

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Наукове товариство студентів, аспірантів,
докторантів і молодих вчених СумДУ

ПЕРШИЙ КРОК У НАУКУ

Матеріали
VIII студентської конференції
(Суми, 11 грудня 2016 року)



Суми
Сумський державний університет
2016

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДІОФАНТОВИХ РІВНЯНЬ

Синиця О., Сумська спеціалізована школа I-III ступенів № 7, учень 10 класу.

Розв'язок рівнянь в цілих числах є однією з стародавніх математичних задач. Основне джерело, яке дійшло до наших часів – видання праці Діофанта «Арифметика». На жаль, з тринадцяти книг, що входили до цього видання, тільки шість збереглися до Середніх віків, саме вони і стали джерелом натхнення для багатьох математиків.

Сучасна постановка задач була дана великим Ферма. Саме він поставив питання про розв'язок так званих невизначених рівнянь тільки в цілих числах. В таких рівняннях кількість невідомих більша ніж кількість рівнянь. Тому такі рівняння й називають невизначеними.

В даній роботі розглядаються деякі теоретичні питання, що стосуються існування і структури розв'язків лінійних діофантових рівнянь, а також на прикладах розв'язку конкретних задач розповідаємо про основні методи їх розв'язання.

Діофантовими рівняннями є рівняння виду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \quad (1)$$

де a_1, a_2, \dots, a_n – коефіцієнти рівняння; x_1, x_2, \dots, x_n – невідомі величини; b – відома величина або права частина рівняння.

Ставиться проблема знаходження не любих розв'язків діофантових рівнянь, а лише цілих. Тому в процесі розв'язання виникають питання щодо існування розв'язку взагалі, а якщо такі існують, то постає питання про їх кількість. Тому цікавим є дослідження теоретичних умов існування, структури та кількості розв'язків діофантових рівнянь.

Звичайно, кожна конкретна задача в цілих числах може бути розв'язана за допомогою різних методів: алгоритма Евкліда, бінарного алгоритму, методу нескінченного спуску або методу найменшого множника.

Нашою метою є вивчення можливостей теорії лінійних діофантових рівнянь.

Найпростіші з лінійних рівнянь мають вигляд

$$ax + by = c \quad (2)$$

і містять дві невідомі величини $x, y \in Z$ і три відомі $a, b, c \in Z$.

Перш за все треба відмітити, що рівняння (2), так само як і рівняння (1), може і не мати цілочисельного розв'язку.

Отже, ми повинні сформулювати умову, при виконанні якої діофантові рівняння загального вигляду (2) мають розв'язок, але спочатку розглядаються більш прості діофантові рівняння, які називаються однорідними.

Лінійне рівняння виду

$$ax + by = 0 \quad (3)$$

називається однорідним. Тобто це таке рівняння, у якого права частина дорівнює нулю ($c=0$).

Міркування про розв'язок можна сформулювати у вигляді теореми, яка дає повний розв'язок однорідних рівнянь виду (3) в цілих числах.

Для розв'язання рівняння (2), а потім і більш складного рівняння (1), нам необхідні деякі знання з теорії подільності цілих чисел.

Спираючись на властивості подільності цілих чисел, формулюючи одну важливу теорему про подільність із залишком, поєднуючи алгоритм Евкліда та бінарний алгоритм, досліджуємо умови існування розв'язку діофантового рівняння в цілих числах та умови існування інших розв'язків діофантового рівняння.

Формулюємо та доводимо необхідну і достатню теорему існування розв'язку діофантового рівняння (2) у цілих числах.

Інші методи, зокрема, метод нескінченного спуску або метод найменшого множника та метод розсіювання показані на прикладах розв'язання конкретних практичних задач з теоретичним обґрунтуванням існування та кількості розв'язків.

Діофантові рівняння як математичні моделі можна застосувати до вирішення проблем прикладного характеру. Конкретні приклади та задачі розв'язувались різними методами з акцентом на теоретичному обґрунтуванні отриманих результатів та умов існування розв'язків. При цьому досліджувалися теоретичні аспекти застосування методів розв'язання діофантових рівнянь.

Великий інтерес представляють також історичні аспекти досліджуваної проблеми.

Керівник: Ніколенко В.В., *ст. викладач.*