевими фланцями, дозволяють стверджувати, що застосування дюралюмінієвих фланців у порівнянні зі сталевими фланцями збільшують граничний тиск майже на 25%. Таким чином, варіюючи жорсткістю фланців, можна досягти оптимальних умов роботи розглянутої конструкції склопластикової труби. Методом тензометрування досліджено деформований стан труб зі склопластику з дефектами структури матеріалу, фланцеві та клейові типи з‘єднань таких труб. Порівняння теоретичних та експериментальних результатів доводять адекватність обраної розрахункової моделі.

5. Доведено, що за рахунок ефективного виконання композитних бандажів та визначення їх реальних фізико-механічних характеристик можна домогтися часткового або повного відновлення несучої здатності дефектної ділянки трубопроводу, і, хоча сталь усе ще може піддаватися пластичній деформації, її

ступінь обмежується зовнішнім бандажем з композитного матеріалу, а цей фактор, в свою чергу, забезпечує безпеку трубопроводу при максимально припустимому робочому тиску.

6. Практична цінність роботи підтверджена актами впровадження результатів дисертації при розрахунку конструкцій з композиційних матеріалів для хімічного машинобудування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Данільцев В.В. Конструкційний шар труби із композиційного матеріалу /В.В.Данільцев, В.Г.Данільцев, М.В.Злочевський, М.П.Лісін, О.В.Таранов // Патент на винахід, 2000, № 37756.

2. Данильцев В.В. Производство и эффективность применения стекло-пластиковых труб /В.В.Данильцев, В.Г.Данильцев // Вісник Інженерної Академії України. – 2003. – № 2. – С.73 – 77.

3. Данильцев В.В. Производство стекло- и базальтопластиковых труб для промысловых нефтепроводов /В.В.Данильцев, В.Г.Данильцев, В.И.Дворниченко, В.И.Круглик // Инженерные сети из полимерных материалов.– 2005. – №4. – С.28 – 29.

4. Данильцев В.В. Оправка для безперервного намотування труб з композиційних матеріалів /В.В.Данильцев, В.Г.Данильцев // Патент на корисну модель, 2011, № 58462.

5. Данильцев В.В. Современное производство стеклопластиковых труб / В.В.Данильцев, А.В.Леонов А.В. // Водопостачання та водовідведення – 2011. – № 2. – С.20 – 25.

6. Данильцев В.В. Термоупругое напряженное состояние, возникающее при соединении металлического фланца со стеклопластиковой трубой / С.М. Верещака, А.В. Дейнека, В.В. Данильцев, И.В. Верещака // Технологія XXI століття: Матеріали міжнародної наук.-практ. конф.15 – 19 вересня 2014 р. – Южне, 2014. – С.53.

7. Данільцев В.В. Верстат для виробництва труб з армованих пластмас / В.В.Данильцев, Ю.А.Шагалін, В.С.Сущінський // Патент на корисну модель, 2013, №84029

8. Данільцев В.В. Розрахунок на міцність склопластикових труб у зоні фланцевих з'єднань/ С. М. Верещака, В.В.Данильцев, Д. А. Жигилий //Машинознавство. – 2013. – №1-2. С. 9 – 13.

9. Данільцев В.В. Конструкційна міцність витяжної труби з композиційного матеріалу від дії вітрового навантаження / С. М. Верещака, Жигилій Д.О., В. В.

Данільцев / 12-й Міжнародний симпозіум українських інженерів-механиків у Львові: Тези доповідей.– Львів: КІНПАТРІ ЛТД.– 2015.– С. 11

10. Данільцев В.В. Розв'язання задачі термопружності склопластикової труби за допомогою сплайн-функцій / С. М. Верещака, А. В. Дейнека, В. В. Данільцев /12-й Міжнародний симпозіум українських інженерів-механиків у Львові: Тези доповідей. – Львів: КІНПАТРІ ЛТД. – 2015. – С. 51.

11. Данільцев В. В. Прочность локальных дефектных участков стальных трубопроводов с ремонтным бандажом из стеклопластика /С. М. Верещака, Д. О. Жигилій, В. В. Данільцев, А. В. Дейнека А.В. // Компрессорное и энергетическое машиностроение". – 2015. – № 3 (41). – С. 7 – 14.

12. Данільцев В.В. Термоупругое напряженное состояние стеклопластиковой труби в зоне соединения с металлическим фланцем / С. М. Верещака, А. В. Дейнека, В. В. Данільцев // Вісник Сумського національного аграрного університету. Серія "Механізація та автоматизація виробничих процесів ". – 2015. – №11 (27). С. 124 – 128.

13. Данільцев В.В. Прочность бандажного и муфтового соединений стеклопластиковых труб / С. М. Верещака, В. В. Данільцев // Збірник наукових праць: «Вісник національного технічного університету "ХПІ". Серія "Динаміка і міцність машин". – 2015. – № 55 . – С. 35 - 42.

14. Данильцев В. В. Конструкционная прочность вытяжной трубы из композиционного материала при действии ветровой нагрузки / С. М. Верещака, В. В. Данильцев, Д. А. Жигилий Д.А. // Вісник Сумського національного аграрного університету. Серія "Механізація та автоматизація виробничих процесів ". – 2015. – №11 (27). С. 129 – 133.

15. Данільцев В.В. Розрахунок на міцність склопластикових труб у зоні фланцевих з'єднань/ С. М. Верещака, В.В.Данильцев, Д. А. Жигилий //Машинознавство. – 2013. – №1-2. С. 9 – 13.

16. ТУ 2296-250-24046478-95. Трубы стеклопластиковые. Научно-производственная фирма "Новация". – г. Пермь, шоссе Космонавтов 111.

17. Данильцев В.В. Прочность локальных дефектных участков стальных трубопроводов с ремонтным бандажом из стеклопластика / В. В. Данильцев / Композиты СНГ: Сборник докладов 5-й ежегодной международной конференции 1 – 2 октября 2015 г. – г. Минск, Беларусь. – С. 28 – 38.

18. ТУ 2296-001-26757545-2005. Трубы стеклопластиковые. ООО РосПромТехСнаб (Россия). – г. Челябинск, ул. Батумская 15 «А».

19. ASTM D4161 - 01(2010) Standard Specification for "Fiberglass" (Glass Fiber-Reinforced Thermosetting-Resin) Pipe Joints Using Flexible Elastomeric Seals, ICS Number Code 23.040.60.

20. АО «Актюбинский завод неметаллических труб». Краткая техническая характеристика выпускаемой продукции. – Актобе, 2005.– Республика Казахстан.

21. Fiberglass Pipe Design Manual in AvaxHome, FileCrop Search Engine 2007-2012. , AWWA M-45.

22. ASTM D3262 - 11 Standard Specification for “Fiberglass” (Glass Fiber-Reinforced Thermosetting-Resin) Sewer Pipe, ICS Code : ICS Number Code 27.040.20 (Plastic pipes), DOI: 10.1520/D3262-11 , ASTM D3262 (Plastics Standards), 1996-2012 ASTM.

23. ТУ 2296-001-26757545-2005. ООО «НПП «Завод стеклопластиковых труб». Стандарты производства стеклопластиковых труб [ASTM 33517].

24. DIN 16868-1: Wound and filled glass fibre reinforced polyester resin pipes - Дименсионс, Publication Date: Nov 1, 1994 SDO: DIN: Deutsches Institut Fur Normung E.V.

25. Gas cylinders — High pressure cylinders for the on-board storage of natural gas as a fuel for automotive vehicles: ISO 11439-2003. – [First edition 2000-09-15]. – ISO, 2003. – 80 p. (International Standard).

26. Андреев Л. В. Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации /Андреев Л. В, Ободан Н. И., Лебедев А. Г.- М.: Наука, 1988.- 208 с.

27. Григолюк Э. И. Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники // Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов. - М.: Наука, 1971. - Т. 5. - 271 с.

28. Григоренко Я. М. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ //Я. М. Григоренко, А. П. Мукоед. - К.: Вища шк., 1983.- 286 с.

29. Гузь А. Н. Механика разрушения при сжатии композитных материалов // А. Н. Гузь - К.: Наук. думка, 1990. - 630 с.

30. Гуляев В. И. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач // Гуляев В. И., Баженов В. А., Лизунов П. П. - Львов: Изд-во при Львов. ун-те, 1978. - 192 с.

31. Дудченко А. А. Анизотропные многослойные пластины и оболочки //Дудченко А. А., Лурье С. А., Образцов И. Ф. - М.: ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Сер. Механика твердого деформируемого тела. - 1983. - Вып. 15. - С. 3 - 68.

32. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек // С. А. Амбарцумян - М.: Наука, 1974. - 448 с.

33. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин // С. А. Амбарцумян - М.: Наука, 1987. - 360 с.

34. Григоренко Я. М. Задачи теории упругости неоднородных тел // Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. - К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.

35. Королев В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс // В. И. Королев - М.: Машиностроение, 1965. -272 с.

36. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластины // С. Г. Лехницкий. - М.: Изд-во техн.-теор. лит., 1957. - 463 с.

37. Григолюк Э. И. Современное состояние теории многослойных оболочек // Э. И. Григолюк, Ф. А. Коган // Прикл. механика. - 1972. - 8, №6. - С. 3 -17.

38. Тимошенко С.П. Курс теории упругости / С. П. Тимошенко – К.: Наук. думка, 1972. – 501 с.

39. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates / E. Reissner // J. Math. and Phys. - 1944. - № 33. - P.184 - 191.

40. Амбарцумян С.А. Некоторые вопросы развития теории анизотропных слоистых оболочек / С. А. Амбарцумян // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Физ. - мат. наук. - 1964. - 17, № 3. - С. 29 - 53.

41. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов // В. В. Васильев. - М.: Машиностроение, 1988. - 272 с.

42. Григоренко Я. М. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек // Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко. - М.: Наука, 1992. - 336 с.

43. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости // Я. М. Григоренко. - Киев: Наук. думка, 1973.- 228 с.

44. Григоренко Я. М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках /Я.М.Григоренко // Прикл. механика. - 1996. № 6. - С. 3 - 40.

45. Гузь А.Н. Механика элементов конструкций // Гузь А. Н., Григоренко Я. М., Бабич И. Ю. - К.: Наук. думка, 1983. - 484 с.

46. Донелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки / Л. Г. Донелл. - М.: Наука, 1982. - 567 с.

47. Naghdi P. M. On the theory of thin elastic shells / P. M. Naghdi // Quarterly of Applied Mathematics. - 1957. - V.14, № 4. - P. 369 - 380.

48. Vasiliev V. V. Modern conceptions of plate theory / V. V. Vasiliev // Composite structures. - 2000. - № 48. - P. 39 – 48.

49. Пискунов В. Г. Развитие теории слоистых пластин и оболочек В. Г. Пискунов, А. А. Рассказов // Прикл. механика. - 2002. - 38, № 2. С. 22 - 57.

50. Григолюк Э. И. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин // Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. - М.: Машиностроение, 1988. - 280 с.

51. Пикуль В. В. К проблеме построения физически корректной теории оболочек / В. В. Пикуль // Изв. АН СССР. МТТ. - 1992. - №3. - С. 18 - 25.

52. Родионова В. А. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек // Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф. – СПб.:Изд-во С.- Петербург. ун-та, 1996. - 278 с.

53. Гуртовой А. Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур / А. Г. Гуртовой // Механика композитных материалов. - 1999. - 35, №1. - С. 13 - 28.

54. Немиш Ю.Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел / Ю. Н. Немиш // Прикл. механика.- 2000.- 36, № 2. - С. 3 - 38.

55. Григолюк Э. И. Основные математические модели деформирования и прочности многослойных анизотропных оболочек / Э. И. Григолюк, Ф. А. Коган // Прикладные проблемы механики тонкостенных конструкций: Сб. науч. статей. - М.: Изд-во МГУ, 2000. - С. 56 - 109.

56. Сахаров А.С. Математическая модель деформирования многослойных композитных оболочечных систем / А. С. Сахаров, О. Л. Козак, А. В. Гондлях, С. Л. Мельников // Сопротивление материалов и теория сооружений. - К.: Будівельник, 1984. - №44. - С.13 – 16.

57. Александров А. Я. Конструкции с заполнителем из пенопластов // Александров А. Я., Бородин И. Я., Павлов В. В. - М.: Машиностроение, 1972. - 211 с.

58. Librescu L. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey // L.Librescu, T.Hause // Composite structures. - 2000. - V.48. - P. 1 - 17.

59. Noor A. K. Computational models for sandwich panels and shells // A. K. Noor, W. S. Burton, C. W. Bert // Appl.Meh. Rev. – 1996. - V.9, № 3. - P. 155 - 199.

60. Болотин В. В. Теория армированной слоистой среды со случайными начальными неправильностями / В. В. Болотин // Механика полимеров.– 1966. - № 1. - С. 11 - 19.

61. Болотин В.В. Основные уравнения теории армированных сред / В. В. Болотин // Механика полимеров. - 1965. - № 2. - С. 27 - 37.

62. Пискунов В. Г. Расчет неоднородных оболочек и пластин методом конечных элементов // В. Г. Пискунов, В. Е. Вериженко, В. К. Присяжнюк, В. С. Сипетов, В. С. Карпиловский. - К.: Вища шк., 1987. - 200 с.

63. Пискунов В. Г. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций // В. Г. Пискунов, В. Е. Вериженко. - К.: Будівельник, 1986. –176 с.

64. Рассказов А. О. Расчет многослойной ортотропной пологой оболочки методом конечных элементов / А. О. Рассказов // Прикл. механика. - 1978. - 14, № 8. - С. 51 - 57.

65. Сахаров А. С. Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений / А. С. Сахаров // Сопротивление материалов и теория сооружений. - К.: Будівельник, 1974 - №24. - С.147- 156.

66. Григоренко Я. М. Некоторые подходы к решению задач теории тонких оболочек с переменными геометрическими и механическими параметрами / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко // Прикл. механика.- 2002.- 38, №11. – С.32 - 68.

67. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С. К. Годунов //Успехи мат. наук. - 1961. - 16, №3. - С. 171 - 174.

68. Баженов В. А. Нелинейные задачи механики многослойных оболочек // Баженов В. А. , Сахаров А. С., Гондлях А. В., Мельников С. Л. - К.: НДІ Будмеханіка, 1994.- 264 с.

69. Григоренко Я. М. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) / Я. М. Григоренко, Н.Н.Крюков // Прикл. механика - 1995.- 31, № 6. - С. 3 - 27.

70. Рассказов А.О. Экспериментальное исследование статики и динамики многослойных пластин / А.О.Рассказов, И.И.Соколовская // Прикл. механика. - 1981. - 17, № 2. С. 65 – 70.

71. Рассказов А. О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек // Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А. - К.: Вища шк., 1986. - 192 с.

72. Александров А. Я. Расчет трехслойных панелей // Александров А. Я., Брюккер Л. Э., Куршин Л. М. - М.: Оборонгиз, I960. – 270 с.

73. Алфутов Н. А. Расчёт многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов /Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. //М.: Машиностроение, 1984. - 264 с.

74. Королёв В. И. Упругопластические деформации оболочек // В. И. Королёв. - М: Машиностроение, 1971. - 303 с.

75. Остерник Э. С. Анизотропные слоистые пластины средней толщины / Э. С. Остерник // Изв. АН Арм. ССР. Механика. - 1967. - 20, № 5. - С. 48 - 57.

76. Потапов А. И. Неразрушающий контроль конструкций из композиционных материалов / А. И. Потапов, Ф. П. Пеккер / - Л.: Машиностроение, 1977. - 192 с.

77. Скудра А. М. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков // Скудра А. М., Булавс Ф. Я., Роценс К. А.-Рига: Зинатне,1971.-239 с.

78. Тарнопольский Ю. М. Особенности расчета деталей из армированных пластиков // Ю. М. Тарнопольский, А .В. Розе. - Рига: Зинатне, 1969.- 274 с.

79. Пелех Б. Л. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями // Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М. - К.: Наук. думка, 1988. - 279 с.

80. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 287с.

81. Белозеров Л.Г., Киреев В.А. Композитные оболочки при силовых и тепловых воздействиях. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2003. – 388 с.

82. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Эффективные физико-механические характеристики композитов однонаправленно-армированных монотропными волокнами. Сообщение 1. Модель армированной среды//Изв. вузов. Строительство. – 2006. № 5. – С. 16 – 24.

83. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Эффективные физико-механические характеристики композитов однонаправленно-армированных монотропными волокнами. Сообщение 2. Модель армированной среды//Изв. вузов. Строительство. – 2006. № 6. – С. 10 – 19.

84. Перов Ю.Ю., Мельников П.В. Экспериментально-теоретическое исследование термических деформаций конструкционного углепластика КМУ-8 // Механика композитных материалов. – 1993. – Т. 29. – №5. – С. 608 – 612.

85. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.

86. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов. Ч.1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // Вестник МГУТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. №3. – С. 36 – 49.

87. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка эффективной теплопроводности волокнистого композита методом согласования// Наука и образование. 2013. С. 519 – 532.

88. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Теплопроводность композита, армированного волокнами // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2013. № 5. С. 75 – 81.

89. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с включениями в виде удлиненных эллипсоидов вращения // Тепловые процессы в технике. 2013. Т. 5. № 6. С. 276 – 282.

90. Кристенсен Р. Введение в механику композитов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 336 с.

91. Кувыркин Г.Н. Теплопроводность однонаправленного волокнистого композита. Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 8.

92. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости: Пер: с англ. – М.: Наука, 1979. – 560 с.

93. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Определение эффективных термомеханических характеристик слоистого композита регулярной структуры в

несимметричной постановке // Прикладная механика. – 2009. Т. 45, № 11. – С. 71 – 79.

94. Биргер И.Д., Мавшотов Р.Р. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.

95. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела.– М.: Наука, 1977.– 416 с.

96. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука. – 1997. – 400 с.

97. Шленский О.Ф. Тепловые свойства стеклопластиков. – М.: Химия, 1973.– 219 с.

98. Шленский О.Ф. Теплофизика разлагающихся материалов // Шленский О.Ф., Шашков Л.Г., Аксенов Л.Н. – М.: Энергоиздат, 1985. – 144 с.

99. Ильюшин А.А., Победря Б.Б. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.

100. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высш. шк., 1976. – 277 с.

101. Композиционные материалы. Т. 3. Применение композиционных материалов в технике: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1978. – 512 с.

102. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966.– 752 с.

103. Бураков В.Л., Санду С.Ф. Влияние теплового воздействия частиц на нестационарный нагрев и термохимическое разрушение коксующихся теплозащитных материалов// Теплофизика и аэромеханика – 1996, – М. – С. 381 – 388.

104. Исаков Г.Н., Кузин А.Я. Моделирование и идентификация процессов тепломассопереноса во вспучивающихся теплозащитных материалах //Прикладная механика и техническая физика. – 1996. – № 4. – С. 126 – 134.

105. Павлов В.П. Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел / УГАТУ. – Уфа: УГАТУ, 2003. – 197 с. 15ВК 5-86911-315-6.

106. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. – М.: Стройиздат, 1977. – 129 с.

107. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. - М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

108. Валишвили И.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. – М.: Машиностроение, 1976. – 278 с.

109. Елпатьевский А.Н., Васильев В.В. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. – М.: Машиностроение. 1972. – 167 с.

110. Ершов П.П. Проектирование анизотропных конструкций. – М.: ВИМИ, 1981.– 160 с.

111. Мяченков В.И., Григорьев И.В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ. – М.: Машиностроение. 1981. – 216 с.

112. Образцов И.Ф., Булычев Л.А., Васильев В.В. и др. Строительная механика летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.

113. Острик А.В., Слободчиков С.С. Расчет прочности композитных оболочек высокого давления под действием лучистых потоков энергии // Технол. сер. Конструкции из композиционных материалов. – 1995. - № 1. – С. 21 – 30.

114. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ибламинова Д.Р. и др. Влияние скорости теплового нагружения па напряженное состояние вязкоупругих слоистых конструкций // Механика композитных материалов. – 1989. – № 6. – С. 1080 – 1085.

115. Пикуль В.В. Теория и расчет слоистых конструкций. – М.: Наука, 1985.– 184 с.

116. Тетерс Г.А., Рикардс Р.Б., Нарусберг В.Л. Оптимизация оболочек из слоистых композитов. – Рига, 1978. – 240 с.

117. Тимошенко С.П., Войновскпй-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

118. Бакулин В.Н. Уточненные эффективные подходы для построения моделей слоистых оболочек и криволинейных стержней // Десятая юбилейная международная конференция по вычислительной механике и современным

прикладным программным средствам. – Переславль-Залесский, – М., МГИУ, 1999. – С.132 – 134.

119. Бакулин В.Н., Острик А.В. Расчетно-экспериментальное исследование механического действия излучений на композитные элементы конструкций летательных аппаратов в полетных условиях.// Механика композиционных материалов и конструкций. – М. ИПРИМ РАН, 1999. – Т. 4, N4. – С. 77 – 87.

120. Бакулин В.Н., Потопахин В.А. Уравнения трехмерной теории для расчета толстостенных многослойных оболочек // Механика композиционных материалов и конструкций. – М. ИПРИМ РАН, 1998. – Т. 4, N2. – С. 83 – 96.

121. Павлов В.П., Первушин Ю.С., Звонарев В.Д. Математическая модель теплового деформирования теплозащитного материала // Механика деформируемых тел и конструкций: Межвузовский научный сборник, УГАТУ. – Уфа, 1998. – С. 9 – 15.

122. Третьяченко Г.Н., Грачева Л.И. Термическое деформирование неметаллических деструктирующих материалов. – Киев: Наук. думка, 1983. – 248 с.

123. Композиционные материалы. Т. 4. Композиционные материалы с металлической матрицей: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1978. – 504 с.

124. Павлов В.П. Тепловая деформация, прочность и термовязкоупругость стеклопластиков при высокой переменной во времени температуре в условиях термодеструкиии. Экспериментальные исследования и математическое моделирование / УГАТУ. – Уфа: УГАТУ, 2004. – 218 с. 18ВМ 5-86911-483-7.

125. Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов // Г. А. Ванин. – К.: Наук. думка, 1971. – 304 с.

126 Малмейстер А. К. Сопротивление полимерных и композитных материалов // Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.

127. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов // Б. Е. Победря. – М.: Наука, 1984. – 400 с.

128. Шульга Н. А. Моделирование и расчет элементов конструкций из неоднородных материалов // Шульга Н. А., Кривов Г. А., Федоренко Ю. М. – К.: Техника, 1996. – 244 с.

129. Noor A. K. Assessment of computational models for multilayered composite shells / A. K. Noor, W. S. Burton // Appl. Mech. Rev. – 1990. – V.43, № 4. – P. 67-97.

130. Noor A. K. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates / A. K. Noor, W. S. Burton // Appl. Mech. Rev. – 1989. – V.42, № 1. – P. 1 – 13.

131. Reddy J. N. An evalution of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates / J. N. Reddy // Composite Structures. – 1993. – №25. – P. 21 – 35.

132. Reddy J. N. On the generalization of displacement-based laminated theories / J. N. Reddy // Appl. Mech. Rev. – 1993. – V.42, № 11, pt. 2. – P. 213 – 222.

133. Reddy J. N. Theories and computational models for composite laminates / J. N. Reddy, D. H. Robbins // Appl.Mech. Rev. – 1994. – V.47, № 6, pt. 1. – P. 21 – 35.

134. Васильев В. В. Об особенностях деформирования ортотропного стеклопластика при растяжении / В. В. Васильев, А. А. Дубченко, А. Н. Елпатьевский // Механика полимеров. – 1970. – № 1. – С. 144 – 146.

135. Григоренко Я. М. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами // Я. М. Григоренко, Н. Н. Крюков. – К.: Наук. думка, 1988. – 264 с.

136. Механика композитов: в 8 т. Т. 8: Статика элементов конструкций // Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, И. Г. Емельянов, Н. Н. Крюков, Ю. Н. Немиш, Н. Д. Панкратова, Б. Л. Пелех, Г. Г. Влайков, А. В. Максимук, Г. П. Урусова. – К.: Наук. думка, 1999. – 379 с.

137. Никишин В. С. Задачи теории упругости для многослойных сред // В. С. Никишин, Г. С. Шапиро. – М.: Наука, 1973. – 132 с.

138. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела // В. С. Саркисян. – Ереван: Изд-во Ереван. гос. ун-та, 1976. – 534 с.

139. Роуландс Р. Течение и потеря несущей способности композитов в условиях двухосного напряженного состояния: сопоставление расчета и экспериментальных данных / Р. Роуландс // Неупругие свойства композитных материалов. – М.: Мир, 1978. – С. 140 – 179.

140. Захаров В.В. Влияние трения на процесс расслоения разнородных материалов / В. В. Захаров, Л. В. Никитин // Механика композитных материалов. - 1983.– № 1. – С. 20 – 25.

141. Кобелев В. Н. Расчёт трёхслойных конструкций // Кобелев В. Н., Коварский Л. М., Тимофеев С. И. – М.: Машиностроение, 1984. – 304 с.

142. Серенсен С. В. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами // С.В. Серенсен, Г. П. Зайцев. – К.: Наук. думка, 1982. – 295 с.

143. Тарнопольский Ю. М. Расслоение сжимаемых стержней из композитов / Ю. М. Тарнопольский // Разрушение композитных материалов: тр. 1-го советско-американского симпозиума. – Рига: Зинатне, 1979. – С.160 – 166.

144. Ашбаух В. Развитие конечной трещины, перпендикулярной поверхности раздела двух материалов / Ашбаух В. // Прикл. механика, 1973.– т.40.– сер.Е, № 2.– С. 312 – 314.

145. Кучерявый В. И. Расчет обсадных труб заданной надежности при растягивающих нагрузках и внутреннем давлении / Кучерявый В. И., Мильков С. Н. // Проблемы машиностроения и надежности машин.– 2003.– № 5.– С. 30 – 36.

146. Левин В.А. Избранные нелинейные задачи механики разрушения / Левин В.А., Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г. // М.: Физматлит.– 2004. – 408 с.

147. Акопян В.Н. Напряженное состояние однородной упругой плоскости, содержащей накрест лежащие трещины, при смешанных граничных условиях на берегах трещин / Акопян В.Н., Саакян А.В. // Известия РАН.– Механика твердого тела.– 1999.– № 3.– С. 106 - 113.

148. Неупругие свойства композиционных материалов //Под ред. К.Гераковича [Пер. с англ.]. – М.: Мир, 1978. – 294 с.

149. Гольдман А. Я. Прочность конструкционных пластмасс // А. Я. Гольдман. – Л.: Машиностроение, 1979. – 320 с.

150. Тамуж В. П. Микромеханика разрушения полимерных материалов // В. П. Тамуж, В. С. Куксенко. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.

151. Фудзии Т. Механика разрушения композиционных материалов // Т.

152. Alwar R.S. Three-dimensional finite element analysis of cracked plates in bending / Alwar R.S., Ramachandran Nambissan K.E. // Int. J. Humer.- Meth. Eng., 1983.- v.2.- Ж 2.- pp. 293 - 303.

153. Kollar L. Buckling of complete spherical shells and spherical caps subjected to uniform overall radial pressure / Kollar L. // Proc. colloq. on buckling of shells.- Stuttgart.- Mai 6-7.- 1982. -Berlins Springer.- 1982.- pp. 401 425.

154. Бурьян О.Ю. Моделирование межфазного слоя в композитах с полимерной матрицей. Определение его структуры и механических свойств / Бурьян О.Ю., Новиков В.У. // Механика композитных материалов. – 2002.– № 3.– 289 с.

155. Бочкарева С.А. Определение вероятностей безотказной работы конструкций из полимерных материалов / Бочкарева С.А., Люкшин Б.А., Реутов А.И. // Физическая мезомеханика.- Томск.- 2004.- Т. 7.- 43 с.

156. Люкшин Б.А., Люкшин П.А. Влияние свойств межфазных слоев на напряженно-деформированное состояние полимерного композита в окрестности включения // Механика композиционных материалов и конструкций. 1998, т. 4, № 2, с. 56 - 68.

157. Яновский Ю.Г. Некоторые аспекты компьютерного моделирования структуры и микромеханических свойств перспективных полимерных композиционных материалов / Яновский Ю.Г., Образцов И.Ф. // Физическая мезомеханика. -1999,.- т.2, № 1 2, С. 135-142.

158. Скудра А. М. Обобщенные структурные критерии прочности армированных пластиков для плоского напряженного состояния / А. М. Скудра, Ф. Я. Булавс // Прочность и разрушение композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1983. – С. 241 – 249.

159. Скудра А. М. Структурная теория армированных пластиков // А. М. Скудра, Ф. Я. Булавс. – Рига: Зинатне, 1978. – 192 с.

160. Викарио А. Критерии прочности и анализ разрушения конструкций из композиционных материалов / А. Викарио, Р. Толанд // Композиционные материалы [под ред. Л. Браутмана, Р. Крока]. – М.: Машиностроение, 1978. Т. 7, ч. 1: Анализ и проектирование конструкций / [под ред. К. Чамиса; пер. с англ]. – С. 62 – 107.

161. Верещака С.М. Нелинейное деформирование и устойчивость многослойных элементов конструкций с дефектами структуры // Верещака С.М. – Сумы: Изд-во СумГУ, 2009. - 286 с.

162. Галимов К.З. Уравнения равновесия и движения тонких оболочек по нелинейной теории типа Тимошенко / К.З.Галимов // Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – С. 36 – 95.

163. Григолюк Э.И. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин / Э.И.Григолюк, Г.М.Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.

164. Кантор Б.Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Кантор Б.Я. – Киев: Наук. думка, 1990.– 135 с.

165. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. – 256 с.

166. Кучер Н.К. Деформирование слоистых эпоксидных композитов, армированных одно направленными волокнами и тканью сатинового переплетения / Н. К. Кучер, М. П. Немцов, М. Н. Заразовский // Пробл. прочности. – 2006. – №1. – С. 41 – 58.

167. Кучер Н.К. Оценка прочности слоистых эпоксикарбо- волокнитов, армированных одно направленными волокнами / Н. К. Кучер, М. Н. Заразовский // Пробл. прочности. – 2006. – № 6. – С. 95 – 112.

168. Shao Z. S. Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length / Z. S. Shao // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2005. – Vol. 82.– P. 155 – 163.

169. Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любина, Б. Э. Геллера. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.

170. Композиционные материалы: Справочник //В.В.Васильев, Ю.М.Тарнопольский. - М.: Машиностроение, 1990. - 512 с.

171. Ремонт магістральних трубопроводів під тиском / М. В. Беккер, В. С. Бут, Р. М. Говдяк та ін. — К.: Кий, 2008. — 232 с.

172. Mableson A. R., Dunn K. R., Dodds N., and Gibson A. G. Refurbishment of steel tubular pipes using composite materials // Plast. Rubber and Comp. — 2000. — Vol. 29. — P. 558—565.

173. Freire J. L. F., Vieira R. D., Diniz J. L. C., and Meniconi L. C. Effectiveness of composite repairs applied to damaged pipeline // Exp. Tech. Soc. Exp. Mech. — 2007. — Vol. 31. — P. 59—66.

174. Mattos H. Sd. C., Reis J. M. L., Sampaio R. F., and Perrut V. An alternative methodology to repair localized corrosion damage in metallic pipelines with epoxy resins // Mater. Des. — 2009. — Vol. 30. — P. 3581—3591.

175. Leong A. Y. L., Leong K. H., Tan Y. C., Liew P. F. M., Wood C. D., Tian W., et al. Overwrap composite repairs of offshore risers at topside and splash zone // Proc. Int. Comm. on Composite Materials (ICCM-18). — Jeju Island, Korea Int. Comm. on Composite Materials; 21—26, August, 2011.

176. Duell J. M., Wilson J. M., and Kessler M. R. Analysis of a carbon composite overwrap pipeline repair system // Int. J. Pressure Vessels and Piping. — 2008. — Vol. 85. — P. 782—788.

177. Alexander C., Francini B. State of the art assessment of composite systems used to repair transmission pipe lines //6th Intern. pipeline conf. 25–29 Sept., 2006. — Calgary, Alberta, Canada, IPC 2006-10484. — 8 p.

178. Бандажная система RES-Q Composite Wrap // Компания T. D. Williamson Inc.:[сайт].URL:http://www.tdwilliamson.com/en/Products/RehabilitationProducts/CompositeWrap (дата обращения: 20.01.2014).

179. ASME B 31.4, ASME B 31.8. Classes of ASME Boiler and Pressure vessel Code. — Date 10.05.90.

180. Lukacs J., Nagy G., Torok I., Egert J., and Pere B. Experimental and numerical investigations of external reinforced damaged pipelines // Procedia Engin. — 2010. — Vol. 2. — P. 1191—1200.

181. The American Society of Mechanical Engineers. Repair of Pressure Equipmentand Piping. ASME PCC-2-2006. — N. Y.: ASME, 2006.

182. ASTM Committee D20. Standard practice for obtaining hydrostatic orpressure design basis for ‘‘fibreglass’’ (glass-fibre-reinforced thermosettingresin) pipe and fittings. — ASTM D2992-2006. West Conshohocken: Am. Soc. for Testing and Materials, 2006.

183. ISO. Petroleum, petrochemical and natural gas industries — composite repairsof pipework — qualification and design, installation, testing and inspection // ISO/TS 24817. — London: Int. Organization for Standardization (ISO), 2006.

184. Cunha S. B. and Netto T. A. Analytical solution for stress, strain and plastic instability of pressurized pipes with volumetric flaws // Int. J. Pres. Vessels and Piping. — 2012. — Vol. 89. — P. 187—202.

185. Szary T. The Finite Element Method Analysis for Assessing the Remaining Strength of Corroded Oil Field Casing and Tubing. PhD thesis. — Freiberg: Geotechnik und Bergbau der Technischen Univ. Bergakademie, 2006.

186. Alexander C. Development of a Composite Repair System for Reinforcing Offshore Risers. PhD thesis. Texas: Texas A&M Univ., 2007.

187. Shouman A. and Taheri F. Compressive strain limits of composite repaired pipelines under combined loading states // Composite Structures. — 2011. — Vol. 93. — P. 1538—1548.

188. Keller M. W., Jellison B. D., and Ellison T. Moisture effects on the thermal and creep performance of carbon fiber/epoxy composites for structural pipeline repair // Composites: Part B: Eng. — 2013. — Vol. 45, Iss. 1. — P. 1173—1180.

189. Kopple M. F., Lauterbach S., and Wagner W. Composite repair of through-walldefects in pipework — analytical and numerical models with respect to ISO/TS24817 // Compos. Struct. — 2013. — Vol. 95. — P. 173—178.

190. Гарф Э. Ф., Нетребский М. А. Оценка прочности и ресурса трубопроводов с эрозионно-коррозионными повреждениями // Автомат. сварка. — 2000. — № 9/10. — С. 15–20.

Затверджую:

Директор

ТОВ «ЕКОКОМПОЗИТ»

Котлячков Д. О.

31 травня 2016р.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук Данільцева Віктора Володимировича

Даним актом посвідчується, що наукові результати та рекомендації отримані в дисертаційній роботі Данільцева Віктора Володимировича «МІЦНІСТЬ КОНСТРУКЦІЙ ЗІ СКЛОПЛАСТИКА З МІЖШАРОВИМИ ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРИ МАТЕРІАЛА», впроваджені на виробництві ТОВ «ЕКОКОМПОЗИТ» при виготовленні склопластикових виробів, а саме трубчастих фільтрів та труб.

Надані методики та алгоритм розрахунків, застосовуються при виборі товщини стінкисклопластикового полого тіла обертання та конструкції вузлів з'єднання трубчастих елементів.

Практичне значення застосування названої вище методики підтверджується надійністю склопластикових конструкцій при роботі в заданих умовах експлуатації та економії матеріалу при виготовленні цих конструкцій.

Директор

ТОВ «ЕКОКОМПОЗИТ» Д. О. Котлячков.

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Сумський державний університет

Затверджую

Перший проректор

__________ В. Д. Карпуша

31 травня 2016р.

АКТ

30.05.2016р. м. Суми

Про впровадження результатів дисертаційної роботи у навчальний процес

Складений комісією у складі:

Голова комісії – зав. кафедрою опору матеріалів і машинознавства, к.т.н., професор І. Б. Карінцев.

Члени комісії – доцент кафедри опору матеріалів і машинознавства, к.т.н., доцент С. С. Некрасов;

доцент кафедри опору матеріалів і машинознавства, к.т.н., Д. О. Жигилій.

Даний акт складено в тому, що результати дисертаційної роботи Данільцева Віктора Володимировича «Міцність конструкцій зі склопластику з між шаровими дефектами структури матеріалу» впроваджено у навчальний процес Сумського державного університету для студентів напрямів «Інженерна механіка» та «Механіка» та магістрів спеціальності «Комп'ютерна механіка» факультету технічних систем та енергоефективних технологій, а саме:

- результати дисертації використовуються при викладанні навчальних дисциплін «Опір матеріалів», «Механіка композиційних матеріалів»;
- при проведенні лабораторних робот застосовується експериментально-теоретична методика.

Голова комісії __________ Карінцев І. Б.

Члени комісії __________ Некрасов С. С.

__________ Жигилій Д. О.

Затверджую:

Директор

ТОВ «СКЛОПЛАСТИКОВІ ТРУБІ»

Данільцев В.В.

31 травня 2016р.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук Данільцева Віктора Володимировича

Даним актом посвідчується, що наукові результати та рекомендації отримані в дисертаційній роботі Данільцева Віктора Володимировича «МІЦНІСТЬ КОНСТРУКЦІЙ ЗІ СКЛОПЛАСТИКА З МІЖШАРОВИМИ ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРИ МАТЕРІАЛА», впроваджені на виробництві ТОВ «СКЛОПЛАСТИКОВІ ТРУБИ» при проектуванні та виготовленні склопластикових труб та їх з'єднань, та підчас ремонтних робіт на металевих та склопластикових трубопроводах.

Зокрема надані методики розрахунків склопластикових трубчастих виробів, згідно яких розраховуються показники пружності та міцності створюваних конструкцій на різних технологічних переділах.

Позитивними результатами експлуатації трубопроводів при розрахунку яких була застосовувана запропонована методикапідтверджується її практичне значення.

Технолог

ТОВ «СКЛОПЛАСТИКОВІ ТРУБИ» О.Г. Карандашов

RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE
Būvniecības Fakultāte
Materiālu un Konstrukciju Institūts
Kaļķu iela 1, LV-1658, Rīga, Latvija
Tālr. 67089124, 67089264
Fax 67089254

RIGA TECHNICAL UNIVERSITY
Faculty of Civil Engineering
Institute of Materials and Structures
Kalku St. 1, LV-1658, Riga, LATVIA
Phone +371 67089124, +371 67089264
Fax +371 67089254

Кафедра динамики и прочности машин
НТУ "Харьковский политехнический институт"
ул. Фрунзе 21, Харьков 61002, Украина

6 сентября 2016 года

СПРАВКА О ВНЕДРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ

ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Методика определения предельного гидростатического давления участков трубопроводов с ремонтными композитными бандажами, изготовленными путём многослойной намотки стеклоткани и стеклоленты на трубу в месте дефекта с одновременным пропитыванием её эпоксидным связующим, изложенная в диссертационной работе Данильцева Виктора Владимировича «ПРОЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКА С МЕЖСЛОЙНЫМИ ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА», была использована в ходе выполнения Седьмой рамочной программы Европейского союза по проекту: «Инновационные технологии неразрушающего контроля и композитного ремонта трубопроводов с объёмными поверхностными дефектами – INNOPIPES», Grant Agreement Number: PIRSES-GA-2012-318874.

Координатор проекта "INNOPIPES" Проф. Евгений Барканов

RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE MATERIĀLU UN KONSTRUKCIJU INSTITŪTS RTU