

**Министерство образования и науки Украины**  
**Сумский государственный университет**

На правах рукописи

**Алексеевко Галина Андреевна**

УДК 533.9:621.375.7

**МУЛЬТИГАРМОНИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ПЛАЗМЕННО-  
ПУЧКОВЫХ СУПЕРГЕТЕРОДИННЫХ ЛАЗЕРАХ НА СВОБОДНЫХ  
ЭЛЕКТРОНАХ С ВИНТОВЫМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ ПУЧКАМИ**

01.04.01 — физика приборов, элементов и систем

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

**Лысенко Александр Владимирович,**

доктор физико-математических наук,

профессор

Сумы – 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ .....	4
ВВЕДЕНИЕ.....	5
РАЗДЕЛ 1 ПАРАМЕТРИЧЕСКИ-РЕЗОНАНСНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ПЛАЗМЕННО-ПУЧКОВЫХ СИСТЕМАХ С ВИНТОВЫМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ ПУЧКАМИ (ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ).....	11
1.1. Эффект супергетеродинного усиления .....	11
1.2. Плазменно-пучковые супергетеродинные лазеры на свободных электронах .....	14
1.3. Особенности резонансных взаимодействий в плазменно- пучковых системах с винтовыми электронными пучками.....	18
1.4. Основные теоретические подходы в теории сильноточных ЛСЭ .....	22
1.5. Выводы к разделу 1 .....	27
РАЗДЕЛ 2 ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА УСРЕДНЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ПЛАЗМЕННО-ПУЧКОВЫХ СУПЕРГЕТЕРОДИННЫХ ЛАЗЕРАХ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ С ВИНТОВЫМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ ПУЧКАМИ .....	29
2.1. Модель. Исходные уравнения .....	29
2.2. Модернизированный метод усредненных характеристик.....	35
2.3. Параметрические резонансные взаимодействия в плазменно- пучковых супергетеродинных ЛСЭ с винтовыми электронными пучками .....	51
2.4. Выводы к разделу 2 .....	60
РАЗДЕЛ 3 НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В ПЛАЗМЕННО-ПУЧКОВЫХ СУПЕРГЕТЕРОДИННЫХ ЛАЗЕРАХ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ ДОПЛЕРТРОННОГО ТИПА С ВИНТОВЫМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ ПУЧКАМИ .....	61
3.1. Модель плазменно-пучкового супергетеродинного ЛСЭ доплертронного типа с винтовым РЕП .....	61

3.2. Система кубически-нелинейных укороченных уравнений для комплексных амплитуд волн .....	64
3.3. Анализ динамики волн в слабосигнальном приближении .....	69
3.4. Уровни и механизмы насыщения .....	76
3.5. Выводы к разделу 3 .....	87
<b>РАЗДЕЛ 4 НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В ПЛАЗМЕННО-ПУЧКОВЫХ Н-УБИТРОННЫХ СУПЕРГЕТЕРОДИННЫХ ЛАЗЕРАХ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ С ВИНТОВЫМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ ПУЧКАМИ .....</b>	<b>89</b>
4.1. Модель плазменно-пучкового супергетеродинного ЛСЭ Н-убитронного типа с винтовым РЕП .....	89
4.2. Кубически-нелинейные укороченные уравнения для комплексных амплитуд взаимодействующих волн .....	92
4.3. Параметрически-резонансные взаимодействия волн .....	99
4.4. Анализ уровней и механизмов насыщения .....	108
4.5. Выводы к разделу 4 .....	117
<b>ВЫВОДЫ .....</b>	<b>119</b>
<b>БЛАГОДАРНОСТИ .....</b>	<b>121</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....</b>	<b>122</b>

## СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ВПЗ	– волна пространственного заряда;
ЛСЭ	– лазер на свободных электронах;
мм-субмм	– миллиметровый-субмиллиметровый;
РЭП	– релятивистский электронный пучок;
СВЧ	– сверхвысокая частота;
СЛСЭ	– супергетеродинный лазер на свободных электронах;
$c.c.$	– комплексно-сопряженная величина (complex conjugate);
$c$	– скорость света;
$e$	– заряд электрона;
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	– орты осей $X, Y, Z$ соответственно;
$i$	– мнимая единица;
$m_e$	– масса электрона;
$\gamma$	– релятивистский фактор;
$\omega_H$	– циклотронная частота

## ВВЕДЕНИЕ

### Актуальность темы

Среди приборов релятивистской сверхвысокочастотной электроники одними из наиболее перспективных с практической и интересных с теоретической точек зрения, являются лазеры на свободных электронах (ЛСЭ) [1–4]. Это обусловлено тем, что эти приборы способны генерировать, усиливать мощное когерентное электромагнитное излучение в широком диапазоне длин волн от миллиметрового до рентгеновского [5–13]. Среди различных типов ЛСЭ следует выделить супергетеродинные лазеры на свободных электронах (СЛСЭ) [5–8, 14–23], которые характеризуются более высокими усилительными свойствами. Связано это с тем, что СЛСЭ используют дополнительный механизм усиления одной из волн участвующих в параметрическом резонансе. В качестве дополнительного механизма усиления в плазменно-пучковом СЛСЭ выступает плазменно-пучковая неустойчивость. Благодаря дополнительному механизму усиления и при умеренных требованиях к параметрам, плазменно-пучковые СЛСЭ являются более компактными, обладают большей выходной мощностью и значениями коэффициента усиления и т.д. по сравнению с традиционными ЛСЭ.

Известно, что использование винтовых релятивистских электронных пучков (РЭП) в устройствах сильноточной электроники с продольным магнитным полем в ряде случаев приводит к повышению их эффективности [24–31]. Поэтому можно предположить, что использование винтовых релятивистских электронных пучков в плазменно-пучковых СЛСЭ позволит получить более высокие значения инкрементов нарастания волн и других параметров по сравнению с плазменно-пучковыми СЛСЭ с прямолинейными релятивистскими электронными пучками [32–33].

Отметим, что в плазменно-пучковых СЛСЭ используются волны пространственного заряда (ВПЗ), которые экспоненциально нарастают за счет плазменно-пучковой неустойчивости и характеризуются линейной дисперси-

онной зависимостью. Это приводит к тому, что для большого количества гармоник ВПЗ выполняются условия трехволнового резонанса, таким образом, имеет место множественные резонансные взаимодействия. Известно, что мультигармонические взаимодействия в плазменно-пучковых СЛСЭ с прямолинейными РЭП существенно влияют на динамику волн [32–33]. Поэтому следует ожидать, что в плазменно-пучковых СЛСЭ с винтовыми электронными пучками множественные резонансные взаимодействия также будут иметь существенное влияние на работу прибора. Таким образом, изучение мультигармонических процессов в плазменно-пучковых супергетеродинных лазерах на свободных электронах с винтовыми электронными пучками является задачей важной и актуальной.

### **Связь работы с научными программами, планами, темами**

Диссертационная работа выполнена на кафедре общей и теоретической физики и кафедре прикладной математики и моделирования сложных систем Сумского государственного университета. Материалы диссертационной работы связаны с выполнением следующих госбюджетных научно-исследовательских работ: «Электромагнитные явления в низкоразмерных планарных периодических металлодиэлектрических системах миллиметрового-инфракрасного диапазонов волн» (№ 0112U001379, 2012–2014 гг.); «Множинні резонансні взаємодії у плазмово-пучкових супергетеродинних лазерах на вільних електронах» (№ 0114U003770, 2014–2016 гг.); «Електрофізичні властивості низьковимірних метаматеріальних та металодіелектричних систем міліметрового-інфрачервоного діапазонів хвиль» (№ 0115U000690, 2015–2017 гг.). Диссертант принимала участие как исполнитель в проведении научных исследований в рамках указанных НИР.

### **Цели и задачи исследования**

Целью диссертационной работы является построение мультигармонической теории плазменно-пучковых супергетеродинных лазеров на свободных электронах с винтовыми электронными пучками, определение режимов работы, при которых формируется мощное электромагнитное излучение.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

- построить самосогласованные кубически-нелинейные теории для плазменно-пучковых СЛСЭ с винтовыми электронными пучками доплерotronного и Н-убитронного типов с учетом множественных параметрических резонансов между высшими гармониками ВПЗ;
- определить инкременты нарастания, уровни и механизмы насыщения электромагнитных волн в плазменно-пучковых СЛСЭ с винтовыми электронными пучками с учетом множественных взаимодействий волн;
- исследовать различные типы параметрических взаимодействий волн в плазменно-пучковых СЛСЭ с неосевым влетом РЭП и определить наиболее эффективные режимы работы прибора;
- провести модификацию метода усредненных характеристик для решения мультигармонических задач применительно к устройствам, использующие винтовые РЭП.

**Объект исследования** – процессы вынужденного излучения винтовыми релятивистскими электронными пучками в лазерах на свободных электронах.

**Предмет исследования** – динамика электромагнитных волн в плазменно-пучковых супергетеродинных лазерах на свободных электронах с винтовыми электронными пучками с учетом множественных параметрически-резонансных взаимодействий, уровни и механизмы насыщения волн.

**Методы исследования.** В качестве основного метода теоретического анализа мультигармонических взаимодействий в исследуемых супергетеродинных лазерах на свободных электронах использовался метод усредненных характеристик [6–7, 23]. В работе применялся квазигидродинамический подход для описания процессов в плазменно-пучковых системах. Также использовался метод медленно меняющихся амплитуд и стандартные численные и численно-аналитические методы.

### Научная новизна полученных результатов

1. Впервые показано, что в плазменно-пучковых супергетеродинных лазерах на свободных электронах как доплерotronного, так и H-убитронного типов имеет место существенное увеличение коэффициентов усиления электромагнитной волны сигнала при увеличении угла влета электронного пучка по отношению к продольному фокусирующему магнитному полю. Выяснено, что этот эффект имеет релятивистский характер и связан с изменением продольной кинетической энергии электронов.
2. Впервые получена система дифференциальных уравнений для амплитуд гармоник электромагнитных волн плазменно-пучковых супергетеродинных лазеров на свободных электронах с винтовыми РЭП как доплерotronного, так и H-убитронного типов с учетом мультигармонических взаимодействий в кубически-нелинейном приближении. Продемонстрировано, что множественные взаимодействия гармоник волны пространственного заряда приводят к уменьшению уровня насыщения основной гармоники волны сигнала в два и более раз.
3. Впервые для плазменно-пучкового супергетеродинного лазера на свободных электронах доплерotronного типа с винтовым электронным пучком определен режим работы с наиболее высоким уровнем насыщения высокочастотного электромагнитного сигнала, который превышает уровни насыщения в других режимах работы в два и более раз. Выяснено, что насыщение в исследуемом приборе происходит из-за захвата электронов пучка плазменными волнами.
4. Впервые для плазменно-пучкового супергетеродинного лазера на свободных электронах H-убитронного типа с винтовым электронным пучком показано, что режим работы, в котором используется быстрая циклотронная электромагнитная волна, характеризуется наибольшим уровнем насыщения волны сигнала. Для данного режима работы определен оптимальный угол влета электронного пучка по отношению к

продольному магнитному полю, при котором достигается максимальная мощность электромагнитного сигнала.

### **Практическое значение полученных результатов**

Практическое значение проведенных в диссертационной работе исследований состоит в определении оптимальных режимов работы плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ с винтовыми электронными пучками. Построенные самосогласованные кубически-нелинейные теории плазменно-пучковых СЛСЭ с доплертронной и Н-убитронной накачками при неосевом влете РЭП позволяют определить оптимальные условия, при которых усиление электромагнитной волны сигнала осуществляется с максимальным значением КПД. Теоретически обоснована возможность использования плазменно-пучковых СЛСЭ с винтовыми РЭП в качестве мощных источников когерентного электромагнитного излучения в миллиметровом диапазоне длин волн. Разработанные теории могут применяться для анализа работы других приборов плазменной релятивистской электроники, которые используют винтовые РЭП.

### **Личный вклад соискателя**

Личный вклад соискателя заключается в непосредственном участии в постановке задач, модификации методов решения, разработке компьютерных программ, проведении расчетов, обсуждении полученных результатов и написании статей. Основные результаты, которые составляют содержание диссертации, были получены лично соискателем. В работах [36, 39, 46] диссертант совместно с научным руководителем А. В. Лысенко провела модернизацию метода усредненных характеристик применительно к сильноточным приборам, использующие винтовые РЭП. В работах [34–35, 41, 43, 47] автором диссертации была построена квадратичная теория плазменно-пучковых СЛСЭ доплертронного и Н-убитронного типов с винтовыми РЭП, а также проведено компьютерное моделирование взаимодействия волн в этих приборах. Соискатель в работах [37–38, 44–45] принимала участие в построении кубически-нелинейной теории плазменно-пучкового СЛСЭ с доплертронной

накачкой и винтовым РЭП, разработала компьютерную программу и провела численное моделирование физических процессов в этом приборе, с учетом множественных параметрических взаимодействий. В работах [39–40, 42] автор диссертационной работы принимала участие в построении кубически-нелинейной теории плазменно-пучкового СЛСЭ Н-убитронного типа при неосевом влете пучка, разработала компьютерную программу и провела компьютерное моделирование взаимодействия волн в исследуемой системе.

### **Апробация результатов диссертации**

Основные результаты диссертационной работы прошли апробацию на следующих симпозиумах и конференциях: XV и XVI International Young Scientists Conference Optics and High Technology Material Science (Киев, 2014–2015 гг.); X и XI International Conference "Electronics and Applied Physics" (Киев, 2014–2015 гг.); Международной конференции молодых ученых и аспирантов (Ужгород, 2015 гг.); 17-м международном симпозиуме «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (Харьков – Сумы, 2015 г.); 24-й Международной крымской конференции «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (Севастополь, 2014г.).

### **Публикации**

Результаты диссертационной работы опубликованы в 14 научных работах: 4 статьи в периодических специализированных изданиях Украины [36, 38–40], 3 статьи в специализированных иностранных журналах [34–35, 37], 4 статей в материалах конференций [43–44, 46–47], в том числе из них 6 статей [34–36, 38–39, 47] индексируются наукометрической базой данных Scopus, 3 работы в сборниках тезисов конференций [41–42, 45].

### **Структура и объем работы**

Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов, общих выводов и списка используемых источников. Объем диссертации — 140 страниц, из которых 112 — основной текст, 24 рисунков и 2 таблицы, в том числе 1 рисунок и 1 таблица на 1 отдельной странице. Список используемых источников содержит — 165 наименований.

# РАЗДЕЛ 1

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИ-РЕЗОНАНСНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ПЛАЗМЕННО-ПУЧКОВЫХ СИСТЕМАХ С ВИНТОВЫМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ ПУЧКАМИ (ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ)

### 1.1. Эффект супергетеродинного усиления

Известно, что супергетеродинные лазеры на свободных электронах относятся к классу устройств, которые способны генерировать или усиливать мощное когерентное электромагнитное излучение в коротковолновом диапазоне длин волн. Супергетеродинные ЛСЭ [5–7, 14–23] по сравнению с традиционными параметрическими ЛСЭ [1–5, 10–13] характеризуются большими коэффициентами усиления электромагнитного излучения при одинаковых значениях амплитуды поля накачки, интенсивности пучка и т.п.

Понятие эффекта супергетеродинного усиления электромагнитных волн было сформулировано в работе [48]. Здесь рассматривалась задача трехволнового взаимодействия волн одного типа между сигналом, накачкой и холостой волной в нелинейной активной среде. Частоты волн сигнала  $\omega_1$  и накачки  $\omega_2$  выбирались близкими друг к другу, но намного большими, чем частота холостой волны  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1, \omega_2$ . Известно, что механизмов усиления в высокочастотной области нет. Однако, при помощи нелинейной связи между взаимодействующими волнами, существует возможность переноса усиления с низкочастотной холостой волны на высокочастотную волну сигнала. Поэтому, параметры среды взаимодействия выбирались таким образом, чтобы частота холостой волны  $\omega_3$  попадала в полосу усиления, в которой она усиливалась за счет дополнительного механизма. Таким образом, при помощи эффекта супергетеродинного усиления, впервые стало возможно переносить усиление вверх по частоте, а именно, с низкочастотной области в высокочастотную.

Подобная идея была сформулирована применительно к лазерам на свободных электронах в работах [14–15]. Основной особенностью этой идеи является то, что частоты волны сигнала и холостой волны брались приблизительно равными  $\omega_1 / \omega_3 \approx 1$ , типы волн при этом были принципиально разными. Поэтому, принцип переноса энергии с низкочастотного диапазона на высокочастотный, здесь не реализуется. Однако, в этом случае имеет место перекачка энергии из электронной волны в электромагнитную волну. В этом и заключается основное отличие данной идеи [14–15] от предложенной в работе [48].

Известно, что в релятивистской плазменной сверхвысокочастотной электронике используется усиление электронных (продольных) волн за счет различных типов неустойчивостей (плазменно-пучковой, двухпоточковой и т.д.). Однако при использовании таких механизмов усиления возникают трудности при трансформации энергии электронной волны в энергию электромагнитной волны. Для решения данной проблемы в работах [14–15] было предложено использование эффекта супергетеродинного усиления, в котором объединялся принцип усиления продольных волн с традиционным для ЛСЭ параметрическим резонансом. Перекачка энергии от продольных волн к поперечным, осуществляется за счет параметрически-резонансного взаимодействия между волнами сигнала, накачки и волной пространственного заряда. Таким образом, получается качественно новый тип усиления.

Известно, что коэффициент усиления в супергетеродинных лазерах на свободных электронах в режиме сильной накачки имеет следующий вид [14–15]:

$$K_c = \alpha_2 e^{\alpha_1 L} - \alpha_1 e^{\alpha_2 L} / \alpha_2 - \alpha_1, \quad (1.1)$$

где  $\alpha_{1,2} = \Gamma/2 \pm (\Gamma^2/4 + \alpha_p^2)^{1/2}$  — инкремент нарастания системы,  $L$  — длина области взаимодействия волн,  $\Gamma$  — инкремент нарастания дополнительного

механизма усиления,  $\alpha_p$  — инкремент нарастания параметрической неустойчивости. Как следует из выражения (1.1) при отсутствии дополнительного механизма усиления  $\Gamma = 0$ , усиление волн в системе осуществляется за счет параметрической неустойчивости с инкрементом  $\alpha_p$ , что соответствует параметрическим ЛСЭ. Учитывая условия  $4\alpha_p^2 \ll \Gamma^2$  в (1.1), которые представляют практический интерес, получим коэффициент усиления системы в более простом виде:

$$K_c \cong 1 + \alpha_p^2 \cdot \exp(\Gamma \cdot L) / \Gamma^2. \quad (1.2)$$

Соотношение (1.2) демонстрирует, что волна сигнала в супергетеродинных ЛСЭ нарастает экспоненциально за счет инкремента дополнительной неустойчивости  $\Gamma$ . Однако, из этого выражения также следует, что поскольку инкремент параметрической неустойчивости также определяет общий коэффициент усиления, то он не должен быть слишком малым. Для иллюстрации эффективности такого типа усиления рассмотрим численные оценки. При  $\Gamma \sim 0,15 \text{ см}^{-1}$ ,  $\alpha_p \sim 0,01 \text{ см}^{-1}$ ,  $L \sim 100 \text{ см}$  получаем  $K_c \sim 1,5 \cdot 10^4$ , в отсутствие дополнительного механизма усиления ( $\Gamma = 0$ ) коэффициент усиления системы находим из соотношения (1.1), который равен  $K_c \sim 1,5$ . Следовательно, использование принципа супергетеродинного усиления в лазерах на свободных электронах позволяет увеличить коэффициент усиления электромагнитной волны сигнала на четыре порядка.

Лазеры на свободных электронах, которые основаны на эффекте супергетеродинного усиления называют супергетеродинными ЛСЭ. В зависимости от применения типа дополнительного усиления (плазменно-пучковая, двухпотоковая неустойчивости) различают плазменно-пучковый, двухпотоковый и т.д. супергетеродинный ЛСЭ. Благодаря высоким усилительным характеристикам в коротковолновом диапазоне длин волн, данный тип приборов сильноточной электроники исследуется во многих

работах [5–7, 14–23, 49–67 и т.д.]. В этих работах анализировалось влияние продольного магнитного поля, разных типов накачек, собственных электрических и магнитных полей и т.п. на эффективность работы СЛСЭ.

Из анализа литературы выяснено, что супергетеродинные ЛСЭ характеризуются на порядок большими значениями инкремента нарастания волн по сравнению с традиционными параметрическими ЛСЭ при эквивалентных параметрах систем. Следовательно, такие приборы могут использовать накачку с меньшими амплитудами электромагнитных полей. Это в свою очередь позволяет получать в СЛСЭ эквивалентное с параметрическими ЛСЭ усиление когерентных электромагнитных волн при меньших габаритах системы. Именно поэтому исследования супергетеродинных лазеров на свободных электронах является задачей важной и актуальной.

## **1.2. Плазменно-пучковые супергетеродинные лазеры на свободных электронах**

Использование плазменно-пучковых систем для генерации мощного когерентного электромагнитного излучения впервые было предложено в работах [68–69]. Взаимодействие электронного пучка с плазмой приводит к экспоненциальному нарастанию амплитуды электромагнитного излучения, это явление получило название плазменно-пучковой неустойчивости. После того, как данный эффект был экспериментально подтвержден [70–72], были предприняты попытки создания новых сверхмощных плазменноподобных приборов в коротковолновом диапазоне длин волн, которые базируются на плазменно-пучковой неустойчивости. Однако эти попытки потерпели неудачу, т.к. такой тип приборов столкнулся с рядом проблем, которые решить на то время было невозможно. Одна из таких проблем была связана с вводом и выводом электромагнитного сигнала в плазму. Вторая проблема, связана с созданием устойчивой плазмы, которая имела бы плотность порядка  $10^{12}$ - $10^{15}$  см<sup>-3</sup>. Такая плотность необходима для генерации

электромагнитного излучения в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне длин волн.

Затем в результате стремительного развития ускорительной техники стало возможно формировать сильноточные релятивистские электронные пучки, токи которых значительно превышают предельный вакуумный ток. Применение этих пучков в плазменной СВЧ-электронике позволило решить некоторые проблемы, приведенные выше. Так как скорость пучка приблизительно равна скорости света в вакууме, то пропадает необходимость в замедлении электромагнитной волны (излучения). Таким образом, электромагнитная волна с высокой фазовой скоростью, может легко быть выведена из плазмы. А благодаря тому, что плазма способна нейтрализовать эффекты пространственного заряда пучка, стало возможно использовать токи, превышающие предельный вакуумный ток, а это в свою очередь приводит к увеличению мощности излучения. Всё это послужило к созданию нового типа устройств коротковолнового диапазона длин волн, которые получили название плазменных релятивистских генераторов. Отметим, что плазменно-пучковая неустойчивость [73-92] обладает рекордно большими значениями инкремента нарастания продольных волн. Именно поэтому, на ее основе строятся мощные генераторы и усилители электромагнитного излучения в коротковолновом диапазоне длин волн [93–102]. Этот класс приборов имеет ряд преимуществ по сравнению с вакуумными СВЧ генераторами. Основными преимуществами плазменных СВЧ генераторов, является быстрая перестройка частоты излучения (за время 30 мкс) за счет изменения плотности плазмы и большая пропускная способность (20...30%). Также, плазменные СВЧ генераторы использующие РЭП работают в импульсном режиме, с длительностью импульса порядка 100 нс. За счет этого такие приборы лишены ряда проблем, которые связаны с развитием низкочастотных неустойчивостей плазмы. Поэтому плазменные релятивистские усилители или генераторы в настоящее время представляют большой интерес для решения ряда прикладных задач.

Однако, не смотря на высокие способности усиления и другие преимущества, в плазменных релятивистских генераторах существует проблема преобразования энергии продольных плазменных колебаний в энергию поперечных электромагнитных волн. Как писалось в предыдущем подразделе, для решения данной проблемы был предложен новый тип усиления электромагнитных волн [14–15], который объединяет дополнительный механизм усиления (плазменно-пучковая, двухпотоковая, циклотронная неустойчивости и т.д.) и трехволновой параметрический резонанс (комбинационный резонанс). Таким образом, системы основанные на таком типе усиления обладают преимуществами плазменных релятивистских генераторов, но при этом лишены их некоторых недостатков. К таким приборам относятся супергетеродинные лазеры на свободных электронах. В зависимости от типа неустойчивости, которую они используют, различают плазменно-пучковый супергетеродинный лазер на свободных электронах [15], двухпотоковый супергетеродинный лазер на свободных электронах [17] и т.п. Сравнительный анализ плазменно-пучковых СЛСЭ и двухпотоковых СЛСЭ, показал, что при одинаковых параметрах систем, плазменно-пучковые СЛСЭ обладают на порядок большими значениями инкрементов нарастания волн. В настоящей диссертационной работе исследуются плазменно-пучковые СЛСЭ.

Также в зависимости от типа накачки различают два типа плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ. Плазменно-пучковый СЛСЭ использующий накачку в виде мощной низкочастотной циркулярно-поляризованной электромагнитной волны, называют доплертронном [2–4]. Накачку в виде периодического реверсивно магнитного поля используют Н-убитронные плазменно-пучковые СЛСЭ [1]. В работах [32–33] были построены кубически-нелинейные теории плазменно-пучковых СЛСЭ с прямолинейными РЭП доплертронного и Н-убитронного типов. Для данного тапа приборов были получены кубически-нелинейные системы дифференциальных уравнений комплексных амплитуд полей

взаимодействующих волн с учетом множественных параметрических взаимодействий. Полученные инкременты нарастания в этих системах, характеризуются исключительно большими значениями по сравнению с параметрическими ЛСЭ. Выяснено, что направление вращения вектора напряженности электрического поля волны сигнала и вектора напряженности электрического поля волны накачки (или вектора индукции магнитного поля) должны совпадать, в противном случае параметрической связи между волнами сигнала, накачки и ВПЗ не будет [32–33]. Также исследованы для этих систем механизмы насыщения и влияние высших гармоник ВПЗ на динамику волн системы. Показано, что плазменно-пучковые СЛСЭ с прямолинейными РЭП могут формировать достаточно мощный электромагнитный сигнал в коротковолновом диапазоне длин волн.

В работе [112] исследовался параметрический ЛСЭ доплертронного типа с прямолинейным РЭП. Здесь было выяснено, что необыкновенная электромагнитная волна сигнала может распространяться в двух направлениях системы, как навстречу, так и вдоль распространения релятивистского электронного пучка (волновой вектор сигнальной волны может принимать как положительное, так и отрицательное значение). В работе [33] в плазменно-пучковом СЛСЭ с прямолинейным РЭП доплертронного типа исследовался только один режим, в котором обыкновенная электромагнитная волна сигнала распространяется на встречу электронному пучку. С учетом результатов полученных в работах [111–112] можно сделать вывод о том, что в данном устройстве могут реализовываться и другие режимы взаимодействия волн сигнала, накачки и ВПЗ. Поэтому возникает задача определения оптимальных режимов работы плазменно-пучкового СЛСЭ доплертронного типа с винтовым РЭП.

Анализ литературных источников также показал, что улучшить коэффициент усиления в плазменно-пучковых системах с продольным магнитным полем, можно благодаря использованию винтовых релятивистских электронных пучков [24–31, 59–67, 103–110]. Под винтовым пучком здесь понимается

релятивистский электронный пучок, который инжектируется в плазму под углом к внешнему фокусирующему магнитному полю. До настоящей работы эффективность применения винтовых релятивистских электронных пучков в плазменно-пучковых супергетеродинных лазерах на свободных электронах Н-убитронного и доплертонного типов исследована не была. Таким образом, становится целесообразно проанализировать влияние винтовых РЭП на динамику волн в плазменно-пучковых системах с внешним продольным магнитным полем, так как увеличение мощности приборов миллиметрового и субмиллиметрового диапазона длин волн, задача важная и актуальная.

Как говорилось ранее, сейчас интенсивно исследуются усилители и генераторы когерентного электромагнитного излучения в коротковолновом диапазоне длин волн, которые основаны на пучковых неустойчивостях [93–102]. Отметим, что одной из особенностей таких устройств, является генерация высших гармоник волн. Это связано с тем, что пучковые неустойчивости характеризуются линейным законом дисперсии и поэтому между высшими гармониками таких волн осуществляются множественные параметрические взаимодействия. Выяснено, что такие взаимодействия качественно влияют на динамику волн в плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ с прямолинейными пучками [32–33]. Следовательно, можно предположить, что и в плазменно-пучковых СЛСЭ с винтовыми РЭП также будет иметь место генерация высших гармоник волны пространственного заряда. Поэтому в диссертационной работе возникает необходимость исследования особенностей мультигармонических взаимодействий волн в плазменно-пучковых СЛСЭ с винтовыми РЭП.

### **1.3. Особенности резонансных взаимодействий в плазменно-пучковых системах с винтовыми электронными пучками**

Возможность использования электронных пучков вращающихся в продольном однородном магнитном поле для получения когерентного электромаг-

нитного излучения, впервые была теоретически показана, независимо друг от друга А.В. Гапоновым-Греховым [114] и Дж. Шнайдером [115]. Подход, использующийся в [114] был классическим, а в [115] — квантово-механическим. В одно время с теоретическими работами, были получены и экспериментальные результаты подтверждающие возможность эффективного взаимодействия винтовых электронных пучков с электромагнитными волнами [116–117]. Особенностью таких взаимодействий является необходимость учета релятивистских эффектов, т.к. эти эффекты приводят к новому типу группировки электронов. Вследствие того, что частота вращения электронов в продольном магнитном поле зависит от их скорости движения, возникает пространственная группировка электронов.

После теоретического описания и экспериментального подтверждения возможности получения индуцированного излучения при взаимодействии винтовых электронных пучков с высокочастотными электромагнитными полями, винтовые пучки начали активно использоваться в СВЧ электронике. Усилители или генераторы, в которых под действием однородных полей электроны совершают периодические винтовые колебания, являются наиболее эффективными для получения высоких мощностей в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах длин волн. Винтовые пучки используются в мазерах на циклотронном резонансе (МЦР), гиро-ЛБВ, гиро-ЛОВ, лазерах на свободных электронах и т.д. [118–128]. Среди разновидностей МЦР нужно выделить гиротроны, которым удалось получить выходную мощность 210 кВт с длительностью импульса 40 мкс на частотах до 670 ГГц [123–128]. Однако отметим, что в данном классе приборов с увеличением частоты электромагнитной волны сигнала мощность существенно уменьшается.

Как известно, для увеличения мощности в сверхвысокочастотной электронике используют электронные пучки с высокими значениями токов. Вакуумные усилители и генераторы электромагнитного излучения не могут использовать пучки с токами, превышающими значение предельного вакуумного тока [73–81]. Для того чтобы использовать сильноточные пучки, необ-

ходима среда которая способна скомпенсировать пространственный заряд пучка. В качестве такой среды используются плазменно-пучковые системы [129–132] с достаточно плотной плазмой ( $n_b \ll n_p$ ,  $n_b$  — концентрация пучка;  $n_p$  — концентрация плазмы). Отметим, что во многих плазменно-пучковых системах плазму удерживают с помощью фокусирующих продольных магнитных полей, благодаря этому в таких системах становится возможным использовать сильноточные винтовые электронные пучки.

Развитие техники формирования сильноточных релятивистских электронных пучков, а также возможность трансформации энергии электронных волн в энергию электромагнитного излучения способствовало появлению нового класса приборов, которые способны генерировать и усиливать мощное когерентное электромагнитное излучение в коротковолновом диапазоне длин волн — супергетеродинных лазеров на свободных электронах [5–7, 14–23, 49–67 и т.д.]. В супергетеродинных ЛСЭ, как писалось ранее, используются плазменно-пучковые системы, т.к. в данном типе приборов основное усиление электромагнитного сигнала достигается за счет пучковых неустойчивостей, которые в свою очередь возбуждаются в плазменноподобных системах.

Идея использования двухпотоковой неустойчивости в ЛСЭ с винтовыми релятивистскими электронными пучками для увеличения эффективности электромагнитного излучения впервые была предложена в работе [133]. Однако, в отличие от супергетеродинных ЛСЭ, в этом приборе эффект двухпотоковой неустойчивости использовался для предварительной группировки электронных пучков, которые более эффективно взаимодействуют с электромагнитной волной. Поэтому данный прибор нельзя отнести к классу супергетеродинных ЛСЭ. Первый супергетеродинный ЛСЭ был основан на эффекте плазменно-пучковой неустойчивости [15–16], затем был предложен СЛСЭ, который в качестве дополнительного механизма усиления использует двухпотоковую

неустойчивость [17]. Начиная от первых работ [15–16] и до сегодняшних дней различными исследователями достаточно интенсивно исследуются разнообразные конструкции СЛСЭ [6–8, 18–23, 49–67 и т.д.]. Супергетеродинные ЛСЭ с винтовыми электронными пучками, которые работают в монохроматическом режиме, достаточно активно исследуются различными научными группами [24–31, 59–67].

В работе [24] рассматривалось взаимодействие электромагнитных циклотронных волн с замагниченной плазменно-пучковой системой, в которой электронный пучок вращается в магнитном поле. Было показано, что такое взаимодействие можно использовать в источниках мощного когерентного электромагнитного излучения в коротковолновом диапазоне. Плазма, хоть и пассивно, играет основную роль в таком режиме взаимодействия. Аналитически и численно было получено, что электронный КПД может достигать значений свыше  $\sim 18\%$ .

В работе [25] автором был предложен двухпоточковый мазер на циклотронном резонансе, работающий в мм-субмм диапазонах длин волн. Здесь было показано, что в данном приборе рабочая частота обратно пропорциональна разности скоростей пучков и может достигаться при достаточно низких энергиях пучков и слабом фокусирующем магнитном поле. Установлено, что к высокочастотной группировке пучков приводит их взаимодействие с циклотронными волнами. А для взаимодействия двухскоростных электронных пучков с циклотронными модами, электроны должны приобрести сначала перпендикулярную энергию, также как в гиротронах, МЦР и т.п.

В работах [26–27, 29–31, 59–60] теоретически исследовались двухпоточковые СЛСЭ с винтовыми электронными пучкам. Получены дисперсионные зависимости волн в таких приборах [26–27, 59–60]. В работах [29–30] исследованы коэффициенты усиления электромагнитных волн, выяснено, что данные СЛСЭ характеризуются исключительно высокими значениями инкрементов нарастания двухпоточковой неустойчивости. С

помощью численного анализа было установлено, что присутствие продольного магнитного поля приводит к повышению темпов роста волны сигнала. Однако, когда индукция магнитного поля превышает оптимальное значение, эффективность работы СЛСЭ уменьшается, т.к. мощное продольное магнитное поле ограничивает поперечную скорость потока, что в свою очередь приводит к снижению эффективности взаимодействия высокочастотной волны с электронами пучка.

Влияние электромагнитных полей, которые возбуждаются релятивистским электронными пучками на процессы усиления в СЛСЭ проанализировано в работах [61–62]. Для некоторых режимов работы двухпотокового СЛСЭ были определены механизмы насыщения [31, 63]. Также в линейном приближении исследовано в [64–66] влияние теплового разброса электронов на физические процессы двухпотоковых СЛСЭ.

Из обзора литературных источников выяснено, что увеличение мощности приборов миллиметрового и субмиллиметрового диапазона длин волн задача достаточно важная. До настоящей работы эффективность применения винтовых электронных пучков в плазменно-пучковых супергетеродинных лазерах на свободных электронах Н-убитронного и доплертонного типов исследована не была. Таким образом, исследование влияния релятивистских винтовых электронных пучков на динамику волн в плазменно-пучковых системах с внешним продольным магнитным полем является задачей важной и актуальной.

#### **1.4. Основные теоретические подходы в теории сильноточных ЛСЭ**

Как известно в плазменно-пучковых СЛСЭ возбуждается волна пространственного заряда, которая нарастает за счет плазменно-пучковой неустойчивости. Такая неустойчивость характеризуется исключительно высокими значениями инкремента нарастания. Отметим, что благодаря

линейной дисперсии волны ВПЗ, между гармониками могут возникать нелинейные резонансные взаимодействия, в результате которых возбуждаются высшие гармоники с соизмеримыми амплитудами. Поэтому, в супергетеродинных ЛСЭ участвует в параметрическом взаимодействии большое количество гармоник волны пространственного заряда. В связи с этим супергетеродинные ЛСЭ следует рассматривать как релятивистские сильноточные электронные приборы. Таким образом, для анализа физических процессов в таких приборах необходимо использовать подходы, которые применяются в сильноточной релятивистской электронике. Рассмотрим основные теоретические методы, используемые в построении теорий сильноточных ЛСЭ.

Длительное время квантово-механические методы в теории ЛСЭ оставались единственными [1]. Затем выяснилось, что базовые рабочие механизмы ЛСЭ являются классическими [134] и описание основных физических явлений в ЛСЭ возможно при использовании классического подхода. Отметим, что в рамках квантовой теории одной из основных сложностей является описание коллективных эффектов, которые проявляются в пучках с высокой плотностью электронов. Поэтому квантово-механическое описание физических процессов в сильноточных ЛСЭ имеет ограниченную область применения [135]. Для изучения физических процессов в сильноточных лазерах на свободных электронах наиболее общими, являются подходы основанные на методах теории плазмы [6–8, 73–81]. Релятивистский электронный пучок в таком случае рассматривается как поток дрейфующей плазмы.

Теория сильноточных лазеров на свободных электронах, при кинетическом описании плазмы основывается на самосогласованном решении кинетического уравнения и уравнений Максвелла [73–79, 136–138]. Плотности зарядов и токов определяются с помощью функции распределения. Такой подход позволяет последовательно описать физические процессы в электронных пучках с малой плотностью, и в

интенсивных пучках, в которых коллективные эффекты играют важную роль. Сложность использования метода кинетического уравнения при численном анализе, а также для получения аналитических решений, является основным недостатком данного подхода.

В ряде задач пренебрегают столкновениями между заряженными частицами, в таком случае интеграл столкновений в кинетическом уравнении Больцмана становится равным нулю. Функцию распределения здесь представляют в виде одночастичной функции распределения, которая определяет плотность вероятности нахождения частицы плазмы в заданном моменте времени и точке фазового пространства. Такая задача сводится к нахождению самосогласованного решения кинетического уравнения Власова и уравнений Максвелла в бесстолкновительном пределе [73–79, 139]. В теории плазмы кинетическое уравнение обычно решают с помощью метода интегрирования по начальным данным [75–76, 79]. Трудность этого метода заключается в том, что решение задачи движения должно быть заданным аналитически в виде интеграла по начальным данным.

Также для бесстолкновительной плазмы применяют гидродинамическое описание [73–79, 140–142]. Такое описание допустимо для так называемой холодной плазмы, которая ведет себя как поток проводящей жидкости. Замкнутая система уравнений гидродинамики состоит из уравнения Эйлера и уравнения непрерывности для каждого сорта частиц плазмы. В рамках данного метода с помощью квазигидродинамического уравнения находят гидродинамическую скорость (импульс) и концентрацию. Плотность тока и заряда определяются через гидродинамическую скорость и концентрацию. Уравнения гидродинамики совместно с уравнениями Максвелла образуют полную систему уравнений для описания самосогласованного движения частиц плазмы с возбуждающимися электромагнитными полями. Хотя квазигидродинамическое описание плазмы является и менее общим по сравнению с кинетическим подходом, но оно намного проще. Однако не все процессы в холодной плазме можно описать с

помощью гидродинамики.

Среди подходов теории плазмы также применяется метод квазиблоховских уравнений [134, 143–144]. В данном методе с помощью кинетического уравнения записывают систему квазиблоховских уравнений для медленно меняющихся амплитуд гармоник функции распределения. Для описания физических процессов в исследуемой системе, необходимо найти самосогласованное решение системы укороченных квазиблоховских уравнений и укороченных уравнений для электромагнитных полей. Недостатки данного метода связаны со сложностью получения аналитических решений [145].

При построении теории сильноточных ЛСЭ одним из первых «классических» был метод одночастичных токов (динамика одного электрона). Метод одночастичных токов [146–149] базируется на уравнениях Максвелла и релятивистском уравнении движения отдельно взятого электрона в электромагнитных полях. Плотность тока электронного пучка находится как совокупность токов, созданных отдельными электронами, которые имеют разные начальные координаты и скорости. В результате получаем самосогласованную систему уравнений, в которую входят релятивистское уравнение движения электрона и уравнение для амплитуды поля волны сигнала. Далее полученная система связанных уравнений анализируется численными методами. Результаты расчетов, полученные с помощью метода одночастичных токов, хорошо согласовываются с экспериментальными данными. Именно это является основным преимуществом данного метода. Однако следует отметить, что данный метод является очень сложным, и в основном опирается на численный анализ. Аналитический анализ сильноточных ЛСЭ с помощью метода одночастичных токов становятся довольно сложной задачей. Вследствие этого становится невозможным понимание физики многих процессов протекающих в исследуемых сильноточных устройствах. Кроме этого, с помощью метода одночастичных токов довольно трудно анализировать

коллективные эффекты, которые начинают проявляться при повышении плотности пучка.

Среди других методов основанных на численном анализе следует отметить метод крупных частиц. Существует ряд теорий сильноточных ЛСЭ в которых используется данный метод [150–155]. Его отличие от метода одночастичных токов заключается в том, что для исследования системы берется не один отдельно взятый электрон, а группы электронов с близкими координатами и скоростями. Преимущества и недостатки этого метода такие же, как и у метода одночастичных токов. Данный метод широко применяют для проверки результатов полученных с помощью других теоретических подходов.

В теории сильноточных ЛСЭ также широко используют методы иерархического подхода к теории колебаний и волн [5–8, 156–158]. К таким методам относят: метод усредненного кинетического уравнения, метод квазигидродинамического уравнения и метод усредненных характеристик. Отметим, что методы усредненного кинетического и квазигидродинамического уравнения являются частными случаями метода усредненных характеристик. Метод усредненных характеристик разрабатывался как базовый и универсальный при решении систем дифференциальных уравнений в частных производных и с быстроосциллирующими правыми частями. Данный метод основан на методах асимптотического интегрирования [159–160] и стандартном методе характеристик. Алгоритм вычислений данного метода можно условно разделить на три основных этапа. На первом этапе исходную систему уравнений в частных производных, которые находятся на нулевом уровне иерархии, преобразовывают к системе укороченных уравнений (уравнений высшего уровня иерархии). На этом этапе с помощью замены Крылова-Боголюбова осуществляется переход к усредненным переменным, которые не зависят от быстроосциллирующих фаз. На втором этапе ищутся решения системы укороченных уравнений высшего иерархического уровня. Основная

ценность укороченных уравнений заключается в их простоте. В отличие от случая исходной системы для их интегрирования можно использовать традиционные численные или аналитические методы математической физики. На третьем этапе проводится обратное преобразование полученных решений, т.е. переход от наивысшего иерархического уровня к нулевому.

Преимуществом метода усредненных характеристик по сравнению с другими методами теории сильноточных ЛСЭ является то, что он базируется на математически обоснованных асимптотических схемах и при этом обладает преимуществами плазменного подхода. Нужно отметить, что метод усредненных характеристик успешно применяется для анализа сложных мультигармонических взаимодействий волн в супергетеродинах ЛСЭ, т.е. позволяет анализировать параметрически-резонансные взаимодействия, в которых принимает участие большое количество гармоник. При этом важно отметить, что одну часть результатов можно получить в аналитическом виде, а другую в виде хорошо адаптированном для численного анализа.

На основе литературного анализа теоретических методов применяемых в теориях сильноточных лазерах на свободных электронах был сделан вывод, что для исследования мультигармонических процессов в плазменно-пучковых супергетеродинах ЛСЭ с винтовыми релятивистскими электронными пучками наиболее эффективным, является метод усредненных характеристик. Поэтому, в данной диссертационной работе базовым при решении самосогласованной задачи движения электронного пучка в заданных электромагнитных полях является метод усредненных характеристик.

## **1.5. Выводы к разделу 1**

1. В результате литературного анализа было определено, что среди различных типов лазеров на свободных электронах, работающих в миллиметровом диапазоне длин волн наибольшими значениями

коэффициентов усиления при меньших габаритах и значениях амплитуды поля накачки, характеризуются супергетеродинные лазеры на свободных электронах. Поэтому исследование такого класса приборов заслуживает особого внимания среди задач релятивистской сильноточной электроники.

2. Как показал обзор литературных источников для повышения эффективности работы приборов сильноточной электроники с продольным фокусирующим магнитным полем, используют винтовые релятивистские электронные пучки. Установлено, что неизученной является задача нелинейного анализа уровней и механизмов насыщения волн в плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ с винтовыми РЭП. Поэтому возникает необходимость в проведении такого анализа для определения наиболее эффективных режимов работы прибора.

3. Выяснено, что в сильноточных ЛСЭ в которых волны с линейной дисперсией усиливаются за счет пучковых неустойчивостей имеет место возбуждение высших гармоник волн. Такие мультигармонические процессы качественно влияют на динамику волн прибора, а именно существенно уменьшают уровни насыщения волны сигнала. Исследование влияния мультигармонических взаимодействий волн на усилительные свойства плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ с винтовыми электронными пучками ранее не проводилось. Поэтому возникает необходимость в построении мультигармонических кубически-нелинейных теорий плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ с винтовыми электронными пучками.

4. Анализ литературы показал, что учет множественных резонансов между гармониками взаимодействующих волн в плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ, является достаточно сложной математической задачей. Выяснено, что среди различных методов сильноточной электроники наиболее эффективным для решения мультигармонических задач в плазменно-пучковых СЛСЭ является метод усредненных характеристик.

## РАЗДЕЛ 2

### ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА УСРЕДНЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ПЛАЗМЕННО-ПУЧКОВЫХ СУПЕРГЕТЕРОДИННЫХ ЛАЗЕРАХ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ С ВИНТОВЫМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ ПУЧКАМИ

В данном разделе изложены особенности применения метода усредненных характеристик при решении задачи движения и непрерывности в плазменно-пучковых супергетеродинных лазерах на свободных электронах с винтовыми релятивистскими электронными пучками. Для описания множественных параметрических взаимодействий гармоник волн с винтовыми релятивистскими электронными пучками была проведена модернизация метода усредненных характеристик, в части построения схемы асимптотического интегрирования. Основные научные результаты раздела опубликованы в работах [36, 39, 46].

#### **2.1. Модель. Исходные уравнения**

В исследуемых моделях плазменно-пучкового супергетеродинного лазера на свободных электронах используются сильноточные винтовые релятивистские электронные пучки. Известно, что на движение таких пучков сильно влияет собственный статический заряд. Для того чтобы скомпенсировать пространственный заряд пучка используют фокусирующие продольные магнитные поля, ионный фон, который считается неподвижным относительно движения пучка и т.д. В исследуемых моделях лазеров на свободных электронах учитывалось, что статическое поле пространственного заряда скомпенсировано одним из возможных способов. Таким образом, электронный пучок считаем зарядово-скомпенсированным. Также учитываем, что диаметр исследуемых винтовых релятивистских электронных пучков не превышает  $\sim 1$  см. При этом длина исследуемых волн находится в

диапазоне 2,0–0,5 мм. Таким образом, поперечные размеры пучка значительно превышают длину волн, которые распространяются в исследуемых системах. В этом случае пучок можно считать поперечно неограниченным.

Известно, что тепловой скоростью частиц можно пренебречь, если размер неоднородностей переменного поля намного больше дебаевского радиуса экранирования [5, 76, 118–119, 162–163]. Условие пренебрежения тепловым движением можно записать в следующем виде

$$v_T \ll v_{ph}, \quad (2.1)$$

где  $v_T$  — среднеквадратическая тепловая скорость движения;

$v_{ph}$  — фазовая скорость волны.

Сильноточные винтовые РЭП, которые используются в исследуемых системах характеризуются температурой порядка  $10^4$  К, т.о. тепловая скорость частиц в таких пучках не превышает  $6 \cdot 10^7$  м/с. При этом фазовые скорости исследуемых волн близки к скорости света  $c \sim 3 \cdot 10^8$  м/с. Следовательно условие (2.1) выполняется с высокой точностью, и поэтому тепловой скоростью частиц в исследуемых плазменно-пучковых супергетеродинных лазерах на свободных электронах будем пренебрегать.

При рассмотрении плазменно-пучковых систем столкновениями между частицами пучка и плазмы можно пренебречь. Такое описание плазмы применимо для тех процессов, которые протекают за время меньшее свободного пробега частиц. Поэтому, частоты исследуемых волн должны намного превышать частоту столкновений между частицами

$$\omega \gg \nu. \quad (2.2)$$

В результате анализа соотношения (2.2), относительно задач плазменной сильноточной электроники [5, 76, 118–119, 162–163], было выяснено, что электронные пучки и плазменные системы, которые применяются в таких задачах, во многих случаях считаются бесстолкновительными.

Таким образом, винтовые релятивистские электронные пучки и плазменные системы, которые исследуются в настоящей диссертационной работе можно считать холодными и бесстолкновительными

$$v = 0, v_T = 0. \quad (2.3)$$

В диссертационной работе исследуются взаимодействия электромагнитных волн в плазменно-пучковых супергетеродинных лазерах на свободных электронах с винтовыми релятивистскими электронными пучками. Обобщенная схема таких взаимодействий представлена на рис. 2.1. Плазменная среда 1, которая характеризуется ленгмюровской частотой  $\omega_p$ , находится в продольном фокусирующем магнитном поле с индукцией  $B_0$ . В эту среду инжектируется электронный пучок 2. Вектор скорости электронов пучка  $\mathbf{v}_b$  направлен под углом  $\beta$  по отношению к вектору индукции фокусирующего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  (рис. 2.1), так что  $\operatorname{tg}\beta = v_{b\perp} / v_{bz}$ , где  $v_{b\perp} = \sqrt{v_{bx}^2 + v_{by}^2}$  и  $v_{bz}$  — поперечная и продольная компоненты скорости электронов пучка. Ленгмюровская частота электронного пучка  $\omega_b$ ,  $\omega_b \ll \omega_p$ . Под действием продольного магнитного поля электроны плазменно-пучковой системы вращаются с частотой  $\omega_H = B_0 e / m_e c$ . Считаем, что  $\omega_H \ll \omega_p$ . Отметим, что в зависимости от типа накачки плазменно-пучковые СЛСЭ бывают двух типов: доплертронный (накачка в виде мощной низкочастотной электромагнитной волны) и Н-убитронный (накачка в виде периодического реверсивного магнитного поля). Система накачки 3 (рис. 2.1) характеризуется частотой  $\omega_{2,1}$  и волновым числом  $k_{2,1}$ . Также на вход

системы подается слабая высокочастотная циркулярно-поляризованная электромагнитная волна сигнала с частотой  $\omega_{1,1}$  и волновым числом  $k_{1,1}$ . В результате параметрически-резонансного взаимодействия между волнами сигнала и накачки в плазме возбуждается волна пространственного заряда, которая характеризуется частотой  $\omega_{3,1}$  и волновым числом  $k_{3,1}$ .

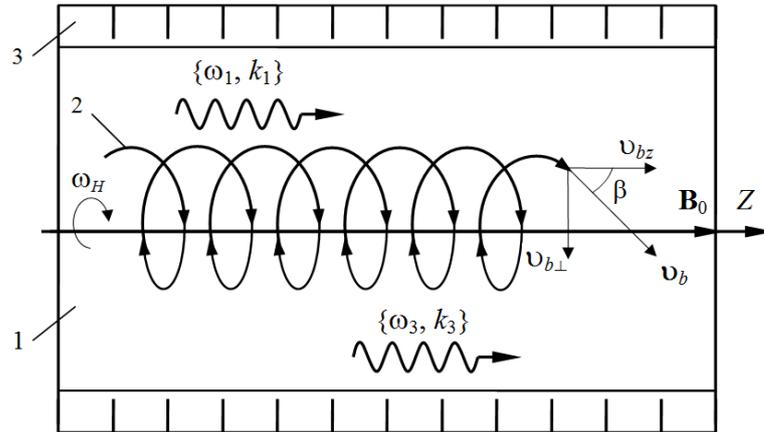


Рис. 2.1. Обобщенная схема взаимодействия волн в плазменно-пучковом супергетеродинном ЛСЭ с винтовым релятивистским электронным пучком

Условие параметрического резонанса между волнами сигнала, накачки и ВПЗ в плазменно-пучковой системе имеет следующий вид:

$$\omega_{3,1} = \omega_{1,1} - \omega_{2,1}, \quad k_{3,1} = k_{1,1} + k_{2,1}. \quad (2.4)$$

При использовании винтового релятивистского электронного пучка в плазменно-пучковом супергетеродинном ЛСЭ имеют место колебания на релятивистской циклотронной частоте  $\omega_H/\bar{\gamma}_b$ . Поэтому, в системе возникают дополнительные резонансные условия, которые имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \omega_{3,1} &= (\omega_{1,1} \pm \omega_H/\bar{\gamma}_b) - (\omega_{2,1} \pm \omega_H/\bar{\gamma}_b), \\ \omega_{3,1} &= (\omega_{1,1} \pm 2\omega_H/\bar{\gamma}_b) - (\omega_{2,1} \pm 2\omega_H/\bar{\gamma}_b), \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

В супергетеродинных лазерах на свободных электронах имеет место эффект супергетеродинного усиления. Суть его состоит в использовании дополнительного механизма усиления одной из трех волн, которые принимают участие в параметрическом резонансе. В исследуемом приборе в качестве дополнительного механизма выступает усиление волны ВПЗ за счет плазменно-пучковой неустойчивости [73-87]. Сам трехволновой параметрический резонанс, по сути, сводится лишь к переносу дополнительного усиления с волны пространственного заряда на электромагнитную волну сигнала. Из-за того, что инкременты нарастания плазменно-пучковой неустойчивости являются высокими [73-87], коэффициент усиления электромагнитной волны оказывается также достаточно большим. Поэтому параметры системы необходимо выбирать таким образом, что бы в исследуемой системе волна пространственного заряда нарастала за счет плазменно-пучковой неустойчивости, а инкремент нарастания первой гармоники ВПЗ за счет плазменно-пучковой неустойчивости был максимальным.

Также, отметим, что одной из особенностей плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ является то, что волна пространственного заряда, нарастающая за счет плазменно-пучковой неустойчивости, характеризуется квазилинейной дисперсионной зависимостью [5, 32–33, 76]:

$$k_{3,m} \approx \omega_{3,m} / v_{bz} \quad (2.6)$$

где индекс « $m$ » — номер гармоники;

$k_{3,m}$  — волновое число  $m$ -й гармоники;

$\omega_{3,m} = \omega_{3,1} \cdot m$  — частота  $m$ -й гармоники.

В связи с этим частоты и волновые числа  $m$ -х гармоник пропорциональны номеру гармоники  $m$ . Поэтому между гармониками волны

пространственного заряда возникает множество трехволновых параметрических резонансов, условия которых имеют вид

$$\omega_{3,m_1} = \omega_{3,m_2} + \omega_{3,m_3}, \quad k_{3,m_1} = k_{3,m_2} + k_{3,m_3}, \quad (2.7)$$

$$\omega_{3,m_1} = (\omega_{3,m_2} \pm \omega_H / \bar{\gamma}_b) + (\omega_{3,m_3} \mp \omega_H / \bar{\gamma}_b),$$

$$\omega_{3,m_1} = (\omega_{3,m_2} \pm 2\omega_H / \bar{\gamma}_b) + (\omega_{3,m_3} \mp 2\omega_H / \bar{\gamma}_b) \quad (2.8)$$

где  $m_1, m_2, m_3$  – номера гармоник волны пространственного заряда. Такие трехволновые взаимодействия приводят к возбуждению высших гармоник ВПЗ. Учитывая (2.6), выражения (2.7)–(2.8) сводятся к общему мультигармоническому условию

$$m_1 = m_2 + m_3. \quad (2.9)$$

Заметим, что номера гармоник, являются целыми числами. Поэтому условие (2.9) может быть выполнено множеством способов, например,  $4 = 2 + 2$ ,  $3 = 4 - 1$  и так далее.

Для описания динамики волн в плазменно-пучковых СЛСЭ с винтовыми РЭП с учетом множественных параметрических взаимодействий в качестве исходных будем использовать релятивистское квазигидродинамическое уравнение [58]

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) + v \right\} \mathbf{v}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha \gamma_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}] - \frac{\mathbf{v}_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \mathbf{E})}{c^2} \right\} - \frac{v_{T,\alpha}^2}{3} \left\{ \frac{1}{n_\alpha} \frac{\partial n_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\gamma_\alpha^2}{2c^2} \frac{\partial v_\alpha^2}{\partial \mathbf{r}} \right\}, \quad (2.10)$$

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial(n_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha)}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (2.11)$$

и уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha=1}^2 e n_\alpha \mathbf{v}_\alpha, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha=1}^2 e n_\alpha, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.12)$$

где  $e = -|e|$  — заряд электрона;

$m_e$  — масса покоя электрона;

$\nu$  — частота столкновений частиц;

$n_\alpha$  — концентрация  $\alpha$ -го сорта частиц;

$\gamma_\alpha = \left(1 - \mathbf{v}_\alpha^2 / c^2\right)^{-1/2}$  — релятивистский фактор  $\alpha$ -го сорта частиц;

$c$  — скорость света в вакууме;

$\mathbf{v}_\alpha$  — вектор скорости соответствующего сорта частиц;

$\mathbf{r}$  — радиус-вектор;

$\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля;

$\mathbf{B}$  — индукция магнитного поля.

## 2.2. Модернизированный метод усредненных характеристик

Для поиска самосогласованного решения квазигидродинамического уравнения (2.10), уравнения непрерывности (2.11) и уравнений Максвелла (2.12) в исследуемых системах, необходимо разбить задачу формально на три независимых этапа:

1) поиск решений задачи движения частиц плазмы и винтового РЭП в заданных электромагнитных полях;

2) нахождение решений задачи для концентрации электронов пучка и плазмы, считая, что скорости и электромагнитные поля известны;

3) решение задачи возбуждения электромагнитных полей, учитывая, что скорости и концентрации частиц известные функции.

Задачу движения и непрерывности будем решать с помощью метода усредненных характеристик [36, 39], задачу возбуждения электромагнитных полей — с помощью метода медленно меняющихся амплитуд. Нарастание волн в исследуемых плазменно-пучковых системах будем описывать в рамках временной задачи. При рассмотрении такой модельной задачи считается, что амплитуды и фазы волн являются функциями только времени. При этом учитываем, что начальные условия одинаковые в любой точке пространства. Рассмотрим особенности применения метода усредненных характеристик для решения задачи движения и непрерывности в плазменно-пучковом супергетеродинном ЛСЭ с винтовыми электронными пучками при учете множественных параметрических резонансов высших гармоник волн.

**При решении задачи движения** будем использовать релятивистское квазигидродинамическое уравнение (2.10) с учетом соотношений (2.3). Решения уравнения (2.10) будем искать в рамках адиабатического приближения, при котором начальные значения амплитуды поля принимаются равными нулю при  $t \rightarrow -\infty$ . В этом случае амплитуда поля медленно возрастает по экспоненциальному закону. Таким образом, временной интервал нарастания амплитуды поля превосходит все остальные временные интервалы процессов, которые протекают в исследуемых системах.

Итак, в соответствии с методом усредненных характеристик [36] совершаем переход от уравнения в частных производных (2.10) к его характеристикам, уравнениям в полных производных

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} &= \frac{e_\alpha}{m_\alpha \gamma_\alpha} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}] - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_\alpha) \mathbf{v}_\alpha}{c^2} \right) \\ \frac{d\gamma_\alpha}{dt} &= \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_\alpha)}{c^2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Запишем систему (2.13) через проекции векторов на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а также дополним ее уравнениями для быстрых фаз. Считаем, что со временем  $t$  амплитуды волн меняются медленно. Для описания такой зависимости введем медленное время  $\tau = t/\xi$ , где  $\xi$  — большой параметр задачи и имеет следующий вид

$$\xi \sim \left| \frac{d\psi}{dt} \right| \left/ \left| \frac{dx}{dt} \right| \right. \gg 1.$$

$\psi$  — быстрая фаза;

$x$  — медленная переменная.

В итоге получаем систему уравнений в стандартном виде [36, 39]:

$$\frac{dv_{\alpha x}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} \left[ E_x + \frac{1}{c} (v_{\alpha y} B_z - v_{\alpha z} B_y) - \frac{v_{\alpha x}}{c^2} (v_{\alpha x} E_x + v_{\alpha y} E_y + v_{\alpha z} E_z) \right], \quad (2.14)$$

$$\frac{dv_{\alpha y}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} \left[ E_y - \frac{1}{c} (v_{\alpha x} B_z - v_{\alpha z} B_x) - \frac{v_{\alpha y}}{c^2} (v_{\alpha x} E_x + v_{\alpha y} E_y + v_{\alpha z} E_z) \right], \quad (2.15)$$

$$\frac{dv_{\alpha z}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} \left[ E_z + \frac{1}{c} (v_{\alpha x} B_y - v_{\alpha y} B_x) - \frac{v_{\alpha z}}{c^2} (v_{\alpha x} E_x + v_{\alpha y} E_y + v_{\alpha z} E_z) \right], \quad (2.16)$$

$$\frac{d\gamma_\alpha}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} [E_x v_{\alpha x} + E_y v_{\alpha y} + E_z v_{\alpha z}], \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\xi}, \quad (2.17)$$

$$\frac{dp_{1,\alpha}}{dt} = \omega_1 - k_1 v_{\alpha z} \equiv \Omega_{1,\alpha}, \quad \frac{dp_{2,\alpha}}{dt} = \omega_2 - k_2 v_{\alpha z} \equiv \Omega_{2,\alpha}, \quad (2.18)$$

$$\frac{dp_{3,\alpha,m}}{dt} = m\omega_{3,1} - k_{3,m} v_{\alpha z} \equiv \Omega_{3,\alpha,m} \quad (2.19)$$

где  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  — компоненты вектора напряженности электрического поля;

$B_x, B_y, B_z$  — компоненты вектора индукции магнитного поля;

$p_{1,\alpha} = \omega_1 t - k_1 z$  — фаза электромагнитной волны сигнала;

$p_{2,\alpha} = \omega_2 t - k_2 z$  — фаза накачки;

$p_{3,\alpha,m} = \omega_{3,m} t - k_{3,m} z$  — фаза электронной волны пространственного заряда  $m$ -й гармоники;

Уравнения (2.14)–(2.17) описывают изменения медленных переменных, (2.18)–(2.19) — быстрых.

В связи с использованием винтовых релятивистских электронных пучков в плазменно-пучковых СЛСЭ необходимо учитывать, что при не нулевом угле влета  $\beta$  электронов пучка, относительно продольного фокусирующего магнитного поля, электроны в невозмущенном состоянии движутся по окружностям в поперечной плоскости с циклотронной частотой  $\omega_H$ . В связи с этим в пространстве скоростей совершают переход от прямоугольной декартовой системы координат  $\mathbf{v}_\alpha = (v_{\alpha x}, v_{\alpha y}, v_{\alpha z})$  к цилиндрической  $\mathbf{v}_\alpha = (v_{\alpha\perp}, p_{\alpha 0}, v_{\alpha z})$ , соответствующая замена записывается в стандартном виде:

$$v_{\alpha x} = v_{\alpha\perp} \cos p_{\alpha 0}, \quad v_{\alpha y} = v_{\alpha\perp} \sin p_{\alpha 0}. \quad (2.20)$$

где  $p_{\alpha 0}$  — вращательная фаза  $\alpha$ -го сорта частиц;

$v_{\alpha\perp}$  — поперечная скорость.

С учетом данной замены уравнения движения (2.14)–(2.17) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\alpha\perp}}{dt} = & \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} \left[ \cos p_{\alpha 0} \left( E_x - \frac{v_{\alpha z}}{c} B_y \right) + \sin p_{\alpha 0} \left( E_y + \frac{v_{\alpha z}}{c} B_x \right) - \right. \\ & \left. - \frac{v_{\alpha\perp}}{c^2} \left( E_x v_{\alpha\perp} \cos p_{\alpha 0} + E_y v_{\alpha\perp} \sin p_{\alpha 0} + E_z v_{\alpha z} \right), \right. \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\alpha z}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} & \left[ E_z + \frac{v_{\alpha \perp}}{c} (B_y \cos p_{\alpha 0} - B_x \sin p_{\alpha 0}) - \right. \\ & \left. - \frac{v_{\alpha z}}{c^2} (E_x v_{\alpha \perp} \cos p_{\alpha 0} + E_y v_{\alpha \perp} \sin p_{\alpha 0} + E_z v_{\alpha z}) \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\frac{d\gamma_\alpha}{dt} = \frac{e}{m_e c^2} [E_x v_{\alpha \perp} \cos p_{\alpha 0} + E_y v_{\alpha \perp} \sin p_{\alpha 0} + E_z v_{\alpha z}], \quad (2.23)$$

$$\frac{dp_{\alpha 0}}{dt} = -\frac{\omega_H}{\gamma_\alpha} + \frac{e}{m_e \gamma_\alpha v_{\alpha \perp}} \left[ \cos p_{\alpha 0} \left( E_y + \frac{v_{\alpha z}}{c} B_x \right) - \sin p_{\alpha 0} \left( E_x - \frac{v_{\alpha z}}{c} B_y \right) \right] \equiv \Omega_{0\alpha}. \quad (2.24)$$

При использовании асимптотических схем переходят к усредненным и осцилляторным компонентам. Таким образом, замену (2.20) записывают в следующем виде

$$v_{\alpha x} = (\bar{v}_{\alpha \perp} + \tilde{v}_{\alpha \perp}) \cos(\bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{p}_{\alpha 0}), \quad v_{\alpha y} = (\bar{v}_{\alpha \perp} + \tilde{v}_{\alpha \perp}) \sin(\bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{p}_{\alpha 0}). \quad (2.25)$$

где

$$\bar{p}_{\alpha 0} = -\int_0^t \frac{eB_0}{cm_e \bar{\gamma}_\alpha} dt'$$

— невозмущенная фаза вращения электронов в продольном магнитном поле;

$$\bar{v}_{\alpha \perp} = \sqrt{(1 - 1/\bar{\gamma}_\alpha^2)} \cdot \sin \beta \cdot c$$

— невозмущенная перпендикулярная составляющая вектора скорости  $\alpha$ -го сорта пучка;

$\tilde{p}_{\alpha 0}$  — осцилляторная составляющая фазы вращения;

$\tilde{v}_{\alpha \perp}$  — осцилляторная перпендикулярная компонента вектора скорости пучка.

Поиск решений системы (2.21)–(2.24) при использовании замены (2.25) осложняется двумя математическими проблемами. Первая проблема связана

с тем, что в уравнении движения для фазы  $p_{\alpha 0}$  (2.24) в знаменателе стоит, перпендикулярная составляющая вектора скорости  $v_{\alpha \perp}$ , а для плазмы данная скорость равна нулю  $v_{p \perp} = 0$ . Таким образом, получаем деление на ноль. Вторая проблема обусловлена тем, что в замена (2.25) аргумент функции  $\cos(\bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{p}_{\alpha 0})$  и  $\sin(\bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{p}_{\alpha 0})$  содержит осцилляторную периодическую функцию фазы  $\tilde{p}_{\alpha 0}$ . Таким образом возникает необходимость разложения этих функций в ряд Фурье-Бесселя. При этом отметим, что необходимо уравнения Максвелла (2.12) разложить в ряды Фурье по гармоникам для получения дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд гармоник электромагнитных волн. Поэтому, чтобы использовать найденные решения системы (2.21)–(2.24) при нахождении плотностей тока, которые входят в уравнения Максвелла, необходимо провести обратный переход от функций Бесселя к гармоническим функциям. В исследуемых системах одновременно принимает участие в трехволновом резонансном взаимодействии большое количество гармоник ВПЗ. Поэтому, прямые и обратные преобразования в таких задачах становятся достаточно неудобными и громоздкими вычислительными процедурами, которые в свою очередь снижают эффективность вычислительного алгоритма. Следовательно, возникает вопрос о поиске более оптимального алгоритма решения мультигармонических задач в плазменно-пучковых СЛСЭ использующие винтовые релятивистские электронные пучки.

Для разрешения выше изложенных проблем в диссертационной работе предлагается ввести принципиально другую замену переменных по сравнению с (2.25), такая замена записывается в виде

$$v_{\alpha x} = \bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}, \quad v_{\alpha y} = \bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}, \quad (2.26)$$

где  $\tilde{v}_{\alpha x}$ ,  $\tilde{v}_{\alpha y}$  — осцилляторные  $x$ - и  $y$ - компоненты вектора скорости пучка и плазмы.

В результате использования замены (2.26) проводить прямые и обратные преобразования Фурье-Бесселя стало ненужно. Так как функции  $\cos p_{\alpha 0}$  и  $\sin p_{\alpha 0}$  не зависят от осцилляторной компоненты фазы вращения  $\tilde{p}_{\alpha 0}$ . Также, применяя замену (2.26) в мультигармонических задачах плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ с винтовыми РЭП, можно использовать систему уравнений (2.14)–(2.17), но при этом дополнив ее соотношением для быстрой вращающейся фазы  $p_{0\alpha}$

$$\frac{dp_{\alpha 0}}{dt} = -\frac{eB_0}{m_\alpha \gamma_\alpha} \equiv \Omega_{\alpha 0}. \quad (2.27)$$

Сравнивая соотношения (2.24) и (2.27) для фазы вращения частиц  $\alpha$ -го сорта пучка видим, что последнее соотношение намного проще. Также отметим, что в соотношении (2.27) в отличие от (2.24) нет слагаемого в котором перпендикулярная составляющая вектора скорости  $v_{\alpha\perp}$  находится в знаменателе. Поэтому проблемы с делением на ноль в этом случае нет.

Итак, для нахождения решений системы (2.14)–(2.17) будем использовать метод усредненных характеристик [36, 39], а также замену (2.26). В соответствии с этим методом запишем для системы (2.14)–(2.17) вектор медленных переменных  $\mathbf{x}$ , вектор-функцию  $\mathbf{X}$ , вектор быстрых фаз  $\Psi$  и вектор фазовых скоростей  $\mathbf{\Omega}$  в явном виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \{x_{v_{\alpha x}}, x_{v_{\alpha y}}, x_{v_{\alpha z}}, x_{\gamma_\alpha}, x_\tau\} = \{v_{\alpha x}, v_{\alpha y}, v_{\alpha z}, \gamma_\alpha, \tau\}, \\ \frac{1}{\xi} \mathbf{X} &= \frac{1}{\xi} \{X_{v_{\alpha x}}, X_{v_{\alpha y}}, X_{v_{\alpha z}}, X_{\gamma_\alpha}, X_\tau\}, \\ \frac{1}{\xi} X_{v_{\alpha x}} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \left( 1 - \frac{\tilde{\gamma}_\alpha}{\bar{\gamma}_\alpha} + \left( \frac{\tilde{\gamma}_\alpha}{\bar{\gamma}_\alpha} \right)^2 \right) \left[ E_x - \frac{1}{c} (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z}) B_y + \frac{1}{c} (\bar{v}_{\alpha\perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}) B_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\bar{v}_{\alpha\perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x})}{c^2} (E_x (\bar{v}_{\alpha\perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) + E_y (\bar{v}_{\alpha\perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}) + E_z (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z})) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi} X_{v_{\alpha y}} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \left( 1 - \frac{\tilde{\gamma}_\alpha}{\bar{\gamma}_\alpha} + \left( \frac{\tilde{\gamma}_\alpha}{\bar{\gamma}_\alpha} \right)^2 \right) \left[ E_y - \frac{1}{c} (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z}) B_x + \frac{1}{c} (\bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) B_0 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y})}{c^2} (E_x (\bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) + E_y (\bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}) + E_z (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z})) \right], \\
\frac{1}{\xi} X_{v_{\alpha z}} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \left( 1 - \frac{\tilde{\gamma}_\alpha}{\bar{\gamma}_\alpha} + \left( \frac{\tilde{\gamma}_\alpha}{\bar{\gamma}_\alpha} \right)^2 \right) \left[ E_z + \frac{1}{c} (B_y (\bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) - B_x (\bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y})) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z})}{c^2} (E_x (\bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) + E_y (\bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}) + E_z (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z})) \right], \\
\frac{1}{\xi} X_{\gamma_\alpha} &= \frac{e}{m_e c^2} (E_x (\bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) + E_y (\bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}) + E_z (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z})), \\
\frac{1}{\xi} X_\tau &= \frac{1}{\xi}, \quad \Psi = \{ p_{1,p}, p_{2,p}, p_{3,p,1}, \dots, p_{3,p,N}, p_{0p}, p_{1,b}, p_{2,b}, p_{3,b,1}, \dots, p_{3,b,N}, p_{0b} \}, \\
\Omega &= \{ \Omega_{1,p}, \Omega_{2,p}, \Omega_{3,p,1}, \dots, \Omega_{3,p,N}, \Omega_{0p}, \Omega_{1,b}, \Omega_{2,b}, \Omega_{3,b,1}, \dots, \Omega_{3,b,N}, \Omega_{0b} \} \quad (2.28)
\end{aligned}$$

Далее используем описанный в [36, 39] алгоритм модернизированного метода усредненных характеристик для случая нескольких быстрых фаз. Согласно данному алгоритму переходим от неусредненных переменных к усредненным медленным переменным. Для этого используем модернизированную замену Крылова-Боголюбова [36, 39, 158] и замену (2.26) в которой осцилляторные добавки зависят от неусредненного вектора быстрых фаз  $\Psi$

$$\begin{aligned}
v_{\alpha x} &= \bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{v_{\alpha x}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \quad v_{\alpha y} = \bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{v_{\alpha y}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \\
v_{\alpha z} &= \bar{v}_{\alpha z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{v_{\alpha z}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \quad \gamma_\alpha = \bar{\gamma}_\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{\gamma_\alpha}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \\
\tau &= \bar{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_\tau^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi).
\end{aligned} \quad (2.29)$$

Заметим, что усредненные переменные удовлетворяют системе

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{v}_{\alpha\perp}}{dt} \cos \bar{p}_{\alpha 0} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{v_{\alpha x}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \frac{d\bar{v}_{\alpha\perp}}{dt} \sin \bar{p}_{\alpha 0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{v_{\alpha y}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \\ \frac{d\bar{v}_{\alpha z}}{dt} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{v_{\alpha z}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \frac{d\bar{\gamma}_{\alpha}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{\gamma_{\alpha}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \\ \frac{d\bar{\tau}}{dt} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{\tau}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}).\end{aligned}\tag{2.30}$$

В уравнениях (2.29) искомая функция  $\mathbf{u}^{(n)}$  имеет вид [36, 158]

$$\mathbf{u}^{(n)} = \sum_{m_1=-N}^{m_1=+N} \dots \sum_{m_k=-N}^{m_k=+N} \frac{\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)}}{i(m_1\Omega_1 + \dots + m_k\Omega_k)} \exp(i(m_1\Psi_1 + \dots + m_k\Psi_k)).\tag{2.31}$$

Отметим, что случаи, когда знаменатели в (2.31) обращаются в нуль

$$m_1\Omega_1 + \dots + m_k\Omega_k = 0,\tag{2.32}$$

называют комбинационными резонансами. Поэтому, не один из знаменателей решений (2.31) не должен обращаться в нуль, иными словами, осцилляторная функции  $\mathbf{u}^{(n)}$  должна определяться только не резонансными компонентами  $\mathbf{g}^{(n)}$ .

В отличие от функции  $\mathbf{u}^{(n)}$  решения для функции  $\mathbf{A}^{(n)}$  определяются как резонансными компонентами так и средними значениями  $\langle \mathbf{g}^{(n)} \rangle$ . Поэтому решение для функции  $\mathbf{A}^{(n)}$  имеет следующий вид [36, 158]

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)} \Big|_{m_1\Omega_1 + \dots + m_k\Omega_k = 0},\tag{2.33}$$

В приведенных решениях (2.31) и (2.33) использовалось следующее обозначение

$$\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_\kappa}^{(n)} = \langle \mathbf{g}^{(n)} \rangle_{m_1 \psi_1, \dots, m_\kappa \psi_\kappa} = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^\kappa \cdot \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{g}^{(n)} e^{-i(m_1 \psi_1 + \dots + m_\kappa \psi_\kappa)} d\psi_1 \dots d\psi_\kappa$$

Функции  $\mathbf{g}^{(n)}$  до третьего приближения по  $1/\xi$  имеют вид [36, 158]:

$$\mathbf{g}^{(1)} = \frac{1}{\xi} \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, \psi), \quad (2.34)$$

$$\mathbf{g}^{(2)} = \frac{1}{\xi^2} \sum_j \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \psi_s} \frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} \right), \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(3)} = \frac{1}{\xi^3} \left[ \sum_j \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(2,j)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \psi_s} \frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \psi_s} \frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \psi_s} \frac{\partial^2 \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} \right) \right]. \quad (2.36) \end{aligned}$$

При решении задачи движения ограничимся кубическим приближением по  $1/\xi$ . Учитывая, что  $\cos p_{0\alpha} = (\exp(ip_{0\alpha})/2 + c.c.)$  и  $\sin p_{0\alpha} = ((-i)\exp(ip_{0\alpha})/2 + c.c.)$  находим с помощью функций  $\mathbf{u}^{(n)}$  и  $\mathbf{A}^{(n)}$ , соответственно решения уравнений (2.31) и (2.33). Соотношения для осцилляторной компоненты скорости  $\tilde{\mathbf{v}}_{\alpha x}^{(1)}$  в первом приближении записываются в виде

$$\begin{aligned} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)} = u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1)} e^{imp_1} + u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2)} e^{imp_2} + u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3)} e^{imp_3} + u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1 + p_0)} e^{i(mp_1 + p_0)} + \\ + u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2 + p_0)} e^{i(mp_2 + p_0)} + u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 + p_0)} e^{i(mp_3 + p_0)} + u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1 - p_0)} e^{i(mp_1 - p_0)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2 - p_0)} e^{i(mp_2 - p_0)} + u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 - p_0)} e^{i(mp_3 - p_0)} + u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1 + 2p_0)} e^{i(mp_1 + 2p_0)} + \\
& + u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2 + 2p_0)} e^{i(mp_2 + 2p_0)} + u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 + 2p_0)} e^{i(mp_3 + 2p_0)} + u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1 - 2p_0)} e^{i(mp_1 - 2p_0)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2 - 2p_0)} e^{i(mp_2 - 2p_0)} + u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 - 2p_0)} e^{i(mp_3 - 2p_0)} + c.c.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_\chi)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x, m}(\bar{\tau})}{i(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} + s_\chi \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \right. \\
& \times \left. \left( \frac{\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m}}{\omega_{\chi, m}} - \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{2c^2} (1 - i\omega_{H, \alpha} s_\chi) \right) \exp(ip_{\alpha, \chi, m}) + c.c. \right],
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 + p_0)} = \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp} \bar{v}_{\alpha z}}{2c^2} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z, m}(\bar{\tau})}{i\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} \left( \frac{\omega_{H, \alpha}}{2\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} - 1 \right) \exp(ip_{\alpha, 3, m} + ip_{\alpha 0}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 - p_0)} = \frac{(-1)e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp} \bar{v}_{\alpha z}}{2c^2} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z, m}(\bar{\tau})}{\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} \left( \frac{\omega_{H, \alpha}}{2\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} - 1 \right) \exp(ip_{\alpha, 3, m} - ip_{\alpha 0}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_\chi + 2p_0)} = \frac{(-1)e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{8c^2} (i\omega_{H, \alpha} + 2) \times$$

$$\times \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x, m}(\bar{\tau})(1 + s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} + \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha, \chi, m} + 2p_{\alpha 0}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_\chi - 2p_0)} = \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{8c^2} (i\omega_{H, \alpha} - 2) \times$$

$$\times \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x, m}(\bar{\tau})(1 - s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} - \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha, \chi, m} - 2p_{\alpha 0}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 \pm 2p_0)} = 0.$$

Аналогично получаем выражения в первом приближении для осцилляторной составляющей скорости  $\tilde{v}_{\alpha y}^{(1)}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)} &= \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1)} e^{imp_1} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2)} e^{imp_2} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3)} e^{imp_3} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1+p_0)} e^{i(mp_1+p_0)} + \\
&+ \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2+p_0)} e^{i(mp_2+p_0)} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3+p_0)} e^{i(mp_3+p_0)} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1-p_0)} e^{i(mp_1-p_0)} + \\
&+ \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2-p_0)} e^{i(mp_2-p_0)} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3-p_0)} e^{i(mp_3-p_0)} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1+2p_0)} e^{i(mp_1+2p_0)} + \\
&+ \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2+2p_0)} e^{i(mp_2+2p_0)} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3+2p_0)} e^{i(mp_3+2p_0)} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1-2p_0)} e^{i(mp_1-2p_0)} + \\
&+ \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2-2p_0)} e^{i(mp_2-2p_0)} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3-2p_0)} e^{i(mp_3-2p_0)} + c.c.,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_\chi)} &= \frac{(-1)e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi y, m}(\bar{\tau})}{(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} + s_\chi \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \right. \\
&\times \left. \left( \frac{\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m}}{\omega_{\chi, m}} - \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{2c^2} (1 - i\omega_{H, \alpha} s_\chi) \right) \exp(ip_{\alpha, \chi, m}) + c.c. \right],
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3+p_0)} = \frac{(-1)e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp} \bar{v}_{\alpha z}}{2c^2} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z, m}(\bar{\tau})}{\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} \left( \frac{\omega_{H, \alpha}}{2\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} - 1 \right) \exp(ip_{\alpha, 3, m} + ip_{\alpha 0}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3-p_0)} = \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp} \bar{v}_{\alpha z}}{2c^2} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z, m}(\bar{\tau})}{i\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} \left( \frac{\omega_{H, \alpha}}{2\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} - 1 \right) \exp(ip_{\alpha, 3, m} - ip_{\alpha 0}) + c.c. \right],$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_\chi+2p_0)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{8c^2} (i\omega_{H, \alpha} + 2) \times \\
&\times \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi y, m}(\bar{\tau})(1+s_\chi)}{(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} + \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha, \chi, m} + 2p_{\alpha 0}) + c.c. \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_\chi-2p_0)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{8c^2} (i\omega_{H, \alpha} - 2) \times \\
&\times \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi y, m}(\bar{\tau})(1-s_\chi)}{(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} - \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha, \chi, m} - 2p_{\alpha 0}) + c.c. \right],
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3)} = \frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3 \pm 2p_0)} = 0.$$

Осцилляторные составляющие скорости  $\tilde{v}_{\alpha z}^{(1)}$  в первом приближении имеют вид

$$\begin{aligned} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)} = & u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1)} e^{imp_1} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2)} e^{imp_2} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3)} e^{imp_3} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1+p_0)} e^{i(mp_1+p_0)} + \\ & + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2+p_0)} e^{i(mp_2+p_0)} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3+p_0)} e^{i(mp_3+p_0)} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1-p_0)} e^{i(mp_1-p_0)} + \\ & + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2-p_0)} e^{i(mp_2-p_0)} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3-p_0)} e^{i(mp_3-p_0)} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1+2p_0)} e^{i(mp_1+2p_0)} + \\ & + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2+2p_0)} e^{i(mp_2+2p_0)} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3+2p_0)} e^{i(mp_3+2p_0)} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1-2p_0)} e^{i(mp_1-2p_0)} + \\ & + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2-2p_0)} e^{i(mp_2-2p_0)} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3-2p_0)} e^{i(mp_3-2p_0)} + c.c., \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3)} = \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z, m}(\bar{\tau})}{i \bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} \exp(ip_{\alpha, 3, m}) + c.c. \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_\chi+p_0)} = & \frac{e \bar{v}_{\alpha \perp}}{2 m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x, m}(\bar{\tau})(1+s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} + \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \right. \\ & \left. \times \left( \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) - \frac{\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m}}{\omega_{\chi, m}} \right) \exp(ip_{\alpha, \chi, m} + ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_\chi-p_0)} = & \frac{e \bar{v}_{\alpha \perp}}{2 m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x, m}(\bar{\tau})(1-s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} - \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \right. \\ & \left. \times \left( \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) - \frac{\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m}}{\omega_{\chi, m}} \right) \exp(ip_{\alpha, \chi, m} - ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1)} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2)} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1 \pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2 \pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3 \pm 2p_0)} = 0.$$

Осцилляторные функции релятивистского фактора в первом приближении  $\tilde{\gamma}_\alpha^{(1)}$  имеют вид

$$u_{\gamma_{\alpha, m}}^{(1)} = u_{\gamma_{\alpha, m}}^{(1)(p_1)} e^{imp_1} + u_{\gamma_{\alpha, m}}^{(1)(p_2)} e^{imp_2} + u_{\gamma_{\alpha, m}}^{(1)(p_3)} e^{imp_3} + u_{\gamma_{\alpha, m}}^{(1)(p_1+p_0)} e^{i(mp_1+p_0)} +$$

$$\begin{aligned}
& + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_2+p_0)} e^{i(mp_2+p_0)} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_3+p_0)} e^{i(mp_3+p_0)} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_1-p_0)} e^{i(mp_1-p_0)} + \\
& + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_2-p_0)} e^{i(mp_2-p_0)} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_3-p_0)} e^{i(mp_3-p_0)} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_1+2p_0)} e^{i(mp_1+2p_0)} + \\
& + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_2+2p_0)} e^{i(mp_2+2p_0)} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_3+2p_0)} e^{i(mp_3+2p_0)} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_1-2p_0)} e^{i(mp_1-2p_0)} + \\
& + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_2-2p_0)} e^{i(mp_2-2p_0)} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_3-2p_0)} e^{i(mp_3-2p_0)} + c.c.,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_3)} = \frac{e\bar{v}_{\alpha z}}{m_e c^2} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z,m}(\bar{\tau})}{i\bar{\Omega}_{\alpha,3,m}} \exp(ip_{\alpha,3,m}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_\chi+p_0)} = \frac{e\bar{v}_{\alpha\perp}}{2m_e c^2} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x,m}(\bar{\tau})(1+s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} + \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha,\chi,m} + ip_{\alpha 0}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_\chi-p_0)} = \frac{e\bar{v}_{\alpha\perp}}{2m_e c^2} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x,m}(\bar{\tau})(1-s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} - \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha,\chi,m} - ip_{\alpha 0}) + c.c. \right],$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_1)} e^{imp_1} + \frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_2)} e^{imp_2} &= \frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_3\pm p_0)} = \\
= \frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_1\pm 2p_0)} &= \frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_2\pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_3\pm 2p_0)} = 0.
\end{aligned}$$

Далее запишем для первого приближения функции  $\mathbf{A}^{(1)}$

$$A_{v_{\alpha x}}^{(1)} = 0, A_{v_{\alpha y}}^{(1)} = 0, A_{v_{\alpha z}}^{(1)} = 0, A_{\gamma\alpha}^{(1)} = 0, A_\tau^{(1)} = 1.$$

Таким образом, используя решения (2.31) и (2.33), а также функции (2.34)–(2.36) получаем, вплоть до третьего приближения по  $1/\xi$ , решения для системы (2.29), а также для постоянных составляющих (2.30). Отметим, что благодаря использованию предложенной замены (2.26) (вместо стандартной (2.25)) при решении задачи движения общий алгоритм нахождения скоростей значительно упростился.

**Для решения задачи концентрации** используем уравнение непрерывности (2.11). Запишем его в компонентном виде

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial(n_\alpha \cdot v_{\alpha x})}{\partial x} + \frac{\partial(n_\alpha \cdot v_{\alpha y})}{\partial y} + \frac{\partial(n_\alpha \cdot v_{\alpha z})}{\partial z} = 0 \quad (2.37)$$

Решение уравнения непрерывности ищем аналогично задаче движения. Преобразовываем уравнение непрерывности (2.37) к стандартному виду [36], учитывая, что  $\partial(n_\alpha \cdot v_{\alpha x})/\partial x = 0$  и  $\partial(n_\alpha \cdot v_{\alpha y})/\partial y = 0$ . Далее дополняем его уравнениями для быстрых фаз (2.18)–(2.19), (2.27). При этом считаем функции скоростей (2.29) и медленно меняющиеся амплитуды электромагнитных полей, уже известными функциями. В результате записываем систему для задачи непрерывности в стандартном виде

$$\frac{dn_\alpha}{dt} = -n_\alpha \frac{\partial v_{\alpha z}}{\partial z}, \quad (2.38)$$

$$\frac{dp_{1,\alpha}}{dt} = \omega_1 - k_1 v_{\alpha z} \equiv \Omega_{1,\alpha}, \quad \frac{dp_{2,\alpha}}{dt} = \omega_2 - k_2 v_{\alpha z} \equiv \Omega_{2,\alpha}, \quad (2.39)$$

$$\frac{dp_{3,\alpha,m}}{dt} = m\omega_{3,1} - k_{3,m} v_{\alpha z} \equiv \Omega_{3,\alpha,m}, \quad \frac{dp_{0,\alpha}}{dt} = \frac{eB_0}{m_\alpha c \gamma_\alpha} \equiv \Omega_{0,\alpha}.$$

Запишем для системы (2.38)–(2.39) вектор медленных переменных  $\mathbf{x}$ , вектор-функцию  $\mathbf{X}$  и векторы быстрых фаз  $\boldsymbol{\Psi}$  в явном виде

$$\mathbf{x} = \{x_{n_\alpha}\} = \{n_\alpha\}, \quad \frac{1}{\xi} \mathbf{X} = \frac{1}{\xi} \{X_{n_\alpha}\} = \left\{ -n_\alpha \frac{\partial v_{\alpha z}}{\partial z} \right\},$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \{p_{1,p}, p_{2,p}, p_{3,p,1}, \dots, p_{3,p,N}, p_{0,p}, p_{1,b}, p_{2,b}, p_{3,b,1}, \dots, p_{3,b,N}, p_{0b}\}, \quad (2.40)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \{\Omega_{1,p}, \Omega_{2,p}, \Omega_{3,p,1}, \dots, \Omega_{3,p,N}, \Omega_{0,p}, \Omega_{1,b}, \Omega_{2,b}, \Omega_{3,b,1}, \dots, \Omega_{3,b,N}, \Omega_{0b}\}.$$

Далее используем описанный в [36, 39] алгоритм модернизированного метода усредненных характеристик, для случая многих быстрых фаз, в соответствии с которым совершаем переход к усредненным переменным

$$n_\alpha = \bar{n}_\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} \mathbf{u}_{n_\alpha}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi). \quad (2.41)$$

Заметим, что усредненная переменная концентрации удовлетворяет соотношению

$$\frac{d\bar{n}_\alpha}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} \mathbf{A}_{n_\alpha}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}). \quad (2.42)$$

Используя решения (2.31) и (2.33) находим осцилляторные  $\mathbf{u}^{(n)}$  и постоянные  $\mathbf{A}^{(n)}$  функции концентрации пучка и плазмы  $n_\alpha$ . Функции  $\mathbf{u}^{(n)}$  и  $\mathbf{A}^{(n)}$  для первого приближения имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)} = & \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1)} e^{imp_1} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2)} e^{imp_2} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3)} e^{imp_3} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1+p_0)} e^{i(mp_1+p_0)} + \\ & + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2+p_0)} e^{i(mp_2+p_0)} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3+p_0)} e^{i(mp_3+p_0)} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1-p_0)} e^{i(mp_1-p_0)} + \\ & + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2-p_0)} e^{i(mp_2-p_0)} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3-p_0)} e^{i(mp_3-p_0)} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1+2p_0)} e^{i(mp_1+2p_0)} + \\ & + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2+2p_0)} e^{i(mp_2+2p_0)} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3+2p_0)} e^{i(mp_3+2p_0)} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1-2p_0)} e^{i(mp_1-2p_0)} + \\ & + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2-2p_0)} e^{i(mp_2-2p_0)} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3-2p_0)} e^{i(mp_3-2p_0)} + c.c., \\ \frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3)} = & \frac{e\bar{n}_\alpha}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) \sum_{m=1}^N \left[ \frac{k_{3,m} E_{3z,m}(\bar{\tau})}{\bar{\Omega}_{\alpha,3,m}} \exp(ip_{\alpha,3,m}) + c.c. \right], \\ \frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_\chi+p_0)} = & \frac{e\bar{v}_{\alpha\perp} \bar{n}_\alpha}{2m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{k_{\chi,m} E_{\chi x,m}(\bar{\tau})(1+s_\chi)}{(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} + \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \left( \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) - \frac{\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m}}{\omega_{\chi, m}} \right) \exp(ip_{\alpha, \chi, m} + ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
& \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha, m}}^{(1)(p_{\chi} - p_0)} = \frac{e \bar{v}_{\alpha \perp} \bar{n}_{\alpha}}{2 m_e \bar{\gamma}_{\alpha}} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{k_{\chi, m} E_{\chi x, m}(\bar{\tau}) (1 - s_{\chi})}{(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} - \Omega_{\alpha 0})} \times \right. \\
& \left. \times \left( \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) - \frac{\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m}}{\omega_{\chi, m}} \right) \exp(ip_{\alpha, \chi, m} - ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
& \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha, m}}^{(1)(p_1)} = \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha, m}}^{(1)(p_2)} = \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha, m}}^{(1)(p_3 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha, m}}^{(1)(p_1 \pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha, m}}^{(1)(p_2 \pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha, m}}^{(1)(p_3 \pm 2p_0)} = 0, \\
& \frac{1}{\xi} A_{n_{\alpha}}^{(1)} = 0, \quad A_{\tau}^{(1)} = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, благодаря замене (2.26), решениям (2.31)—(2.33) и функциям (2.34)—(2.36) находим осциллирующие  $\mathbf{u}^{(n)}$  и постоянные  $\mathbf{A}^{(n)}$  функции решений (2.41)—(2.42) с точностью до кубических слагаемых по  $1/\xi$ .

### 2.3. Параметрические резонансные взаимодействия в плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ с винтовыми электронными пучками

В плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ с винтовыми РЭП за счет вращательной фазы  $p_{0b}$  электронного пучка, имеют место дополнительные множественные параметрические взаимодействия. В результате этого возникает большое количество комбинационных фаз, которые необходимо учитывать при нахождении собственных электромагнитных полей волн. Такие резонансные взаимодействия проявляются уже на линейной стадии взаимодействия. Быстрые фазы которые необходимо учитывать при решении самосогласованной задачи имеют следующий вид:

$$p_{1,m}, p_{2,m}, p_{3,m}, p_{1,m} + p_0, p_{1,m} - p_0, p_{2,m} + p_0, p_{1,m} - p_0, p_{3,m} + p_0, p_{3,m} - p_0, \\ p_{1,m} + 2p_0, p_{1,m} - 2p_0, p_{2,m} + 2p_0, p_{2,m} - 2p_0, p_{3,m} + 2p_0, p_{3,m} - 2p_0. (2.43)$$

Для получения самосогласованной системы дифференциальных уравнений для амплитуд гармоник электромагнитных волн с учетом мультигармонических взаимодействий в квадратически-нелинейном приближении необходимо перемножить два мультигармонических ряда следующего типа

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{m=1}^N (A_{p_{1,m}} e^{ip_{1,m}} + A_{p_{2,m}} e^{ip_{2,m}} + A_{p_{3,m}} e^{ip_{3,m}} + A_{p_{1,m}+p_0} e^{i(p_{1,m}+p_0)} + \\ + A_{p_{1,m}-p_0} e^{i(p_{1,m}-p_0)} + A_{p_{2,m}+p_0} e^{i(p_{2,m}+p_0)} + A_{p_{2,m}-p_0} e^{i(p_{2,m}-p_0)} + A_{p_{3,m}+p_0} e^{i(p_{3,m}+p_0)} + \\ + A_{p_{3,m}-p_0} e^{i(p_{3,m}-p_0)} + A_{p_{1,m}+2p_0} e^{i(p_{1,m}+2p_0)} + A_{p_{1,m}-2p_0} e^{i(p_{1,m}-2p_0)} + \\ + A_{p_{2,m}+2p_0} e^{i(p_{2,m}+2p_0)} + A_{p_{2,m}-2p_0} e^{i(p_{2,m}-2p_0)} + A_{p_{3,m}+2p_0} e^{i(p_{3,m}+2p_0)} + \\ + A_{p_{3,m}-2p_0} e^{i(p_{3,m}-2p_0)} + c.c.) \times \sum_{m'=1}^{N'} (B_{p_{1,m'}} e^{ip_{1,m'}} + B_{p_{2,m'}} e^{ip_{2,m'}} + B_{p_{3,m'}} e^{ip_{3,m'}} + \\ + B_{p_{1,m'}+p_0} e^{i(p_{1,m'}+p_0)} + B_{p_{1,m'}-p_0} e^{i(p_{1,m'}-p_0)} + B_{p_{2,m'}+p_0} e^{i(p_{2,m'}+p_0)} + B_{p_{2,m'}-p_0} e^{i(p_{2,m'}-p_0)} + \\ + B_{p_{3,m'}+p_0} e^{i(p_{3,m'}+p_0)} + B_{p_{3,m'}-p_0} e^{i(p_{3,m'}-p_0)} + B_{p_{1,m'}+2p_0} e^{i(p_{1,m'}+2p_0)} + \\ + B_{p_{1,m'}-2p_0} e^{i(p_{1,m'}-2p_0)} + B_{p_{2,m'}+2p_0} e^{i(p_{2,m'}+2p_0)} + B_{p_{2,m'}-2p_0} e^{i(p_{2,m'}-2p_0)} + \\ + B_{p_{3,m'}+2p_0} e^{i(p_{3,m'}+2p_0)} + B_{p_{3,m'}-2p_0} e^{i(p_{3,m'}-2p_0)} + c.c.).$$

Таким образом, возникает математическая проблема, которая связана с учетом всех возможных комбинаций фаз (2.43) при расчете осцилляторных функций  $\mathbf{u}^{(n)}$  (2.31) в задачах движения и концентрации. Для этого были разработаны комбинационные схемы, как для монохроматического режима ( $m = 1, N = 1$ ), так и для мультигармонического ( $m = 1, 2, 3, \dots, N$ ).

Рассмотрим сначала комбинационную схему для пятнадцати быстрых фаз (2.43) для первых гармоник волн сигнала, накачки и волны пространственного заряда. Условие параметрического резонанса для фазы первой гармоники  $p_{1,1}$  имеет вид

$$p_{1,1} = p_{3,1} \pm p_0 + (p_{2,1} \mp p_0), \quad p_{1,1} = p_{3,1} \pm 2p_0 + (p_{2,1} \mp 2p_0), \quad p_{1,1} = p_{3,1} + p_{2,1}.$$

Для того что бы вычислить скорость или концентрацию с фазой  $p_{1,1}$  необходимо записать комбинационный ряд следующего вида

$$\begin{aligned} C_{p_{1,1}} = & A_{p_{2,1}} B_{p_{3,1}} + A_{p_{3,1}} B_{p_{2,1}} + A_{p_{2,1}+p_0} B_{p_{3,1}-p_0} + \\ & + A_{p_{3,1}-p_0} B_{p_{2,1}+p_0} + A_{p_{2,1}+2p_0} B_{p_{3,1}-2p_0} + A_{p_{3,1}-2p_0} B_{p_{2,1}+2p_0} + \\ & + A_{p_{2,1}-p_0} B_{p_{3,1}+p_0} + A_{p_{3,1}+p_0} B_{p_{2,1}-p_0} + A_{p_{2,1}-2p_0} B_{p_{3,1}+2p_0} + A_{p_{3,1}+2p_0} B_{p_{2,1}-2p_0}. \end{aligned}$$

для первой гармоники фазы  $p_{2,1}$

$$p_{2,1} = p_{1,1} \pm p_0 - (p_{3,1} \pm p_0), \quad p_{2,1} = p_{1,1} \pm 2p_0 - (p_{3,1} \pm 2p_0), \quad p_{2,1} = p_{1,1} - p_{3,1},$$

$$\begin{aligned} C_{p_{2,1}} = & A_{p_{1,1}} B_{p_{3,1}}^* + A_{p_{3,1}}^* B_{p_{1,1}} + A_{p_{1,1}+p_0} B_{p_{3,1}+p_0}^* + \\ & + A_{p_{3,1}+p_0}^* B_{p_{1,1}+p_0} + A_{p_{1,1}+2p_0} B_{p_{3,1}+2p_0}^* + A_{p_{3,1}+2p_0}^* B_{p_{1,1}+2p_0} + \\ & + A_{p_{1,1}-p_0} B_{p_{3,1}-p_0}^* + A_{p_{3,1}-p_0}^* B_{p_{1,1}-p_0} + A_{p_{1,1}-2p_0} B_{p_{3,1}-2p_0}^* + A_{p_{3,1}-2p_0}^* B_{p_{1,1}-2p_0}. \end{aligned}$$

для фазы первой гармоники  $p_{3,1}$

$$p_{3,1} = p_{1,1} - p_{2,1}, \quad p_{3,1} = p_{1,1} \pm p_0 - (p_{2,1} \pm p_0), \quad p_{3,1} = p_{1,1} \pm 2p_0 - (p_{2,1} \pm 2p_0),$$

$$\begin{aligned} C_{p_{3,1}} = & A_{p_{1,1}} B_{p_{2,1}}^* + A_{p_{2,1}}^* B_{p_{1,1}} + A_{p_{1,1}+p_0} B_{p_{2,1}+p_0}^* + \\ & + A_{p_{2,1}+p_0}^* B_{p_{1,1}+p_0} + A_{p_{1,1}+2p_0} B_{p_{2,1}+2p_0}^* + A_{p_{2,1}+2p_0}^* B_{p_{1,1}+2p_0} + \end{aligned}$$

$$+ A_{p_{1,1}-p_0} B_{p_{2,1}-p_0}^* + A_{p_{2,1}-p_0}^* B_{p_{1,1}-p_0} + A_{p_{1,1}-2p_0} B_{p_{2,1}-2p_0}^* + A_{p_{2,1}-2p_0}^* B_{p_{1,1}-2p_0}.$$

для фаз первых гармоник  $p_{1,1} \pm p_0$

$$\begin{aligned} p_{1,1} \pm p_0 &= (p_{3,1} \pm p_0) + p_{2,1}, \quad p_{1,1} \pm p_0 = p_{3,1} + (p_{2,1} \pm p_0), \\ p_{1,1} \pm p_0 &= (p_{3,1} \pm 2p_0) + (p_{2,1} \mp p_0), \quad p_{1,1} \pm p_0 = (p_{3,1} \mp p_0) + (p_{2,1} \pm 2p_0), \\ C_{p_{1,1} \pm p_0} &= A_{p_{2,1}} B_{p_{3,1} \pm p_0} + A_{p_{3,1} \pm p_0} B_{p_{2,1}} + A_{p_{2,1} \mp p_0} B_{p_{3,1} \pm 2p_0} + A_{p_{3,1} \pm 2p_0} B_{p_{2,1} \mp p_0} + \\ &+ A_{p_{3,1}} B_{p_{2,1} \pm p_0} + A_{p_{2,1} \pm p_0} B_{p_{3,1}} + A_{p_{3,1} \mp p_0} B_{p_{2,1} \pm 2p_0} + A_{p_{2,1} \pm 2p_0} B_{p_{3,1} \mp p_0}. \end{aligned}$$

для фаз первых гармоник  $p_{2,1} \pm p_0$

$$\begin{aligned} p_{2,1} \pm p_0 &= (p_{1,1} \pm p_0) - p_{3,1}, \quad p_{2,1} \pm p_0 = p_{1,1} - (p_{3,1} \mp p_0), \\ p_{2,1} \pm p_0 &= (p_{1,1} \pm 2p_0) - (p_{3,1} \pm p_0), \quad p_{2,1} \pm p_0 = (p_{1,1} \mp p_0) - (p_{3,1} \mp 2p_0), \\ C_{p_{2,1} \pm p_0} &= A_{p_{1,1} \pm p_0} B_{p_{3,1}}^* + A_{p_{3,1}}^* B_{p_{1,1} \pm p_0} + A_{p_{1,1} \pm 2p_0} B_{p_{3,1} \pm p_0}^* + A_{p_{3,1} \pm p_0}^* B_{p_{1,1} \pm 2p_0} + \\ &+ A_{p_{1,1}} B_{p_{3,1} \mp p_0}^* + A_{p_{3,1} \mp p_0}^* B_{p_{1,1}} + A_{p_{1,1} \mp p_0} B_{p_{3,1} \mp 2p_0}^* + A_{p_{3,1} \mp 2p_0}^* B_{p_{1,1} \mp p_0}. \end{aligned}$$

для фаз первых гармоник  $p_{3,1} \pm p_0$

$$\begin{aligned} p_{3,1} \pm p_0 &= p_{1,1} \pm p_0 - p_{2,1}, \quad p_{3,1} \pm p_0 = p_{1,1} - (p_{2,1} \mp p_0), \\ p_{3,1} \pm p_0 &= p_{1,1} \pm 2p_0 - (p_{2,1} \pm p_0), \quad p_{3,1} \pm p_0 = p_{1,1} \mp p_0 - (p_{2,1} \mp 2p_0), \\ C_{p_{3,1} \pm p_0} &= A_{p_{1,1} \pm p_0} B_{p_{2,1}}^* + A_{p_{2,1}}^* B_{p_{1,1} \pm p_0} + A_{p_{1,1} \pm 2p_0} B_{p_{2,1} \pm p_0}^* + A_{p_{2,1} \pm p_0}^* B_{p_{1,1} \pm 2p_0} + \\ &+ A_{p_{1,1}} B_{p_{2,1} \mp p_0}^* + A_{p_{2,1} \mp p_0}^* B_{p_{1,1}} + A_{p_{1,1} \mp p_0} B_{p_{2,1} \mp 2p_0}^* + A_{p_{2,1} \mp 2p_0}^* B_{p_{1,1} \mp p_0}. \end{aligned}$$

для фаз первых гармоник  $p_{1,1} \pm 2p_0$

$$\begin{aligned}
p_{1,1} \pm 2p_0 &= p_{3,1} \pm 2p_0 + p_{2,1}, \quad p_{1,1} \pm 2p_0 = p_{3,1} + (p_{2,m} \pm 2p_0), \\
p_{1,1} \pm 2p_0 &= p_{3,1} \pm p_0 + (p_{2,1} \pm p_0), \\
C_{p_{1,1} \pm 2p_0} &= A_{p_{3,1}} B_{p_{2,1} \pm 2p_0} + A_{p_{2,1} \pm 2p_0} B_{p_{3,1}} + \\
&+ A_{p_{2,1} \pm p_0} B_{p_{3,1} \pm p_0} + A_{p_{3,1} \pm p_0} B_{p_{2,1} \pm p_0} + A_{p_{2,1}} B_{p_{3,1} \pm 2p_0} + A_{p_{3,1} \pm 2p_0} B_{p_{2,1}}.
\end{aligned}$$

для фаз первых гармоник  $p_{2,1} \pm 2p_0$

$$\begin{aligned}
p_{2,1} \pm 2p_0 &= p_{1,1} \pm 2p_0 - p_{3,1}, \quad p_{2,1} \pm 2p_0 = p_{1,1} - (p_{3,1} \pm 2p_0), \\
p_{2,1} \pm 2p_0 &= p_{1,1} \pm p_0 - (p_{3,1} \mp p_0), \\
C_{p_{2,1} \pm 2p_0} &= A_{p_{3,1}}^* B_{p_{1,1} \pm 2p_0} + A_{p_{1,1} \pm 2p_0} B_{p_{3,1}}^* + \\
&+ A_{p_{3,1} \mp p_0}^* B_{p_{1,1} \pm p_0} + A_{p_{1,1} \pm p_0} B_{p_{3,1} \mp p_0}^* + A_{p_{1,1}} B_{p_{3,1} \mp 2p_0}^* + A_{p_{3,1} \mp 2p_0}^* B_{p_{1,1}}.
\end{aligned}$$

для фаз первых гармоник  $p_{3,1} \pm 2p_0$

$$\begin{aligned}
p_{3,1} \pm 2p_0 &= p_{1,1} \pm 2p_0 - p_{2,1}, \quad p_{3,1} \pm 2p_0 = p_{1,1} - (p_{2,1} \mp 2p_0), \\
p_{3,1} \pm 2p_0 &= p_{1,1} \pm p_0 - (p_{2,1} \mp p_0), \\
C_{p_{3,1} \pm 2p_0} &= A_{p_{2,1}}^* B_{p_{1,1} \pm 2p_0} + A_{p_{1,1} \pm 2p_0} B_{p_{2,1}}^* + \\
&+ A_{p_{2,1} \mp p_0}^* B_{p_{1,1} \pm p_0} + A_{p_{1,1} \pm p_0} B_{p_{2,1} \mp p_0}^* + A_{p_{1,1}} B_{p_{2,1} \mp 2p_0}^* + A_{p_{2,1} \mp 2p_0}^* B_{p_{1,1}}.
\end{aligned}$$

Полученная выше комбинационная схема для пятнадцати быстроосцилирующих фаз хорошо адаптирована для проведения численного моделирования динамики волн в плазменно-пучковых супергетеродинных лазерах на свободных электронах с винтовыми релятивистскими электронными пучками в монохроматическом режиме.

Как известно супергетеродинные ЛСЭ используют пучковые неустойчивости для увеличения усилительных свойств. Как говорилось

ранее, такие неустойчивости характеризуются линейной дисперсией. В связи с этим в таких системах имеет место возбуждение большого количества высших гармоник волн. Для того, что бы описать процесс возбуждения высших гармоник волн в исследуемых плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ с винтовыми РЭП, необходимо разработать мультигармоническую комбинационную схему параметрических взаимодействий. Такая схема должна учитывать, как мультигармонические резонансы между волной одного типа, так и множественные резонансы между волнами разного типа.

Условия множественных параметрических резонансов между гармониками волн одного и разных типов для  $m$ -х гармоник фазы  $p_{1,m}$ , а также соответствующий комбинационный ряд имеют вид

$$p_{1,m_3} = p_{1,m_1} + p_{1,m_2}, \quad p_{1,m_3} = (p_{1,m_1} + p_0) + (p_{1,m_2} - p_0),$$

$$p_{1,m_3} = (p_{1,m_1} + 2p_0) + (p_{1,m_2} - 2p_0), \quad p_{1,m} = p_{3,m} + p_{2,m},$$

$$p_{1,m} = p_{3,m} \pm p_0 + (p_{2,m} \mp p_0), \quad p_{1,m} = p_{3,m} \pm 2p_0 + (p_{2,m} \mp 2p_0).$$

$$\begin{aligned} \sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{1,m''}} = & \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{1,m}} B_{p_{1,m'}} + A_{p_{1,m}+p_0} B_{p_{1,m'}-p_0} + A_{p_{1,m}-p_0} B_{p_{1,m'}+p_0} + A_{p_{1,m}+2p_0} B_{p_{1,m'}-2p_0} + \\ & + A_{p_{1,m}-2p_0} B_{p_{1,m'}+2p_0} + A_{p_{2,m}} B_{p_{3,m'}} + A_{p_{3,m}} B_{p_{2,m'}} + A_{p_{2,m}+p_0} B_{p_{3,m'}-p_0} + A_{p_{3,m}-p_0} B_{p_{2,m'}+p_0} + \\ & + A_{p_{2,m}+2p_0} B_{p_{3,m'}-2p_0} + A_{p_{3,m}-2p_0} B_{p_{2,m'}+2p_0} + A_{p_{2,m}-p_0} B_{p_{3,m'}+p_0} + A_{p_{3,m}+p_0} B_{p_{2,m'}-p_0} + \\ & + A_{p_{2,m}-2p_0} B_{p_{3,m'}+2p_0} + A_{p_{3,m}+2p_0} B_{p_{2,m'}-2p_0}), \end{aligned}$$

аналогично для  $m$ -х гармоник фазы  $p_{2,m}$

$$p_{2,m_3} = p_{2,m_1} + p_{2,m_2}, \quad p_{2,m_3} = (p_{2,m_1} + p_0) + (p_{2,m_2} - p_0),$$

$$p_{2,m_3} = (p_{2,m_1} + 2p_0) + (p_{2,m_2} - 2p_0), \quad p_{2,m} = p_{1,m} - p_{3,m},$$

$$p_{2,m} = (p_{1,m} \pm p_0) - (p_{3,m} \pm p_0), \quad p_{2,m} = p_{1,m} \pm 2p_0 - (p_{3,m} \pm 2p_0).$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{2,m''}} = & \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{2,m}} B_{p_{2,m'}} + A_{p_{2,m}+p_0} B_{p_{2,m'}-p_0} + A_{p_{2,m}-p_0} B_{p_{2,m'}+p_0} + A_{p_{2,m}+2p_0} B_{p_{2,m'}-2p_0} + \\
& + A_{p_{2,m}-2p_0} B_{p_{2,m'}+2p_0} + A_{p_{1,m}} B_{p_{3,m'}}^* + A_{p_{3,m}}^* B_{p_{1,m'}} + A_{p_{1,m}+p_0} B_{p_{3,m'}+p_0}^* + \\
& + A_{p_{3,m}+p_0}^* B_{p_{1,m'}+p_0} + A_{p_{1,m}+2p_0} B_{p_{3,m'}+2p_0}^* + A_{p_{3,m}+2p_0}^* B_{p_{1,m'}+2p_0} + \\
& + A_{p_{1,m}-p_0} B_{p_{3,m'}-p_0}^* + A_{p_{3,m}-p_0}^* B_{p_{1,m'}-p_0} + A_{p_{1,m}-2p_0} B_{p_{3,m'}-2p_0}^* + A_{p_{3,m}-2p_0}^* B_{p_{1,m'}-2p_0}),
\end{aligned}$$

для  $m$ -х гармоник фазы  $p_{3,m}$

$$\begin{aligned}
p_{3,m_3} &= p_{3,m_1} + p_{3,m_2}, \quad p_{3,m_3} = (p_{3,m_1} + p_0) + (p_{3,m_2} - p_0), \\
p_{3,m_3} &= (p_{3,m_1} + 2p_0) + (p_{3,m_2} - 2p_0), \quad p_{3,m} = p_{1,m} - p_{2,m}, \\
p_{3,m} &= (p_{1,m} \pm p_0) - (p_{2,m} \pm p_0), \quad p_{3,m} = p_{1,m} \pm 2p_0 - (p_{2,m} \pm 2p_0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{3,m''}} = & \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{3,m}} B_{p_{3,m'}} + A_{p_{3,m}+p_0} B_{p_{3,m'}-p_0} + A_{p_{3,m}-p_0} B_{p_{3,m'}+p_0} + A_{p_{3,m}+2p_0} B_{p_{3,m'}-2p_0} + \\
& + A_{p_{3,m}-2p_0} B_{p_{3,m'}+2p_0}) + A_{p_{1,m}} B_{p_{2,m'}}^* + A_{p_{2,m}}^* B_{p_{1,m'}} + A_{p_{1,m}+p_0} B_{p_{2,m'}+p_0}^* + \\
& + A_{p_{2,m}+p_0}^* B_{p_{1,m'}+p_0} + A_{p_{1,m}+2p_0} B_{p_{2,m'}+2p_0}^* + A_{p_{2,m}+2p_0}^* B_{p_{1,m'}+2p_0} + \\
& + A_{p_{1,m}-p_0} B_{p_{2,m'}-p_0}^* + A_{p_{2,m}-p_0}^* B_{p_{1,m'}-p_0} + A_{p_{1,m}-2p_0} B_{p_{2,m'}-2p_0}^* + A_{p_{2,m}-2p_0}^* B_{p_{1,m'}-2p_0}.
\end{aligned}$$

Условия множественных параметрических резонансов между волнами одного и разных типов для  $m$ -х гармоник фаз  $p_{1,m} \pm p_0$ , а также соответствующие комбинационные ряды имеют вид

$$\begin{aligned}
p_{1,m_3} \pm p_0 &= (p_{1,m_1} \pm p_0) + p_{1,m_2}, \quad p_{1,m_3} \pm p_0 = (p_{1,m_1} \mp p_0) + (p_{1,m_2} \pm 2p_0), \\
p_{1,m} \pm p_0 &= (p_{3,m} \pm p_0) + p_{2,m}, \quad p_{1,m} \pm p_0 = p_{3,m} + (p_{2,m} \pm p_0), \\
p_{1,m} \pm p_0 &= (p_{3,m} \pm 2p_0) + (p_{2,m} \mp p_0), \quad p_{1,m} \pm p_0 = (p_{3,m} \mp p_0) + (p_{2,m} \pm 2p_0),
\end{aligned}$$

$$\sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{1,m''} \pm p_0} = \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{1,m} \pm p_0} B_{p_{1,m'}} + A_{p_{1,m}} B_{p_{1,m'}+p_0} + A_{p_{1,m} \mp p_0} B_{p_{1,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{1,m} \pm 2p_0} B_{p_{1,m'} \mp p_0} +$$

$$\begin{aligned}
& + A_{p_{2,m}} B_{p_{3,m'} \pm p_0} + A_{p_{3,m} \pm p_0} B_{p_{2,m'}} + A_{p_{2,m} \mp p_0} B_{p_{3,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{3,m} \pm 2p_0} B_{p_{2,m'} \mp p_0} + \\
& + A_{p_{3,m}} B_{p_{2,m'} \pm p_0} + A_{p_{2,m} \pm p_0} B_{p_{3,m'}} + A_{p_{3,m} \mp p_0} B_{p_{2,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{2,m} \pm 2p_0} B_{p_{3,m'} \mp p_0} ),
\end{aligned}$$

для  $m$ -х гармоник фаз  $p_{2,m} \pm p_0$

$$p_{2,m_3} \pm p_0 = (p_{2,m_1} \pm p_0) + p_{2,m_2}, \quad p_{2,m_3} \pm p_0 = (p_{2,m_1} \pm 2p_0) + (p_{2,m_2} \mp p_0),$$

$$p_{2,m} \pm p_0 = (p_{1,m} \pm p_0) - p_{3,m}, \quad p_{2,m} \pm p_0 = p_{1,m} - (p_{3,m} \mp p_0),$$

$$p_{2,m} \pm p_0 = (p_{1,m} \pm 2p_0) - (p_{3,m} \pm p_0), \quad p_{2,m} \pm p_0 = (p_{1,m} \mp p_0) - (p_{3,m} \mp 2p_0),$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{2,m''} \pm p_0} &= \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{2,m} \pm p_0} B_{p_{2,m'}} + A_{p_{2,m}} B_{p_{2,m'} \pm p_0} + A_{p_{2,m} \mp p_0} B_{p_{2,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{2,m} \pm 2p_0} B_{p_{2,m'} \mp p_0} + \\
& + A_{p_{1,m} \pm p_0} B_{p_{3,m'}}^* + A_{p_{3,m}}^* B_{p_{1,m'} \pm p_0} + A_{p_{1,m} \pm 2p_0} B_{p_{3,m'} \pm p_0}^* + A_{p_{3,m} \pm p_0}^* B_{p_{1,m'} \pm 2p_0} + \\
& + A_{p_{1,m}} B_{p_{3,m'} \mp p_0}^* + A_{p_{3,m} \mp p_0}^* B_{p_{1,m'}} + A_{p_{1,m} \mp p_0} B_{p_{3,m'} \mp 2p_0}^* + A_{p_{3,m} \mp 2p_0}^* B_{p_{1,m'} \mp p_0} ),
\end{aligned}$$

для  $m$ -х гармоник фаз  $p_{3,m} \pm p_0$

$$p_{3,m_3} \pm p_0 = (p_{3,m_1} \pm p_0) + p_{3,m_2}, \quad p_{3,m_3} \pm p_0 = (p_{3,m_1} \mp p_0) + (p_{3,m_2} \pm 2p_0),$$

$$p_{3,m} \pm p_0 = p_{1,m} \pm p_0 - p_{2,m}, \quad p_{3,m} \pm p_0 = p_{1,m} - (p_{2,m} \mp p_0),$$

$$p_{3,m} \pm p_0 = p_{1,m} \pm 2p_0 - (p_{2,m} \pm p_0), \quad p_{3,m} \pm p_0 = p_{1,m} \mp p_0 - (p_{2,m} \mp 2p_0),$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{3,m''} \pm p_0} &= \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{3,m} \pm p_0} B_{p_{3,m'}} + A_{p_{3,m}} B_{p_{3,m'} \pm p_0} + A_{p_{3,m} \mp p_0} B_{p_{3,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{3,m} \pm 2p_0} B_{p_{3,m'} \mp p_0} + \\
& + A_{p_{1,m} \pm p_0} B_{p_{2,m'}}^* + A_{p_{2,m}}^* B_{p_{1,m'} \pm p_0} + A_{p_{1,m} \pm 2p_0} B_{p_{2,m'} \pm p_0}^* + A_{p_{2,m} \pm p_0}^* B_{p_{1,m'} \pm 2p_0} + \\
& + A_{p_{1,m}} B_{p_{2,m'} \mp p_0}^* + A_{p_{2,m} \mp p_0}^* B_{p_{1,m'}} + A_{p_{1,m} - p_0} B_{p_{2,m'} \mp 2p_0}^* + A_{p_{2,m} \mp 2p_0}^* B_{p_{1,m'} \mp p_0} ).
\end{aligned}$$

для  $m$ -х гармоник фаз  $p_{1,m} \pm 2p_0$

$$p_{1,m_3} \pm 2p_0 = (p_{1,m_1} \pm 2p_0) + p_{1,m_2}, \quad p_{1,m_3} \pm 2p_0 = (p_{1,m_1} \pm p_0) + (p_{1,m_2} \pm p_0),$$

$$p_{1,m} \pm 2p_0 = (p_{3,m} \pm 2p_0) + p_{2,m}, \quad p_{1,m} \pm 2p_0 = p_{3,m} + (p_{2,m} \pm 2p_0),$$

$$p_{1,m} \pm 2p_0 = (p_{3,m} \pm p_0) + (p_{2,m} \pm p_0),$$

$$\sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{1,m''} \pm 2p_0} = \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{1,m} \pm 2p_0} B_{p_{1,m'}} + A_{p_{1,m}} B_{p_{1,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{1,m} \pm p_0} B_{p_{1,m'} \pm p_0} +$$

$$+ A_{p_{3,m}} B_{p_{2,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{2,m} \pm 2p_0} B_{p_{3,m'}} + A_{p_{2,m} \pm p_0} B_{p_{3,m'} \pm p_0} + A_{p_{3,m} \pm p_0} B_{p_{2,m'} \pm p_0} +$$

$$+ A_{p_{2,m}} B_{p_{3,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{3,m} \pm 2p_0} B_{p_{2,m'}}),$$

для  $m$ -х гармоник фаз  $p_{2,m} \pm 2p_0$

$$p_{2,m_3} \pm 2p_0 = (p_{2,m_1} \pm 2p_0) + p_{2,m_2}, \quad p_{2,m_3} \pm 2p_0 = (p_{2,m_1} \pm p_0) + (p_{2,m_2} \pm p_0),$$

$$p_{2,m} \pm 2p_0 = (p_{1,m} \pm 2p_0) - p_{3,m}, \quad p_{2,m} \pm 2p_0 = p_{1,m} - (p_{3,m} \pm 2p_0),$$

$$p_{2,m} \pm 2p_0 = (p_{1,m} \pm p_0) - (p_{3,m} \mp p_0),$$

$$\sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{2,m''} \pm 2p_0} = \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{2,m} \pm 2p_0} B_{p_{2,m'}} + A_{p_{2,m}} B_{p_{2,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{2,m} \pm p_0} B_{p_{2,m'} \pm p_0} +$$

$$+ A_{p_{3,m}}^* B_{p_{1,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{1,m} \pm 2p_0} B_{p_{3,m'}}^* + A_{p_{3,m} \mp p_0}^* B_{p_{1,m'} \pm p_0} + A_{p_{1,m} \pm p_0} B_{p_{3,m'} \mp p_0}^* +$$

$$+ A_{p_{1,m}} B_{p_{3,m'} \mp 2p_0}^* + A_{p_{3,m} \mp 2p_0}^* B_{p_{1,m'}}),$$

для  $m$ -х гармоник фаз  $p_{3,m} \pm 2p_0$

$$p_{3,m_3} \pm 2p_0 = (p_{3,m_1} \pm 2p_0) + p_{3,m_2}, \quad p_{3,m_3} \pm 2p_0 = (p_{3,m_1} \pm p_0) + (p_{3,m_2} \pm p_0),$$

$$p_{3,m} \pm 2p_0 = (p_{1,m} \pm 2p_0) - p_{2,m}, \quad p_{3,m} \pm 2p_0 = p_{1,m} - (p_{2,m} \mp 2p_0),$$

$$p_{3,m} \pm 2p_0 = (p_{1,m} \pm p_0) - (p_{2,m} \mp p_0),$$

$$\sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{3,m''} \pm 2p_0} = \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{3,m} \pm 2p_0} B_{p_{3,m'}} + A_{p_{3,m}} B_{p_{3,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{3,m} \pm p_0}^* B_{p_{3,m'} \pm p_0} +$$

$$+ A_{p_{2,m}}^* B_{p_{1,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{1,m} \pm 2p_0} B_{p_{2,m'}}^* + A_{p_{2,m} \mp p_0}^* B_{p_{1,m'} \pm p_0} + A_{p_{1,m} \pm p_0} B_{p_{2,m'} \mp p_0}^* +$$

$$+ A_{p_{1,m}} B_{p_{2,m'} \mp 2p_0}^* + A_{p_{2,m} \mp 2p_0}^* B_{p_{1,m'}}).$$

Таким образом, получена комбинационная схема, которая учитывает множественные параметрически-резонансные взаимодействия между волной одного типа и волнами разного типа. Данная схема хорошо адаптирована для проведения численного моделирования динамики волн в плазменно-пучковых СЛСЭ с винтовыми РЭП в мультигармоническом режиме.

## **2.4. Выводы к разделу 2**

1. Произведена модернизация метода усредненных характеристик применительно к задачам динамики мультигармонических электромагнитных волн в плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ с винтовыми релятивистскими электронными пучками. Предложена новая замена переменных, которая упрощает общий алгоритм вычисления.

2. В плазменно-пучковых супергетеродинных лазерах на свободных электронах с винтовыми релятивистскими электронными пучками имеют место параметрические резонансные взаимодействия волн разного типа, которые необходимо учитывать при нахождении собственных электромагнитных полей волн. Для учета таких резонансных взаимодействий предложена комбинационная схема, которая хорошо адаптирована для численного моделирования.

### РАЗДЕЛ 3

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В ПЛАЗМЕННО-ПУЧКОВЫХ СУПЕРГЕТЕРОДИННЫХ ЛАЗЕРАХ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОННАХ ДОПЛЕРТРОННОГО ТИПА С ВИНТОВЫМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ ПУЧКАМИ

В данном разделе построена кубически-нелинейная теория плазменно-пучковых супергетеродинных лазеров на свободных электронах доплертронного типа (накачка низкочастотной электромагнитной волной) с винтовыми релятивистскими электронными пучками. В приборах данного типа для усиления продольных волн используется плазменно-пучковая неустойчивость, которая среди других типов неустойчивостей обладает более высокими инкрементами нарастания. Применение винтовых релятивистских электронных пучков в исследуемом типе плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ, позволяет повысить инкремент плазменно-пучковой неустойчивости по сравнению с инкрементами в плазменно-пучковых СЛСЭ с прямолинейными РЭП. За счет увеличения инкремента нарастания увеличивается коэффициент усиления высокочастотного электромагнитного сигнала. Основные научные результаты данного раздела были опубликованы в работах [34–35, 37–38, 41, 43–45, 47].

### 3.1. Модель плазменно-пучкового супергетеродинного ЛСЭ доплертронного типа с винтовым РЕП

Модель плазменно-пучкового супергетеродинного лазера на свободных электронах доплертронного типа с винтовым РЭП представлена на рис. 3.1. В качестве модели исследуемого прибора рассматриваем плазменную среду 1 с ленгмюровской частотой  $\omega_p$ , через которую проходит электронный пучок 2, который характеризуется ленгмюровской частотой  $\omega_b$ . Рассматриваем случай, когда  $\omega_b \ll \omega_p$ . Исследуемая система находится в продольном

фокусирующем магнитном поле с индукцией  $B_0$ , которое направлено вдоль оси системы  $Z$  (рис. 3.1). Считаем, что циклотронная частота  $\omega_H$  вращения электронов в продольном магнитном поле много меньше плазменной частоты  $\omega_H \ll \omega_p$ . Вектор скорости электронов винтового релятивистского пучка  $\mathbf{v}_b$  направлен под углом  $\beta$  по отношению к оси  $Z$ , так что  $\operatorname{tg}\beta = v_{b\perp} / v_{bz}$ , где  $v_{b\perp}$  и  $v_{bz}$  – его поперечная и продольная компоненты. В качестве накачки используем интенсивную циркулярно-поляризованную низкочастотную электромагнитную волну с частотой  $\omega_{2,1}$  и волновым числом  $k_{2,1}$ , которая распространяется вдоль оси системы  $Z$  навстречу электронному пучку. Частота волны накачки меньше циклотронной частоты:  $\omega_{2,1} \ll \omega_H$ . На вход системы также подается слабая высокочастотная циркулярно-поляризованная электромагнитная волна сигнала, которая характеризуется частотой  $\omega_{1,1}$  и волновым числом  $k_{1,1}$ .

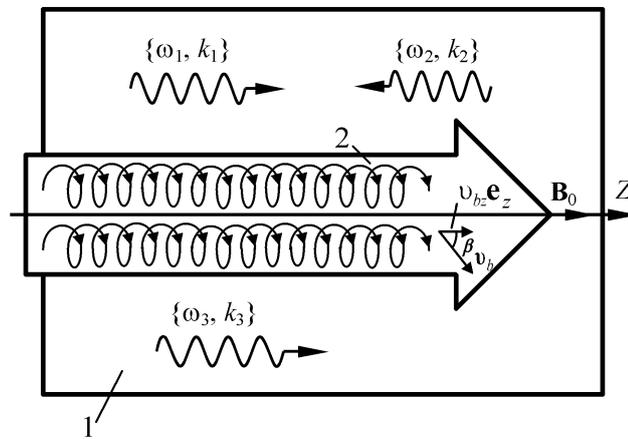


Рис. 3.1. Схема плазменно-пучкового супергетеродинного ЛСЭ доплертронного типа с винтовым РЭП

Благодаря параметрически-резонансной связи между взаимодействующими волнами, в исследуемом приборе возбуждается волна пространственного заряда с частотой  $\omega_{3,1}$  и волновым числом  $k_{3,1}$ . Условие такого параметрического резонанса имеет вид:

$$\omega_{3,1} = \omega_{1,1} - \omega_{2,1}, \quad k_{3,1} = k_{1,1} + k_{2,1}. \quad (3.1)$$

При этом учтем, что во втором условии соотношения (3.1) волновое число накачки имеет значение  $k_{2,1} = -|k_{2,1}|$ .

В результате использования винтового релятивистского электронного пучка в исследуемом плазменно-пучковом супергетеродинном ЛСЭ возбуждаются колебания на циклотронной частоте и ее гармониках. Поэтому, в системе имеют место дополнительные трехволновые параметрические резонансы. Условия, таких резонансов имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_{3,1} &= (\omega_{1,1} \pm \omega_H/\gamma_b) - (\omega_{2,1} \pm \omega_H/\gamma_b), \\ \omega_{3,1} &= (\omega_{1,1} \pm 2\omega_H/\gamma_b) - (\omega_{2,1} \pm 2\omega_H/\gamma_b), \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Особенность исследуемого плазменно-пучкового СЛСЭ является то, что здесь волна пространственного заряда нарастающая за счет плазменно-пучковой неустойчивости характеризуется квазиленейным законом дисперсии. Поэтому частоты и волновые числа  $m$ -х гармоник ВПЗ пропорциональны номеру гармоники  $m$ :  $\omega_{3,m} = \omega_{3,1} \cdot m$ ,  $k_{3,m} \approx k_{3,1} \cdot m$ . Это приводит к тому, что гармоники ВПЗ взаимодействуют друг с другом через механизм трехволнового параметрического резонанса. Обозначив номера гармоник как  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , запишем условия трехволновых параметрических резонансов в плазменно-пучковом СЛСЭ с винтовым РЭП и доплертронной накачкой для высших гармоник ВПЗ в виде

$$\omega_{3,m_1} = \omega_{3,m_2} + \omega_{3,m_3}, \quad k_{3,m_1} = k_{3,m_2} + k_{3,m_3}, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \omega_{3,m_1} &= (\omega_{3,m_2} \pm \omega_H/\gamma_b) + (\omega_{3,m_3} \mp \omega_H/\gamma_b), \\ \omega_{3,m_1} &= (\omega_{3,m_2} \pm 2\omega_H/\gamma_b) + (\omega_{3,m_3} \mp 2\omega_H/\gamma_b), \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из соотношений (3.3)–(3.4) можем записать общее условие множественных параметрических взаимодействий в виде

$$m_1 = m_2 + m_3. \quad (3.5)$$

Заметим, что номера гармоник, являются целыми числами. Поэтому условие (3.5) может быть выполнено множеством способов, например,  $4 = 3 + 1$ ,  $3 = 6 - 3$  и так далее. Такие трехволновые взаимодействия приводят к генерации и усилению высших гармоник ВПЗ. Поэтому данный эффект необходимо учитывать при анализе нелинейной динамики волн в плазменно-пучковом СЛСЭ доплертронного типа с винтовым РЭП.

### 3.2. Система кубически-нелинейных укороченных уравнений для комплексных амплитуд волн

Электрические  $\mathbf{E}$  и магнитные  $\mathbf{B}$  компоненты электромагнитных полей волн сигнала (индекс 1) и накачки (индекс 2) в исследуемом плазменно-пучковом СЛСЭ записываем в монохроматическом виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= (E_{1x}\mathbf{e}_x + E_{1y}\mathbf{e}_y)e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + c.c., \quad \mathbf{E}_2 = (E_{2x}\mathbf{e}_x + E_{2y}\mathbf{e}_y)e^{i(\omega_2 t - k_2 z)} + c.c., \\ \mathbf{B}_1 &= (B_{1x}\mathbf{e}_x + B_{1y}\mathbf{e}_y)e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + c.c., \quad \mathbf{B}_2 = (B_{2x}\mathbf{e}_x + B_{2y}\mathbf{e}_y)e^{i(\omega_2 t - k_2 z)} + c.c.. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Как уже говорилось выше, в исследуемом плазменно-пучковом СЛСЭ имеет место эффект возбуждения высших гармоник ВПЗ. Поэтому напряженность электрического поля волны ВПЗ имеет мультигармонический характер

$$\mathbf{E}_3 = \sum_{m=1}^N (E_{3z,m} e^{i(m\omega_3,1 t - k_{3,m} z)} + c.c.) \mathbf{e}_z, \quad (3.7)$$

где  $N$  — количество гармоник ВПЗ, которые учитываются при решении задачи.

Таким образом, электрические и магнитные поля в рабочем объеме плазменно-пучкового супергетеродинного ЛСЭ доплертронного типа с винтовым релятивистским электронным пучком имеют вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_0. \quad (3.8)$$

Отметим, что амплитуды электрических и магнитных полей медленно меняются со временем  $t$ . Рассматриваем случай, когда разбросом электронов по скоростям, а также их столкновениями можно пренебречь. В подразделе 2.1 изложено обоснование таких допущений. В качестве исходных уравнений используем релятивистское квазигидродинамическое уравнение (2.10), уравнение непрерывности (2.11) и уравнения Максвелла (2.12). Решения задачи движения (2.29) и непрерывности (2.41) были получены в подразделе 2.2. Для решения задачи о возбуждении электромагнитных полей используем метод медленно меняющихся амплитуд.

Запишем систему (2.12) через проекции векторов на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , при этом учитываем, что в исследуемой модели скорости, концентрации и электромагнитные поля зависят только от продольной координаты  $z$  и времени  $t$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ -\frac{\partial B_y}{\partial z} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha=1}^2 (e_{\alpha} n_{\alpha} v_{\alpha x}), \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha=1}^2 (e_{\alpha} n_{\alpha} v_{\alpha y}) \\ 0 &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha=1}^2 (e_{\alpha} n_{\alpha} v_{\alpha z}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

здесь и далее индекс  $\alpha$  принимает значения  $b$  и  $p$  (индексом  $b$  характеризуем параметры пучка, индексом  $p$  — параметры плазмы).

Далее подставим решения скоростей (2.29) и концентрации (2.41) в систему (3.9). При этом учитываем, что выражения для скорости и концентраций парциальных пучков получены модернизированным методом усредненных характеристик, и имеют вид рядов по малому параметру  $1/\xi$ . Поэтому их необходимо разложить в ряды по гармоникам быстрых фаз. В результате аналитических преобразований получаем в кубическом приближении для комплексных амплитуд первых гармоник  $x$ - и  $y$ - компонент напряженности электрического поля сигнала  $(E_{1x}, E_{1y})$ ,  $x$ - и  $y$ - компонент напряженности электрического поля накачки  $(E_{2x}, E_{2y})$  и  $m$ -х гармоник напряженности электрического поля ВПЗ  $(E_{3z,m})$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
K_2 \frac{d^2 E_{1x}}{dt^2} + K_1 \frac{dE_{1x}}{dt} &= K_3 E_{3z} E_{2x} + F_{1x}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha), \\
K_2 \frac{d^2 E_{1y}}{dt^2} + K_1 \frac{dE_{1y}}{dt} &= K_3 \eta_1 \eta_2 E_{3z} E_{2y} + F_{1y}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha), \\
M_2 \frac{d^2 E_{2x}}{dt^2} + M_1 \frac{dE_{2x}}{dt} &= M_3 E_{3z}^* E_{1x} + F_{2x}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha), \quad (3.10) \\
M_2 \frac{d^2 E_{2y}}{dt^2} + M_1 \frac{dE_{2y}}{dt} &= M_3 \eta_1 \eta_2 E_{3z}^* E_{1y} + F_{2y}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha), \\
C_{2,m} \frac{d^2 E_{3z,m}}{dt^2} + C_{1,m} \frac{dE_{3z,m}}{dt} + D_{3m} E_{3z,m} &= C_{3,m} (E_{1x} E_{2x}^* + E_{1y} E_{2y}^*) + \\
+ C_4 \left\langle \int E_z \left( \int E_z dp_3 \right) dp_3 \right\rangle_{p_{3,m}} &+ C_5 \left\langle \left( \int E_z dp_3 \right)^2 \right\rangle_{p_{3,m}} + F_{3z,m}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha).
\end{aligned}$$

Из системы (3.10) следует, что для исследуемого плазменно-пучкового СЛСЭ собственными являются циркулярно-поляризованные электромагнитные волны, связь амплитуд полей которых имеет следующий вид

$$\eta_\chi = E_{\chi y} / (iE_{\chi x}) = \pm 1, \quad (3.11)$$

где  $\eta_\chi$  — знаковая функция, которая характеризует направление вращения вектора напряженности электрического поля циркулярно-поляризованных волн сигнала  $\chi = 1$  и накачки  $\chi = 2$ .

В системе (3.10)

$$K_1 = \frac{\partial D_1}{\partial(i\omega_1)}; K_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_1}{\partial(i\omega_1)^2}; M_1 = \frac{\partial D_2}{\partial(i\omega_2)}; M_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_2}{\partial(i\omega_2)^2};$$

$$C_{1,m} = \frac{\partial D_{3,m}}{\partial(im\omega_3)}; C_{2,m} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{3,m}}{\partial(im\omega_3)^2};$$

где  $D_1 = D(\omega_1, k_1)$ ,  $D_2 = D(\omega_2, k_2)$  — дисперсионные функции поперечных циркулярно-поляризованных электромагнитных волн сигнала  $(\omega_1, k_1)$  и накачки  $(\omega_2, k_2)$ , соответственно

$$D(\omega_\chi, k_\chi) = \frac{i}{c\omega_\chi} \left\{ k_\chi^2 c^2 - \omega_\chi^2 + \sum_\alpha^{b,p} \left[ \frac{\omega_\alpha^2}{\bar{\gamma}_\alpha (\Omega_{\alpha\chi} + \eta_\chi \omega_{H,\alpha})^2} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \left( \Omega_{\alpha\chi} (\Omega_{\alpha\chi} + \eta_\chi \omega_{H,\alpha}) - \frac{\bar{v}_{\alpha\perp}^2}{2c^2} (\omega_\chi^2 - k_\chi^2 c^2) \right) \right] \right\}; \quad (3.12)$$

$D_{3,m} = D(m\omega_3, k_{3,m})$  — дисперсионная функция  $m$ -х гармоник ВПЗ

$$D_{3,m} = \frac{-im\omega_3}{c} \left( 1 - \sum_\alpha^{b,p} \frac{\omega_\alpha^2 (1 - \bar{v}_{\alpha z}^2 / c^2)}{(m\omega_3 - k_{3,m} \bar{v}_{\alpha z})^2 \bar{\gamma}_\alpha} \right); \quad (3.13)$$

$K_3$ ,  $M_3$ ,  $C_{3,m}$  — коэффициенты дифференциальных уравнений, которые характеризуют параметрически-резонансное взаимодействие волн в исследуемой системе, зависят от частот, волновых чисел и параметров исследуемой системы;

$$F_{1x}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha) = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_{\alpha} \frac{p,b}{\xi^3} \left( \bar{n}_\alpha u_{v_{\alpha x}}^{(3)} + u_{n_\alpha}^{(1)} u_{v_{\alpha x}}^{(2)} + u_{n_\alpha}^{(2)} u_{v_{\alpha x}}^{(1)} + u_{n_\alpha}^{(3)} \bar{v}_{\alpha\perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} \right) \right\rangle_{p_1};$$

$$F_{1y}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha) = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_{\alpha} \frac{p,b}{\xi^3} \left( \bar{n}_\alpha u_{v_{\alpha y}}^{(3)} + u_{n_\alpha}^{(1)} u_{v_{\alpha y}}^{(2)} + u_{n_\alpha}^{(2)} u_{v_{\alpha y}}^{(1)} + u_{n_\alpha}^{(3)} \bar{v}_{\alpha\perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} \right) \right\rangle_{p_1};$$

$$F_{2x}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha) = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_{\alpha} \frac{p,b}{\xi^3} \left( \bar{n}_\alpha u_{v_{\alpha x}}^{(3)} + u_{n_\alpha}^{(1)} u_{v_{\alpha x}}^{(2)} + u_{n_\alpha}^{(2)} u_{v_{\alpha x}}^{(1)} + u_{n_\alpha}^{(3)} \bar{v}_{\alpha\perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} \right) \right\rangle_{p_2};$$

$$F_{2y}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha) = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_{\alpha} \frac{p,b}{\xi^3} \left( \bar{n}_\alpha u_{v_{\alpha y}}^{(3)} + u_{n_\alpha}^{(1)} u_{v_{\alpha y}}^{(2)} + u_{n_\alpha}^{(2)} u_{v_{\alpha y}}^{(1)} + u_{n_\alpha}^{(3)} \bar{v}_{\alpha\perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} \right) \right\rangle_{p_2};$$

$$F_{3z,m}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha) = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_{\alpha} \frac{p,b}{\xi^3} \left( \bar{n}_\alpha u_{v_{\alpha z}}^{(3)} + u_{n_\alpha}^{(1)} u_{v_{\alpha z}}^{(2)} + u_{n_\alpha}^{(2)} u_{v_{\alpha z}}^{(1)} + u_{n_\alpha}^{(3)} \bar{v}_{\alpha z} \right) \right\rangle_{p_{3,m}}$$

— функции, учитывающие кубически-нелинейные слагаемые соответствующих уравнений; где функции  $u_{n_\alpha}^{(1)}/\xi$ ,  $u_{n_\alpha}^{(2)}/\xi^2$ ,  $u_{n_\alpha}^{(3)}/\xi^3$  определяют осцилляторные слагаемые концентрации электронов пучка и плазмы в первом, втором и третьем приближении, которые были найдены в подразделе 2.2;  $u_{v_{\alpha x}}^{(1)}/\xi$ ,  $u_{v_{\alpha x}}^{(2)}/\xi^2$ ,  $u_{v_{\alpha x}}^{(3)}/\xi^3$ ,  $u_{v_{\alpha y}}^{(1)}/\xi$ ,  $u_{v_{\alpha y}}^{(2)}/\xi^2$ ,  $u_{v_{\alpha y}}^{(3)}/\xi^3$ ,  $u_{v_{\alpha z}}^{(1)}/\xi$ ,  $u_{v_{\alpha z}}^{(2)}/\xi^2$ ,  $u_{v_{\alpha z}}^{(3)}/\xi^3$  — осцилляторные компоненты, соответственно первых, вторых и третьих приближений скоростей электронов пучка и плазмы, которые были найдены в подразделе 2.2;

$$\langle \dots \rangle_{p_1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots \cdot \exp(ip_1)) dp_1, \quad \langle \dots \rangle_{p_2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots \cdot \exp(ip_2)) dp_2,$$

$$\langle \dots \rangle_{p_{3,m}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots \cdot \exp(-ip_{3,m})) dp_{3,1}.$$

В результате того, что коэффициенты системы (3.10) зависят от постоянных составляющих скоростей  $\bar{v}_{\alpha\perp}$ ,  $\bar{v}_{\alpha z}$  и концентраций  $\bar{n}_\alpha$  парциальных пучков, систему уравнений (3.10) необходимо дополнить дифференциальными уравнениями для постоянных составляющих

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}_{\perp\alpha}}{dt} &= V_{\perp\alpha}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha), & \frac{d\bar{v}_{\alpha z}}{dt} &= V_{\alpha z}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{\alpha z}, \bar{n}_\alpha), \\ \frac{d\bar{n}_\alpha}{dt} &= N_\alpha(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{\alpha z}, \bar{n}_\alpha) \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$V_{\alpha\perp} = \sum_{\alpha}^{p,b} \frac{1}{\xi^3} A_{v_{\alpha\perp}}^{(3)}, \quad V_{\alpha z} = \sum_{\alpha}^{p,b} \frac{1}{\xi^3} A_{v_{\alpha z}}^{(3)}, \quad N_\alpha = \sum_{\alpha}^{p,b} \frac{1}{\xi^3} A_{n_\alpha}^{(3)}$$

— функции, учитывающие кубически нелинейные слагаемые, которые зависят от волновых чисел, частот, амплитуд полей, постоянных составляющих скоростей и концентраций электронов пучка и плазмы.

Система укороченных дифференциальных уравнений (3.10) и соотношения (3.14) описывают кубически-нелинейную динамику волн в плазменно-пучковом супергетеродинном ЛСЭ доплерotronного типа с неосевой инжекцией электронного пучка при учете множественных параметрических резонансов ВПЗ. Численный анализ данной системы позволяет определить механизмы и уровни насыщения исследуемого прибора в режиме максимального усиления при различных углах влета РЭП.

### 3.3. Анализ динамики волн в слабосигнальном приближении

Проведем анализ возможных режимов трехволнового взаимодействия между сигналом, накачкой и ВПЗ в плазменно-пучковом СЛСЭ с

доплертронной накачкой и винтовым релятивистским электронным пучком. Параметры исследуемой системы представлены в табл. 3.1. Чтобы определить частоты электромагнитных волн сигнала  $\omega_{1,1}$  и накачки  $\omega_{2,1}$ , а также их волновые числа  $k_{1,1}$  и  $k_{2,1}$  используем условия параметрического резонанса (3.1)–(3.2), дисперсионное уравнение для электромагнитных волн сигнала  $D(\omega_1, k_1) = 0$  и накачки  $D(\omega_2, k_2) = 0$ , где соответствующие дисперсионные функции  $D(\omega_\chi, k_\chi) = 0$  определяются соотношением (3.12).

Волновое число  $k_{3,1}$  и частоту  $\omega_{3,1}$  первой гармоники ВПЗ выбираем таким образом, чтобы инкремент нарастания ВПЗ был максимальным. Известно, что этому условию при угле влета пучка  $\beta = 0^\circ$  соответствует значение волнового числа  $k_{3,1} = \omega_p / \bar{v}_{bz} = 38,52$  см [5, 76]. Частота  $\omega_{3,1}$  (действительная часть комплексной частоты  $\omega'_{3,1}$ ) определяется из соотношения (3.13)  $D_{3,1}(\omega_{3,1}, k_{3,1}) = 0$ . Найденным значениям волнового числа  $k_{3,1}$  и частоты  $\omega_{3,1}$  соответствует точка  $O$  на дисперсионной кривой 3 (рис. 3.2).

Эти решения также можно легко найти графически. На рис. 3.2 представлены дисперсионные кривые для высокочастотных электромагнитных волн сигнала (кривые 1 и 2), низкочастотной электромагнитной волны накачки (кривая 4) и ВПЗ (кривые 3) для случая, когда угол влета пучка по отношению к продольному магнитному полю равен  $\beta = 0^\circ$ . Кривая 1 соответствует правой циркулярно-поляризованной электромагнитной волне, если смотреть вдоль магнитного поля ( $\eta_1 = -1$ ), кривая 2 — левой циркулярно-поляризованной электромагнитной волне ( $\eta_1 = +1$ ). Кривая 4 соответствует как правой циркулярно-поляризованной электромагнитной волне ( $\eta_1 = -1$ ), так и левой циркулярно-поляризованной электромагнитной волне накачки ( $\eta_1 = +1$ ).

**Параметры плазменно-пучкового СЛСЭ доплертронного типа с  
винтовым РЕП**

Параметры	Значение
Ленгмюровская частота пучка ( $\omega_b$ )	$2,0 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$
Релятивистский фактор пучка ( $\bar{\gamma}_b$ )	2,0
Ленгмюровская частота плазмы ( $\omega_p$ )	$1,0 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$
Индукция фокусирующего магнитного поля ( $B_0$ )	0,28 Тл
Амплитуда первой гармоники напряженности электрического поля волны накачки $E_{2,1} = \sqrt{ E_{2x,1} ^2 +  E_{2y,1} ^2}$	$6 \cdot 10^4 \text{ В/м}$

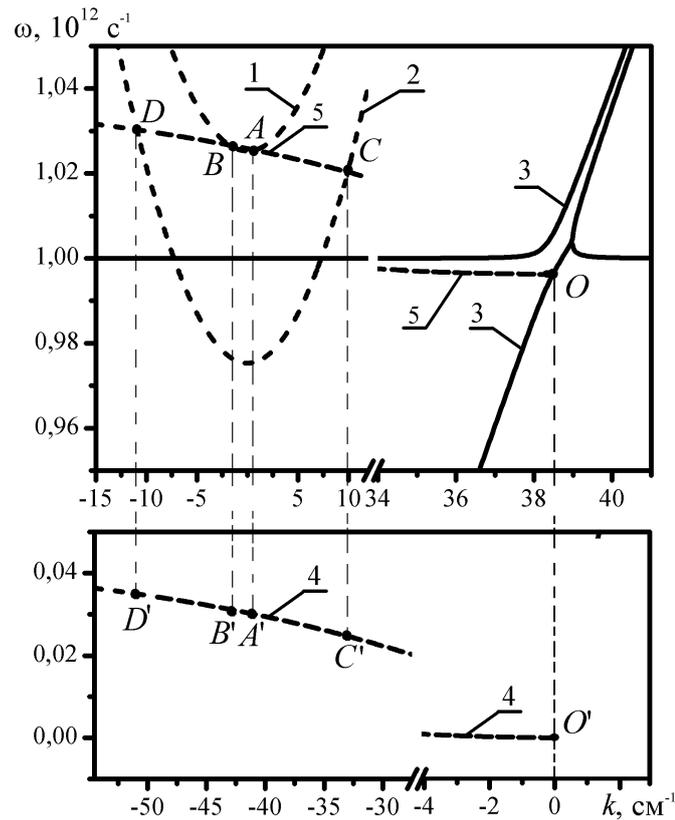


Рис. 3.2. Дисперсионные кривые волн сигнала, накачки и ВПЗ в плазменно-пучковом СЛСЭ доплертронного типа

Для нахождения необходимых частот  $\omega_{1,1}$ ,  $\omega_{2,1}$ , и волновых чисел  $k_{1,1}$ ,  $k_{2,1}$  волн сигнала и накачки, которые принимают участие в параметрическом резонансе на рис. 3.2 выполним параллельный перенос кривой 4 так, чтобы точка  $O'$  переместилась в точку  $O$ . В итоге кривая 4 переместится в положение 5. Тогда пересечения кривой 5 с кривыми 1 и 2 дадут искомые значения частот  $\omega_{1,1}$  и волновых чисел  $k_{1,1}$  для высокочастотной электромагнитной волны сигнала. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  определяют требуемые частоты и волновые числа. Чтобы определить частоты  $\omega_{2,1}$  и волновые числа  $k_{2,1}$  низкочастотной электромагнитной волны накачки необходимо спроецировать найденные точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  на кривую 4 в направлении параллельного переноса. Таким образом, точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  и  $D'$  определяют соответствующие частоты  $\omega_{2,1}$  и волновые числа  $k_{2,1}$ . Следовательно, в плазменно-пучковом супергетеродинном лазере на свободных электронах доплертронного типа трехволновые параметрические взаимодействия между волнами сигнала, накачки и ВПЗ возможны в четырех различных режимах, которые мы обозначим как  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

Проведем анализ инкрементов нарастания в плазменно-пучковом супергетеродинном ЛСЭ доплертронного типа с винтовым электронным пучком. Для этого преобразуем кубически-нелинейную систему дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд гармоник полей электромагнитных волн (3.10). Учитываем, что в слабосигнальном приближении амплитуда накачки не изменяется (случай сильной накачки). Далее пренебрежем в системе (3.10) кубически-нелинейными слагаемыми с коэффициентом  $K_2 = 0,5 \cdot \partial^2 D_1 / \partial(i\omega_1)^2$  и функциями  $F_{1x}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{1\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha)$ ,  $F_{1y}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{1\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha)$ . Также можно пренебречь слагаемыми с коэффициентами  $C_{4,m}$  и  $C_{5,m}$ , которые описывают взаимодействия между высшими гармониками волны ВПЗ в кубическом приближении. В результате из (3.10) получаем квадратично-нелинейную

систему дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд  $x$ - и  $y$ -компонент первых гармоник волны сигнала и  $m$ -х гармоник ВПЗ

$$\begin{aligned} K_1 \frac{dE_{1x,1}}{dt} &= K_3 E_{3z,1} E_{2x,1}, \quad K_1 \frac{dE_{1y,1}}{dt} = K_3 E_{3z,1} E_{2y,1}, \\ C_{2,m} \frac{d^2 E_{3z,m}}{dt^2} + C_{1,m} \frac{dE_{3z,m}}{dt} + D_{3,m} E_{3z,m} &= C_{3,m} (E_{1x,1} E_{2x,1}^* + E_{1y,1} E_{2y,1}^*). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Полученная система (3.15) описывает в приближении слабого сигнала волновые процессы, протекающие в исследуемом плазменно-пучковом СЛСЭ с винтовым РЭП. Благодаря плазменно-пучковой неустойчивости дисперсионное уравнение для волны пространственного заряда имеет комплексные корни  $\omega'_{3,m} = m \cdot (\omega_{3,1} + i\delta\omega)$ . Поэтому при подстановке в дисперсионную функцию  $D_{3,m}$  (3.13) действительных частот  $\omega_{3,m} = m \cdot \omega_{3,1}$  и действительных волновых чисел  $k_{3,m}$  (действительные составляющие комплексных решений) дисперсионная функция не будет равна нулю  $D_{3,m} \neq 0$ . Также, проведенные численные оценки третьего уравнения системы (3.15) показывают, что слагаемые  $C_{2,m} d^2 E_{3z,m} / dt^2$  и  $D_{3,m} E_{3z,m}$  соизмеримы. Это обусловлено тем, что в исследуемой системе волна пространственного заряда усиливается благодаря плазменно-пучковой неустойчивости. Таким образом, в третьем уравнении системы (3.15) необходимо учитывать слагаемое со второй производной.

Если рассмотреть третье уравнение системы (3.15) в случае отсутствия параметрического резонанса ( $C_{3,m} (E_{1x} E_{2x}^* + E_{1y} E_{2y}^*) = 0$ ), то из полученного линейного дифференциального уравнения легко можно найти инкремент плазменно-пучковой неустойчивости:  $(-D_{3,m} / C_{2,m})^{1/2}$  (здесь учитывается, что  $C_{2,m} d^2 E_{3z,m} / dt^2$ ,  $D_{3,m} E_{3z,m} \gg C_{1,m} dE_{3z,m} / dt$ ).

В случае максимального инкремента плазменно-пучковой неустойчивости ( $k_{3,1}\bar{v}_{zb} = \omega_p$ ), благодаря которой нарастает волна пространственного заряда получим аналитическую зависимость инкремента плазменно-пучковой неустойчивости от угла влета электронного пучка  $\beta$ . Используя подход, описанный например в [74–82], получаем выражение для максимального инкремента плазменно-пучковой неустойчивости в случае неосевого влета релятивистского электронного пучка

$$\delta\omega(\beta) \approx \sqrt{3} \left( \frac{\omega_b^2 \omega_p}{16\gamma_b \gamma_{b\parallel}^2} \right)^{1/3} = \sqrt{3} \left( \frac{\omega_b^2 \omega_p}{16\gamma_b} \right)^{1/3} \cdot \left( 1 - \frac{v_b^2 \cos^2 \beta}{c^2} \right)^{1/3} \quad (3.16)$$

где  $\gamma_{b\parallel} = (1 - v_{bz}^2 / c^2)^{-1/2} = (1 - v_b^2 \cos^2 \beta / c^2)^{-1/2}$  — продольный релятивистский фактор. Из полученного выражения следует, что увеличение инкремента нарастания  $\delta\omega(\beta)$  с увеличением угла  $\beta$  связано с уменьшением продольной энергии электронов  $m_e c^2 \gamma_{b\parallel}$ . Нужно отметить, что этот эффект является релятивистским. Отметим, что при угле влета  $\beta = 0^\circ$  релятивистского электронного пучка, выражение (3.16) переходит в известное соотношение для максимального инкремента плазменно-пучковой неустойчивости в случае прямолинейного РЭП [74–82]. Также из выражения (3.16) следует, что при увеличении угла влета с  $\beta = 0^\circ$  до  $\beta = 30^\circ$  инкремент плазменно-пучковой неустойчивости увеличивается на 20%. Так как инкремент плазменно-пучковой неустойчивости много больше параметрического, то даже незначительное увеличение инкремента  $\delta\omega(\beta)$  приводит к существенному увеличению коэффициентов усиления электромагнитной волны сигнала в плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ.

Используя квадратично-нелинейную систему (3.15) рассмотрим трехволновое параметрическое взаимодействие между первыми гармониками

волн сигнала, накачки и ВПЗ более детально. Если бы в рассматриваемом плазменно-пучковом супергетеродинном лазере на свободных электронах отсутствовало нарастание волны ВПЗ вследствие плазменно-пучковой неустойчивости, то нарастание волны сигнала обеспечивалось бы только трехволновым параметрическим резонансом. Инкремент нарастания в этом случае можно легко определить из системы (3.15) считая, что  $C_{2,m}d^2E_{3z,m}/dt^2=0$ ,  $D_{3m}E_{3z,m}=0$ . Таким образом, полагая, что решение системы (3.15) имеет вид  $E_{1x,1}, E_{1y,1}, E_{3z,1} \sim \exp(\alpha_{par}t)$ , находим искомый инкремент

$$\alpha_{par} = \sqrt{\frac{K_3 C_{3,1} (1 + \eta_1 \eta_2)}{K_1 C_{1,1}}} |E_{2x,1}|^2. \quad (3.17)$$

Из анализа выражения (3.17) следует, что если циркулярно-поляризованные электромагнитные волны накачки и сигнала будут иметь разные направления вращения вектора напряженности электрического поля, то есть  $\eta_1 \eta_2 = -1$  [32–33], то параметрический инкремент нарастания будет равен нулю  $\alpha_{par} \sim (1 + \eta_1 \eta_2)^{0.5} = 0$ , и параметрическая неустойчивость реализовываться не будет. Таким образом, для осуществления параметрического резонанса необходимо, чтобы электромагнитные волны сигнала и накачки имели одинаковое направление вращения вектора напряженности электрического поля  $\eta_1 \eta_2 = +1$ . То есть вращение вектора напряженности электрического поля обеих волн должно быть направлено или по часовой стрелке, если смотреть вдоль вектора напряженности продольного магнитного поля ( $\eta_1 = -1$ ,  $\eta_2 = -1$ ) или против часовой стрелки ( $\eta_1 = +1$ ,  $\eta_2 = +1$ ). Данный вывод совпадает с выводами общей теории по отношению к резонансной поляризации [111].

Следует отметить, что результирующее усиление волн в плазменно-пучковых супергетеродинных лазерах на свободных электронах определяется как усилением за счет плазменно-пучковой неустойчивости, так и усилением за счет трехволнового параметрического резонанса. При этом вклад в усиление плазменно-пучковой неустойчивости является определяющим, так как инкремент плазменно-пучковой неустойчивости  $\delta\omega(\beta)$  много больше инкремента параметрической неустойчивости  $\alpha_{par}$ . Так же хотелось отметить, что значение инкремента параметрической неустойчивости не должно быть слишком малым, т.к. в этом случае переноса энергии с ВПЗ на волну сигнала осуществляться не будет.

### 3.4. Уровни и механизмы насыщения

Проведем анализ уровней и механизмов насыщения в плазменно-пучковом СЛСЭ доплерotronного типа с винтовым релятивистским электронным пучком. Для этого проанализируем систему кубически-нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (3.10) и соотношение (3.14) с помощью стандартных численных методов. Для этого будем использовать стандартные численные методы. Параметры системы представлены в табл. 3.1.

**Монохроматический режим взаимодействия.** Проанализируем динамику волн для различных режимов работы (режимы *A*, *B*, *C* и *D* (рис. 3.2)) при угле влета РЭП  $\beta = 30^\circ$ . На рис. 3.3 представлены зависимости амплитуд первых гармоник напряженности электрического поля волны сигнала  $E_1 = \sqrt{|E_{1x}|^2 + |E_{1y}|^2}$  от нормированного времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  для четырех режимов работы *A*, *B*, *C*, *D*. В качестве нормировочного множителя  $\delta\omega_0$  для нормированного времени  $\tau$  взят инкремент нарастания плазменно-пучковой неустойчивости при угле влета пучка  $\beta = 0^\circ$  [5, 76–77]. Отметим, что в диссертационной работе рассматривается случай, когда

энергия пучка, а значит и модуль его скорости остаются постоянным. Поэтому при изменении угла влета  $\beta$  меняется его продольная скорость  $v_{bz}$ , а значит и инкремент нарастания плазменно-пучковой неустойчивости также изменяется. Поэтому для того чтобы корректно сравнивать динамику волн при разных углах влета  $\beta$  и в разных режимах работы в качестве нормировочного множителя берем один и тот же множитель: инкремент нарастания плазменно-пучковой неустойчивости при угле влета пучка  $\beta = 0^\circ$ .

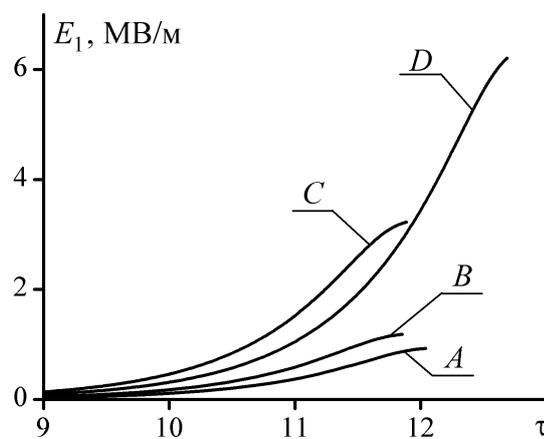


Рис. 3.3. Зависимости амплитуды 1-й гармоники напряженности электрического поля сигнала  $E_1$  от нормированного времени  $\tau$

На рис. 3.3 кривая  $A$  соответствует режиму  $A$  (рис. 3.2), кривая  $B$  — режиму взаимодействия  $B$ , кривая  $C$  — режиму взаимодействия  $C$ , кривая  $D$  — режиму взаимодействия  $D$ . Из рис. 3.3 следует, что максимальный уровень напряженности электрического поля сигнала достигается в случае режима  $D$ , хотя темп усиления амплитуды сигнала на начальном этапе взаимодействия в этом режиме меньше, чем в режиме  $C$ . При этом следует отметить, что для всех режимов, представленных на рис. 3.3, инкремент плазменно-пучковой неустойчивости имеет одно и то же значение, так как угол влета ( $\beta = 30^\circ$ ) при расчетах кривых рис. 3.3 не менялся. Параметрический инкремент нарастания для режимов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  — разный. Именно параметрическое взаимодействие определяет различную

динамику волны сигнала для различных режимов, которая представлена на рис. 3.3. Также отметим, что в режиме  $D$  в области насыщения напряженность электрического поля сигнала достигает значения  $\sim 6$  МВ/м. Длина волны сигнала в вакууме для этого режима  $\lambda_1 = 2\pi c / \omega_1 \approx 1,8$  мм. Таким образом, в режиме  $D$  плазменно-пучковый СЛСЭ может работать как мощный источник электромагнитного излучения в миллиметровом диапазоне длин волн. Отметим, что ранее в рамках кубически-нелинейного приближения был изучен в [33] только один режим работы плазменно-пучкового СЛСЭ доплертронного типа, в котором принимает участие право поляризованная электромагнитная волна (на рис. 3.2 кривая 1, точка  $A$ ) при угле влета электронного пучка равного нулю  $\beta = 0^\circ$ .

Для того чтобы выяснить механизм насыщения сигнала в исследуемом приборе рассмотрим рис. 3.4 и 3.5. На рис. 3.4 представлена зависимость амплитуды первой гармоники напряженности электрического поля ВПЗ  $E_{3z,1}$  от нормированного времени  $\tau$  для различных режимов работы (режимы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  (рис. 3.2)). На рис. 3.5 изображена зависимость амплитуды первой гармоники концентрации плазмы  $n_{p3}$ , которая нормирована на постоянную составляющую  $n_{p0}$ , от нормированного времени  $\tau$  для режимов работы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Сравнивая эти рисунки, видим, что зависимости напряженности электрического поля ВПЗ  $E_{3z,1}$  и нормированной амплитуды первой гармоники концентрации плазмы  $n_{p3,1}/n_{p0}$  подобны, коррелируют друг с другом для всех режимов. Это значит, что динамику и уровень насыщения напряженности электрического поля ВПЗ определяют электроны плазмы. Электроны пучка вносят незначительный вклад в динамику напряженности электрического поля ВПЗ  $E_{3z,1}$ . Из рис. 3.4 и 3.5 также следует, что уровни насыщения для волны ВПЗ для всех режимов имеют одно и то же значение. Напряженность электрического поля ВПЗ  $E_{3z,1}$  при насыщении достигает достаточно высоких значений  $\sim 12$  МВ/м. Это дает основание утверждать,

что при насыщении электронный пучок, имеющий кинетическую энергию 0,5 МэВ, захватывается плазменной волной. Во всех четырех режимах работы плазменно-пучкового СЛСЭ с доплертронной накачкой и винтовым электронным пучком, энергия поступательного движения электронов пучка одна и та же. Поэтому и уровень напряженности электрического поля, при котором происходит насыщение и захват электронного пучка, имеет одно и то же значение.

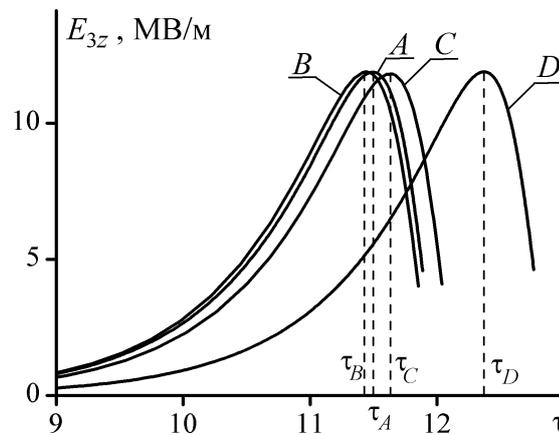


Рис. 3.4. Зависимости амплитуды 1-й гармоники напряженности электрического поля ВПЗ  $E_{3z,1}$  от нормированного времени  $\tau$

Отметим, что в режиме  $D$  темп усиления волны пространственного заряда является наименьшим среди всех четырех режимов (см. рис. 3.4). Такая динамика ВПЗ в режиме  $D$  объясняется особенностями параметрического взаимодействия. А именно, различными значениями коэффициента  $C_{3,1}$  в последнем уравнении системы (3.10) для различных режимов работы. Поэтому уровень напряженности электрического поля ВПЗ, при котором происходит насыщение, достигается позже (уровень напряженности электрического поля ВПЗ, при котором происходит насыщение для всех режимов одинаков (рис. 3.4)). Таким образом, время насыщения в режиме  $D$   $\tau_D$  оказывается большим, чем времена насыщения для режимов  $A$ ,  $B$  и  $C$  ( $\tau_A$ ,  $\tau_B$  и  $\tau_C$  соответственно, см. рис. 3.4 и 3.5).

Поэтому нарастание волны сигнала для режима  $D$  прекращается позже, чем для режимов  $A$ ,  $B$  и  $C$  (рис. 3.3). Из-за этого уровень насыщения сигнала в режиме  $D$  оказывается наибольшим. Отметим, механизм насыщения, связанный с захватом электронов пучка плазменными волнами, достаточно часто встречается в различных устройствах плазменной электроники [74–82].

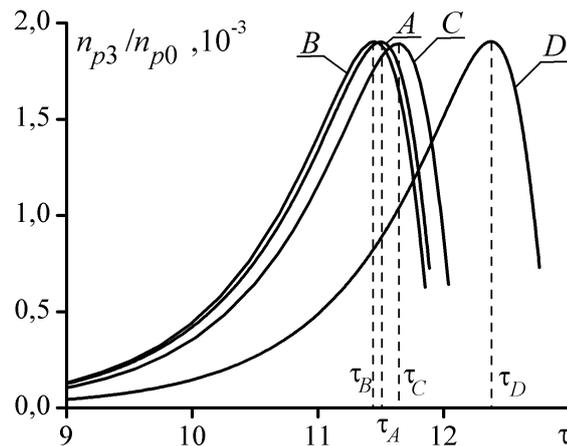


Рис. 3.5. Зависимости нормированной амплитуды 1-й гармоники концентрации плазмы  $n_{p3,1}$  от нормированного времени  $\tau$

Выясним, как меняются уровни насыщения электромагнитной волны сигнала в зависимости от угла влета электронного пучка  $\beta$ . На рис. 3.6 представлены зависимости амплитуды первой гармоники напряженности электрического поля волны сигнала от нормированного времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  при различных углах влета пучка  $\beta$  по отношению к магнитному полю для режима взаимодействия  $D$ . Кривая 1 соответствует углу влета  $\beta = 0^\circ$ , кривая 2 соответствует углу влета  $\beta = 10^\circ$ , кривая 3 соответствует  $\beta = 20^\circ$ , кривая 4 соответствует  $\beta = 30^\circ$ . Из рис. 3.6 следует, что на начальном этапе взаимодействия темпы усиления волны сигнала увеличиваются с увеличением угла влета  $\beta$ . Такое увеличение темпов усиления волны сигнала связано, прежде всего, с изменением инкремента нарастания плазменно-пучковой неустойчивости  $\delta\omega$  так как дисперсионная функция для ВПЗ  $D_{3,1}$

зависит от продольной скорости пучка  $v_{bz}$ . В случае неосевого влета продольная скорость пучка  $v_{bz}$  уменьшается (рассматриваем случай, когда энергия пучка  $\gamma_b$  остается постоянной). Это приводит к увеличению инкремента плазменно-пучковой неустойчивости  $\delta\omega$  и, как следствие, к увеличению темпов усиления электромагнитной волны сигнала. Таким образом, насыщение волны сигнала при угле влета  $\beta = 30^\circ$  происходит раньше по сравнению с углом  $\beta = 0^\circ$ , что и демонстрирует рис. 3.6. Также из рис. 3.6 следует, что с увеличением угла влета пучка  $\beta$  уровень насыщения волны сигнала незначительно повышается. Таким образом, было продемонстрировано (рис. 3.6), что плазменно-пучковые СЛСЭ доплерционного типа, использующие винтовые релятивистские электронные пучки, позволяют усиливать мощные когерентные электромагнитные сигналы в миллиметровом диапазоне длин волн.

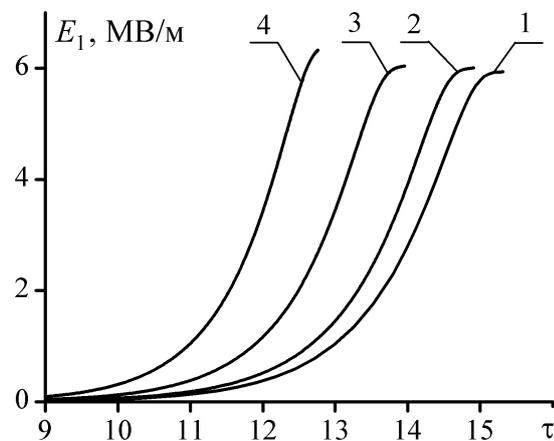


Рис. 3.6. Зависимости амплитуды 1-й гармоники напряженности электрического поля сигнала  $E_1$  от нормированного времени  $\tau$

**Мультигармонический анализ динамики волн.** Как говорилось ранее в исследуемом плазменно-пучковом СЛСЭ с винтовым РЭП между высшими гармониками ВПЗ возникают множественные резонансные взаимодействия [5, 32–33], благодаря чему происходит генерация и усиление высших гармоник. Условие таких взаимодействий описывается

соотношениями (3.3)–(3.4). Выясним, как влияют множественные параметрические резонансы между гармониками ВПЗ на уровне насыщения высокочастотной электромагнитной волны сигнала в режиме максимального усиления. Используя стандартные численные методы, проанализируем систему уравнений (3.10) и (3.14). При численном решении будем учитывать первые десять гармоник волны пространственного заряда ( $N=10$ ). Параметры системы приведены в таб. 3.1.

На рис. 3.7 изображены зависимости амплитуды первой гармоники волны сигнала  $E_{1,1} = \sqrt{|E_{1x,1}|^2 + |E_{1y,1}|^2}$  от нормированного времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$ . Расчеты проведены для режима взаимодействия  $D$  (рис. 3.2) при угле влета  $\beta = 30^\circ$ . На этом рисунке кривая 1 представляет результат расчета, в котором учтено взаимодействие только первых гармоник волн, кривая 2 получена в результате расчетов, в которых учтено влияние множественных трехволновых резонансных взаимодействий первых десяти гармоник ВПЗ.

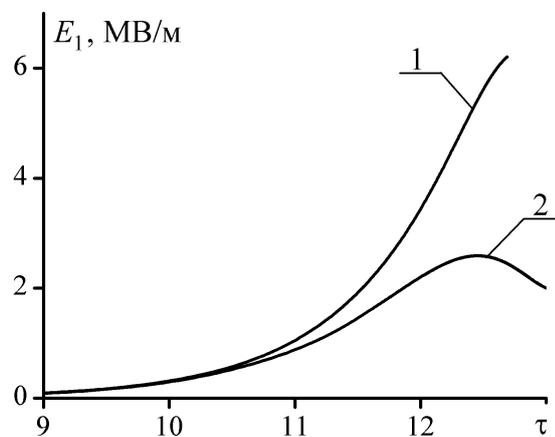


Рис. 3.7 Зависимости амплитуды первой гармоники волны сигнала  $E_{1,1}$  от нормированного времени  $\tau$  для режима взаимодействия  $D$

Сравнивая кривые 1 и 2 на рис. 3.7 видим, что влияние высших гармоник ВПЗ приводит к уменьшению уровня насыщения более, чем в два раза (кривая 2). Это значит, что множественные резонансные взаимодействия между гармониками ВПЗ существенно влияют на нелинейные процессы в

плазменно-пучковых СЛСЭ доплертронного типа с винтовыми электронными пучками. Аналогичное влияние множественных резонансных взаимодействий на уровень насыщения имеет место и для других режимов работы исследуемого типа плазменно-пучкового СЛСЭ ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ). Поэтому учет таких взаимодействий для получения более качественного анализа динамики волн в плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ является необходимым условием. Далее все расчеты проводятся с учетом множественных взаимодействий между высшими гармониками ВПЗ.

На рис. 3.8 представлены зависимости амплитуды первой гармоники напряженности электрического поля волны сигнала  $E_{1,1}$  от нормированного времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  для четырех режимов работы ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ) при угле влета электронного пучка  $\beta = 30^\circ$ .

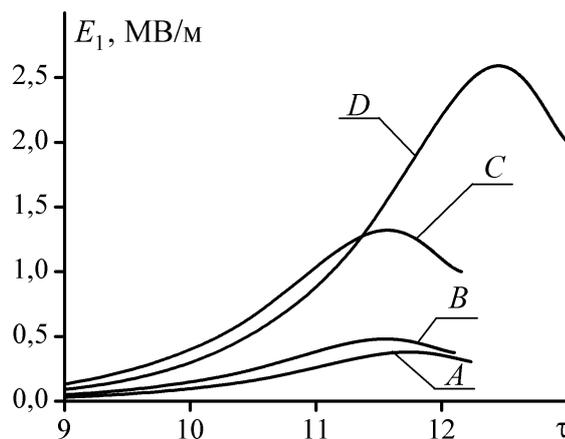


Рис. 3.8. Зависимость амплитуды 1-й гармоники напряженности электрического поля сигнала  $E_1$  от нормированного времени  $\tau$ ,  $\beta = 30^\circ$

На рис. 3.8 кривая  $A$  соответствует режиму  $A$  (рис. 3.2), кривая  $B$  – режиму взаимодействия  $B$ , кривая  $C$  – режиму взаимодействия  $C$ , кривая  $D$  – режиму взаимодействия  $D$ . Из рис. 3.8 следует, что максимальный уровень напряженности электрического поля сигнала достигается в случае режима  $D$ , хотя темп усиления амплитуды сигнала на начальном этапе взаимодействия в этом режиме меньше, чем в режиме  $C$ . Проанализировав уровни насыщения

сигнальной волны для разных режимов взаимодействия в исследуемой модели плазменно-пучкового супергетеродинного ЛСЭ с винтовым РЭП (рис. 3.8) можно легко определить максимальную выходную мощность электромагнитной волны сигнала  $P = 16$  МВт и максимальный электронный коэффициент полезного действия, который достигает  $\sim 30\%$ . При этом учтем, что параметры пучка достаточно умеренные для такого класса приборов ( $n_b = 1,25 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $\gamma_b = 2$ , сила тока 100 А). Известно, что для повышения выходной мощности волны сигнала, можно использовать пучки с большими токами. Таким образом, в режиме  $D$  плазменно-пучковый супергетеродинный ЛСЭ доплертронного типа может работать как мощный усилитель электромагнитного излучения в миллиметровом диапазоне длин волн.

Выясним, как меняются уровни насыщения электромагнитной волны сигнала в зависимости от угла влета электронного пучка  $\beta$ . На рис. 3.9 представлены зависимости амплитуды первой гармоники напряженности электрического поля волны сигнала от нормированного времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  при различных углах влета пучка  $\beta$  по отношению к магнитному полю для режима взаимодействия  $D$ .

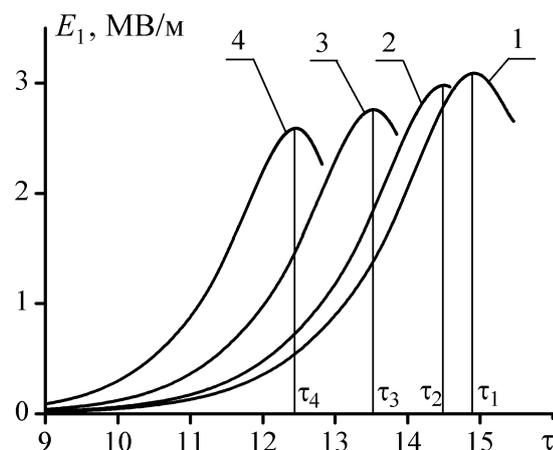


Рис. 3.9. Зависимости амплитуды 1-й гармоники напряженности электрического поля волны сигнала  $E_1$  от нормированного времени  $\tau$

Кривая 1 соответствует углу влета  $\beta = 0^\circ$ , кривая 2 соответствует углу влета  $\beta = 10^\circ$ , кривая 3 соответствует  $\beta = 20^\circ$ , кривая 4 соответствует  $\beta = 30^\circ$ . Из рис. 3.9 следует, что на начальном этапе темп усиления волны сигнала увеличивается с увеличением угла влета  $\beta$ . Как говорилось раньше это связано с увеличением инкремента нарастания (3.16) при увеличении угла влета  $\beta$ . С другой стороны, увеличение инкремента нарастания также приводит к увеличению темпа усиления напряженности электрического поля ВПЗ, что приводит к захвату электронов пучка. Также рис. 3.9 показывает, что уровень насыщения в режиме взаимодействия  $D$  при увеличении угла  $\beta$  незначительно понижается. При этом время насыщения также уменьшается ( $\tau_4 < \tau_3 < \tau_2 < \tau_1$ ). Отметим, что в монохроматическом режиме рис. 3.6 уровень насыщения незначительно повышается. Таким образом, множественные параметрические резонансы между высшими гармониками ВПЗ качественно влияют на динамику электромагнитной волны сигнала и их учет необходим при построении кубически нелинейной теории плазменн-пучкового СЛСЭ с доплертоновой накачкой и винтовым РЭП.

Проведем анализ механизмов насыщения в данной системе с учетом множественных параметрических резонансов. Для этого рассмотрим поведение амплитуды первой гармоники концентрации плазмы, нормированной на постоянную составляющую концентрации электронов плазмы  $n_{p3,1n} = n_{p3,1} / n_{p0}$  (рис. 3.10, кривая 1) и амплитуды первой гармоники концентрации пучка, нормированной на постоянную составляющую концентрации электронов пучка  $n_{b3,1n} = n_{b3,1} / n_{b0}$  (рис. 3.10, кривая 2) от нормированного времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  в режиме взаимодействия  $D$  при угле влета пучка  $\beta = 30^\circ$ . На начальном этапе имеет место экспоненциальное нарастание обеих величин. Затем происходит их нелинейная стабилизация. При этом амплитуда 1-й гармоники концентрации плазмы совершает регулярные колебания. Эти колебания обусловлены захватом электронов пучка полем плазменной волны. Захват становится возможным благодаря, с

одной стороны, снижению скорости пучка электронов до скорости близкой к фазовой скорости плазменной волны, а с другой стороны, существенному увеличению интенсивности плазменной волны. В результате захвата электроны пучка формируются в сгустки, которые колеблются в пределах квазипотенциальной ямы плазменной волны. Эти сгустки то отдают плазменной волне энергию, то отбирают обратно. Характерной особенностью этого процесса — за одно колебание плазменной волны сгустки несколько раз сталкиваются с краями квазипотенциальной ямы. Это приводит к тому, что осцилляции нормированной амплитуды  $n_{b3,1n}$  (рис. 3.10, кривая 2) происходят в несколько раз чаще осцилляций нормированной амплитуды плазменной волны  $n_{p3,1n}$  (рис. 3.10, кривая 1). При этом уровень модуляции электронного пучка оказывается приблизительно равным единице, то есть в данном случае имеет место полная модуляция пучка.

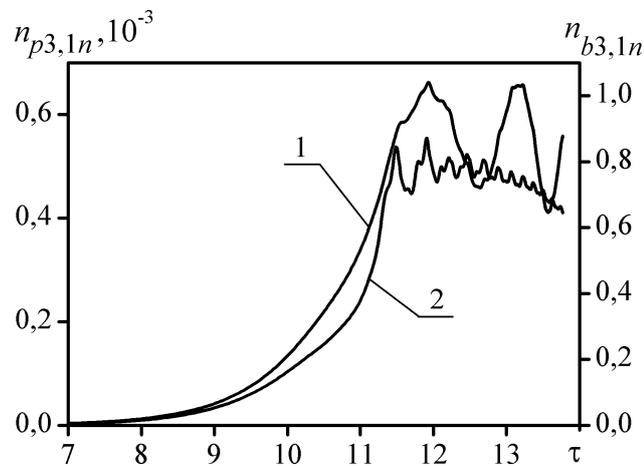


Рис. 3.10. Зависимости нормированных амплитуд 1-х гармоник концентраций электронов плазмы  $n_{p3,1n}$  и пучка  $n_{b3,1n}$  от нормированного времени  $\tau$ .

Расчеты показывают, что высшие гармоники (в расчетах учитывалось первых 10 гармоник волны ВПЗ) концентрации пучка имеют такой же характер осцилляций как и первая гармоника, их амплитуда колебаний соизмерима с амплитудой колебаний первой гармоники. Так же было получено, что в монохроматическом режиме ВПЗ (в расчетах учитывалась

только первая гармоника волны ВПЗ) амплитуда концентрации электронов пучка не насыщалась. Таким образом, учет взаимодействия высших гармоник ВПЗ существенно влияет на динамику волн в плазменно-пучковых СЛСЭ доплерotronного типа с винтовыми пучками. Аналогичные исследования «чисто» плазменно-пучковых систем [33, 36, 73–85] показывают, что насыщение плазменно-пучковой неустойчивости обусловлено именно процессами, описанными выше. Поэтому можно утверждать, что насыщение усиления в плазменно-пучковом СЛСЭ с доплерotronной накачкой и винтовым РЭП происходит, прежде всего, благодаря насыщению самой плазменно-пучковой неустойчивости путем захвата электронного пучка плазменной волной.

### 3.5. Выводы к разделу 3

1. Построена самосогласованная мультигармоническая кубически–нелинейная теория плазменно-пучкового супергетеродинного лазера на свободных электронах доплерotronного типа с винтовым релятивистским электронным пучком. Получена кубически-нелинейная система дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд гармоник электромагнитных волн с учетом множественных параметрических резонансов.

2. Показано, что с увеличением угла влета  $\beta$  электронного пучка коэффициенты усиления электромагнитного сигнала увеличиваются. Такое увеличение определяется возрастанием инкремента нарастания плазменно-пучковой неустойчивости при увеличении угла  $\beta$ , что связано с уменьшением продольной энергии электронов. Выяснено, что при использовании винтовых РЭП увеличение инкремента плазменно-пучковой неустойчивости наблюдается во всех режимах трехволнового параметрического взаимодействия волн.

3. Определены уровни насыщения для четырех режимов работы плазменно-пучкового супергетеродинного ЛСЭ с доплертронной накачкой и винтовым электронным пучком. Выяснено, что режим взаимодействия, в котором участвует необыкновенная циркулярно-поляризованная волна сигнала обладает наибольшими значениями КПД ( $\sim 30\%$ ) и выходной мощности ( $P = 16$  МВт) электромагнитной волны сигнала при умеренных параметрах пучка (концентрация электронов пучка  $n_b = 1,25 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , релятивистский фактор  $\gamma_b = 2$ , сила тока 100 А).

4. Произведен учет множественных параметрических резонансных взаимодействий гармоник волны пространственного заряда в плазменно-пучковом супергетеродинном ЛСЭ с доплертронной накачкой при неосевом влете релятивистского электронного пучка. Выяснено, что такие резонансные взаимодействия играют существенную роль, в частности, приводят к уменьшению уровня насыщения сигнала в два и более раз. Определено, что насыщение в исследуемом устройстве во всех режимах происходит из-за захвата электронов пучка плазменными волнами.

## РАЗДЕЛ 4

### НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В ПЛАЗМЕННО-ПУЧКОВЫХ Н-УБИТРОННЫХ СУПЕРГЕТЕРОДИННЫХ ЛАЗЕРАХ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ С ВИНТОВЫМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ ПУЧКАМИ

В данном разделе построена мультигармоническая кубически–нелинейная теория плазменно-пучкового супергетеродинного лазера на свободных электронах Н-убитронного типа с винтовым релятивистским электронном пучком. В отличие от доплертронного типа в Н-убитронном плазменно-пучковом СЛСЭ также участвуют в трехволновом параметрическом резонансе циклотронные электромагнитные волны сигнала. В результате в системе одновременно имеет место как плазменно-пучковая, так и циклотронная неустойчивость. Найден оптимальный угол влета релятивистского электронного пучка при максимальном уровне насыщения электромагнитной волны сигнала. Данный максимум определяется совпадением шага винтовой траектории пучка с периодом ондуляции магнитного поля накачки, в результате чего имеет место эффективное увеличение интенсивности поля накачки. Основные научные результаты раздела опубликованы в работах [35, 39–40, 42].

#### 4.1. Модель плазменно-пучкового супергетеродинного ЛСЭ Н-убитронного типа с винтовым РЕП

На рис. 4.1 представлена схема плазменно-пучкового супергетеродинного лазера на свободных электронах с Н-убитронной накачкой и неосевой инжекцией электронного пучка. Плазма 1 с ленгмюровской частотой  $\omega_p$  помещена во внешнее однородное магнитное поле с индукцией  $B_0$ . Через замагниченную плазменную среду проходит

винтовой релятивистский электронный пучок 2 с ленгмюровской частотой  $\omega_b$  ( $\omega_b \ll \omega_p$ ). Вектор скорости электронов пучка  $\mathbf{v}_b$  направлен под углом  $\beta$  по отношению к вектору индукции фокусирующего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  (рис. 4.1). Под действием продольного магнитного поля электроны плазменно-пучковой системы вращаются с частотой  $\omega_H$ . Считаем, что  $\omega_b \ll \omega_H$ . В качестве накачки используем реверсивное магнитное поле ондулятора 3 с периодом ондуляции  $\Lambda = 2\pi/k_{2,1}$ . На вход системы подаем монохроматическую высокочастотную электромагнитную волну сигнала с частотой  $\omega_{1,1}$  и волновым числом  $k_{1,1}$ . В результате резонансного взаимодействия между первой гармоникой волны сигнала  $\{\omega_{1,1}, k_{1,1}\}$  и монохроматическим полем ондулятора  $\{k_{2,1}\}$  в плазменно-пучковой среде возбуждается первая гармоника волны пространственного заряда с частотой  $\omega_{3,1}$  и волновым числом  $k_{3,1}$ .

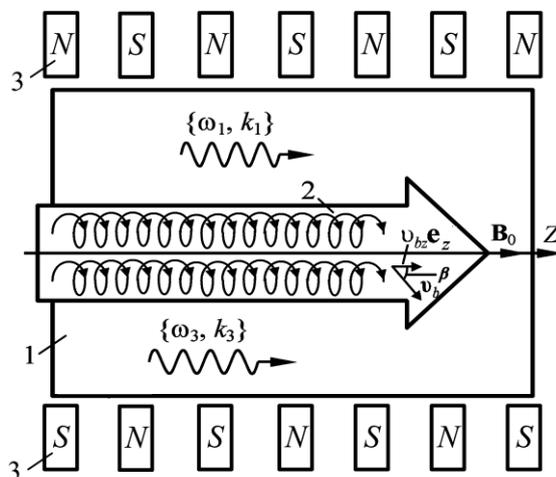


Рис. 4.1. Схема плазменно-пучкового СЛСЭ Н-убитронного типа

Нелинейная связь между первыми гармониками волн сигнала, ВПЗ и магнитным полем ондулятора обеспечивается трехволновым параметрическим резонансом, условия которого записываются в виде:

$$\omega_{3,1} = \omega_{1,1}, \quad k_{3,1} = k_{1,1} + k_{2,1}. \quad (4.1)$$

В результате того, что электроны пучка вращаются в продольном фокусирующем магнитном поле с циклотронной частотой  $\omega_H/\gamma_b$ , то в системе возбуждаются дополнительные колебания. Это приводит к дополнительным параметрическим резонансам, условия которых имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_{3,1} &= (\omega_{1,1} \pm \omega_H/\gamma_b) \mp \omega_H/\gamma_b, \quad \omega_{3,1} = (\omega_{1,1} \pm 2\omega_H/\gamma_b) \mp 2\omega_H/\gamma_b, \\ \omega_{1,1} &= (\omega_{3,1} \pm \omega_H/\gamma_b) \mp \omega_H/\gamma_b, \quad \omega_{1,1} = (\omega_{3,1} \pm 2\omega_H/\gamma_b) \mp 2\omega_H/\gamma_b, \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

Также в исследуемом плазменно-пучковом СЛСЭ имеют место мультигармонические взаимодействия высших гармоник волны пространственного заряда. Это связано с тем, что волна пространственного заряда, которая возрастает вследствие плазменно-пучковой неустойчивости, характеризуется квазилинейной дисперсионной зависимостью. Заметим, что связь между первой гармоникой действительной частотой  $\omega_{3,1}$  и действительным волновым числом  $k_{3,1}$  имеет вид следующий вид

$$\omega_{3,1} \approx k_{3,1} \cdot \bar{v}_{bz}.$$

Следовательно, если действительное волновое число будет в  $m$  раз больше действительного волнового числа первой гармоники, то и частота (действительная часть комплексной частоты) станет в  $m$  раз больше действительной частоты первой гармоники. А это значит, что будет выполняться условие

$$\omega_{3,m} = \omega_{3,1} \cdot m \approx k_{3,1} \cdot m \cdot \bar{v}_{bz} = k_{3,m} \cdot \bar{v}_{bz}.$$

В результате получаем линейную связь между высшими гармониками ВПЗ. Таким образом, запишем условия множественных параметрических резонансов для гармоник ВПЗ

$$\omega_{3,m_1} = \omega_{3,m_2} + \omega_{3,m_3}, \quad k_{3,m_1} = k_{3,m_2} + k_{3,m_3}, \quad (4.3)$$

где  $m_1, m_2, m_3$  — целые числа. Как видно из этих соотношений, условие множественных параметрических резонансов для ВПЗ можно записать в виде

$$m_1 = m_2 + m_3. \quad (4.4)$$

Таким образом, условие (4.4) может быть выполнено большим количеством способов:  $3+1=4$ ,  $1+8=9$  и т.п. Отметим, что в плазменно-пучковых системах при таком типе взаимодействий каждая гармоника будет усиливаться за счет плазменно-пучковой неустойчивости.

Напомним, что в исследуемом плазменно-пучковом СЛСЭ используется эффект супергетеродинного усиления [5, 14–17]. Суть, которого состоит, в усилении одной из трех волн, которые участвуют в параметрически-резонансных условиях (4.1)–(4.2) за счет дополнительного механизма. При этом, одной из особенностей Н-убитронного плазменно-пучкового СЛСЭ является то, что в качестве дополнительного механизма усиления здесь одновременно могут выступать два типа неустойчивостей: плазменно-пучковая и циклотронная [5, 74–82].

#### **4.2. Кубически-нелинейные укороченные уравнения для комплексных амплитуд взаимодействующих волн**

Формально Н-убитронный тип плазменно-пучкового супергетеродинного ЛСЭ от доплертронного отличается типом накачки.

Поэтому алгоритм нахождения кубически-нелинейных укороченных уравнений для комплексных амплитуд волн данного устройства будет таким, как и в подразделе 3.2. В связи с этим в данном подразделе буду ссылаться на ряд соотношений, которые получены в подразделах 2.2, 2.3 и 3.2.

В плазменно-пучковом СЛСЭ с Н-убитронной накачкой и винтовым РЭП электрические  $\mathbf{E}$  и магнитные  $\mathbf{B}$  компоненты переменных полей волны сигнала (индекс 1) и ВПЗ (индекс 3) записываем в мультигармоническом виде, а поле накачки (индекс 2) в монохроматическом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \sum_{m=1}^N [(E_{1x,m} \mathbf{e}_x + E_{1y,m} \mathbf{e}_y) e^{ip_{1,m}} + c.c.], \quad \mathbf{E}_3 = \sum_{m=1}^N [(E_{3z,m} e^{ip_{3,m}} + c.c.) \mathbf{e}_z], \\ \mathbf{B}_1 &= \sum_{m=1}^N [(B_{1x,m} \mathbf{e}_x + B_{1y,m} \mathbf{e}_y) e^{ip_{1,m}} + c.c.], \quad \mathbf{B}_2 = (B_{2x,1} \mathbf{e}_x + B_{2y,1} \mathbf{e}_y) e^{ip_{2,1}} + c.c. \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $p_{1,m} = m\omega_1 t + k_{1,m} z$ ,  $p_{3,m} = m\omega_3 t + k_{3,m} z$  — фазы  $m$ -х гармоник соответственно, волны сигнала и ВПЗ;

$p_{2,1} = -k_{2,1} z$  — фаза монохроматического магнитного поля накачки;

$N$  — количество гармоник, учитывающееся при решении задачи.

Для данного типа плазменно-пучкового СЛСЭ напряженность электрического поля накачки равно нулю  $\mathbf{E}_2 = 0$ . Таким образом, электрические и магнитные поля в рабочем объеме исследуемой модели записываются в следующем виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_0. \quad (4.6)$$

В качестве исходных уравнений используются релятивистское квазигидродинамическое уравнение (2.10), уравнение непрерывности (2.11) и уравнения Максвелла (2.12). При этом учитываем, что для электронов пучка и плазмы выполняются условия (2.3). Также считая, что в исследуемой

системе все величины зависят от координаты  $z$  и времени  $t$  уравнения (2.10)–(2.12), можно представить в виде системы (2.14)–(2.17), (2.39), (3.9). Систему (2.14)–(2.17), (3.9) решают самосогласованно. Для этого весь алгоритм условно разбивается на три формально независимых этапа: 1) нахождение решений задачи движения (2.14)–(2.17); 2) решение задачи непрерывности (2.39); 3) решение полевой задачи (3.9). Для решения первых двух задач используется модернизированный метод усредненных характеристик, а для решения задачи возбуждения электромагнитных полей применяется метод медленноменяющихся амплитуд. При этом учитываются особенности трехволновых взаимодействий (4.1)–(4.2). Решения задачи движения и задачи непрерывности были найдены в подразделе 2.2.

Отметим, что в плазменно-пучковом СЛСЭ Н-убитронного типа с винтовым РЭП в резонансных условиях (4.1)–(4.2) могут принимать участие как высокочастотная необыкновенная, так и циклотронные быстрая и медленная электромагнитные волны. В случае взаимодействий, в которых участвует быстрая или медленная циклотронная электромагнитная волна сигнала имеет место циклотронный резонанс, условие которого

$$m\omega_{1,1} - k_{1,m}v_{bz} - \eta_1\omega_H / \gamma_b \approx 0. \quad (4.7)$$

В этом выражении,  $\eta_1 = +1$  соответствует медленной циклотронной волне,  $\eta_1 = -1$  — быстрой.

Условие (4.7) в соответствии с (2.32) является условием комбинационного резонанса. Это значит, что слагаемые с комбинационными фазами  $p_{1,m} - \eta_1 p_{0b}$  являются медленными и их следует учитывать в векторе медленных переменных в соответствии с (2.33). Поэтому из набора быстрых фаз (2.43) для случая взаимодействия с быстрой циклотронной электромагнитной волной следует убрать фазу  $p_{1,m} + p_{0b}$ , а в случае

взаимодействия с медленной циклотронной электромагнитной волной фазу  $p_{1,m} - p_{0b}$ .

Таким образом, для решения полевой задачи подставим решения для скорости (2.29) и концентрации (2.41) в систему (3.9), при этом учитываем особенности параметрически-резонансных взаимодействий (4.1)–(4.2) как с циклотронными, так и с высокочастотной необыкновенной электромагнитными волнами сигнала. В результате получаем для  $x$ - и  $y$ -компонент комплексных амплитуд  $m$ -х гармоник напряженностей электрических полей электромагнитной волны сигнала  $\{\omega_{1,m}, k_{1,m}\}$  и электронной волны пространственного заряда  $\{\omega_{3,m}, k_{3,m}\}$  систему дифференциальных уравнений в кубически-нелинейном приближении

$$\begin{aligned}
& K_{2,m} \frac{d^2 E_{1x,m}}{dt^2} + K_{1,m} \frac{dE_{1x,m}}{dt} + D_{1,m} E_{1x,m} = \\
& = M_{1x,m}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha) + F_{1x,m}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha), \\
& K_{2,m} \frac{d^2 E_{1y,m}}{dt^2} + K_{1,m} \frac{dE_{1y,m}}{dt} + D_{1,m} E_{1y,m} = \\
& = M_{1y,m}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha) + F_{1y,m}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha), \quad (4.8) \\
& C_{2,m} \frac{\partial^2 E_{3z,m}}{\partial t^2} + C_{1,m} \frac{\partial E_{3z,m}}{\partial t} + D_{3,m} E_{3z,m} = M_{3z,m}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha) + \\
& + C_{4,m} \left\langle \int E_z \left( \int E_z dp_3 \right) dp_3 \right\rangle_{p_{3,m}} + C_{5,m} \left\langle \left( \int E_z dp_3 \right)^2 \right\rangle_{p_{3,m}} + F_{3z,m}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha).
\end{aligned}$$

В этих уравнениях

$$D_{1,m} = \frac{i}{ct\omega_{1,1}} \left\{ k_{1,m}^2 c^2 - (m\omega_{1,1})^2 + \sum_{\alpha}^{b,p} \left[ \frac{\omega_{\alpha}^2}{\bar{\gamma}_{\alpha} (\Omega_{\alpha 1,m} + \eta_1 \omega_H)^2} \right] \times \right.$$

$$\times \left( \Omega_{\alpha 1, m} (\Omega_{\alpha 1, m} + \eta_1 \omega_H) - \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{2c^2} (m\omega_{1,1}^2 - k_{1,m}^2 c^2) \right) \Big] \Big] \quad (4.9)$$

— дисперсионная функция  $m$ -х гармоник электромагнитной волны сигнала;

$$K_{1,m} = \frac{\partial D_{1,m}}{\partial(im\omega_1)}; \quad K_{2,m} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{1,m}}{\partial(im\omega_1)^2};$$

$$C_{1,m} = \frac{\partial D_{3,m}}{\partial(im\omega_3)}; \quad C_{2,m} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{3,m}}{\partial(im\omega_3)^2}$$

— коэффициенты соответствующего дифференциального уравнения;

$$M_{1x,m} = K_{3,m} E_{3z,m} B_{2y,1}^* = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_{\alpha} \frac{p,b}{\xi^3} \left( \bar{n}_{\alpha} u_{\nu_{\alpha x}}^{(2)} + u_{n_{\alpha}}^{(1)} u_{\nu_{\alpha x}}^{(1)} + u_{n_{\alpha}}^{(2)} \bar{v}_{\alpha \perp} \cos p_{\alpha 0} \right) \right\rangle_{p_{1,m}};$$

$$M_{1y,m} = K_{3,m} E_{3z,m} B_{2x,1}^* = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_{\alpha} \frac{p,b}{\xi^3} \left( \bar{n}_{\alpha} u_{\nu_{\alpha x}}^{(2)} + u_{n_{\alpha}}^{(1)} u_{\nu_{\alpha x}}^{(1)} + u_{n_{\alpha}}^{(2)} \bar{v}_{\alpha \perp} \sin p_{\alpha 0} \right) \right\rangle_{p_{1,m}};$$

$$M_{3z,m} = C_{3,m} E_{1x,1} B_{2y,1} \delta_{m,1} = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_{\alpha} \frac{p,b}{\xi^3} \left( \bar{n}_{\alpha} u_{\nu_{\alpha z}}^{(2)} + u_{n_{\alpha}}^{(1)} u_{\nu_{\alpha z}}^{(1)} + u_{n_{\alpha}}^{(2)} \bar{v}_{\alpha z} \right) \right\rangle_{p_{3,m}}$$

— функции, которые учитывают квадратические добавки к соответствующим уравнениям системы (4.8);

$$\bar{\gamma}_{\alpha} = 1 / \sqrt{1 - [(\bar{v}_{\alpha \perp} \cos p_{\alpha 0} + \bar{v}_{\alpha \perp} \sin p_{\alpha 0} + \bar{v}_{\alpha z}) / c]^2}; \quad \Omega_{\alpha 1, m} = \omega_{1, m} - k_{1, m} \bar{v}_{\alpha z};$$

$\omega_H = |e| B_0 / m_e c$ ;  $\delta_{m,1}$  — символ Кронекера;

$$F_{1x,m} = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_{\alpha} \frac{p,b}{\xi^3} \left( \bar{n}_{\alpha} u_{\nu_{\alpha x}}^{(3)} + u_{n_{\alpha}}^{(1)} u_{\nu_{\alpha x}}^{(2)} + u_{n_{\alpha}}^{(2)} u_{\nu_{\alpha x}}^{(1)} + u_{n_{\alpha}}^{(3)} \bar{v}_{\alpha \perp} \cos p_{\alpha 0} \right) \right\rangle_{p_{1,m}};$$

$$F_{1y,m} = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_{\alpha} \frac{p,b}{\xi^3} \left( \bar{n}_{\alpha} u_{\nu_{\alpha y}}^{(3)} + u_{n_{\alpha}}^{(1)} u_{\nu_{\alpha y}}^{(2)} + u_{n_{\alpha}}^{(2)} u_{\nu_{\alpha y}}^{(1)} + u_{n_{\alpha}}^{(3)} \bar{v}_{\alpha \perp} \sin p_{\alpha 0} \right) \right\rangle_{p_{1,m}};$$

$$F_{3z,m} = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_{\alpha} \frac{p_{\alpha} b}{\xi^3} \left( \bar{n}_{\alpha} u_{\nu\alpha z}^{(3)} + u_{n_{\alpha}}^{(1)} u_{\nu\alpha z}^{(2)} + u_{n_{\alpha}}^{(2)} u_{\nu\alpha z}^{(1)} + u_{n_{\alpha}}^{(3)} \bar{v}_{\alpha z} \right) \right\rangle_{p_{3,m}}$$

— функции, которые учитывают кубически-нелинейные добавки к соответствующим уравнениям системы (4.8);

$\langle \dots \rangle_{p_{1,m}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots \cdot \exp(-ip_{1,m})) dp_{1,1}$ . Остальные обозначения имеют такие же значения, как и в системе (3.10).

В случае взаимодействия с высокочастотной электромагнитной волной, в первом и втором уравнениях системы (4.8) слагаемое с дисперсионной функцией  $D_{1,m}$  пропадает. А для режимов взаимодействия с циклотронными электромагнитными волнами в исследуемом плазменно-пучковом СЛСЭ с винтовым РЭП имеет место циклотронная неустойчивость. Это значит, что если подставить в соотношение (4.9) действительные частоты  $\omega_{1,m}$  и волновые числа  $k_{1,m}$ , то дисперсионная функция не будет равна нулю  $D_{1,m} \neq 0$ . Поэтому первое и второе уравнения системы (4.8) содержат слагаемое  $D_{1,m} E_{1y,m}$ . Таким образом, кубически-нелинейная система (4.8) помимо плазменно-пучковой и параметрической неустойчивостей, также учитывает и циклотронную.

Также из системы (4.8) следует, что для плазменно-пучкового супергетеродинного ЛСЭ Н-убитронного типа с винтовым релятивистским электронным пучком собственными являются, циркулярно-поляризованные электромагнитные волны сигнала и поле ондулятора. Связь между компонентами собственных полей, обеспечивается соотношениями

$$\eta_1 = E_{1y,m} / (iE_{1x,m}) = \pm 1, \quad \eta_2 = B_{2y} / (iB_{2x}) = \pm 1 \quad (4.10)$$

где  $\eta_1$  — знаковая функция, которая характеризует направление вращения вектора напряженности электрического поля циркулярно-поляризованной волны сигнала;

$\eta_2$  — знаковая функция, которая характеризует направление вращения спирального магнитного поля ондулятора.

Как известно, кубически-нелинейные функции  $F_{1x,m}$ ,  $F_{1y,m}$ ,  $F_{3z,m}$  зависят от постоянных составляющих поперечной  $\bar{v}_{\alpha\perp}$  и продольной  $\bar{v}_{\alpha z}$  компонент вектора скорости и концентрации  $\bar{n}_\alpha$   $\alpha$ -го сорта пучка. Поэтому кубически-нелинейную систему (4.8) необходимо дополнить дифференциальными уравнениями для постоянных составляющих

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{v}_{\alpha\perp}}{dt} &= V_{\alpha\perp}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\alpha\perp}, \bar{v}_{\alpha z}, \bar{n}_\alpha), \\ \frac{d\bar{v}_{\alpha z}}{dt} &= V_{\alpha z}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\alpha\perp}, \bar{v}_{\alpha z}, \bar{n}_\alpha), \\ \frac{d\bar{n}_\alpha}{dt} &= N_\alpha(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\alpha\perp}, \bar{v}_{\alpha z}, \bar{n}_\alpha).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Отметим, что функции  $V_{\alpha\perp} = \sum_{\alpha} \frac{p,b}{\xi^3} A_{v_{\alpha\perp}}^{(3)}$ ,  $V_{\alpha z} = \sum_{\alpha} \frac{p,b}{\xi^3} A_{v_{\alpha z}}^{(3)}$ ,  $N_\alpha = \sum_{\alpha} \frac{p,b}{\xi^3} A_{n_\alpha}^{(3)}$

учитывают кубически-нелинейные слагаемые, которые зависят от волновых чисел, частот, амплитуд полей, постоянных составных скоростей  $\bar{v}_{\alpha\perp}$ ,  $\bar{v}_{\alpha z}$  и концентраций  $\bar{n}_\alpha$ .

Полученная система дифференциальных уравнений (4.8) и соотношения (4.11) описывают в кубически-нелинейном приближении динамику волн в плазменно-пучковом супергетеродинном лазере на свободных электронах Н-убитронного типа с винтовым электронным пучком с учетом множественных параметрических резонансов. Кубически-нелинейную систему укороченных уравнений (4.8) и соотношения (4.11) как

для режимов взаимодействия с высокочастотными электромагнитными волнами, так и для режимов с циклотронными электромагнитными волнами далее анализируем численно.

### 4.3. Параметрически-резонансные взаимодействия волн

Определим для плазменно-пучкового супергетеродинного лазера на свободных электронах Н-убитронного типа с винтовым релятивистским электронным пучком частоты и волновые числа первых гармоник волн, которые принимают участие в трехволновых параметрически-резонансных взаимодействиях (4.1)–(4.2). Запишем дисперсионные соотношения  $D_{1,1}$  и  $D_{3,1}$  соответственно для первых гармоник электромагнитной волны сигнала и электронной волны пространственного заряда используя дисперсионные функции (4.9) и (3.13)

$$D_{1,1} = \frac{i}{c\omega_{1,1}} \left\{ k_{1,1}^2 c^2 - (\omega_{1,1})^2 + \frac{\omega_p^2 \omega_{1,1}}{\bar{\gamma}_p (\omega_{1,1} + \eta_1 \omega_H)} + \frac{\omega_b^2}{\bar{\gamma}_b (\omega_{1,1} - k_{1,1} \bar{v}_{bz} + \eta_1 \omega_H)^2} \times \right. \\ \left. \times \left[ (\omega_{1,1} - k_{1,1} \bar{v}_{bz}) \cdot (\omega_{1,1} - k_{1,1} \bar{v}_{bz} + \eta_1 \omega_H) - \frac{\bar{v}_{b\perp}^2}{2c^2} (\omega_{1,1}^2 - k_{1,1}^2 c^2) \right] \right\} = 0, \quad (4.12)$$

$$D_{3,1} = \frac{-i\omega_{3,1}}{c} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_{3,1}^2 \bar{\gamma}_p} + \frac{\omega_b^2 (1 - \bar{v}_{bz}^2 / c^2)}{(\omega_{3,1} - k_{3,1} \bar{v}_{bz})^2 \bar{\gamma}_b} \right) = 0. \quad (4.13)$$

С помощью соотношений (4.12)–(4.13) и резонансных условий (4.1)–(4.2) построим дисперсионные зависимости  $\omega = \omega(k)$  для взаимодействующих волн в плазменно-пучковом СЛСЭ Н-убитронного типа с винтовым РЭП (для угла влета  $\beta = 20^\circ$ ). Параметры исследуемой системы приведены в табл. 4.1.

На рис. 4.2 представлены дисперсионные кривые для волны сигнала (штриховые кривые 1–4) и ВПЗ (сплошные кривые 5). Кривые 1 и 2

соответствуют обыкновенной  $\eta_1 = -1$  и необыкновенной  $\eta_1 = +1$  высокочастотным электромагнитным волнам сигнала, кривые 3 и 4 соответствуют быстрой  $\eta_1 = -1$  и медленной  $\eta_1 = +1$  циклотронным электромагнитным волнам сигнала, соответственно. Как говорилось ранее волновое число  $k_{3,1}$  и частоту  $\omega_{3,1}$  волны ВПЗ выбираем таким образом, что бы инкремент нарастания плазменно-пучковой неустойчивости был максимальным. Таким значениям волнового числа  $k_{3,1}$  и частоты  $\omega_{3,1}$  соответствует точка  $O$  на дисперсионной кривой ВПЗ (рис. 4.2, кривая 5).

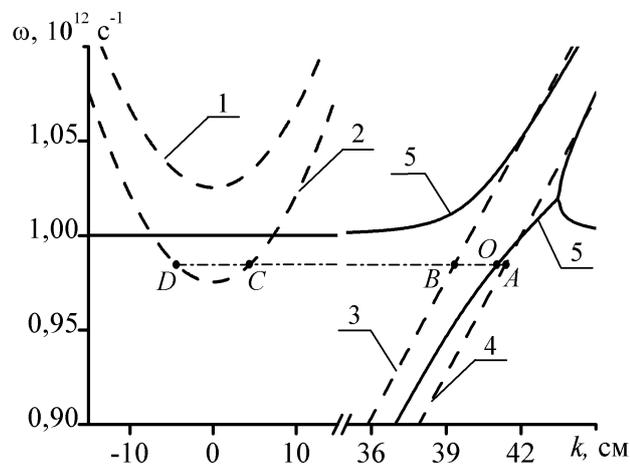


Рис. 4.2. Дисперсионные кривые волны электромагнитного сигнала и ВПЗ при угле  $\beta = 20^\circ$  влета РЭП

В соответствии с условиями параметрических резонансов (4.1)–(4.2) частоты волны электромагнитного сигнала и ВПЗ должны совпадать  $\omega_{1,1} = \omega_{3,1}$ . Таким образом, проведем через точку  $O$  горизонтальную линию  $\omega_{1,1} = \omega_{3,1} = const$  (штрихпунктирная линия  $AD$  на рис. 4.2). Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  которые получаются в результате пересечения прямой  $AD$  с дисперсионными кривыми электромагнитных волн (кривые 1–4), характеризуют частоту  $\omega_{1,1}$  и волновые числа  $k_{1,1}$  электромагнитной волны сигнала, которые могут принимать участие в трехволновых параметрически-резонансных взаимодействиях (4.1)–(4.2) в исследуемой системе. Таким

образом, в плазменно-пучковом супергетеродинном СЛСЭ Н-убитронного типа с неосевой инжекцией электронного пучка, может быть реализовано четыре типа резонансно-волновых взаимодействий, которые обозначены как  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  в соответствии с точками  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  на рис. 4.2. Отрезкам  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  и  $OD$  соответствуют значения волновых чисел  $k_{1,2}$  магнитного поля накачки, соответственно для режимов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

Таблица 4.1

**Параметры плазменно-пучкового СЛСЭ Н-убитронного типа с винтовым РЭП**

Параметр	Значение
Ленгмюровская частота плазмы ( $\omega_p$ )	$1,0 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$
Кинетическая энергия пучка	0,51 МэВ
Ленгмюровская частота пучка ( $\omega_b$ )	$3,0 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$
Индукция фокусирующего магнитного поля ( $B_0$ )	0,28 Тл
Индукция магнитного поля ондулятора $B_2 = \sqrt{ B_{2x} ^2 +  B_{2y} ^2}$	0,01 Тл

Известно, что для плазменно-пучкового СЛСЭ Н-убитронного типа в случае осевого влета электронного пучка имеет место, также четыре режимов взаимодействия между электромагнитной волной сигнала, магнитным полем ондулятора и ВПЗ [113]. Основное отличие изучаемой модели от рассмотренной в работе [113] с точки зрения рис. 4.2 — близость точек  $O$  и  $A$ . Причем при незначительном изменении параметров прибора возможно и совпадение этих точек. Так как расстояние  $OA$  на рис. 4.2 численно равно волновому числу  $k_{2,1}$  магнитного поля накачки, то период ондуляции поля накачки в режиме  $A$   $\Lambda_A = 2\pi/k_{2,1}$  будет существенно больше, чем в режимах

$B$ ,  $C$  и  $D$ . При совпадении точек  $O$  и  $A$  в режиме  $A$  реализуется дополнительный резонанс.

Для исследуемого плазменно-пучкового супергетеродинного ЛСЭ, параметры которого приведены в табл. 4.1, длина волны сигнала в вакууме равна 1,8 мм. С помощью рис. 4.2 нетрудно найти для каждого режима работы период ондулятора магнитного поля накачки:  $\Lambda_A = 45,6$  см;  $\Lambda_B = 3,3$  см;  $\Lambda_C = 0,16$  см;  $\Lambda_D = 0,14$  см (индексы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  соответствуют режимам взаимодействия, которые определены на рис. 4.2). Как видим, наиболее оптимальным, с точки зрения практической реализации компактного устройства, является режим взаимодействия  $B$ . Режимы  $C$  и  $D$  требуют использования микроондуляторов, а в режиме  $A$  система становится громоздкой.

Рассмотрим **типы множественных параметрических взаимодействий** между волнами разного типа в плазменно-пучковом СЛСЭ Н-убитронного типа. Как известно мультигармонические взаимодействия волн, обладают рядом характерных особенностей. Первая особенность связана с тем, что между множеством троек волн одновременно выполняются параметрические резонансы. За счет общих взаимодействующих волн тройки волн связаны друг с другом. Следовательно, большое количество троек волн, в том числе и изначально не задействованные, объединяются в общую систему, в которой одновременно реализуются десятки и более резонансов. Другой характерной особенностью является то, что на такие параметрические резонансы дополнительно накладываются как плазменно-пучковая, так и циклотронная неустойчивости. Результат такого наложения в конечном итоге нельзя строго рассматривать только через свойства параметрического резонанса, также как и только через свойства плазменно-пучковой и циклотронной неустойчивостей.

Таким образом, с учетом вышеописанных особенностей рассмотрим типы мультигармонических взаимодействий между электронной волной ВПЗ (кривая 5, рис. 4.2) и электромагнитными циклотронными волнами (кривые 3

и 4, рис. 4.2). В исследуемом плазменно-пучковом СЛСЭ Н-убитронного типа имеют место два типа мультигармонических взаимодействий высших гармоник волн сигнала и ВПЗ.

В первом типе мультигармонических взаимодействий участвуют первые гармоники волн сигнала и ВПЗ, а также монохроматическое магнитное поле ондулятора. Связь между этими волнами обеспечивается за счет параметрического взаимодействия волн (4.1). Из дисперсионного уравнения (4.12) следует, что электромагнитная волна сигнала определяется последним слагаемым соотношения (4.9). Отметим, что оно становится существенным в том случае, когда его знаменатель становится близким к нулю, т.е. выполняется условие (4.7). При этом для волны ВПЗ, которая нарастает за счет плазменно-пучковой неустойчивости выполняется следующее соотношение

$$\omega_p = k_{3,1}v_{bz}, \quad \omega_p \approx \omega_{3,1} \quad (4.14)$$

Используя условия трехволновых параметрических резонансов (4.1)–(4.2), соотношение (4.14) и резонансное условие (4.7) для первой гармоники ( $m=1$ ) получаем для режимов работы *A* и *B* (рис. 4.2) значение волнового числа монохроматического поля накачки в явном виде

$$k_{2,1} = k_{3,1} - k_{1,1} \approx \frac{\omega_{3,1}}{v_{bz}} - \frac{\omega_{1,1}}{v_{bz}} + \frac{\eta_1 \omega_H}{v_{bz} \gamma_b} = \frac{\eta_1 \omega_H}{v_{bz} \gamma_b}. \quad (4.15)$$

Из соотношения (4.15) следует, что период ондуляции магнитного поля накачки  $\Lambda_2 = 2\pi/k_2$  в режимах *A* и *B* определяется продольной скоростью электронов пучка  $v_{bz} = v_b \cos \beta$ , релятивистским фактором пучка  $\gamma_b$ , поляризацией электромагнитной волны  $\eta_1$  и индукцией продольного магнитного поля ( $\omega_H = |e| B_0 / (m_e c) \sim B_0$ ).

Далее анализируя дисперсионные кривые (рис. 4.2) можно сделать вывод, что волновое число накачки не зависит от частот и волновых чисел волн сигнала и ВПЗ. Поэтому, условия трехволновых резонансов будут выполняться не только для основных волн, но и для их высших гармоник. Но при этом гармоника волнового числа накачки буде одной и той же. Это значит, что для реализации такого типа взаимодействий достаточно иметь монохроматический ондулятор. Таким образом, запишем в соответствии с (4.15) соотношение для  $m$ -х гармоник волн сигнала, ВПЗ и первой гармоники поля накачки

$$k_{2,1} = k_{3,m} - k_{1,m} \approx \frac{\omega_{3,m}}{v_{bz}} - \frac{\omega_{1,m}}{v_{bz}} + \frac{\eta_1 \omega_H}{v_{bz} \gamma_b} = \frac{\eta_1 \omega_H}{v_{bz} \gamma_b}. \quad (4.16)$$

Таким образом, с учетом соотношения (4.16) условия (4.1)–(4.2) можно записать следующим образом

$$\omega_{1,m} = \omega_{3,m}, \quad k_{1,m} = k_{3,m} - k_{2,1} \quad (4.17)$$

Благодаря линейной связи частоты и волнового числа ВПЗ (4.14) в системе возбуждаются высшие гармоники ВПЗ. Тогда из условий (4.17) следует, что в плазменно-пучковом СЛСЭ с монохроматическим магнитным полем накачки, имеет место генерация высших гармоник электромагнитной волны сигнала. Отметим, что это условие выполняется только для быстрой (рис. 4.2, кривая 3, режим *B*) и медленной (рис. 4.2, кривая 4, режим *A*) циклотронных электромагнитных волн.

На рис. 4.3–4.4 поданы схемы такого типа взаимодействий, где БЦВ и МЦВ — быстрая и медленная циклотронная волна. Цифрами обозначены соответствующие номера гармоник волн. Проекция векторов определяют действительные частоты и волновые числа взаимодействующих волн. Из рис. 4.3–4.4 видно, что связь между гармониками волн сигнала и ВПЗ

обеспечивается за счет могохроматического поля накачки. Таким образом, в этом режиме возможно создание электромагнитного сигнала с широким частотным спектром. Отметим, что благодаря плазменно-пучковой и циклотронной неустойчивостям высшие гармоники, которые возбуждаются в результате параметрической связи (4.17) будут значительно влиять на динамику волн в исследуемой системе.

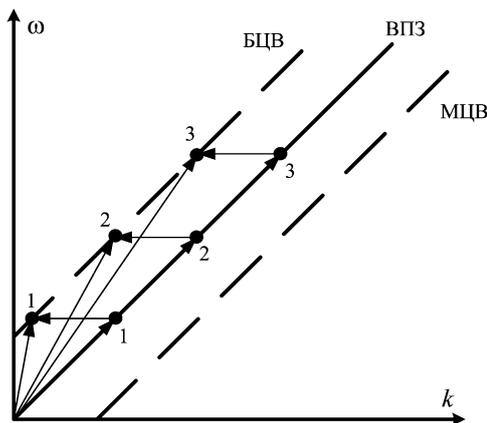


Рис. 4.3. Схема первого типа параметрического взаимодействия высших гармоник ВПЗ и БЦВ

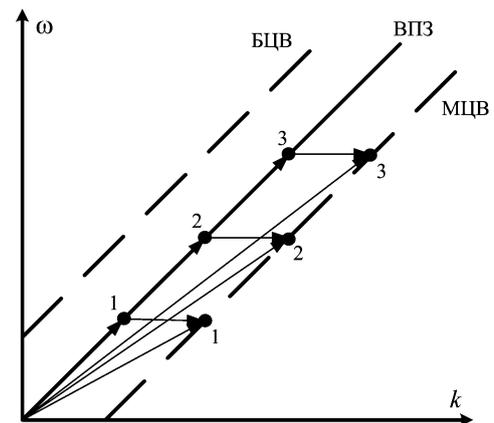


Рис. 4.4. Схема первого типа параметрического взаимодействия высших гармоник ВПЗ и МЦВ

Во **втором** типе мультигармонических взаимодействий также участвуют циклотронные электромагнитные волны и ВПЗ. Отметим что за счет, того что циклотронные волны параллельны волне ВПЗ, то возможен еще один тип множественных параметрических резонансов между гармониками взаимодействующих волн. Схема таких взаимодействий для быстрой и медленной циклотронных волн, проиллюстрирована на рис. 4.5–4.6, соответственно. Из рис. 4.5–4.6 следует, что благодаря такому мультигармоническому взаимодействию волн можно перенести усиление электромагнитного сигнала в более высокую частотную область. Отметим, что при таком типе взаимодействия, волны усиливаются как за счет плазменно-пучковой, так и за счет циклотронной неустойчивости.

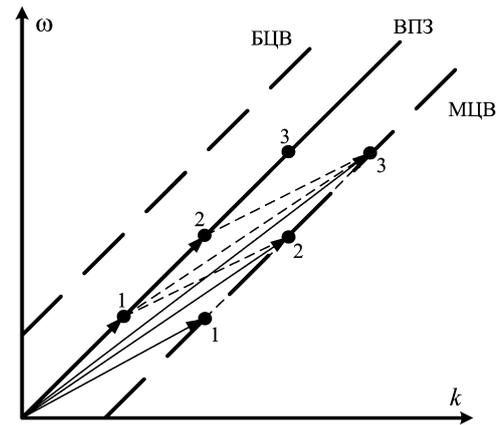
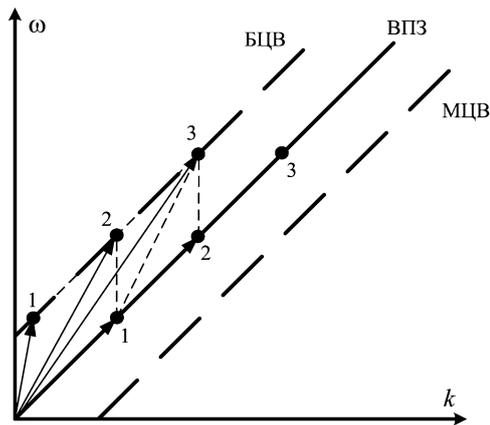


Рис. 4.5. Схема второго типа параметрических взаимодействий высших гармоник ВПЗ и БЦВ

Рис. 4.6. Схема второго типа параметрических взаимодействий высших гармоник ВПЗ и МЦВ

Запишем условия множественных параметрических взаимодействий между высшими гармониками ВПЗ и волной сигнала, которые представлены на рис. 4.5–4.6. Такие условия имеют вид

$$\omega_{1,m_3} = \omega_{3,m_1} + \omega_{1,m_2}, \quad k_{1,m_3} = k_{3,m_1} + k_{1,m_2}. \quad (4.18)$$

Как видно из соотношений (4.18) связь между гармониками циклотронной волны обеспечивается высшими гармониками волны пространственного заряда. Также хочется обратить внимание на то, что как в первом, так и втором типе мультигармонических взаимодействий при участии монохроматического входном сигнале и магнитном поле накачки можно создать мультигармонический сигнал с широким частотным спектром.

Проведем **анализ инкрементов нарастания** для различных режимов работы Н-убитронного плазменно-пучкового супергетеродинного ЛСЭ с винтовым РЭП. В результате того, что дисперсионная функция волны ВПЗ  $D_{3,m}$  в Н-убитронной модели такая же, как и для доплертронной, то и инкремент плазменно-пучковой неустойчивости будет такой же (3.16). Напомним, что инкремент (3.16) зависит от угла  $\beta$  влета РЭП, так как

дисперсионная функция  $D_{3,m}$  (3.13) зависит от продольной компоненты вектора скорости пучка, которая в свою очередь меняется при изменении угла влета  $\beta$ . Таким образом, в Н-убитронном плазменно-пучковом СЛСЭ с винтовым электронным пучком имеет место эффект увеличения инкремента плазменно-пучковой неустойчивости при увеличении угла влета пучка. Отметим, что этот эффект реализуется во всех режимах работы (рис. 4.2, режимы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ) исследуемого прибора.

В отличие от режимов, в которых используется необыкновенная электромагнитная волна сигнала (рис. 4.2, режимы  $C$  и  $D$ ) в режимах взаимодействия с циклотронными волнами (рис. 4.2, режимы  $A$  и  $B$ ) помимо плазменно-пучковой и параметрической неустойчивостей реализуется ещё и циклотронная неустойчивость. Отметим, что усиление волны сигнала за счет циклотронной неустойчивости в этих режимах будет реализовываться только при не нулевом угле влета пучка электронов  $\beta \neq 0$ . Для проведения анализа инкремента циклотронной неустойчивости в режимах  $A$  и  $B$  необходимо получить систему дифференциальных уравнений для амплитуд гармоник электрических полей сигнала и ВПЗ, учитывающую квадратичные слагаемые. Для этого преобразуем систему (4.8), по такому же алгоритму как в подразделе 3.3. В результате получаем в квадратичном приближении для комплексных амплитуд  $x$ - и  $y$ - компонент первой гармоники сигнала ( $E_{1x}$ ;  $E_{1y}$ ), и  $m$ -х гармоник волны ВПЗ ( $E_{3z,m}$ ) систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 K_{2,m} \frac{d^2 E_{1x,m}}{dt^2} + K_{1,m} \frac{dE_{1x,m}}{dt} + D_{1,m} E_{1x,m} &= K_{3,m} E_{3z,m} B_{2x,1}^*, \\
 K_{2,m} \frac{d^2 E_{1y,m}}{dt^2} + K_{1,m} \frac{dE_{1y,m}}{dt} + D_{1,m} E_{1y,m} &= K_{3,m} E_{3z,m} B_{2y,1}^*, \quad (4.19) \\
 C_{2,m} \frac{d^2 E_{3z,m}}{dt^2} + C_{1,m} \frac{dE_{3z,m}}{dt} + D_{3,m} E_{3z,m} &= C_{3,m} (E_{1x,m} B_{2x,1} + E_{1y,m} B_{2y,1}).
 \end{aligned}$$

Полученная система (4.19) описывает динамику волн для режимов работы  $A$  и  $B$   $N$ -убитронного плазменно-пучкового СЛСЭ с винтовым РЭП в слабосигнальном приближении. Благодаря тому, что в этих режимах реализуется циклотронная неустойчивость, то необходимо учитывать в первом и втором уравнениях системы (4.19) слагаемое со второй производной. Также, для этих режимов дисперсионное уравнение для электромагнитной волны  $D(m\omega_1, k_{1,m}) = 0$  имеет комплексные корни  $\omega_{1,m} = (m \cdot \omega'_{1,1} + i\delta\omega)$  аналогично, как и для волны ВПЗ. Поэтому при подстановке в дисперсионную функцию (4.9) действительных частот и действительных волновых чисел, дисперсионная функция электромагнитного сигнала не будет равна нулю  $D_{1,m} \neq 0$ . Инкремент нарастания циклотронной волны можем определить, используя как первое, так и второе уравнение системы (4.19). Пренебрегая параметрическим резонансом (слагаемое  $K_{3,m}E_{3z,m}B_{2x,1}^*$  или  $K_{3,m}E_{3z,m}B_{2y,1}^*$ ) учитывая, что  $K_{2,m}d^2E_{1x,m/1y,m}/dt^2$ ,  $D_{1,m}E_{1x,m/1y,m} \gg K_{1,m}dE_{1x,m/1y,m}/dt$ , легко находим из получившегося линейного уравнения инкремент нарастания циклотронной неустойчивости  $(-D_{1,m}/K_{2,m})^{1/2}$ .

#### 4.4. Анализ уровней и механизмов насыщения

Используя стандартные численные методы, проведем с помощью системы уравнений (4.8) и соотношений (4.11) кубически-нелинейный анализ физических процессов в плазменно-пучковом супергетеродинном ЛСЭ  $N$ -убитронного типа с неосевой инжекцией пучка электронов для различных режимов работы. Параметры исследуемого устройства представлены в таб. 4.1.

На рис. 4.7 представлены зависимости амплитуд первых гармоник напряженности электрического поля волны сигнала  $E_1 = \sqrt{|E_{1x,1}|^2 + |E_{1y,1}|^2}$  от

нормированного времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  для различных углов влета электронного пучка для режима взаимодействия  $B$  (рис. 4.2). Нормировочный множитель  $\delta\omega_0$  равен инкременту нарастания плазменно-пучковой неустойчивости системы при угле влета  $\beta = 0^\circ$ . Кривая 1 соответствует  $\beta = 0^\circ$ , кривая 2 —  $\beta = 10^\circ$ , кривая 3 —  $\beta = 20^\circ$ , кривая 4 —  $\beta = 30^\circ$ , кривая 5 —  $\beta = 37^\circ$ , кривая 6 —  $\beta = 50^\circ$ . Из рис. 4.7 следует, что с увеличением угла влета пучка  $\beta$  уровень насыщения увеличивается, достигая максимума при значении угла влета  $\beta \approx 37^\circ$  (рис. 4.7, кривая 5). Численный анализ показал, что максимальный уровень насыщения амплитуды первой гармоники напряженности электрического поля сигнала  $E_1$  (рис. 4.7, кривая 5) достигается при таком угле  $\beta$ , когда имеет место точное совпадение периода ондуляции магнитного поля накачки с шагом винтового электронного пучка. В этом случае имеет место максимальное перекачивание энергии от винтового электронного пучка к электромагнитной волне сигнала, за счет параметрической связи основных волн.

Из рис. 4.7 видно, что уровень насыщения электромагнитной волны сигнала  $\sim 5$  МВ/м, является достаточно высоким при сравнительно не большой индукции магнитного поля накачки  $B_2 = 0,01$  Тл.

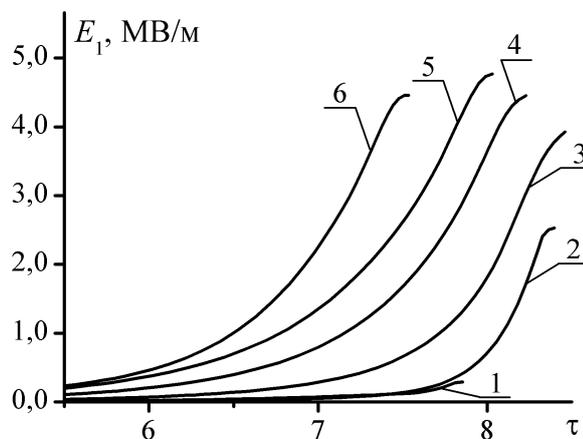


Рис. 4.7. Зависимости амплитуд 1-х гармоник напряженности электрического поля сигнала  $E_1$  от нормированного времени  $\tau$

На рис. 4.8 представлены зависимости амплитуды первых гармоник напряженности электрического поля ВПЗ от нормированного времени в режиме  $B$  для различных углов влета пучка электронов. Кривая 1 соответствует  $\beta = 0^\circ$ , кривая 2 —  $\beta = 10^\circ$ , кривая 3 —  $\beta = 20^\circ$ , кривая 4 —  $\beta = 30^\circ$ , кривая 5 —  $\beta = 37^\circ$ , кривая 6 —  $\beta = 50^\circ$ . Из рис. 4.8 следует, что уровень насыщения волны ВПЗ с увеличением угла  $\beta$  влета электронного пучка уменьшается. Причем наибольшее ослабление волны ВПЗ происходит при значении угла  $\beta = 37^\circ$  (кривая 5 на рис. 4.8). Отметим, что при этом же угле имеет место максимальное насыщение волны сигнала (рис. 4.7). При данном угле, как говорилось ранее, имеет место точное совпадение периода ондуляции магнитного поля накачки с шагом винтового электронного пучка. Благодаря этому реализуются условия для максимальной передачи энергии от электронов пучка к волне сигнала, что проявляется в минимальном уровне насыщения как функции угла  $\beta$  для волны ВПЗ и максимального уровня насыщения волны сигнала (рис. 4.7, кривая 5).

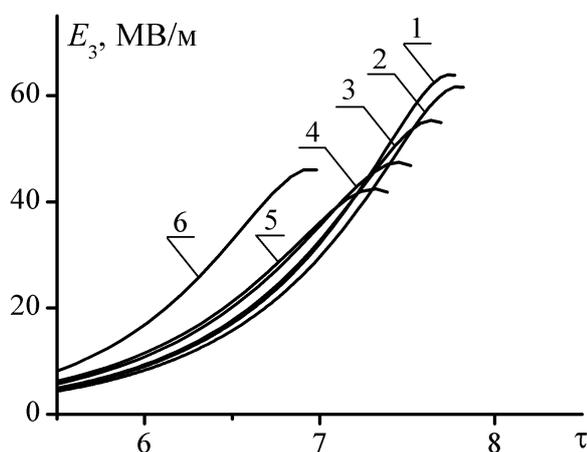


Рис. 4.8. Зависимости амплитуд 1-х гармоник напряженности электрического поля ВПЗ от нормированного времени  $\tau$

Также из рис. 4.7 и рис. 4.8 следует, что с увеличением угла  $\beta$  возрастают темпы усиления как волны ВПЗ (рис. 4.8), так и волны сигнала (рис. 4.7). Такое поведение обусловлено тем обстоятельством, что с

увеличением угла влета пучка  $\beta$  продольная скорость электронов уменьшается, следовательно, уменьшается и продольный релятивистский фактор  $\gamma_{b\parallel} = (1 - v_b^2 \cos^2 \beta / c^2)^{-1/2}$ , а значит, увеличивается инкремент плазменно-пучковой неустойчивости [76], соотношение (3.16).

Для режима *A* имеет место аналогичная зависимость уровня насыщения от угла влета электронного пучка  $\beta$ , но уровни насыщения в этом случае оказываются гораздо ниже, чем для режима *B*. Как было сказано выше, период ондуляции магнитного поля для режима *A* оказывается наибольшим  $\Lambda_A = 45,6$  см. В связи с этим практическая реализация данного режима является затруднительной.

Следует отметить, что зависимость уровня насыщения от угла влета электронного пучка  $\beta$  в режиме *B* принципиально отличается от аналогичной зависимости для режимов *C* и *D*. Так на рис. 4.9 представлены зависимости амплитуд напряженности электрического поля сигнала от нормированного времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  для различных углов влета электронного пучка для режима взаимодействия *C* (рис. 4.2). Кривая 1 соответствует  $\beta = 0^\circ$ , кривая 2 —  $\beta = 10^\circ$ , кривая 3 —  $\beta = 20^\circ$ , кривая 4 —  $\beta = 30^\circ$ .

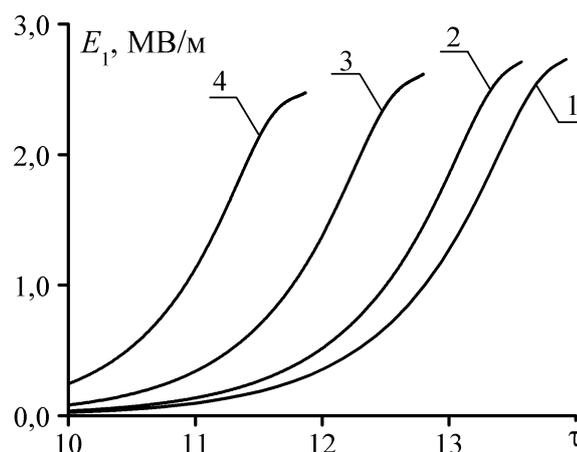


Рис. 4.9. Зависимости амплитуд 1-х гармоник напряженности электрического поля сигнала  $E_1$  от нормированного времени  $\tau$

Видим, что в этом режиме максимальный уровень насыщения реализуется при осевом влете электронного пучка  $\beta = 0^\circ$ , тогда как в режиме *B* (рис. 4.7) максимальный уровень насыщения достигается при угле влета пучка  $\beta = 37^\circ$ . С увеличением угла влета пучка  $\beta$  в режиме *C* уровень насыщения незначительно уменьшается, тогда как в режиме *B* увеличивается. Уровень насыщения электромагнитной волны сигнала в режиме *C* почти в два раза меньше, чем в режиме *B*. Для режима *D* зависимости амплитуд электромагнитного сигнала аналогичны, как и в случае режима *C*.

На рис. 4.10 представлены зависимости амплитуды первой гармоники электрического поля волны ВПЗ от нормированного времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  для различных углов влета пучка в режиме взаимодействия *C*. Кривой 1 — соответствует угол влета пучка электронов  $\beta = 0^\circ$ , кривой 2 — соответствует угол  $\beta = 10^\circ$ , кривой 3 — соответствует угол  $\beta = 20^\circ$ , кривой 4 — соответствует угол  $\beta = 30^\circ$ .

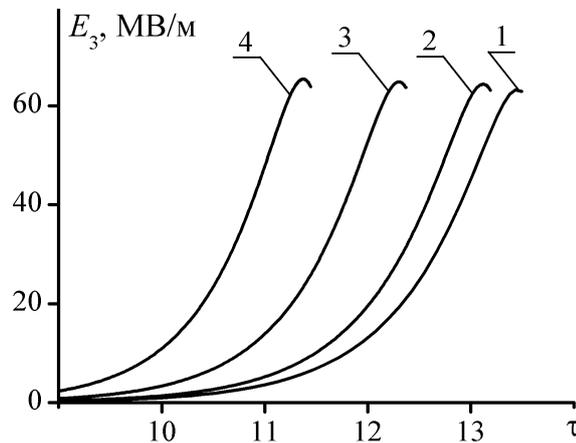


Рис. 4.10. Зависимости амплитуд 1-х гармоник напряженности электрического поля ВПЗ от нормированного времени  $\tau$

Уровень насыщения ВПЗ в этом режиме при различных углах влета имеет практически одно и то же значение. Отметим, что в случае режима *C* (рис. 4.10) динамику электромагнитной волны сигнала определяет ВПЗ, а в

случае режима *B* (рис. 4.8) динамику сигнала определяет конкуренция между волной ВПЗ и магнитным полем накачки. В режимах *C* и *D* зависимости амплитуд напряженности электрического поля волны ВПЗ от нормированного времени при различных углах влета электронного пучка полностью совпадают.

**Анализ мультигармонических взаимодействий волн.** Выясним, как влияют множественные трехволновые параметрические резонансные взаимодействия гармоник ВПЗ на динамику высокочастотной электромагнитной волны сигнала. Для анализа прибора, используем следующие параметры: ленгмюровская частота плазмы  $\omega_p = 1 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ , ленгмюровская частота пучка  $\omega_b = 2 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ , циклотронная частота  $\omega_H = -5 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ , энергия электронов релятивистского пучка 0,51 МэВ, амплитуда индукции магнитного поля накачки  $B_{2,1} = \sqrt{|B_{2x,1}|^2 + |B_{2y,1}|^2} = 0,06 \text{ Тл}$ . На рис. 4.11 представлены зависимости амплитуды первой гармоники напряженности электрического поля волны сигнала от нормированного времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$ . Расчеты проводились для режима работы *C* и угла влета пучка  $\beta = 30^\circ$ .

На рис. 4.11 кривая 1 получена в результате расчетов, когда учтено взаимодействие волн только первых гармоник, кривая 2 получена в результате расчетов, когда учтено влияние множественных трехволновых резонансных взаимодействий первых десяти гармоник ВПЗ. Сравнивая кривые 1 и 2 на рис. 4.11 видим, что влияние высших гармоник ВПЗ приводит к уменьшению уровня насыщения волны сигнала более чем в два раза (кривая 2). Это означает, что множественные резонансные взаимодействия между гармониками ВПЗ существенным образом влияют на нелинейные процессы в плазменно-пучковых СЛСЭ. Аналогичное влияние множественных резонансных взаимодействий на уровень насыщения имеет место и в режимах работы *A*,

*B* и *D*. Поэтому такие взаимодействия обязательно необходимо учитывать при анализе динамики волн в плазменно-пучковых СЛСЭ.

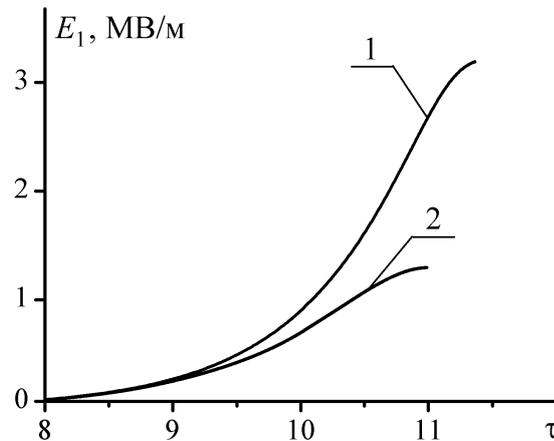


Рис. 4.11. Зависимости амплитуды первой гармоники волны сигнала  $E_1$  от нормированного времени  $\tau$  для режима взаимодействия  $C$ ,  $\beta = 30^\circ$

Отметим, что с учетом множественных резонансов высших гармоник ВПЗ (рис. 4.11, кривая 2) в области насыщения напряженность электрического поля сигнала достигает значений  $\sim 1,3$  МВ/м при условии достаточно невысокой накачки. Длина волны сигнала в вакууме для этого режима  $\lambda_1 = 2\pi c/\omega_1 \approx 1,9$  мм. Также отметим, что при умеренных требованиях к параметрам пучка в исследуемом типе плазменно-пучкового СЛСЭ с винтовым релятивистским электронным пучком, можно получить выходную мощность электромагнитной волны сигнала равную  $P = 4$  МВт, а КПД около  $\sim 8,5\%$ . Таким образом, плазменно-пучковый супергетеродинный ЛСЭ может использоваться как мощный источник электромагнитного излучения в миллиметровом диапазоне длин волн.

Далее рассмотрим динамику амплитуд первой гармоники напряженности электрического поля ВПЗ, которое возбуждается в следствие трихвального параметрического резонанса (4.1) в плазменно-пучковой системе. На рис. 4.12 представлены зависимости амплитуд первой гармоники напряженности электрического поля ВПЗ  $E_{3z}$  от нормированного

времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  для режима работы  $C$  при угле влета электронного пучка  $\beta = 30^\circ$ . Здесь, кривая 1 построена с учетом только первых гармоник волн, которые принимают участие в параметрическом резонансе (4.1), кривая 2 учитывает влияние мультигармонических резонансов первых 10 гармоник ВПЗ. Рис. 4.12 показывает, что насыщение волны  $E_{3z}$  при учете первых десяти гармоник ВПЗ (кривая 2) уменьшается более чем в два раза сравнительно с кривой 1. Влияние множественных параметрических резонансных взаимодействий между высшими гармониками волны ВПЗ приводит к уменьшению уровня насыщения и напряженности электрического поля ВПЗ  $E_{3z}$ . Именно благодаря уменьшению напряженности электрического поля ВПЗ происходит уменьшение и амплитуды электрического поля сигнала  $E_1$  (рис. 4.11), который связан с ВПЗ через параметрическое резонансное взаимодействие.

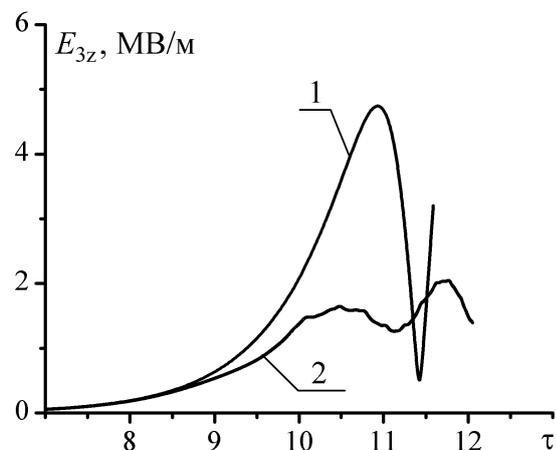


Рис. 4.12. Зависимости амплитуд 1-х гармоник напряженности электрического поля ВПЗ  $E_{3z}$  от нормированного времени  $\tau$  для режима  $C$ ,  $\beta = 30^\circ$

На рис. 4.13 представлены зависимости амплитуд гармоник концентрации пучка  $n_{b3}$ , которые нормированы на постоянную составляющую концентрации пучка  $n_{b3} / \bar{n}_b$  от нормированного времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  с учетом (кривые 1-4) и без учета (кривая 5) множественных

параметрических взаимодействий ВПЗ. Кривая 1 отвечает первой гармонике концентрации пучка  $n_{b3,1}$ , кривая 2 – второй гармонике  $n_{b3,2}$ , кривая 3 – третьей гармонике  $n_{b3,3}$ , кривая 4 – четвертой гармонике  $n_{b3,4}$ , кривая 5 – первой гармонике  $n_{b3,1}$ , расчет которой проводился без учета мультигармонических взаимодействий ВПЗ.

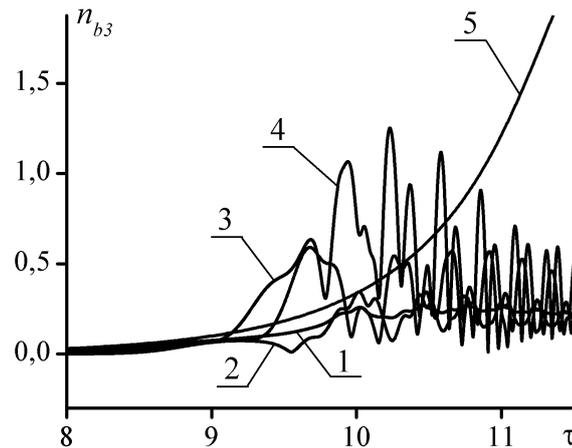


Рис. 4.13. Зависимости нормированных амплитуд гармоник концентрации пучка  $n_{b3}$  от нормированного времени  $\tau$

Из рис. 4.13 следует, что если не принимать во внимание взаимодействие высших гармоник ВПЗ, то насыщение амплитуды первой гармоники концентрации пучка  $n_{b3}$  отсутствует (кривая 5). Т.е. именно множественные взаимодействия высших гармоник ВПЗ отвечают за качественную динамику гармоник концентрации пучка. Кардинально изменяется динамика амплитуд гармоник концентрации пучка при условии учета множественных взаимодействий высших гармоник волны ВПЗ (кривые 1-4). Видим, что в этом случае амплитуды высших гармоник концентрации пучка не только имеют соизмеримые значения с амплитудой первой гармоники, а даже превышают ее. Следует отметить, что электрическое поле волны ВПЗ создается как зарядами плазмы, так и электронами пучка. Как показывают исследования, амплитуды высших гармоник концентрации плазмы являются намного меньшими по сравнению с амплитудой первой

гармоники. Из-за того, что концентрация плазмы существенно больше концентрации пучка, то благодаря этому, колебание плазмы вносит основной вклад в формирование электрического поля ВПЗ. Однако, не смотря на это, колебание электронов пучка приводит к уменьшению амплитуды электрического поля ВПЗ более чем в два раза, а также создает незначительные осцилляции амплитуды первой гармоники электрического поля ВПЗ (кривая 2, рис. 4.12). Таким образом, для проведения анализа динамики волн в плазменно-пучковом СЛСЭ нужно обязательно учитывать множественные параметрические взаимодействия гармоник ВПЗ.

Анализируя динамику амплитуды первой гармоники электрического поля ВПЗ (рис. 4.12) и динамику амплитуд концентрации пучка (рис. 4.13) видим, что частота осцилляций амплитуд концентрации пучка  $n_{b3}$  в несколько раз больше чем частота осцилляций амплитуды электрического поля  $E_{3z}$ . Такая ситуация становится возможной при условии захвата электрическим полем ВПЗ электронов пучка [76]. Электроны отражаются от стенок квазипотенциальной ямы, которую образует электрическое поле ВПЗ и поэтому частота осцилляций амплитуды концентрации пучка в несколько раз выше чем частота осцилляций электрического поля ВПЗ. Также нужно обратить внимание на то, что амплитуда колебаний концентрации пучка нормированных на его постоянную составляющую в условиях насыщения приблизительно равняется единице. Это означает, что винтовой РЭП во время насыщения является полностью промоделированным, разбитым на сгустки. Таким образом, насыщение усиления плазменно-пучковых СЛСЭ Н-убитронного типа с винтовыми электронными пучками происходит благодаря механизму захвата электронов пучка плазменной волной.

#### 4.5. Выводы к разделу 4

1. Построена самосогласованная мультигармоническая кубически-нелинейная теория плазменно-пучкового супергетеродинного лазера на

свободных электронах Н-убитронного типа с винтовым релятивистским электронным пучком. Получена кубическая система дифференциальных уравнений для амплитуд гармоник электрических полей волны сигнала и ВПЗ с учетом мультигармонических резонансов, которая учитывает параметрическую, плазменно-пучковую и циклотронную неустойчивости.

2. Выяснено, что в плазменно-пучковом СЛСЭ Н-убитронного типа инкремент плазменно-пучковой неустойчивости зависит от угла влета винтового релятивистского электронного пучка. Получено, что такое увеличение инкремента неустойчивости связано с уменьшением продольной энергии электронов пучка. Данный эффект имеет место во всех режимах работы прибора и приводит к увеличению темпов роста волн сигнала и ВПЗ.

3. Определены уровни насыщения электромагнитной волны сигнала для различных режимов работы плазменно-пучкового Н-убитронного СЛСЭ с винтовым РЭП. Определены углы влета винтового РЭП при максимальном усилении сигнальной волны для всех режимов взаимодействия. Выяснено, что при угле влета  $\beta = 37^\circ$  режим параметрически-резонансного взаимодействия быстрой циклотронной электромагнитной волны сигнала с волной пространственного заряда, характеризуется максимальным коэффициентом усиления по сравнению с другими режимами работы прибора.

4. Проведен мультигармонический нелинейный анализ динамики волн в плазменно-пучковом супергетеродинном ЛСЭ Н-убитронного типа с винтовым РЭП. Выяснено, что множественные параметрические взаимодействия высших гармоник ВПЗ существенно влияют на динамику амплитуд волн в исследуемом приборе, уровни насыщения понижаются более чем в 2 раза. Получено, что механизм насыщения волны сигнала в первую очередь связан с захватом электронов пучка полем плазменных волн.

## ВЫВОДЫ

В диссертационной работе построены кубически-нелинейные теории плазменно-пучковых супергетеродинных лазеров на свободных электронах с винтовыми релятивистскими электронными пучками доплертронного и Н-убитронного типа с учетом множественных параметрических взаимодействий. Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Впервые показано, что в плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ с винтовыми электронными пучками как доплертронного, так и Н-убитронного типов имеет место существенное увеличение коэффициента усиления электромагнитной волны сигнала при увеличении угла влета электронного пучка. Выяснено, что этот эффект имеет релятивистский характер, связанный с изменением продольной кинетической энергии электронов пучка и определяется зависимостью инкремента нарастания плазменно-пучковой неустойчивости от угла влета РЭП. При увеличении угла влета пучка с  $0^\circ$  до  $30^\circ$  инкремент нарастания волн увеличивается более чем на 20 %.

2. Впервые построена самосогласованная кубически-нелинейная теория мультигармонических взаимодействий волн в плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ с винтовыми РЭП как с доплертронной, так и Н-убитронной накачками. Получена система кубически-нелинейных дифференциальных уравнений для амплитуд гармоник электромагнитных полей волн, которая описывает динамику взаимодействующих волн с учетом мультигармонических резонансов.

3. Показано, что множественные параметрические резонансы приводят к качественному изменению динамики волн, в том числе уменьшению уровня насыщения основной гармоники волны сигнала. Выяснено, что насыщение в плазменно-пучковых СЛСЭ с винтовыми релятивистскими электронными пучками определяется захватом электронов пучка плазменными волнами.

4. Продемонстрировано, что в плазменно-пучковом супергетеродинном ЛСЭ с винтовым РЭП доплертронного типа возможна реализация четырех режимов работы. Выяснено, что режим работы, в котором участвует в трехволновом параметрическом резонансе, необыкновенная циркулярно-поляризованная волна сигнала характеризуется коэффициентом усиления, который превышает коэффициенты усиления в других режимах более чем в два раза.

5. Выяснено, что в плазменно-пучковом супергетеродинном ЛСЭ Н-убитронного типа для режима работы, в котором используется быстрая циклотронная электромагнитная волна сигнала коэффициент усиления волны сигнала превышает остальные почти в два раза. Найден, оптимальный угол влета электронного пучка ( $\sim 37^\circ$ ) относительно продольного магнитного поля, когда усиление волны сигнала является максимальным. Показано, что в этом случае имеет место совпадение шага винтового пучка с периодом ондуляции магнитного поля накачки, в результате этого наблюдается эффективное увеличение поля накачки.

6. Показано, что в плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ с винтовыми РЭП, при умеренных требованиях к параметрам системы (концентрация электронов пучка  $1,3 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ , энергия пучка 0,5 МэВ, ток пучка 100 А), возможно создание мощной электромагнитной волны сигнала в миллиметровом диапазоне длин волн (длина волны сигнала 1,8 мм) с мощностью  $\sim 16 \text{ МВт}$  и КПД  $\sim 30\%$ .

7. Дальнейшего развития получил метод усредненных характеристик для решения мультигармонических задач в сильноточных приборах, которые используют винтовые РЭП. В рамках данного метода была предложена новая замена переменных, которая позволила увеличить эффективность алгоритма асимптотического интегрирования.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, заведующему кафедрой прикладной математики и моделирования сложных систем Александру Владимировичу Лысенко за руководство, поддержку и постоянное внимание в процессе работы над диссертацией. Большая благодарность заслуженному деятелю науки и техники Украины, доктору физико-математических наук, профессору Виктору Васильевичу Кулишу за ценные замечания при обсуждении результатов диссертационной работы.

Автор благодарна всем соавторам за помощь в работе и обсуждение полученных результатов. Автор также выражает благодарность всем сотрудникам кафедр моделирования сложных систем, общей и теоретической физики и секции компьютеризированных систем управления за всяческую поддержку во время работы над диссертацией.

Особая благодарность семье за понимание и терпение.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Madey J.M.J. Stimulated emission of bremsstrahlung in a periodic magnetic field / J.M.J. Madey // J. Appl. Phys. – 1971. – Vol. 42, No. 5. – P. 1906–1913.
2. А. с. № 705914 СССР МКИ H01J 25/00. Электронный прибор / Р.А. Силин, В.В. Кулиш, Ю.И. Клименко ; заявл. 18.05.72 ; опубл. после снятия грифа секретности 15.05.1991, Бюл. № 26.
3. Мирошниченко В. И. Вынужденное когерентное рассеяние электромагнитных волн релятивистским электронным пучком в магнитном поле / В.И. Мирошниченко // Письма в ЖТФ. – 1975. – Т. 1, № 23. – С. 1057–1060.
4. Sprangle P. Stimulated collective scattering from a magnetized relativistic electron beam / P. Sprangle, V.L. Granatstein, L. Baker // Phys. Rev. A. – 1975. – Vol. 12, No. 4. – P. 1697–1701.
5. Kulish V.V. Hierarchic electrodynamics and free electron lasers / V.V. Kulish. – Boca Raton, London, New York : CRC Press, 2011. – 697 p.
6. Kulish V.V. Hierarchical methods: Hierarchy and hierarchic asymptotic methods in electrodynamics, Vol. 1 / V.V. Kulish. – Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 2002. – 380 p.
7. Kulish V.V. Hierarchical methods: Undulative electrodynamic system, Vol. 2 / V.V. Kulish. – Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 2002. – 396 p.
8. Kulish V.V. Methods of averaging in nonlinear problems of relativistic electrodynamics / V.V. Kulish. – Atlanta : World Federation Published Company, 1998. – 263 p.
9. Khan S. Free-electron lasers / S. Khan // Journal of Modern Optics. — 2008. — Vol. 55, No. 21. — P. 3469–3512.
10. Brau C. Free electron laser / C. Brau. – Boston: Academic Press, 1990. — 420 p.

11. O'Shea P.G. Free-Electron Lasers: Status and Applications / P.G. O'Shea, H.P. Freund // *Science*. – 2001. – Vol. 292, No. 5523. – P. 1853–1858.
12. Freund H.P. Principles of free-electron lasers / H.P.Freund, T.M.Antonsen. — Springer Science & Business Media, 2012. — 476 p.
13. Saldin E. The physics of free electron lasers / E. Saldin, E. V. Schneidmiller, M. V. Yurkov. — Springer Science & Business Media, 2013. — 470 p.
14. Коцаренко Н.Я. О возможности супергетеродинного усиления электромагнитных волн в электронных потоках / Н.Я. Коцаренко, В.В. Кулиш // *ЖТФ*. – 1980. – Т. 50, № 2. – С. 220–222.
15. Коцаренко Н.Я. Об эффекте супергетеродинного усиления электромагнитных волн в системе плазма-пучок / Н.Я. Коцаренко, В.В. Кулиш // *Радиотехника и электроника*. – 1980. – Т. 25, № 11. – С. 2470–2471.
16. Пат. 835259 СССР, Н 01 J 25/00. Электронный прибор / В.А. Перекупко, А.А. Силивра, Н.Я. Коцаренко, В.В. Кулиш. – Заявл. 28.01.80.
17. Болонин О.Н. Супергетеродинное усиление электромагнитных волн в системе двух релятивистских электронных потоков / О.Н. Болонин, В.В. Кулиш, В.П. Пугачев // *УФЖ*. – Т. 33, № 10. – 1988. – С. 1465–1468.
18. Botton M. Two-stream instability in free electron lasers / M. Botton, A. Ron // *IEEE Transactions on Plasma Science*. – 1990. – Vol.18, No. 3. – P. 416–423.
19. Botton M. Gain enhancement in a free electron laser by two-stream instability / M. Botton, A. Ron // *J. Appl. Phys.* – 1990. – Vol. 67, No. 10. – P. 6583–6585.
20. Kulish V.V. Superheterodyne electron-wave free-electron lasers / V.V. Kulish // *The International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. – 1993. – Vol. 14, No. 3. – P. 415–450.
21. Kulish V.V. Nonlinear self-consistent theory of superheterodyne and parametric electron laser / V.V. Kulish, S.A. Kuleshov, A.V. Lysenko // *The*

- International Journal of Infrared and Millimeter Waves. – 1993. – Vol. 14, No. 3. – P. 451–567.
22. Kulish V.V. Nonlinear self-consistent theory of two-stream superheterodyne free electron lasers / V.V. Kulish, S.A. Kuleshov, A.V. Lysenko // The International Journal of Infrared and Millimeter Waves. – 1994. – Vol. 15, No. 1. – P.77–120.
  23. Kulish V.V. Hierarchical asymptotic methods in the theory of cluster free electron lasers / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, A.Ju. Brusnik // Journal of Infrared, Millimeter and Terahertz Waves. – 2012. – Vol. 33, No. 2. – P. 149–173.
  24. Sprangle P. Nonlinear analysis of a relativistic beam-plasma cyclotron instability / P. Sprangle, L. Vlahos // Physical Review A. — 1986. — Vol. 33, No. 2. — P. 1261–1269.
  25. Bekefi G. Double-stream cyclotron maser / G. Bekefi // Journal of Applied Physics. — 1992. — Vol. 71, No. 9. — P. 4128–4131.
  26. Mohsenpour T. Instability of wave modes in a two-stream free-electron laser with a helical wiggler and an axial magnetic field / T. Mohsenpour, N. Mehrabi // Phys. Plasmas. - 2013. - V. 20, No. 8. - P. 082133.
  27. Liu W. Instability of Two-stream Free-electron Laser with an Axial Guiding Magnetic Field / W. Liu, Z. Yang, Z. Liang // Int. J. Infrared Millim. Waves. - 2006. - V. 27. P. 1073.
  28. Shokri B. The excitation of extraordinary and ordinary waves in a magnetized plasma medium by a rotating electron beam / B. Shokri, S. M. Khorashadizadeh // Phys. Plasmas. — 2006. — Vol. 13, No. 5. — P. 052116.
  29. Saviz S. Gain enhancement in two-stream free electron laser with a planar wiggler and an axial guide magnetic field / S. Saviz, Z. Rezaei, Z. Farzin, M. Aghamir // Chinese Physics B. - 2012. - V. 21, No. 9. - P. 094103.
  30. Mohsenpour T. The gain equation of a helical wiggler free electron laser with ion-channel guiding and/or an axial magnetic field / T. Mohsenpour, H. E. Amri // Chinese Physics Letters. — 2013. — Vol. 30, No. 3. — P. 034102.

31. Ginzburg N. S. Nonlinear theory of a free electron laser with a helical wiggler and an axial guide magnetic field / N. S. Ginzburg, N. Y. Peskov // *Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams*. — 2013. — Vol. 16, No. 9. — P. 090701.
32. Kulish V. V. Cubic-nonlinear theory of a plasma-beam superheterodyne free electron laser with h-ubitron pumping / V. V. Kulish, A. V. Lysenko, V. V. Koval // *Telecommunications and Radio Engineering*. — 2010. — Vol. 69, No. 20. — P. 1859–1869. (Кулиш В. В. Кубически-нелинейная теория супергетеродинных плазма-пучковых лазеров на свободных электронах с H-убитронной накачкой / В. В. Кулиш, А. В. Лысенко, В. В. Коваль // *Радиофизика и электроника*. — 2009. — Vol. 14, No. 3. — P. 383—388.)
33. Kulish V.V. Multiharmonic cubic-nonlinear theory of plasma-beam superheterodyne free-electron lasers of the dopplertron type / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, V.V. Koval // *Plasma Physics Reports*. — 2010. — Vol. 36, No. 13. — P. 1185–1190. (Кулиш В.В. Мультигармоническая кубически-нелинейная теория супергетеродинных плазменно-пучковых лазеров на свободных электронах с доплертронной накачкой / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, В.В. Коваль // *Прикладная физика*. — 2009. — № 5. — С. 76–81.)
34. Nonlinear theory of plasma-beam superheterodyne free electron laser of dopplertron type with non-axial injection of electron beam / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, G.A. Oleksienko, V.V. Koval and M.Yu. Rombovsky // *Acta Physica Polonica A*. — 2014. — Vol. 126, No. 6. — P. 1263–1268.
35. Супергетеродинные плазменно-пучковые ЛСЭ с винтовыми электронными пучками / В. В. Кулиш, А. В. Лысенко, Г. А. Алексеенко, В.В. Коваль, М.Ю. Ромбовский // *Прикладная физика*. — 2014. — № 5. — С. 24–28.
36. Модернізований метод усереднених характеристик для розв'язування задач мультигармонічних резонансних взаємодій у пристроях сильнострумової електроніки / В.В. Куліш, О.В. Лисенко,

- Г.А. Олексієнко, Г.В. Биченко, О.О. Колоскова // Ж. нано- електрон. фіз. – 2015. – Т. 7, № 2. – С. 02015.
37. Кулиш В. В. Мультигармонические взаимодействия волн в плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ с винтовыми электронными пучками / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, Г.А. Алексеенко // Успехи прикладной физика. – 2015. – Т. 3. – №5. – С. 438–446.
38. Kulish V. V. Nonlinear interaction of waves in plasma-beam superheterodyne FEL of the dopplertron type with helical electron beam / V. V. Kulish, A. V. Lysenko, G. A. Oleksiienko // Problems of Atomic Science and Technology. — 2015. — No. 6(100). — P. 83-89.
39. Лисенко О.В. Застосування модернізованого методу усереднених характеристик в задачах теорії плазмово-пучкових супергетеродинних лазерів на вільних електронах / О.В. Лисенко, Г.А. Олексієнко, М.О. Феденко // Ж. нано- електрон. фіз. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 04083.
40. Лысенко А.В. Плазменно-пучковый супергетеродинный ЛСЭ с Н-убитронной накачкой с неосевой инжекцией электронного пучка // А.В. Лысенко, Г.А. Алексеенко / Радиофизика и электроника. — 2016. — Т. 7(21), № 1. — С. 48–54.
41. Oleksiienko G. A. Influence of injection angle of electron beam on dynamics of waves in plasma-beam superheterodyne free electron laser of dopplertron type / G. A. Oleksiienko, V. V. Kulish, A. V. Lysenko // 15<sup>th</sup> International Young Scientists Conference Optics and High Technology Material Science (SPO 2014): Scientific Works, (Kiev, Ukraine, 23-26, October, 2014). – Kiev, 2014. – С. 143.
42. Oleksiienko G. A. Nonlinear wave interaction in plasma-beam superheterodyne FEL of H-ubitron type with a helical electron beam / G. A. Oleksiienko, V. V. Kulish, A. V. Lysenko // 16<sup>th</sup> International Young Scientists Conference Optics and High Technology Material Science (SPO 2015): Scientific Works, (Kiev, Ukraine, 22-25, October, 2015). – Kiev, 2015. – С. 155.

43. Lysenko A. V. To the theory of plasma-beam superheterodyne free electron laser of the dopplertron type with a helical electron beam / A. V. Lysenko, G. A. Oleksiienko, V. V. Koval, M. Yu. Rombovsky // 10<sup>th</sup> International Conference «Electronics and Applied Physics» (APHYS 2014): Conference Proceedings, (Kiev, Ukraine, 22-25, October, 2014). – Kiev, 2014. – С. 138-139.
44. Lysenko A. V. Cubic-nonlinear theory of the plasma-beam superheterodyne FEL dopplertron type with non-axial injection of electron beam / A. V. Lysenko, G. A. Oleksiienko // 11<sup>th</sup> International Conference «Electronics and Applied Physics» (APHYS 2015): Conference Proceedings, (Kiev, Ukraine, 21-24, October, 2015). – Kiev, 2015. – С. 145-146.
45. Лисенко О. В. Кубічна нелінійна теорія плазмово-пучкового супергетеродинного ЛВЕ доплертронного типу з неосьовою інжекцією електронного пучка / О. В. Лисенко, Г. А. Олексієнко // Міжнародна конференція молодих учених и аспірантів (ІЕФ-2015): Матеріали конференції, (Ужгород, Україна, 18-22 травня, 2015) .- Ужгород, 2015. – С. 65.
46. Лысенко А. В. Метод усредненных характеристик для решения мультигармонических задач в сильноточной электронике / А. В. Лысенко, Г. А. Алексеенко // Труды 17 международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2015): Труды конференции, (Харьков-Сумы, Украина, 8-13 июня, 2015). - Сумы, 2015. – С. 142-146.
47. Lysenko A. V. To the theory of superheterodyne plasma-beam free electron laser of the dopplertron type with non-axial electron beam entry / A. V. Lysenko, G. A. Oleksiienko // 24<sup>th</sup> International Crimean Conference Microwave and Telecommunication Technology (CriMiCo 2014): Conference Proceedings, (Sevastopol, Ukraine, 7-13, September, 2014). – Sevastopol, 2014. – С. 841-842.

48. Гуляев Ю.В. Супергетеродинное усиление электромагнитных волн / Ю.В. Гуляев, П.Е. Зильберман // ФТТ. – 1971. – Т. 13, № 4. – С. 955–957.
49. Mehdian H. Electron trajectory and growth rate in a two-stream electromagnetically pumped free electron laser and axial guide field / H. Mehdian, S. Saviz // Phys. Plasmas. – 2008. – Vol. 15, No. 9. – P. 093103(5).
50. Mehdian H. Two-stream instability in free electron lasers with a planar wiggler and an axial guide magnetic field / H. Mehdian, S. Saviz, A. Hasanbeigi // Phys. Plasmas – 2008. – Vol. 15, No. 4. – P. 043103(4).
51. Mehdian H. The effects of self-fields on the electron trajectory and gain in a two-stream electromagnetically pumped free-electron laser with axial guiding field / H. Mehdian, S. Saviz // Chin. Phys. B. – 2010. – Vol. 19, No. 1. – P. 014214.
52. Two-stream Smith–Purcell free-electron laser / W.Liu, Z.Yang, Z.Liang, D.Li, K.Imasaki //Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. – 2007. –Vol. 570, No. 1, – P. 171–175.
53. Comparison of self-fields effects in two-stream electromagnetically pumped FEL with ion-channel guiding and axial magnetic field / S. Saviz, H. Mehdian, F.M. Aghamir, M. Ghorannevis, A.A. Ashkarran // Journal of Plasma Physics. – 2011. – Vol. 77, No. 12. – P. 765–776.
54. Кулиш В.В. К теории супергетеродинных лазеров на свободных электронах клистронного типа / В.В. Кулиш // УФЖ. – 1991. – Т. 36, № 1. – С. 28–33.
55. Кулиш В.В. К теории релятивистских параметрических электронно-волновых лазеров на свободных электронах / В.В. Кулиш // УФЖ. – Т. 36, № 5. – 1991. – С. 686–693.
56. Кулиш В.В. К теории эффекта супергетеродинного усиления электромагнитных волн в плазме двухпучковой релятивистской

- электронной системы / В.В. Кулиш, В.П. Пугачев // Физика плазмы. – 1991. – Т. 17, № 6. – С. 696–705.
57. Кулиш В.В. Физика двухпучкового лазера на свободных электронах / В.В. Кулиш // Вестник МГУ. Серия: Физика и астрономия. – 1992. – Т. 33, № 3. – С. 64–78.
58. Лысенко А.В. Мультигармонические процессы в супергетеродинных лазерах на свободных электронах: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.04.01 / Лысенко Александр Владимирович. – Сумы, 2012. – 304 с.
59. Hasanbeigi A. Linear theory of quantum two-stream instability in a magnetized plasma with a transverse wiggler magnetic field / A. Hasanbeigi, S. Moghani, H. Mehdian // Laser and Particle Beams. – 2014. – Vol. 32. – No. 3. – P. 353-358.
60. Nadrifard S. Wave mode instabilities in a two-stream free-electron laser with a background plasma / S. Nadrifard, B. Maraghechi, T. Mohsenpour // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2013. – Vol. 55. – No. 2. – P. 025012.
61. Saviz S. Effects of self-fields on electron trajectory and gain in planar wiggler free-electron lasers with two-stream and ion-channel guiding / S. Saviz, M. Karimi // Chinese Physics B. — 2014. — Vol. 23, No. 3. — P. 034103.
62. Mohsenpour T. Self-field effects on instability of wave modes in a two-stream free-electron laser with an axial magnetic field / T. Mohsenpour, O.K.R. Rami // Phys. Plasmas. – 2014. – Vol. 21, No. 7. – P. 072113.
63. Mahdizadeh N. Saturation mechanism in a two-stream free-electron laser / N. Mahdizadeh // Journal of Plasma Physics. – 2015. – Vol. 81, No. 6. – P. 905810612.
64. Aghamir F.M. Effects of beam temperature and density variation on the growth rate of a two-stream free electron laser / F.M. Aghamir, N. Mahdizadeh // Phys. Plasmas. – 2012. – Т. 19. – №. 3. – С. 032114.
65. Mahdizadeh N. Effects of finite beam and plasma temperature on the growth rate of a two-stream free electron laser with background plasma / N.

- Mahdizadeh, F. M. Aghamir // *Journal of Applied Physics*. — 2013. — Vol. 113, No. 8. — P. 083305.
66. Meydanloo S. Dispersion relation and growth rate in two-stream thermal plasma-loaded free-electron laser with helical wiggler / S. Meydanloo, S. Saviz // *Journal of Theoretical and Applied Physics*. — 2014. — Vol. 9, No. 1. — P. 39–43.
67. Zolghadr S. H. Plasma and cyclotron frequency effects on output power of the plasma wave-pumped free-electron lasers / S. H. Zolghadr, S. Jafari, A. Raghavi // *Phys. Plasmas*. — 2016. — Vol. 23, No. 5. — P. 053104.
68. Ахиезер А.И. О взаимодействии пучков заряженных частиц с электронной плазмой / А.И. Ахиезер, Я.Б. Файнберг // *ДАН СССР*. — 1949. — Т. 69, № 4. — С. 555–556.
69. Bohm D. Theory of plasma oscillations. V. Excitation and Damping of Oscillations / D. Bohm, E.P. Gross // *Phys. Rev.* — 1949. — Vol. 75, No. 12. — P. 1864–1876.
70. Харченко И.Ф. Взаимодействие электронного пучка с плазмой / И.Ф. Харченко, Я.Б. Файнберг, Р.М. Николаев [и др.] // *ЖЭТФ*. — 1960. — Т. 38, № 3. — С. 685–690.
71. Trivelpiece A., Gould R. W. Spase charge waves in cylindrical plasma columns // *Journal Applied Physics*. — 1959. — V.30, №1. — P. 1744-1793.
72. Briggs R. J. *Electron-stream interaction whis plasmas*. Cambridge MA: MIT Press. — 1964.
73. Девидсон Р. Теория заряженной плазмы / Р. Девидсон ; пер. с англ. А.В. Агафонова. — М.: Мир, 1978. — 215 с.
74. Электродинамика плазмы / [ Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В. и др.] ; под ред. А.И. Ахиезера. — М.: Наука, 1974. — 719 с.
75. Кузелев М.В. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе. — М. : Наука, 1990. — 336 с.

76. Кузелев М.В. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, П.С. Стрелков. – М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002. – 544 с.
77. Krall N.A. Principles of Plasma Physics / N.A. Krall, A.W. Trivelpiece. – New York: San Francisco Press, 1986. – 686 p.
78. Bellan P. M. Fundamentals of plasma physics / P. M. Bellan. — Cambridge; New York : Cambridge University Press, 2008. — 628 p.
79. Александров А. Ф. Радиофизика. Физика электронных пучков и основы высокочастотной электроники / А. Ф. Александров, М. В. Кузелев. – М: Изд. КДУ, 2007 – 300 с.
80. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей: в 2 т. – Т. 1: Неустойчивости однородной плазмы / А.Б. Михайловский. – Изд. 2-е, исп. и доп. – М.: Атомиздат, 1975. – 272 с.
81. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей: в 2 т. – Т. 2: Неустойчивости неоднородной плазмы / А.Б. Михайловский. – Изд. 2-е, исп. и доп. – М.: Атомиздат, 1977. – 360 с.
82. Krasovitskiy V.B. Instabilities of relativistic electron beam in plasma / V.B. Krasovitskiy. – New York : Nova Publishers, 2008. – 219 p.
83. Bret A. Multidimensional electron beam-plasma instabilities in the relativistic regime / A. Bret, L. Gremillet, M. E. Dieckmann // Phys. Plasmas. — 2010. — Vol. 17, No. 12. — P. 120501.
84. Generation of high-power sub-thz waves in magnetized turbulent electron beam plasmas / M. K. A. Thumm, A. V. Arzhannikov, V. T. Astrelin [et al.] // Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. — 2013. — Vol. 35, No. 1. — P. 81–90.
85. Timofeev I.V. Exact kinetic theory for the instability of an electron beam in a hot magnetized plasma / I.V. Timofeev, V.V. Annenkov // Phys. Plasmas — 2013.— Vol. 20, No. 9. — 092123
86. Kuzelev M. V. On the theory of electromagnetic interactions of a relativistic electron beam and plasma in a coaxial waveguide in an external magnetic

- field / M. V. Kuzelev, E. A. Khapaeva // Moscow University Physics Bulletin. — 2015. — Vol. 69, No. 6. — P. 512–518.
87. Bret A. Multidimensional electron beam-plasma instabilities in the relativistic regime / A. Bret, L. Gremillet, M. E. Dieckmann // Phys. Plasmas — 2010.— Vol. 17, No. 12. — 120501
88. Tripathi V.K. Plasma effects in a free electron laser / V.K. Tripathi, C.S. Liu // IEEE Transactions on Plasma Science. — 1990. — Vol. 18, No. 3. — P. 466–471.
89. Liu C.S. Interaction of electromagnetic waves with electron beams and Plasmas / C.S. Liu, V.K. Tripathi. — Singapore : World Scientific, 1994. — 300 p.
90. Бобылев Ю.В. К нелинейной теории коллективного черенковского взаимодействия плотного релятивистского пучка с плазмой / Ю.В. Бобылев, М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе // Физика плазмы. — 2009. — Т. 35, № 6. — С. 533–541.
91. Бобылев Ю.В. Нелинейная теория релятивистских пучково-плазменных неустойчивостей в режиме коллективного эффекта Черенкова / Ю.В. Бобылев, М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе // Физика плазмы. — 2008. — Т. 34, № 2. — С. 122–139.
92. Кузелев М.В. Спонтанное и вынужденное излучение электрона, электронного сгустка и электронного пучка в плазме / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе // УФН. — 2008. — Т. 178, № 10. — С. 1025–1055.
93. Ponomarev A. V. Relativistic plasma-beam microwave amplifier / A.V. Ponomarev, P.S. Strelkov, A.G. Shkvarunets // Plasma Physics Reports. — 1998. — Vol. 24, No. 1. — P. 48–52.
94. Strelkov P. S. Plasma high-power microwave sources driven by relativistic electron beams / P.S. Strelkov // Journal of Technical Physics. — 2000. — Vol. 41, No. 1. — P. 469–483.
95. Basic theoretical formulations of plasma microwave electronics. I. a fluid model analysis of electron beam-wave interactions / L. Shenggang, R.J.

- Barker, Z. Dajun [et al.] // IEEE Transactions on Plasma Science. — 2000. — Vol. 28, No. 6. — P. 2135–2151.
96. Basic theoretical formulation of plasma microwave electronics. II. kinetic theory of electron beam-wave interactions / L. Shenggang, R.J. Barker, Y. Yung, Z. Dajun // IEEE Transactions on Plasma Science. — 2000. — Vol. 28, No. 6. — P. 2152–2165.
97. Liu S. Linear theory of the electron beam-wave-plasma interactions in a magnetized plasma waveguide / S. Liu, Y. Wei, X. Yuan, Y. Yan // Journal of Applied Physics. — 2007. — Vol. 101, No. 5. — P. 053309.
98. Bogdankevich I.L. Experimental study and numerical simulations of a plasma relativistic microwave amplifier / I.L. Bogdankevich, I.E. Ivanov, P.S. Strelkov // Plasma Physics Reports. — 2010. — Vol. 36, No. 9. — P. 762–771.
99. Kartashov I.N. Electromagnetic beam-plasma interactions in a magnetic field / I.N. Kartashov, M.V. Kuzelev, A.A. Rukhadze // Plasma Physics Reports. — 2009. — Vol. 35, № 2. — P. 169–176.
100. Kartashov I. N. Amplification of surface waves in a plasma waveguide by a straight relativistic electron beam in a finite magnetic field / I. N. Kartashov, M. V. Kuzelev, A. A. Rukhadze // Plasma Physics Reports. — 2004. — Vol. 30, No. 1. — P. 56–61.
101. Plasma relativistic microwave electronics / M. V. Kuzelev, O. T. Loza, A. A. Rukhadze [et al.] // Plasma Physics Reports. — 2001. — Vol. 27, No. 8. — P. 669–691.
102. Production of ultra-short high-power microwave pulses in čerenkov backward-wave systems (review) / N. S. Ginzburg, S. D. Korovin, I. V. Pegel [et al.] // Laser Physics. — 2006. — Vol. 16, No. 1. — P. 79–88.
103. Neufeld J. Interaction of a plasma with a “helical” electron beam / J. Neufeld, H. Wright // Physical Review. — 1964. — Vol. 135, No. 5A. — P. A1175–A1189.

104. Sugaya R. Experimental observation of explosive instability due to a helical electron beam / R. Sugaya, M. Sugawa, H. Nomoto // *Physical Review Letters*. — 1977. — Vol. 39, No. 1. — P. 27–31.
105. Chunyi W. Double-stream electron cyclotron maser / W. Chunyi, L. Shenggang // *International Journal of Electronics*. — 1984. — Vol. 57, No. 6. — P. 1191–1204.
106. Mohsenpour T. Instability of wave modes in a free-electron laser with a helical wiggler and ion-channel guiding / T. Mohsenpour, B. Maraghechi // *Phys. Plasmas* – 2008. – Vol. 15, N4. – P. 113101.1–113101.10.
107. Progress in theory of instabilities in a rotating plasma / A.B. Mikhailovskii, J.G. Lominadze, A.P. Churikov, V.D. Pustovitov // *Plasma Physics Reports*. – 2009. – Vol. 35, № 4. – P. 273–314.
108. Hemsing E. Helical electron-beam microbunching by harmonic coupling in a helical undulator / E. Hemsing, P. Musumeci, S. Reiche[et al.] // *Physical Review Letters*. — 2009. — Vol. 102, No. 17. — P. 174801.
109. Experimental and theoretical investigations of high power sub-millimeter wave emission at two-stream instability of high-current REB / A.V. Arzhannikov et. al. // *Fusion Science and Technology*. — 2013. — Vol. 63, No. 1T. — P. 82–87.
110. Saviz S. The effect of beam and plasma parameters on the four modes of plasma-loaded traveling-wave tube with tape helix / S. Saviz // *Journal of Theoretical and Applied Physics*. — 2014. — Vol. 8, No. 3. — P. 1–35.
111. Кузелев М.В. Методы теории волн в средах с дисперсией / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 272 с.
112. Мирошниченко В.И. Вынужденное когерентное рассеяние электромагнитной волны релятивистским электронным пучком в магнитном поле / В.И. Мирошниченко // *Физика плазмы*. – 1976. – Т. 2, № 5. – С. 789–794.
113. Kulish V.V. On the theory of a plasma-beam superheterodyne free electron laser with H-ubitron pumping / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, V.V. Koval //

- Technical Physics Letters. – 2009. – Vol. 35, No. 8. – P. 696–699.  
(Кулиш В.В. К теории плазма-пучковых супергетеродинных лазеров на свободных электронах с Н-убитронной накачкой / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, В.В. Коваль // Письма в ЖТФ. – 2009. – Т. 35, вып. 15. – С.25–32.)
114. Гапонов А.В. Взаимодействие непрямолинейных электронных потоков с электромагнитными волнами в линиях передачи // Изв. вузов. Радиофизика. — 1959. — Т. 2, № 3. — С. 450–462.
115. Schneider J. Stimulated emission of radiation by relativistic electrons in a magnetic field // Phys. Rev. Lett. — 1959. — V. 2, No. 12. — P. 504–505.
116. Pantell R.H. Electron beam interaction with fast waves // Proc. Symp. on Millimeter waves. — 1959. — V. 9. — P. 301.
117. Pantell R.H. Backward-wave oscillations in an unloaded waveguide // Proc. IRE. — 1959. — V. 47, No. 6. — P. 1146.
118. Трубецков Д.И. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков: в 2 т. – Т. 1 / Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов. – М. : Физматлит, 2003. – 496 с.
119. Трубецков Д.И. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков: в 2 т. – Т. 2 / Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов. – М. : Физматлит, 2004. – 648 с.
120. Li G. D. Terahertz electron cyclotron maser interactions with an axis-encircling electron beam / G. D. Li, S. H. Kao, P. C. Chang, K. R. Chu // Phys. Plasmas. — 2015. — Vol. 22, No. 4. — P. 043109.
121. Chu K. R. The electron cyclotron maser / K. R. Chu // Reviews of Modern Physics. — 2004. — Vol. 76, No. 2. — P. 489–540.
122. Miroshnichenko V. I. Forced coherent scattering of electromagnetic waves by a relativistic beam of oscillators / V. I. Miroshnichenko // Radiophysics and Quantum Electronics. — 1980. — Vol. 23, No. 3. — P. 252–259.

123. A quarter century of gyrotron research and development / V. L. Granatstein, B. Levush, B. G. Danly, R. K. Parker // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 1997. — Vol. 25, No. 6. — P. 1322–1335.
124. Nusinovich G. S. The gyrotron at 50: historical overview / G. S. Nusinovich, M. K. A. Thumm, M. I. Petelin // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. — 2014. — Vol. 35, No. 4. — P. 325–381.
125. Glyavin M. Y. Terahertz gyrotrons: state of the art and prospects / M. Y. Glyavin, G. G. Denisov, V. E. Zapevalov [et al.] // *Journal of Communications Technology and Electronics*. — 2014. — Vol. 59, No. 8. — P. 792–797.
126. Du C. H. Theoretical study of a fourth-harmonic 400-ghz gyrotron backward-wave oscillator / C.H. Du, H. Lee, X.B. Qi [et al.] // *IEEE Transactions on Electron Devices*. — 2015. — Vol. 62, No. 1. — P. 207–212.
127. Zai-Gao C. Theoretical and numerical studies on a planar gyrotron with transverse energy extraction / C. Zai-Gao, W. Jian-Guo, W. Yue // *Chinese Physics B*. — 2014. — Vol. 23, No. 10. — P. 108401.
128. Review of subterahertz and terahertz gyrodevices at iap ras and fir fu / V. Bratman, M. Glyavin, T. Idehara [et al.] // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2009. — Vol. 37, No. 1. — P. 36–43.
129. Dynamics and spectral composition of subterahertz emission from plasma column due to two-stream instability of strong relativistic electron beam / A.V. Arzhannikov, A.V. Burdakov, V.S. Burmasov [et al.] // *IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology*. — 2016. — Vol. 6, No. 2. — P. 245–252.
130. Zaboronkova T. M. Electromagnetic wave radiation by an electron beam spiraling in a magnetized plasma column / T. M. Zaboronkova, C. Krafft // *Phys. Plasmas*. — 2007. — Vol. 14, No. 6. — P. 062101.
131. Wang M. Effects of background plasma on free electron laser with planar wiggler / M. Wang, Z. Liang, Z. Yang // *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. — 2003. — Vol. 24, No. 6. — P. 1023–1033.

132. Zirak H. Dispersion relation and growth rate of a relativistic electron beam propagating through a langmuir wave wiggler / H. Zirak, S. Jafari // *Journal of Plasma Physics*. — 2015. — Vol. 81, No. 03. — P. 905810302
133. Bekefi G. Two-stream, free-electron lasers / G. Bekefi, K.D. Jacobs // *J. Appl. Phys.* – 1982. – Vol. 53, No. 6. – P. 4113–4121.
134. Strong-signal theory of a free-electron laser / F.A. Hopf, P. Meystre, M.O. Scully, W.H. Louisell // *Phys. Rev. Lett.* – 1976. – Vol. 37, No. 20. – P. 1342-1345.
135. Torre A. Free electron laser theory / A. Torre, G. Datolli // *CERN Sci. Rept.* – 1989. – Vol. 3. – P. 1–60.
136. Mishra P. K. A comparative study of the full dispersion relation, compton dispersion relation, and raman dispersion relation of a free-electron laser in helical wiggler and guiding magnetic fields / P. K. Mishra // *Laser Physics*. — 2006. — Vol. 16, No. 7. — P. 1050–1053.
137. Mishra P. K. Kinetic description of microwave Raman regime free-electron laser in the presence of helical wiggler and guiding magnetic fields / P. K. Mishra // *Optica Applicata*. — 2007. — Vol. 37, No. 1-2. — P. 195-204.
138. Mehdian H. Kinetic description of a free electron laser with an electromagnetic-wave wiggler and ion-channel guiding by using the einstein coefficient technique / H. Mehdian, S. AbasiRostami, A. Hasanbeigi // *Laser Physics*. — 2016. — Vol. 26, No. 4. — P. 045003.
139. Bahmani M. Influence of finite radial geometry on the growth rate of ion-channel free electron laser / M. Bahmani, A. Hasanbeigi, H. Hamzhepour // *Phys. Plasmas*. — 2013. — Vol. 20, No. 11. — P. 113114.
140. Hasanbeigi A. Growth rate enhancement of free-electron laser by two consecutive wigglers with axial magnetic field / A. Hasanbeigi, A. Farhadian, E. K. Bidhendi // *Pramana*. — 2014. — Vol. 82, No. 6. — P. 1049–1060.
141. Mehdian H. Self-fields in a free-electron laser with electromagnetic-wave wiggler and ion-channel guiding / H. Mehdian, A. Hasanbeigi, S. Jafari // *Phys. Plasmas*. — 2008. — Vol. 15, No. 12. — P. 123101.

142. Mehdian H. Free-electron laser harmonic generation in an electromagnetic-wave wiggler and ion channel guiding / H. Mehdian, A. Hasanbeigi, S. Jafari // *Phys. Plasmas*. — 2010. — Vol. 17, No. 2. — P. 023112.
143. Classical theory of a free-electron laser / F.A. Hopf, P. Meystre, M.O. Scully, W.H. Louisell // *Optics Communications*. — 1976. — Vol. 18, No. 4. — P. 413–416.
144. Лазер на свободных электронах с точки зрения лазерной физики / F.A. Hopf, T.G. Kuper, G.T. Moore, M.O. Scully // Генераторы когерентного излучения на свободных электронах / пер. с англ. под А.А. Рухадзе. — М.: Мир, 1983. — С. 7–41.
145. Федоров М.В. Электрон в сильном световом поле / М.В. Федоров. — М.: Наука, 1991. — 223 с.
146. Colson W.B. One-body analysis of free electron lasers / W.B. Colson // *Physics of Quantum Electronics*. — 1977. — Vol. 5. — P. 152–196.
147. Colson W.B. Fundamental free electron laser theory and new principles for advanced devices / W.B. Colson // *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.* — 1987. — Vol. 738. — P. 2–27.
148. Colson W.B. Лазеры на свободных электронах: уравнения Максвелла с одночастичными токами / W.B. Colson, S.K. Ride // Генераторы когерентного излучения на свободных электронах / Под ред. проф. Рухадзе А.А. — М.: Мир, 1983. — С. 42–68.
149. McMullin W.A. Stochastic particle instability for electron motion in combined helical wiggler, radiation, and longitudinal wave fields / W.A. McMullin, R.C. Davidson // *Phys. Rev. A* — 1982. — Vol. 26. — P. 410-422.
150. Сигов Ю.С. Численные методы кинетической теории плазмы: Учеб. пособие / Ю.С. Сигов. — М.: Изд-во МФТИ, 1984. — 94 с.
151. Численное моделирование различных механизмов стабилизации неустойчивости релятивистского электронного пучка в плотной плазме /

- Ю.В. Бобылёв, В. А. Панин, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе // Прикладная физика. — 2010. — №. 4. — С. 75-90.
152. Clark D. S. Particle-in-cell simulations of Raman laser amplification in preformed plasmas / D. S. Clark, N. J. Fisch // Phys. Plasmas. — 2003. — Vol. 10, No. 12. — P. 4848–4855.
153. Birdsall C. K. Plasma physics via computer simulation / C. K. Birdsall, A. B. Langdon. — New York : CRC Press, 2004. — 504 p.
154. Kargarian A. Nonlinear absorption of short intense laser pulse in multispecies plasma / A. Kargarian, K. Hajisharifi, H. Mehdian // Phys. Plasmas. — 2016. — Vol. 23, No. 8. — P. 082116.
155. Output power fluctuations due to different weights of macro particles used in particle-in-cell simulations of cerenkov devices / R. Bao, H. Wang, Y. Li, C. Liu // Phys. Plasmas. — 2016. — Vol. 23, No. 7. — P. 073114.
156. Куліш В.В. Ієрархічний метод та технічні особливості його застосування у нелінійних задачах електродинаміки. Загальна теорія / В.В. Куліш // УФЖ. — 1998. — Т. 43, № 4. — С. 483 – 499.
157. Куліш В.В. Ієрархічний підхід до нелінійно-резонансних проблем електродинаміки / В.В. Куліш // Вісник Сумського державного університету. — 1997. — №6. — С. 2-10.
158. Савченко В.І. Метод усереднених характеристик та його застосування у нелінійних задачах релятивістської електродинаміки: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.04.02 / Савченко Валерій Іванович. — Київ, 2005. — 142 с.
159. Крылов Н.М. Введение в нелинейную механику / Н.М.Крылов, Н.Н. Боголюбов. — Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. — 352 с.
160. Гребенников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах / Е.А. Гребенников. - М.:Наука, 1986. — 256 с.
161. Шматько А.А. Электронно-волновые системы миллиметрового диапазона / А.А. Шматько. — Х. : Харьк. нац. ун-т им. В.Н. Каразина, 2008. — 464 с.

162. Шматько А.А. Электронные приборы сверхвысоких частот / А.А. Шматько. – Х. : Харьк. нац. ун-т им. В.Н. Каразина, 2006. – 328 с.
163. Molokovsky S.I. Intense electron and ion beams / S.I. Molokovsky, A.D. Sushkov. – Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2005. – 293 p.
164. Сушков А.Д. Вакуумная электроника: физико-технические основы / А.Д. Сушков. – СПб.: Издательство «Лань», 2004. – 464 с.
165. Reiser M. Theory and design of charged particle beams / M. Reiser. – Weinheim : Wiley, 2008. – 674 p.