

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ

Конспект лекцій

для студентів спеціальності
8.080303 „Динаміка і міцність”
денної форми навчання

Частина 1 Напружено-деформований стан
у точці тіла. Плоска задача теорії пружності
в декартових координатах

Затверджено
на засіданні кафедри
ЗМ і ДМ як конспект
лекцій з дисципліни
«Теорія пружності»
Протокол № 4 від 23.12.2009

Суми
Видавництво СумДУ
2010

Теорія пружності: конспект лекцій. Частина 1
Напружено-деформований стан у точці тіла. Плоска
задача теорії пружності в декартових координатах
/Укладач Ю.Я. Тарасевич. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. –
116 с.

Кафедра загальної механіки та динаміки машин

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ

Конспект лекцій

Суми
Видавництво СумДУ
2010

ЗМІСТ

ВСТУП	3
ТЕОРІЯ НАПРУЖЕНЬ	
Навантаження і напруження.....	7
Дослідження напруженого стану в довільній точці тіла. Тензор напружень.....	17
Перетворення складових напружень до нових осей координат.....	22
Поверхня напруження. Головні напруження.....	24
Кола Мора.....	29
Розкладання тензора напружень на кульовий тензор і девіатор напружень. Напруження на октаедричній площадці.....	33
Диференціальні рівняння рівноваги елементарного паралелепіпеда.....	36
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	41
ТЕОРІЯ ДЕФОРМАЦІЇ	
Залежності між складовими переміщень і деформаціями.....	43
Рівняння спільності деформацій.....	48
Відносна лінійна деформація в довільному напрямі. Головні деформації.....	51
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	55
ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ	
Узагальнений закон Гука. Фізичні рівняння.....	56
Закон пружної зміни об'єму.....	61
Вираз напружень через деформації.....	63
Основні рівняння теорії пружності та методи їх розв'язання.....	65

Розв'язання задачі теорії пружності в переміщеннях.....	71
Розв'язання задачі теорії пружності в напруженнях.....	73
Питома потенційна енергія деформації.....	75
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>78</i>
ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТАХ	
Плоска деформація.....	79
Узагальнений плоский напружений стан. Властивості функції напружень.....	86
Розв'язання плоскої задачі за допомогою цілих поліномів.....	93
Вигин консолі силою, прикладеною до вільного кінця.....	100
Вигин балки на двох опорах рівномірно розподіленим навантаженням.....	106
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>111</i>
ВИСНОВКИ.....	112
Список використаної літератури.....	115

ВСТУП

Теорія пружності сформувалася як один із важливих розділів математичної фізики у першій половині XIX сторіччя. До цього часу працями вчених XVII та XVIII ст. Галілея, Маріотта, Гука, Бернуллі, Ейлера, Кулона та ін. була детально розроблена теорія вигинання тонких пружних стрижнів. На початку XIX ст. Лагранжем та Софі-Жермен був отриманий розв'язок задачі про вигинання та коливання тонких пружних пластинок. Основи теорії пружності належать французьким математиками і механікам Коші, Нав'є та Пуассону, які отримали основні диференційні рівняння цієї теорії. Великий внесок у створення теорії пружності зробили такі видатні вчені, як М.В. Остроградський, Ламе, Сен-Венан, Грін, Максвелл, Релей, Мічел, Матьє, Ф.С. Ясинський, С.П. Тимошенко, Г.В. Колосов, М.І. Мухелішвілі та ін.

Основною метою теорії пружності є вивчення дії сил на пружні тіла та визначення тих напружень і деформацій, що при цьому виникають, як у стані рівноваги, так і у стані руху.

Ті самі задачі є основними і в курсі опору матеріалів. Однак методами опору матеріалів неможливо розв'язувати задачі з визначення напруженого і деформованого станів тіла, якщо його форма відмінна від звичайного стрижня чи бруса і являє собою, наприклад, пластину чи оболонку і т.п. Можна сказати, що в теорії пружності використовуються більш загальні передумови та методи розв'язання цих задач. Тобто теорія пружності дозволяє отримувати більш точні розв'язки поставленої задачі, хоча це не виключає використання різних приблизних методів розв'язання задач у теорії пружності.

Висновки теорії пружності широко використовуються у різних галузях науки і техніки. Інженери-будівельники

використовують висновки та методи теорії пружності для розрахунку напружень і деформацій в інженерних спорудах. Інженери-механіки займаються тими самими питаннями у машинобудуванні (визначають запаси міцності). Геологи використовують теорію пружності для визначення тиску горних порід. Фізики широко використовують теорію пружності при розробленні хвильової теорії світла. Розв'язок цілого ряду задач газодинаміки та аерогідродинаміки, що прямо не стосуються розрахунку на міцність, зводиться до розгляду рівнянь, що є подібними з рівняннями теорії пружності.

Отже, інженер будь-якої спеціальності прямо або побічно використовує результати та методи теорії пружності.

ТЕОРІЯ НАПРУЖЕНЬ

Навантаження і напруження

Основною задачею теорії пружності є визначення за заданими зовнішніми силами, що діють на тверде тіло, змін форми, яких тіло зазнає і тих внутрішніх сил пружності, які при цих змінах форми виникають між частинами тіла. У такому загальному вигляді задача теорії пружності повністю ще не розв'язана, але існує цілий ряд достатньо повно досліджених окремих випадків, результати яких можна використовувати при розв'язанні важливих технічних задач, коли необхідно визначити характеристики міцності елементів машин і конструкцій. За допомогою теорії пружності можуть бути перевірені розв'язки, одержані з використанням припущень опору матеріалів, і встановлені межі застосовності цих розв'язків. У теорії пружності задачі розв'язуються з меншим числом припущень, що ускладнює математичні прийоми, які використовуються для розв'язання. У цьому конспекті буде розглянуто лінійну теорію пружності, в якій передбачається існування лінійної залежності між напруженнями і деформаціями. Для ряду матеріалів (гума, деякі сорти чавуну) така залежність не може бути встановлена (діаграма $\sigma - \varepsilon$ - криволінійна). При дослідженні таких матеріалів необхідно користуватися залежностями нелінійної теорії пружності.

Не зважаючи на стрімкий розвиток науки і техніки, знань, що існують на сьогоднішній день, недостатньо для побудови теорії пружності, в якій би розглядалася дійсна будова твердих тіл. Тому надалі буде використано поняття ідеально пружного тіла, яке володіє такими властивостями, щоб отримані аналітичні результати якомога точніше узгоджувалися з даними досліду.

У теоретичній механіці під твердим тілом мають на увазі систему незмінно зв'язаних між собою матеріальних

точок. При дії на таке тіло зовнішніх сил відстані між окремими його точками не змінюються, тому внутрішні сили не входять в рівняння рівноваги і внутрішня будова тіла не розглядається. Насправді необхідно враховувати здатність твердих тіл змінювати свою форму під дією зовнішніх сил, а при цьому слід враховувати внутрішню будову тіла.

При розв'язанні задач лінійної теорії пружності вважають справедливими такі припущення

1 *Речовина ідеально пружного тіла безперервно розподілена по його об'єму.* У випадках, коли з цього тіла виділяються нескінченно малі елементи, вважається, що ці елементи мають ті самі фізичні властивості, що й ідеальне пружне тіло. Таке припущення дозволяє не розглядати реальну структуру матеріалу (кристалічна, зерниста, бульбашкова), а розглядати його як аморфне середовище, що безперервно заповнює даний об'єм.

2 *Ідеально пружне тіло однорідне.* Це означає, що механічні властивості в будь-якій точці тіла однакові, тобто в усіх точках тіла при одних і тих самих напруженнях виникають однакові деформації. Дане припущення дозволяє вважати розподіл внутрішніх сил за об'ємом безперервним.

3 *Ідеально пружне тіло ізотропне.* Це означає, що пружні властивості в кожній його точці однакові на всіх напрямках.

4 За відсутності зовнішніх сил і при певній температурі пружне тіло має певну форму і певний об'єм. Цей стан тіла називається *природним станом*. На підставі цього припущення початковий напружений (деформований) стан тіла, що виник до прикладання силових дій, не враховується, тобто припускається, що у момент навантаження тіла деформації і напруження в будь-якій його точці дорівнюють нулю.

5 *Про малість деформацій*, тобто припускається, що відносні лінійні і кутові деформації малі порівняно з одиницею.

6 При видаленні зовнішніх сил деформоване пружне тіло повертається до свого природного стану, що відповідає даній температурі. Таким чином, природний стан ідеального пружного тіла при даній температурі є стійкою формою рівноваги при цій температурі.

Пружне тіло володіє властивістю накопичення в собі енергії в зворотній формі. Це означає, що для того щоб викликати деформацію тіла, потрібно витратити певну кількість роботи і, навпаки, така ж кількість роботи звільняється при видаленні зовнішніх сил, коли тіло повертається до свого природного стану (припускається, що при деформації температура тіла є постійною).

Переліченими властивостями ідеального пружного тіла більшою чи меншою мірою володіють тіла, з якими доводиться стикатися при різних технічних розрахунках. Такі матеріали, як залізо і сталь, до яких звичайно застосовуються висновки теорії пружності, володіють достатньо однорідною будовою, і якщо деформації не виходять за відомі межі, то матеріали ці можна вважати ідеально пружними; вони повертаються до свого природного стану, якщо видалити сили, що викликали деформації. При цьому не враховуються такі явища, як гістерезис¹ та вплив часу на деформацію. Але для таких матеріалів, як залізо і сталь, вони не мають істотного практичного значення. Чавун, камінь і дерево за своїми властивостями більше відрізняються від однорідного ідеально пружного тіла, і висновки теорії пружності з

¹ Гістерезис – (від греч. hysteresis – запізнення) – різна реакція фізичного тіла (різні деформації) на зовнішні впливи залежно від того, чи прикладалися до тіла ці впливи раніше, чи воно зазнає їх дії вперше

набагато меншою точністю можуть бути застосовні і до цих матеріалів. У цьому випадку результати теорії пружності в застосуванні до цих матеріалів можна розглядати як перше наближення.

При розв'язанні задач теорії пружності користуються *теоремою про єдиність розв'язку: якщо задані зовнішні поверхневі та об'ємні сили перебувають в рівновазі, їм відповідає одна єдина система напружень і переміщень.* Щоб при постійній температурі змінити форму тіла, необхідно прикласти зовнішні сили. Кожній зміні форми тіла відповідає своя система зовнішніх сил. Положення про єдиність розв'язку справедливе, якщо тільки справедливі припущення про природний стан тіла (інакше можлива незліченна кількість розв'язків) і припущення про лінійну залежність між деформаціями і зовнішніми силами.

Застосування точного розв'язку задачі, отриманого за певних умов на контурі для приблизної оцінки напружень за дещо змінених умов, виробляється на підставі принципу, вперше сформульованого Сен-Венаном. Згідно з цим принципом система взаємно зрівноважених сил, розподілених по малій частині поверхні тіла, що деформується, викликає напруження, що швидко убивають з віддаленням від місця прикладання цих сил. Тобто якщо зовнішні сили, прикладені на невеликій ділянці пружного тіла, замінити діючою на тій самій ділянці статично еквівалентною системою сил (що має той самий головний вектор і той самий головний момент), то ця заміна викличе лише зміну місцевих деформацій. У точках, віддалених від місця прикладання зазначеної вище системи сил на великі відстані (тобто відстані, великі порівняно з лінійними розмірами тієї частини поверхні, по якій розподілені сили), відповідні напруження можна вважати малими.

У застосуванні до вигину балки з одним защемленим кінцем принцип Сен-Венана дає можливість встановити,

що зміну розподілу згинальної сили Q або зміни в умовах закріплення можуть викликати значні зміни в розподілі напружень лише на кінцях балки. Ці зміни матимуть характер місцевих напружень, що швидко убувають з віддаленням від кінців балки. Для балки, у якої висота мала порівняно з прольотом, розподіл напружень в більшій частині прольоту вже залежатиме від способу прикладання згинальної сили і способу закріплення кінця.

Зовнішні сили. У теорії пружності розрізняють два роди сил: сили, прикладені до поверхні тіла, що деформується (*поверхневі сили*), і сили, розподілені по об'єму тіла (*об'ємні сили*). Якщо порівнювати з теоретичною механікою, то там, як правило, мають справу із зосередженими силами, тобто з точковими силами, що діють у точці.

Об'ємні сили безперервно розподіляються по об'єму. До об'ємних сил відносять: силу тяжіння (вагу) і гравітаційні сили, що підпорядковуються закону всесвітнього тяжіння Ньютона; електромагнітні сили; сили інерції, які вводяться при вивченні руху в неінерційних системах координат. Якщо через ρ позначити густину тіла, то проекції на координатні осі об'ємної сили, що діє на елементарний прямокутний паралелепіпед dx, dy, dz , будуть такими: $\rho X dx dy dz$, $\rho Y dx dy dz$, $\rho Z dx dy dz$, де X, Y, Z - проекції на координатні осі об'ємної сили, що припадає на одиницю маси тіла.

Поверхневі сили (навантаження) виникають в результаті тиску на дане тіло яких-небудь інших тіл. Вони можуть розподілятися по поверхні тіла безперервно, як, наприклад, у випадку гідростатичного тиску, тиску снігу, вітру і т.д., або можуть представлятися окремими зосередженими силами. Зосереджені сили завжди можна розглядати як граничний випадок розподіленого навантаження, потрібно тільки припустити, що частина

поверхні, по якій сили розподілені, достатньо мала порівняно з поверхнею тіла. Поверхневі сили існують в будь-якій точці пружного тіла, вони називаються силами внутрішніх напружень (напруженнями). Головний вектор і головний момент цих сил усередині виділеного об'єму, через третій закон Ньютона, зрівноважені.

Компоненти напружень. Розглянемо тіло AB (рис. 1), що перебуває в рівновазі під дією системи поверхневих і об'ємних сил. Стан тіла під дією прикладених до нього зовнішніх сил називається напруженим станом. У думках перетнемо тіло AB поверхнею mn на дві частини і розглянемо умови рівноваги однієї з цих частин, наприклад частини A . Зовнішні сили P_1, P_2, P_3, \dots , які безпосередньо прикладені до частини A , у загальному випадку не є системою сил, що взаємно зрівноважуються. Проте дана частина A , як частина тіла, що перебуває в рівновазі, теж перебуває в рівновазі. Для забезпечення цієї рівноваги необхідно припустити, що по перетину mn діють деякі сили P_1, P_2, P_3, \dots , що врівноважують сили, прикладені до частини A . Ці сили являють собою не що інше як дію частини тіла B на частину A . Це і є внутрішні сили пружності, які, вважатимемо, безперервно розподілені по перетину mn . У простому випадку розтягування призматичного стрижня силами, що діють уздовж його осі, внутрішні сили пружності розподіляються, як це відомо з елементарного курсу опору матеріалів, рівномірно по поверхні плоского поперечного перетину, і, користуючись рівняннями статички, можна легко визначити рівнодійну внутрішніх сил пружності, що припадають на одиницю поверхні поперечного перетину. Ця *рівнодійна, що характеризує інтенсивність внутрішніх сил, називається напруженням.*

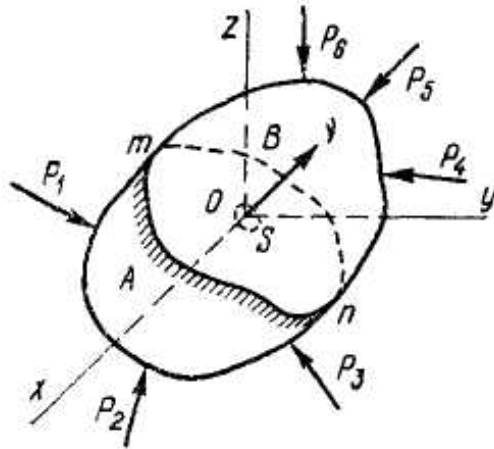


Рисунок 1 - До визначення напруження по площадці

Напруження, так само, як і поверхнєве навантаження, виражаються в Н/м^2 (Па).

У загальному випадку внутрішні сили пружності розподіляються по перетину mn нерівномірно, і для встановлення їх інтенсивності в якій-небудь точці O необхідно: виділити біля точки O з поверхні mn малу площадку S . Внутрішні сили пружності, що припадають на цю площадку, можна звести до однієї рівнодійної R , прикладеної в точці O , і до пари сил M , якщо стягувати контур, що обмежує площадку S , таким чином, щоб точка O весь час залишалася всередині контуру. Площадка S при цьому нескінченно зменшуватиметься, разом із тим прямують до нуля величини R і M . Границя відношення R/S , що характеризує інтенсивність внутрішніх сил пружності, представляє величину напруження в точці O по S :

$$P = \lim_{S \rightarrow 0} \left(\frac{R}{S} \right).$$

Крім величини, напруження характеризується напрямом. За напрям напруження в точці O по площадці S беруть напрям рівнодійної R (вважається, що відношення M/S при нескінченному зменшенні площадки S прямує до нуля).

Через точку O можна провести в різних напрямках незліченну безліч площадок. Для кожної з цих площадок напруження матиме визначені величину і напрям. Тому, кажучи про напруження в точці, необхідно завжди зазначати, до якої саме площадки це напруження належить. У теорії пружності напрям площадки визначається напрямом її зовнішньої нормалі до тієї частини тіла, рівновага якої вивчається. У даному випадку (рис.1) нормаль напрямлена із заштрихованої частини A у незаштриховану частину B .

У загальному випадку напрями напруження і нормалі не збігаються. Тому напруження можна розкласти на дві складові (рис.2):

$$p = \sqrt{p_n^2 + p_\tau^2} = \sqrt{p_n^2 + p_{\tau 1}^2 + p_{\tau 2}^2}, \quad (1)$$

де p_n - проекція повного напруження на нормаль (нормальне напруження), $p_\tau = \sqrt{p_{\tau 1}^2 + p_{\tau 2}^2}$ - складова в площині площадки (дотичне напруження).

Напруження по площадці з нормаллю n також можна задати величинами трьох його проекцій на прямокутні координатні осі x, y, z . Ці проекції позначимо так: P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} , де n визначає напрям нормалі тієї площадки S , по якій діє напруження. Тоді проекцію напруження по якій-небудь площадці на напрям зовнішньої нормалі n до цієї площадки можна подати у вигляді

$$P_{nx} \cos(x, n) + P_{ny} \cos(y, n) + P_{nz} \cos(z, n). \quad (2)$$

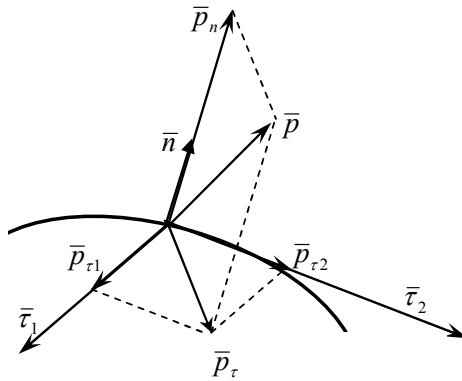


Рисунок 2 – Складові повного напруження

Якщо нормальне напруження збігається з напрямом зовнішньої нормалі, то воно викликає розтягування матеріалу, інакше - стиснення. *Нормальне напруження позитивне, якщо воно таке, що розтягує, і від'ємне, якщо воно стискальне.* Дотичне напруження прагне провести зсув або зріз по площадці S , тому його називають зсувним або зрізаючим напруженням.

Якщо перетин тіла або площадка S є паралельними одній з площин координат, наприклад yz , то нормалю до цієї площадки буде третя вісь координат x , а складові напруження матимуть позначення σ_x , τ_{xy} і τ_{xz} (рис. 3). У цих позначеннях для дотичних напружень перший індекс указує нормаль до площадки по якій діє це напруження, а другий – вісь, на яку воно проектується.

Для дотичних напружень, для площадок, паралельних координатним осям, введемо таке правило визначення знаків: якщо зовнішня нормаль до взятої площадки збігається з позитивним напрямом однієї з координатних осей, то позитивні напрями складових дотичного напруження вважаються такими, що збігаються з позитивними напрямками двох інших осей.

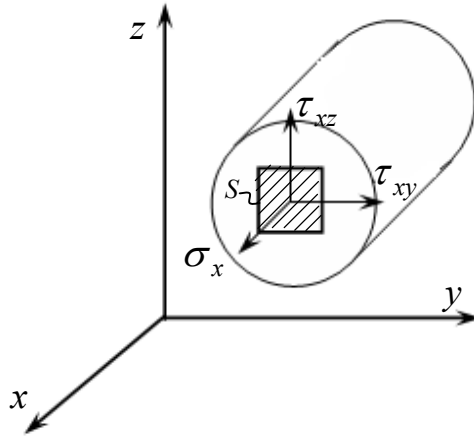


Рисунок 3 – Складові напруження в площині $y\theta z$

Позначення, взяті для напружень, можна використовувати також і для зовнішніх сил, розподілених по поверхні тіла. Якщо елементарна площадка збігається з поверхнею тіла, то поверхневі сили, прикладені до цієї площадки, виконуватимуть таку саму роль, що і внутрішні сили пружності. Складові характеризуватимуть інтенсивність розподілених поверхневих сил, прикладених до виділеної на поверхні тіла площадки.

Якщо через дану точку не можна провести жодної площадки, на якій дотичні і нормальні напруження дорівнювали б нулю, то в цій точці маємо *об'ємний (тривісний) напружений стан*. Якщо на одній площадці, що проходить через дану точку тіла, дотичні і нормальні напруження є такими, що дорівнюють нулю, то в цій точці має місце *плоский (двовісний) напружений стан*. Якщо ж дотичні і нормальні напруження є такими, що дорівнюють нулю на двох площадках, що проходять через дану точку тіла, то в цій точці маємо *лінійний (одновісний) напружений стан*. В останньому випадку дотичні і нормальні напруження будуть дорівнювати нулю і на всіх

площадках, що проходять через лінію перетину зазначених двох площадок.

Плоский і лінійний напружений стан є окремими випадками об'ємного напруженого стану.

Дослідження напруженого стану в довільній точці тіла. Тензор напружень

Покажемо, що напруження на будь-якій площадці, що проходить через т. O , може бути знайдене, якщо відомі напруження по трьох взаємно перпендикулярних площадках, що проходять через ту саму точку. Візьмемо ці площадки за координатні площини. Нехай n - напрям нормалі до тієї площадки, для якої потрібно знайти напруження. Проведемо площину ABC (рис. 4), перпендикулярну до n , так, щоб вона з координатними площинами вирізувала з тіла нескінченно малий тетраедр $OABC$, і розглянемо умови рівноваги цього тетраедра. Напруження вважатимемо безперервними функціями координат x, y, z . Позитивні напрями напружень по кожній з граней, що відповідають раніше прийнятим позначенням, зазначені на рисунку. Позначимо через S площу грані ABC , тоді площі граней, перпендикулярних до осей x, y, z , будуть відповідно дорівнювати:

$$S \cos(x, n), S \cos(y, n), S \cos(z, n).$$

Проектуючи всі поверхневі сили, прикладені до елемента $OABC$, на напрям осі x , отримаємо таке рівняння рівноваги:

$$P_{mx} S - \sigma_x S \cos(x, n) - \tau_{xy} S \cos(y, n) - \tau_{xz} S \cos(z, n) = 0.$$

Аналогічно отримаємо і два інші рівняння. Скорочуючи все на S , представимо рівняння рівноваги в такій формі:

$$\begin{cases} P_{nx} = \sigma_x \cos(x, n) + \tau_{xy} \cos(y, n) + \tau_{xz} \cos(z, n); \\ P_{ny} = \tau_{yx} \cos(x, n) + \sigma_y \cos(y, n) + \tau_{yz} \cos(z, n); \\ P_{nz} = \tau_{zx} \cos(x, n) + \tau_{zy} \cos(y, n) + \sigma_z \cos(z, n). \end{cases} \quad (3)$$

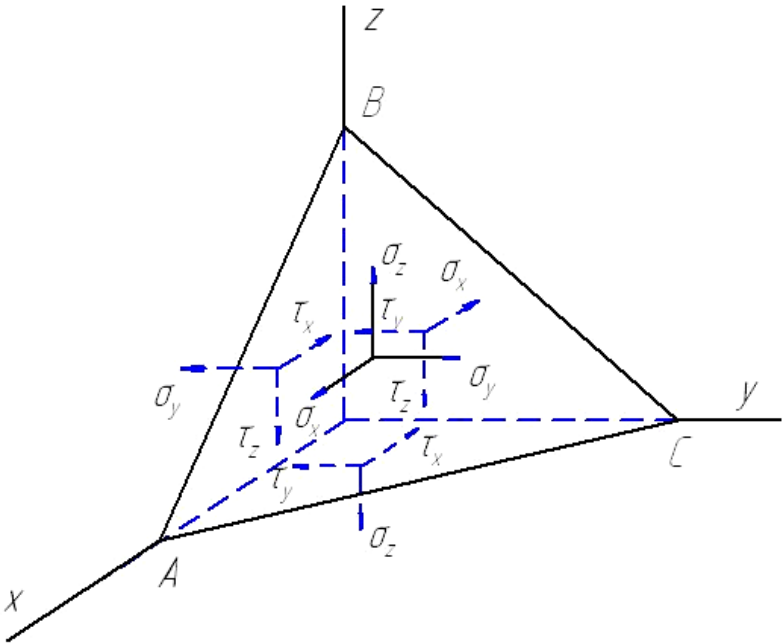


Рисунок 4 - Напруження на гранях елементарного тетраедра

Рівняння (3) дають можливість обчислити проекції напруження на похилій площадці ABC , якщо відомі напруження на площадках, що збігаються з координатними площинами, і оскільки площадка ABC може бути проведена як завгодно близько від точки O , то отримані з рівнянь (3) проекції P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} визначають шукане напруження на площадці з нормаллю n , що проходить через точку O .

До цих рівнянь не ввійшли об'ємні сили, оскільки вони дадуть доданки третього порядку малості $\left(\rho X dV = \rho X \frac{dx dy dz}{6} \right)$, тоді як решта членів першого рівняння (3) мають другий порядок малості.

Рівняння (3), отримані для точки O , що лежить усередині тіла, залишаються діючими і тоді, коли грань ABC елементарного тетраедра збігається з зовнішньою поверхнею тіла. Якщо розділити просторове тіло довільної форми системою взаємно перпендикулярних площин xOy , yOz і xOz (рис. 5) на ряд елементарних паралелепіпедів, то у поверхні тіла при цьому утворюються елементарні тетраедри (криволінійні ділянки поверхні, зважаючи на їх малість, можна замінити площинами). У цьому випадку p_n представлятиме навантаження на поверхні, а рівняння (3) пов'язуватимуть це навантаження з напруженнями σ_i і τ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) в тілі, тобто представлятимуть граничні умови задачі теорії пружності. Умови, визначувані цими рівняннями, називають *умовами на поверхні*.

Величини P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} можна розглядати як інтенсивність суцільного навантаження, розподіленого по поверхні тіла. Оскільки раніше вважалось, що складові напруження є безперервними функціями координат, то величини P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} , що характеризують їх інтенсивність, повинні також бути безперервними функціями координат. Розрив безперервності може мати місце лише по лініях, де порушується безперервність зміни косинусів кутів, що складаються зовнішньою нормаллю до поверхні тіла з координатними осями.

Виріжемо з тіла у заданій точці O нескінченно малий прямокутний паралелепіпед (рис.6) і запишемо відповідні рівняння рівноваги, причому малими вищих порядків нехтуватимемо. У цьому випадку слід урахувати лише

поверхневі сили і припустити, що напруження для кожної пари паралельних граней виділеного елемента є рівними і прямо протилежними. З шести рівнянь рівноваги запишемо лише три, що відповідають умовам рівності нулю моментів відносно координатних осей. На кресленні стрілками показані напруження, які повинні бути враховані при складанні моменту всіх поверхневих сил відносно осі x . Відповідне рівняння має вигляд $\tau_{zy} dx dy dz - \tau_{yz} dx dy dz = 0$.

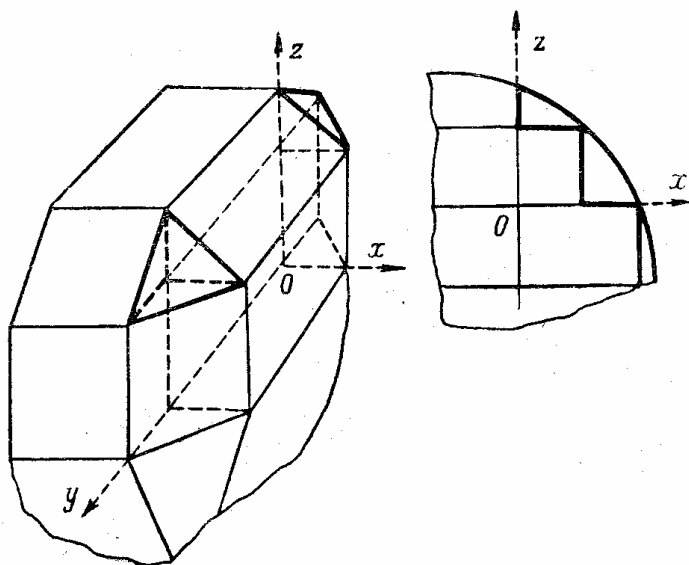


Рисунок 5

Аналогічно можна записати і для двох інших координатних осей. На підставі цих рівнянь отримаємо

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{zx} = \tau_{xz}; \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad (4)$$

тобто складові дотичних напружень по двох взаємно перпендикулярних площадках, перпендикулярні до лінії

перетину цих площадок, рівні між собою. Отже, *напружений стан у будь-якій точці тіла визначається трьома нормальними складовими $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ і трьома різними дотичними складовими $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$* . Ці складові можна записати в матричному вигляді

$$\hat{T} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

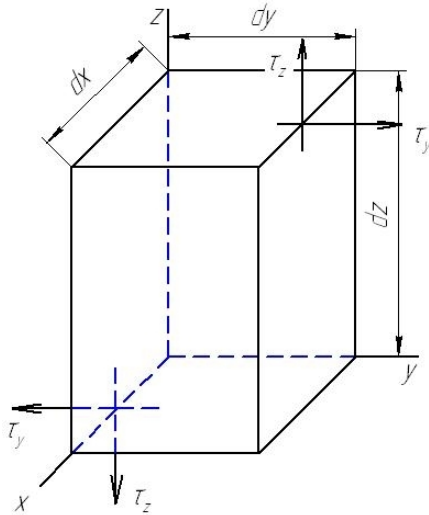


Рисунок 6 - До визначення дотичних напружень

У наведеному вище тензорі напружень перший індекс показує нормаль до площадки, а другий (для дотичних напружень) - на яку вісь проектується це напруження.

Отримані вище залежності між напруженнями по різних площадках, що проходять через дану точку тіла, використовуються при розв'язанні багатьох прикладних

задач, у першу чергу при розрахунках на міцність у випадках складного опору.

Перетворення складових напруження до нових осей координат

Напружений стан у будь-якій точці тіла, як було показано раніше, визначається шістьма складовими напруження σ_i, τ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). При цьому раніше система прямокутних осей була вибрана абсолютно довільно. У ряді задач необхідно вміти визначати складові напруження у системах координат, повернених щодо початкової системи на довільний кут.

Замість колишньої системи x, y, z візьмемо нову систему x', y', z' і для неї отримаємо, природно, інші значення складових напруження. Покажемо, як ці нові значення складових можна виразити через старі. Для цього скористаємося системою рівнянь (3). Скорочено позначимо напрямні косинуси кутів, що утворюються нормаллю n з координатними осями x, y, z через l, m, k , тоді рівняння (3) можна переписати так:

$$\begin{cases} p_{nx} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} k; \\ p_{ny} = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} k; \\ p_{nz} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z k. \end{cases} \quad (5)$$

Косинуси кутів між новими і старими осями можна подати у вигляді такої таблиці:

	x	y	z
x'	l_1	m_1	k_1
y'	l_2	m_2	k_2
z'	l_3	m_3	k_3

Виберемо площадку, нормальну, наприклад, до нової осі x' . Проекції повного напруження по цій площадці на старі координатні осі, але на площадці з нормаллю x' (рис. 7), за допомогою рівнянь (5) матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \sigma_x l_1 + \tau_{xy} m_1 + \tau_{xz} k_1, \\ \tau_{x'y} &= \tau_{yx} l_1 + \sigma_y m_1 + \tau_{yz} k_1, \\ \tau_{x'z} &= \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} m_1 + \sigma_z k_1.\end{aligned}$$

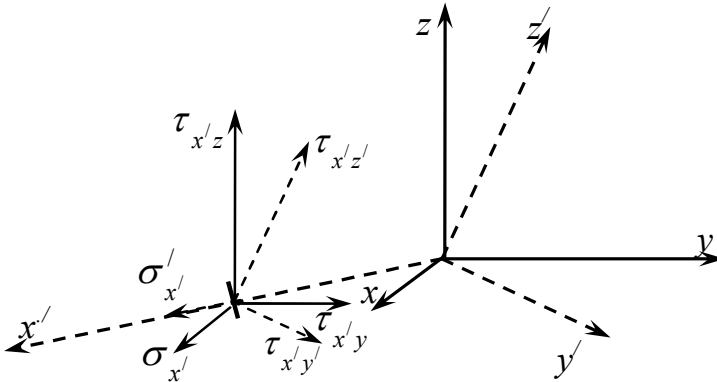


Рисунок 7 - До визначення складових напруження при повороті осей координат

Тепер, проектуючи напруження, що діють по цій площадці на вісь x' , отримаємо нормальне напруження по взятій площадці в новій системі координат. Згідно з прийнятими позначеннями матимемо $\sigma'_{x'} = \sigma_x l_1 + \tau_{x'y} m_1 + \tau_{x'z} k_1$ або, підставивши замість $\sigma_{x'}, \tau_{x'y}, \tau_{x'z}$ їх раніше набуті значення (з урахуванням рівності дотичних напружень (4)), отримаємо:

$$\sigma'_{x'} = l_1^2 \sigma_x + m_1^2 \sigma_y + k_1^2 \sigma_z + 2m_1 k_1 \tau_{yz} + 2k_1 l_1 \tau_{zx} + 2l_1 m_1 \tau_{xy}. \quad (6)$$

Проектуючи $\sigma_{x'}, \tau_{x'y}, \tau_{x'z}$ на вісь y' , отримаємо дотичну складову напруження:

$$\tau_{x'y'} = \sigma_{x'}l_2 + \tau_{x'y}m_2 + \tau_{x'z}k_2 = l_1l_2\sigma_x + m_1m_2\sigma_y + n_1n_2\sigma_z + \tau_{xy}(l_1m_2 + l_2m_1) + \tau_{zx}(n_1l_2 + n_2l_1) + \tau_{yz}(m_1n_2 + m_2n_1). \quad (7)$$

Аналогічно можна отримати вирази і для інших складових напруження в новій системі координат.

Поверхня напруження. Головні напруження

Користуючись виразом (6) для нормального напруження по площадці з нормаллю x' , можна легко дати геометричне представлення зміни цього напруження при повороті площадки. Від початку координат за напрямом нормалі до кожної площадки відкладемо відрізок r , довжина якого обернено пропорційна кореню квадратному з абсолютного значення відповідного нормального напруження. Якщо для змінного напрямку нормалі x' зберегти позначення, то матимемо

$$r = \frac{k}{\sqrt{[\sigma_{x'}]}}$$

де k - коефіцієнт пропорційності.

Тоді координати кінців відрізків, що відкладаються, становитимуть

$$x = rl_1, \quad y = rm_1, \quad z = rn_1.$$

Підставляючи вирази напрямних косинусів із останніх співвідношень у формулу (6) отримаємо

$$\sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{yz}yz + 2\tau_{zx}zx + 2\tau_{xy}xy = \pm k^2. \quad (8)$$

Тобто кінці всіх відкладених відрізків розташовуються на поверхні, що описується рівнянням другого порядку.

Знак у правій частині (8) вибирається з умови дійсності цієї поверхні, яка буде еліпсоїдом, якщо на всіх напрямках діють стискальні або розтягувальні зусилля, або однопорожнинним і двопорожнинним гіперболоїдом, якщо зусилля мають різний знак. З курсу аналітичної геометрії відомо, що шляхом повороту системи координат це рівняння може бути перетворене таким чином, що в ньому пропадуть парні твірні координат, або, інакше кажучи, дотичні складові напруження. Це означає, що *в кожній досліджуваній точці напруженого стану тіла існує така система осей, в якій дотичні напруження дорівнюють нулю.*

Так само, як і в курсі опору матеріалів, такі осі називаються *головними осями*, а відповідні нормальні напруження - *головними напруженнями*. Таким чином, *напружений стан у даній точці можна повністю визначити завданням напрямку головних осей і величин головних напружень.*

Знайдемо таку площадку, по якій діють тільки нормальні напруження σ_v . Розв'язання задачі проведемо зворотним способом. Нехай ця площадка існує і нормаль до неї відома: $\nu = \{\cos(x, \nu), \cos(y, \nu), \cos(z, \nu)\}$. Тоді проекції повного напруження на осі координат будуть:

$$\begin{cases} p_{nx} = \sigma_v \cos(x, \nu); \\ p_{ny} = \sigma_v \cos(y, \nu); \\ p_{nz} = \sigma_v \cos(z, \nu). \end{cases} \quad (9)$$

Інакше ці проекції можна виразити через компоненти тензора напружень за формулами (3).

Прирівнюючи між собою праві частини (3) і (9), отримаємо:

$$\begin{cases} \sigma_x \cos(x, \nu) + \tau_{xy} \cos(y, \nu) + \tau_{xz} \cos(z, \nu) = \sigma_\nu \cos(x, \nu); \\ \tau_{yx} \cos(y, \nu) + \sigma_y \cos(y, \nu) + \tau_{yz} \cos(z, \nu) = \sigma_\nu \cos(y, \nu); \\ \tau_{zx} \cos(x, \nu) + \tau_{zy} \cos(y, \nu) + \sigma_z \cos(z, \nu) = \sigma_\nu \cos(z, \nu), \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_\nu) \cos(x, \nu) + \tau_{xy} \cos(y, \nu) + \tau_{xz} \cos(z, \nu) = 0; \\ \tau_{yx} \cos(y, \nu) + (\sigma_y - \sigma_\nu) \cos(y, \nu) + \tau_{yz} \cos(z, \nu) = 0; \\ \tau_{zx} \cos(x, \nu) + \tau_{zy} \cos(y, \nu) + (\sigma_z - \sigma_\nu) \cos(z, \nu) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

У системі (10) чотири невідомих: головне напруження σ_ν і три напрямні косинуси. Четвертим бракуючим рівнянням є умова рівності одиниці суми квадратів напрямних косинусів:

$$\cos(x, \nu)^2 + \cos(y, \nu)^2 + \cos(z, \nu)^2 = 1. \quad (11)$$

Для того щоб система (10) мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю. Розклавши визначник, отримаємо кубічне рівняння щодо головних напружень:

$$\sigma_\nu^3 - I_1 \sigma_\nu^2 + I_2 \sigma_\nu - I_3 = 0, \quad (12)$$

де $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$;

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2;$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \quad -$$

інваріанти напруженого стану, тобто величини, що зберігають постійне значення при зміні системи координат. Величини головних напружень в точці не залежать від вибору осей координат, а залежать від форми і розмірів тіла і його навантаження.

Рівняння (12) завжди має дійсні корені, які є головними напруженнями. Підставляючи по черзі кожен із цих коренів у які-небудь два рівняння (10) (третє рівняння є висновком двох інших) і розв'язуючи їх, отримаємо

значення двох напрямних косинусів, наприклад $\cos(x, \nu_1)$ і $\cos(y, \nu_1)$, виражені через $\cos(z, \nu_1)$. Підставивши знайдені значення $\cos(x, \nu_1)$ і $\cos(y, \nu_1)$ в рівняння (11), знайдемо третій напрямний косинус $\cos(z, \nu_1)$ першої головної площадки.

Дослідження напрямних косинусів показали, що головні площадки, що відповідають напруженням $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ є взаємно перпендикулярними відносно одна одної.

Таким чином, у кожній точці ідеального пружного тіла, що перебуває під дією прикладених сил, можна знайти три взаємно перпендикулярні площадки, на яких діятимуть тільки нормальні напруження.

Головні напруження мають такі властивості:

1 Серед усіх нормальних напружень, що діють по площадках, що проходять через дану точку, найбільшим є σ_1 , а якнайменшим σ_3 , тобто зберігається нерівність $\sigma_1 \geq \sigma_n \geq \sigma_3$.

2 Повне напруження, що діє по площадках, що проходять через дану точку, змінюється в межах $\sigma_1 \geq p \geq \sigma_3$.

3 Величина трьох найбільших дотичних напружень визначається напіввізницею двох головних напружень:

$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \tau_{\max} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \tau_{\max} = \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

і діють вони по трьох взаємно перпендикулярних площадках, кожна з яких ділить навпіл прямий кут між відповідними головними площадками (під кутом 45°).

Слід зазначити, що відповідні нормальні напруження будуть дорівнювати напівсумі тих самих головних напружень, різниці яких визначають дотичні напруження.

Раніше були сформульовані поняття об'ємного, плоского та лінійного напруженого станів. Розглянемо більш детально, як будуть зв'язані між собою складові напруження і головні напруження у цих випадках. Так при лінійному напруженому стані з урахуванням властивостей головних напружень ($\sigma_1 \geq \sigma_n \geq \sigma_3$) матимемо

$$\sigma_1 \neq 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

Тоді, якщо відомий кут нахилу площадки відносно головної осі (позначимо $\cos(\sigma_1, n) = \cos \alpha$), то за допомогою формул перетворення компонент тензора напружень (6) та (7), нормальне та дотичне напруження дорівнюватимуть

$$\begin{aligned} \sigma_n &= p_n \cos \alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha, \\ \tau_n &= p_n \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

А величина повного напруження становитиме

$$p_n = \sigma_1 \cos(n, \sigma_1) = \sigma_1 \cos \alpha.$$

Максимальне напруження в досліджуваній точці $\sigma_{\max} = \sigma_1$ діятиме по головній площадці, що перпендикулярна до осі лінійного елемента, якому належить ця точка. Мінімальне напруження $\sigma_{\min} = 0$.

У випадку плоского напруженого стану (одне з трьох головних напружень є таким, що дорівнює нулю): $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$.

Якщо відомий кут нахилу площадки відносно 1-ї головної осі (також позначимо його $\cos(\sigma_1, n) = \cos \alpha_1$), то, користуючись формулами перетворення (6) та (7), отримаємо ($l_1 = m_2 = \cos \alpha, m_1 = -l_2 = \sin \alpha$):

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1; \\ \tau_n &= \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin 2\alpha_1.\end{aligned}\tag{14}$$

Якщо $\sigma_2 > 0$, то найбільше та найменше з усіх дотичних напружень будуть діяти по площадках, нахилених під кутом 45° до площини напружень і дорівнюватимуть

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}, \quad \tau_{\min} = -\frac{\sigma_1}{2}.$$

Крім того, для напружень, що діють на взаємно перпендикулярних площадках, згідно з поняттям першого інваріанта напруженого стану (12) та закону парності дотичних напружень (4) можна записати такі залежності:

$$\begin{cases} \sigma_{n_1} + \sigma_{n_2} = \sigma_1 + \sigma_2, \\ \tau_{n_1} = \tau_{n_2}. \end{cases}$$

Значення головних напружень використовуються в теоріях міцності, які є критеріями, що визначають умови переходу матеріалу до небезпечного (або граничного) стану.

Кола Мора

Тензор напружень можна охарактеризувати за допомогою так званих кругів Мора. Для цього проведемо через довільну точку площадку з нормаллю $\nu(l, m, n)$. Тоді, якщо за осі координат вибрати головні осі, то вирази для повного і нормального напруження на цій площадці будуть дорівнювати:

$$\begin{aligned}\sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2 &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2, \\ \sigma_\nu &= \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2, \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1.\end{aligned}$$

Розв'язуючи останні рівняння відносно напрямних косинусів, матимемо:

$$l^2 = \frac{\tau_v^2 + (\sigma_v - \sigma_2)(\sigma_v - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)},$$

$$m^2 = \frac{\tau_v^2 + (\sigma_v - \sigma_3)(\sigma_v - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)},$$

$$n^2 = \frac{\tau_v^2 + (\sigma_v - \sigma_1)(\sigma_v - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}.$$

Виходячи з умови позитивності правих частин останніх виразів, можна встановити нерівності між величинами σ_v, τ_v . Оскільки $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то знаменники в першому і третьому виразах позитивні, а знаменник другого негативний. Отже:

$$\tau_v^2 + (\sigma_v - \sigma_2)(\sigma_v - \sigma_3) \geq 0,$$

$$\tau_v^2 + (\sigma_v - \sigma_3)(\sigma_v - \sigma_1) \leq 0,$$

$$\tau_v^2 + (\sigma_v - \sigma_1)(\sigma_v - \sigma_2) \geq 0.$$

Отримані нерівності зручно проілюструвати графічно в площині координат σ_v, τ_v (рис. 8). Можливі значення $|\sigma_v|$ і τ_v будуть знаходитись між дугами напівкіл радіусів $\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1), \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ із центрами в точках, розташованих на осі $|\tau_v| = 0$, і таких, що мають абсциси $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3), \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$.

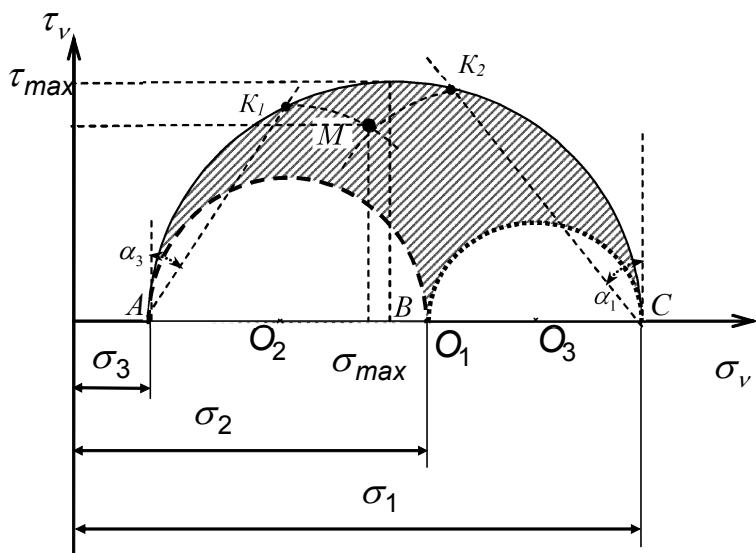


Рисунок 8 - Кола Мора²

Напруження σ_v і τ_v на будь-якій площадці, що паралельна головному напруженню σ_1 , можна визначити за допомогою кола Мора, побудованого по головних напруженнях σ_2 і σ_3 (матимемо плоский напружений стан). Це коло зображене на рис. 8 штриховою лінією. Аналогічно напруження σ_v і τ_v по площадках, паралельних головному напруженню σ_2 , можна визначити за допомогою кола Мора, побудованого по головних напруженнях σ_1 і σ_3 . На рис. 8 це коло зображене суцільною лінією. На тому самому рисунку точками показане коло Мора, побудоване по головних

² Більш детально про побудову та застосування кіл Мора можна дізнатись у книзі Тимошенко С.П., Гуд'єр С.П. Теорія упругості. – М. Наука, 1975. –С. 37-41

напруженнях σ_1 і σ_2 , що дозволяє визначити напруження σ_v і τ_v по площадках, паралельних головному напруженню σ_3 .

Якщо площадка проходить через одну з головних осей, то відповідна точка σ_v, τ_v розташовуватиметься на межі кола. Точки A, B, C відповідають головним площадкам.

Можна довести, що напруження σ_v і τ_v по довільній площадці визначаються координатами точок, розташованих у заштрихованій області (рис.8). Так, наприклад, абсциса точки M дорівнює нормальному напруженню, а ордината цієї точки - дотичному напруженню (випадок об'ємного напруженого стану), що діють по площадці, яка не паралельна жодному з головних напружень.

Для побудови та визначення напружень у довільній точці тіла по площадці з нормаллю, що утворює кути $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ з головними напруженнями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, можна рекомендувати такий порядок.

- 1 Від початку координат відкладаються відрізки, довжина яких дорівнює відповідно $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.
- 2 На відрізках AC, AB, BC будуються кола.
- 3 У точках A та C встановлюють перпендикуляри, а від них відкладають кути α_1 та α_3 . Сторони цих кутів перетинаються з великим колом у точках K_1 та K_2 .
- 4 Радіусами O_2K_1 та O_3K_2 проводять дуги. Точка M перетину цих дуг матиме координати σ_v, τ_v .

Таким чином, три кола Мору повністю характеризують напружений стан у даній точці навантаженого тіла, тобто дають можливість визначити величини нормального і дотичного напружень на будь-якій площадці, що проходить через неї.

Розкладання тензора напружень на кульовий тензор і девіатор напружень. Напруження на октаедричній площадці

Розглянемо напружений стан, при якому на трьох взаємно перпендикулярних площадках діють однакові головні напруження, що дорівнюють середньому напруженню в даній точці

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}.$$

Відповідний такому напруженому стану тензор напружень називається кульовим тензором напружень

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{vmatrix}.$$

Назва «кульовий тензор» пов'язана з геометричним представленням напруженого стану в точці, запропонованим Ламе. Якщо у системі координат, що збігається з головними осями, побудувати еліпсоїд напружень (див. виведення формули (8)), то три напівосі цього еліпсоїда будуть дорівнювати трьом головним напруженням. Для напруженого стану, описуваного кульовим тензором напружень, всі три напруження рівні між собою, і еліпсоїд напружень перетворюється на кулю.

Якщо з тензора напружень відняти кульовий тензор напружень, то отримаємо тензор, який називають девіатором напружень:

$$D_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_{cp} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{cp} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_{cp} \end{vmatrix}.$$

Тобто формально тензор напружень в довільній точці пружного тіла може бути поданий у вигляді суми двох тензорів: кульового тензора і девіатора напружень. Таке розкладання має велике значення при дослідженні поведінки пружних і пластичних тіл. Так, *кульовий тензор виділяє з напруженого стану рівномірне всебічне розтягування (стиснення), при якому відбувається зміна об'єму без зміни форми. Девіатор напружень характеризує стан зсуву, при якому відбувається зміна форми, без зміни його об'єму.* Отже, девіатор напружень показує відхилення набутої форми тіла від первинної.

Важливим висновком у теорії напружень є встановлення трьох інваріантних співвідношень (12). Саме інваріанти, не залежні від способу дослідження напружень в даній точці, можуть об'єктивно характеризувати напружений стан у даній точці. Як можна показати, перший інваріант тензора напружень характеризує зміну об'єму матеріалу в околі даної точки при деформації. Другий інваріант девіатора напружень характеризує масштаб формозмінення в околі даної точки при деформації і часто виявляється тісно пов'язаним із напруженням, що відповідає за руйнування матеріалу в даній точці.

Обчислимо нормальне і дотичне напруження, що діють по октаедричній площадці. *Октаедричною називається площадка, що проходить через дану точку і однаково нахилена до головних осей 1,2,3, як показано на рис. 9.* Це означає, що одинична нормаль до площадки в даній системі координат має компоненти, що дорівнюють $1/\sqrt{3}$. Тому проекції вектора повного напруження по цій площадці визначаються за формулами (3):

$$p_{o1} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}, \quad p_{o2} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}, \quad p_{o3} = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}.$$

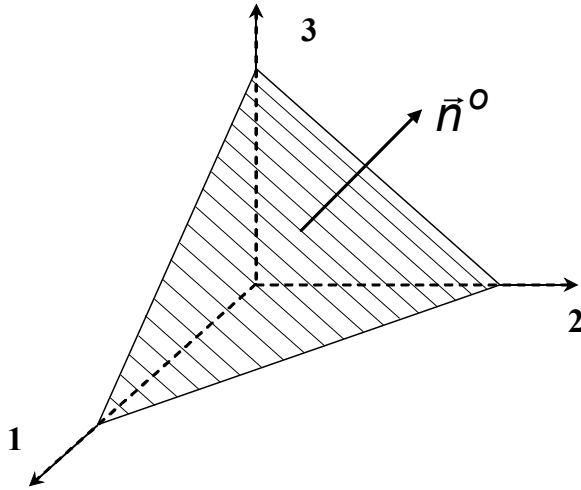


Рисунок 9 - Октаедрична площадка

Тоді, враховуючи інваріантність суми нормальних напружень по трьох взаємно перпендикулярних площадках (I_1), за формулою (2) знаходимо нормальне напруження по октаедричній площадці

$$\sigma_o = p_{o1} \frac{1}{\sqrt{3}} + p_{o2} \frac{1}{\sqrt{3}} + p_{o3} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}.$$

Повне напруження по такій площадці

$$p_o = \sqrt{p_{o1}^2 + p_{o2}^2 + p_{o3}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3}}.$$

Дотичне напруження по октаедричній площадці на підставі формули (1) дорівнюватиме

$$\tau_o = \sqrt{p_o^2 - \sigma_o^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3} - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9}}.$$

Зводячи підкореневий вираз до спільного знаменника, знаходимо

$$\tau_o = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2}, \quad (15)$$

або з урахуванням значень максимальних дотичних напружень

$$\tau_o = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{\max 1}^2 + \tau_{\max 2}^2 + \tau_{\max 3}^2}.$$

Знайдені вище нормальне і дотичне напруження на октаедричній площадці (так звані октаедричні напруження) однакові для всіх восьми площадок, які можна провести у всіх октантах. Якщо відрізки, що відтинаються площадками на головних осях 1, 2 і 3, однакові у всіх октантах, то сукупність таких рівно нахилених площадок утворює замкнуту восьмигранну фігуру - октаедр.

У теорії пластичності октаедричне дотичне напруження є основним, що визначає характер розвитку пластичних деформацій.

Диференціальні рівняння рівноваги елементарного паралелепіпеда

Розглянемо ідеально пружне тіло, що перебуває в рівновазі під дією об'ємних і поверхневих сил. Виділимо в цьому тілі деяку т. O і уявно виріжемо з тіла елементарний паралелепіпед, однією з вершин якого є вибрана т. O . На рисунку 10 показані величини напружень, що діють по гранях виділеного елемента, та їх позитивні напрями. Оскільки тіло перебуває в рівновазі, то в рівновазі перебуває і виділений паралелепіпед. При складанні проекцій сил, прикладених до елемента, на координатні осі

складові напруження множаться на площі відповідних граней елемента, а об'ємна сила - на об'єм елемента. При переході від грані, що проходить через точку O , до паралельної грані напруження змінюються і отримують прирости. Так, якщо по грані $OGDC$, що проходить через точку O , діють складові напружень $\sigma_x = f_1(x,y,z)$, $\tau_{xy} = f_2(x,y,z)$, $\tau_{xz} = f_3(x,y,z)$, то по паралельній грані $AFEB$, унаслідок приросту координати x , діятимуть складові напруження

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx, \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx.$$

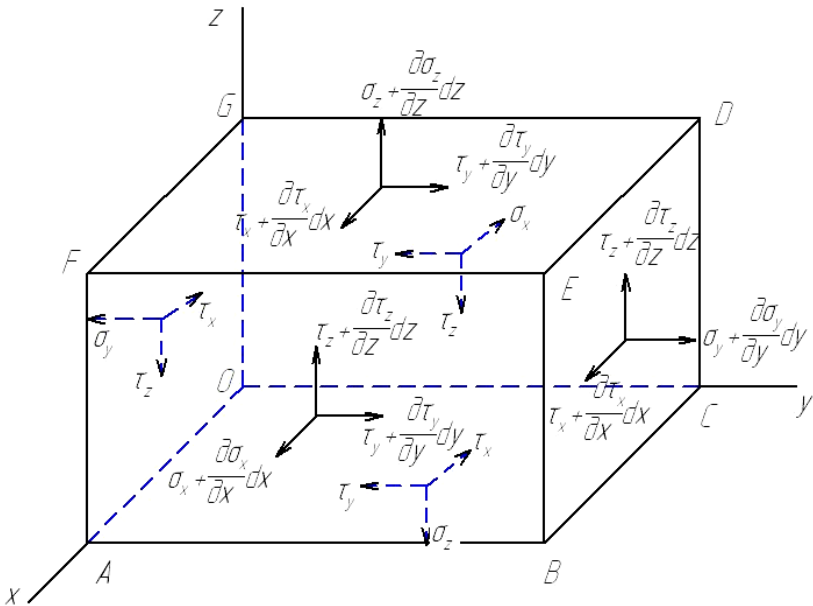


Рисунок 10 - Складові напруження, що діють по гранях елементарного паралелепіпеда

Проектуючи, наприклад, на вісь x всі прикладені до елемента сили, отримаємо рівняння:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \\ + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + \rho X dx dy dz = 0.$$

Таким самим чином можна отримати два інші рівняння, що визначають рівновагу елемента вздовж двох інших осей. Після скорочень ця система рівнянь може бути подана у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho Y = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Рівняння рівноваги, отримані шляхом прирівнювання до нуля моментів всіх прикладених до елемента сил щодо координатних осей, будуть задоволені через умови (4).

У тих випадках, коли частини пружного тіла перебувають в русі, наприклад, коли тіло при прикладенні зовнішніх сил почало здійснювати коливання, потрібно до об'ємних сил приєднати сили інерції. Якщо припустити, що пружне тіло закріплене і не може переміщатися в просторі, то його точки можуть змінювати положення в просторі тільки за рахунок деформації. Тоді, якщо довільна точка тіла M мала до деформації координати x, y, z , то після деформації її координати стануть $x + i, y + v, z + w$ (рис.11). Відрізок MM_1 є лінійним переміщенням точки M , а відрізки u, v і w - проєкції цього переміщення на осі координат. Оскільки вважається, що при деформації

пружне тіло не одержує розривів, то і u, v, w є безперервними функціями координат: $u = f_1(x, y, z)$; $v = f_2(x, y, z)$; $w = f_3(x, y, z)$. Надалі припускається безперервність і послідовних похідних цих функцій. З урахуванням вищесказаного проєкції сил інерції, віднесені до одиниці об'єму, відповідно будуть дорівнювати

$$-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

У цьому випадку рівняння рівноваги перепишуться у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho Y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (17)$$

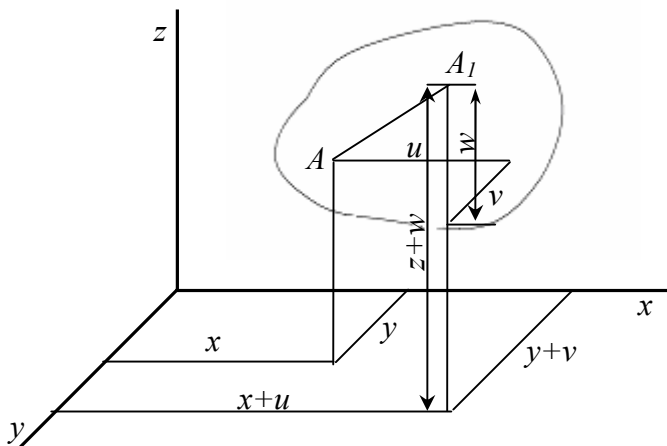


Рисунок 11- Складові переміщення в декартовій системі координат

Рівняння (14) і (15) є основними диференціальними рівняннями теорії пружності. Будь-яка задача теорії пружності зводиться до визначення таких функцій σ_i, τ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), які задовольняли б рівняння (16) або (17) у кожній точці даного тіла і умови (3) на поверхні. У такому вигляді задача теорії пружності залишається поки що не визначеною. Насправді, три рівняння (16) або (17) містять шість різних величин (σ_i, τ_{ij}), і, отже, можна підібрати скільки завгодно різних розподілів напружень, що задовольняють як диференціальні рівняння, так і умови на поверхні. Щоб з усіх можливих (з погляду статички) розподілів напружень вибрати те, яке відповідає дійсному стану пружного тіла, необхідно зробити так, як це робиться при дослідженні статично невизначених систем. До рівнянь статички необхідно додати додаткові умови, встановлювані на підставі розгляду деформації системи. У тому, що не всяка система напружень, що задовольняє диференціальні рівняння рівноваги і умови на поверхні, можлива в пружному тілі, можна переконатися на підставі таких міркувань. Припустимо, що дане тіло розрізали на нескінченно малі прямокутні паралелепіпеди і до граней кожного такого елемента приклали напруження, що задовольняють рівняння (16). Під дією напружень і об'ємних сил всі елементи тіла перебуватимуть в рівновазі, і ми одержимо розподіл напружень, який є можливим з погляду статички абсолютно твердого тіла. У пружному тілі умови інші. Під дією напружень кожен елемент деформується, і напруження повинні задовольняти не тільки умови статички, але і додаткові умови. Деформації, що відбуваються в окремих елементах, на які тіло розрізається, повинні бути такі, щоб після деформації всі елементи можна було скласти до купи і утворити одне безперервне пружне тіло. Можна уявити собі таку систему напружень, при якій рівняння (16) задоволені, але

відповідні цим напруженням деформації такі, що з окремих деформованих елементів не можна скласти безперервне пружне тіло; елементи після деформації не відповідатимуть один одному.

Подальша задача полягає в дослідженні деформацій пружного тіла і у встановленні необхідної для вирішення задач теорії пружності залежності між напруженнями і деформаціями.

Запитання для самоконтролю

1 Які основні припущення використовуються при розв'язанні задач у теорії пружності?

2 На які два класи розділяють зовнішні сили в теорії пружності?. Охарактеризуйте їх та наведіть приклади.

3 Що таке напруження (повне, нормальне, дотичне) і чим воно характеризується?

4 Що характеризує тензор напружень в точці? Сформулюйте правило знаків для нормальних і дотичних напружень.

5 Наведіть формули, за допомогою яких можна визначити проєкції повного напруження і саме повне напруження в точці на осі Декартової системи координат, якщо відомий тензор напружень та напрувляючі косинуси площадки по якій діє це напруження.

6 Нехай у точці пружного тіла задано тензор напружень. Виведіть формулу для визначення $\tau_{y'z'}$ у системі, що повернута відносно початкової на кут 90° відносно осі x за часовою стрілкою.

7 Що являють собою головні напруження та головні осі? Як розташовані головні площадки відносно одна одної. Сформулюйте методичу визначення головних напружень та орієнтації головних площадок у декартовій системі координат.

8 Що таке інваріанти напруженого стану? Наведіть формули для визначення інваріантів напруженого стану в точці пружного тіла через величини головних напружень.

9 Наведіть основні властивості головних напружень.

10 На які дві складові розкладається тензор напружень і що характеризує кожна з цих складових?

11 Який напружений стан називається об'ємним, плоским та лінійним? Який у цих випадках має вигляд поверхня напружень. Наведіть основні формули для визначення складових напруження по похилій площадці через величини головних напружень для лінійного та плоского напруженого стану в точці.

12 Що характеризують та як будуються кола Мора?

ТЕОРІЯ ДЕФОРМАЦІЇ

Залежності між складовими переміщень і деформаціями

Деформація пружного тіла повністю визначається відносним переміщенням його точок. Якщо пружне тіло здійснює поступальний рух або обертається, як абсолютно тверде тіло, то при цьому не змінюється відносне розташування частинок тіла, воно не деформується. Такі переміщення не викликають внутрішніх напружень. Надалі для виключення переміщень, що не викликають деформацій, закріплюватимемо одну з точок пружного тіла, і в цій закріпленій точці введемо додаткові закріплення, що перешкоджатимуть обертанню пружного тіла як цілого відносно нерухомої точки. Таке закріплення аніскільки не порушує цілісності дослідження деформацій пружного тіла.

Розташуємо початок прямокутної системи координат x, y, z у закріпленій точці. Внаслідок прийнятих умов закріплення проекції переміщення u, v, w обертаються в нуль на початку координат. Для усунення можливості обертання тіла навколо нерухомої точки закріплюють ще який-небудь лінійний елемент, що проходить через цю точку, і яку-небудь елементарну площадку, що проходить через цей елемент. Закріпимо, наприклад, лінійний елемент, що збігається з віссю z , і площадку, що збігається з координатною площиною zx . Перше закріплення виключає можливість обертання тіла щодо осей x, y , а закріплення площадки усуває обертання відносно осі z . У результаті цих умов отримуємо такі умови для переміщень на початку координат:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Деформований стан у довільній точці ідеально пружного тіла вважається заданим, якщо відомі деформації всіх трьох проекцій елементарного паралелепіпеда, тобто відомі відносні лінійні деформації трьох взаємно перпендикулярних ребер, позначимо їх ε_x , ε_y і ε_z та зміни прямих кутів між ребрами в площинах трьох його граней, паралельних площинам координат (відносні зсуви або відносні кутові деформації - γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx}). Визначимо ці величини. Для цього з ідеального пружного тіла виріжемо нескінченно малий паралелепіпед $dx dy dz$ біля довільної точки O , унаслідок дії прикладених сил точки пружного тіла здійснюють переміщення, тобто змінюється довжина його ребер, і спотворюються спочатку прямі кути між гранями.

На рисунку 12 показані два ребра цього паралелепіпеда в площині XOZ . Довжина ребра OM дорівнює dx , ребра ON - dz . Після деформації точки O, M, N займуть нові положення - O', M', N' . При цьому точка O отримає переміщення, складові якого в площині креслення u, w . Точка M , віддалена від точки O на нескінченно малу відстань dx , отримає переміщення, складові якого відрізнятимуться від складових переміщень точки O на нескінченно малу величину через зміну координати x :

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, w + \frac{\partial w}{\partial x} dx.$$

Складові переміщення точки N відрізнятимуться від складових переміщень точки O на нескінченно малу величину через зміну координати z :

$$w + \frac{\partial w}{\partial z} dz, u + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Довжина проекції ребра OM на вісь x після деформації буде дорівнювати

$$O'M'' = dx - u + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

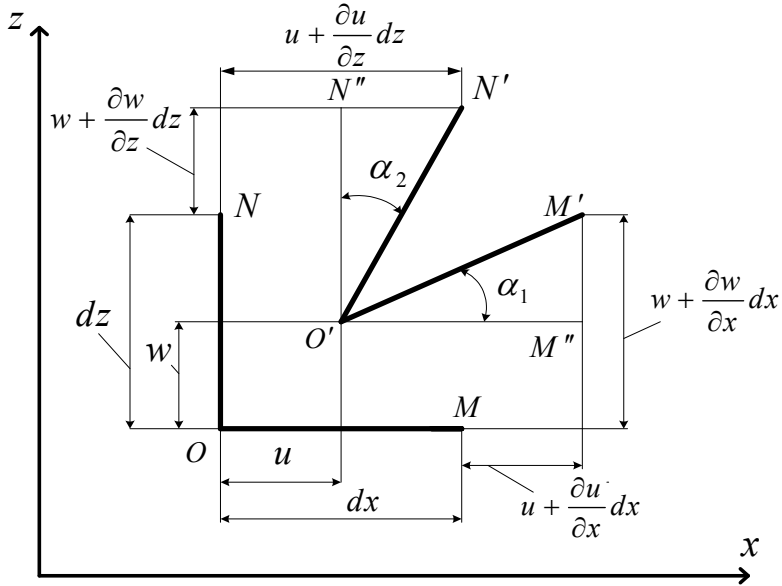


Рисунок 12

Проекція абсолютного подовження ребра OM на вісь x становитиме

$$\Delta OM = O'M'' - OM = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Відносне подовження вздовж осі x , що називається лінійною деформацією по напрямку осі x , дорівнює

$$\frac{\Delta OM}{OM} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x. \quad (18)$$

Аналогічно можна отримати лінійні деформації по напрямках координатних осей y, z :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z.$$

Отже, лінійна деформація за будь-яким напрямом дорівнює частинній похідній складової переміщення в цьому напрямі по змінній у тому самому напрямі.

Розглянемо зміну кутів між ребрами паралелепіпеда. Тангенс кута повороту ребра OM у площині xz :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{M'M''}{O'M''} = \frac{\left(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right) - w}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x} \approx \frac{\partial w}{\partial x} (1 - \varepsilon_x).$$

Обмежуючись розглядом тільки малих деформацій ($\operatorname{tg} \alpha_1 \approx \alpha_1$) і нехтуючи лінійною деформацією ε_x порівняно з одиницею, отримуємо:

$$\alpha_1 = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Аналогічно знаходимо кут повороту ребра ON у тій самій площині:

$$\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Кут зсуву площини xz , тобто зміна початково прямого кута MON , називається кутовою деформацією і визначається як сума кутів повороту ребер OM і ON :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{xz}. \quad (19)$$

Аналогічно можуть бути знайдені кутові деформації у двох інших координатних площинах:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \gamma_{yz}.$$

Таким чином, *кутова деформація у будь-якій площині дорівнює сумі частинних похідних складових переміщення в цій площині по змінних у перпендикулярних напрямках.*

Для складових деформації використовується таке правило знаків:

- *позитивним лінійним деформаціям відповідають подовження по відповідних напрямках, а негативним - укорочення;*

- *позитивним кутовим деформаціям відповідає зменшення кутів між позитивними напрямками координатних осей, а негативним - збільшення тих самих кутів.*

Наведені вище формули дають шість основних залежностей складових лінійних і кутових деформацій від складових переміщення:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (20)$$

і називаються *співвідношеннями Коші* (геометричні рівняння).

Диференціальні рівняння рівноваги і геометричні рівняння, складаючи у сукупності дев'ять рівнянь, містять у цілому 15 невідомих (шість складових напруження σ_i, τ_{ij} , шість складових деформації $\varepsilon_i, \gamma_{ij}$ і три складові переміщення u, v, w). Отже, для розв'язання поставленої задачі до отриманих поки двох груп рівнянь необхідно додати ще шість рівнянь, але за умови, що вони не міститимуть нових невідомих. Такими рівняннями є умови

пружності для пружного тіла, умови пластичності для тіла, що перебуває в пластичному стані. Тобто це повинні бути фізичні рівняння, форма запису яких залежить від властивостей тіла і його стану і є різною для кожного окремого випадку.

Рівняння рівноваги (16) і співвідношення Коші (20) не змінюють свого вигляду як для пружних, пластичних, так і для тіл, які перебувають в інших станах (рідкому, газоподібному і т.п.)

Аналогічно тензору напружень можна ввести тензор деформацій:

$$\hat{T}_{деф} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Якщо тензор напружень повністю визначає напружений стан у точці, то тензор деформації повністю визначає деформований стан у точці пружного тіла.

Рівняння спільності деформацій

Із співвідношень Коші випливає, що якщо задані переміщення u, v, w точок тіла, то складові деформацій визначаються однозначно. Якщо ж відомі складові деформації, то система відносно u, v, w перевизначена, тобто деформації не є довільними функціями, а між ними повинні існувати певні співвідношення, які називаються умовами спільності деформацій. Як уже наголошувалося, якщо ці співвідношення не використовувати, то з малих паралелепіпедів і тетраедрів, на які можна розділити всяке пружне тіло (рис. 13 а), після деформації кожного з них,

що залежить від шести складових (рис. 13 б), може виявитися неможливим скласти безперервне деформоване тіло (рис. 13 в).

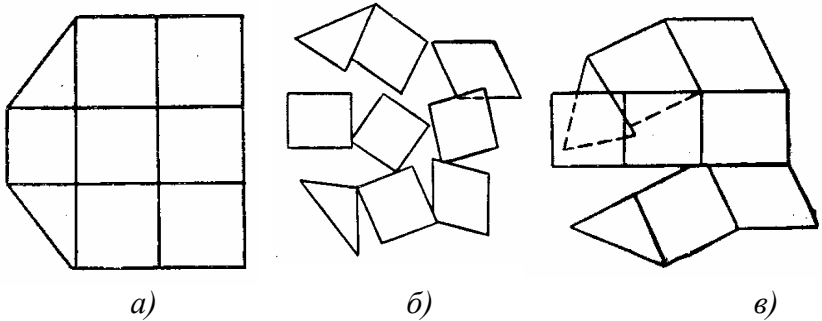


Рисунок 13

Число таких співвідношень дорівнює шести і умовно їх можна розділити на дві групи: I група - залежності між складовими в одній площині і II група - залежності між складовими деформації в різних площинах.

Для отримання цих співвідношень продиференціюємо перше рівняння системи (20) двічі по y , а друге рівняння двічі по x і додамо їх

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Тобто якщо задані рівняння двох лінійних деформацій, то це визначає кут зсуву:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Аналогічно цій залежності, встановленій для площини, можна встановити залежність для деформації в інших площинах.

Для висновку залежностей II групи проведемо такі перетворення:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}.\end{aligned}$$

Додамо перші два рівняння і віднімемо з цієї суми третє:

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

отримане рівняння ще раз продиференціюємо по z :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.$$

Таким чином, якщо задані три деформації зсуву $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, то цим визначається подовження ε_z . Роблячи в цьому рівнянні колову підстановку індексів і координат, отримуємо ще два рівняння такого ж вигляду. Повна система рівнянь спільності деформацій має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}.$$

Наведену вище систему рівнянь, отриману Сен-Венаном, називають рівняннями (умовами) спільності, або нерозривності деформацій.

Якщо за заданими навантаженнями визначити безпосередньо переміщення точок тіла u , v і w , то після цього деформації можна обчислити за співвідношеннями Коші (20). При цьому умови спільності будуть задоволені автоматично, оскільки вони виведені з цих співвідношень і є їх наслідком.

Якщо ж за заданими навантаженнями визначити напруження, а потім деформації, то при цьому необхідно одночасно задовольнити і рівняння спільності, оскільки інакше деформації будуть несумісні і визначити переміщення із співвідношень Коші буде неможливо, оскільки в них будуть взаємні суперечності.

Відносна лінійна деформація в довільному напрямку. Головні деформації

Виділимо усередині пружного тіла відрізок AB , кінці якого мають такі координати - $A(x, y, z)$ і $B(x + dx, y + dy, z + dz)$ (рис. 14). Напрявні косинуси відрізка dr позначимо l , m і n .

При деформації тіла під впливом зовнішнього навантаження точка A перейде в положення A_1 , точка B у

положення B_1 , а відрізок dr отримає приріст Δdr . Довжина відрізка AB після деформації

$$A_1B_1 = dr + \Delta dr = dr \left(1 + \frac{\Delta dr}{dr} \right) = dr(1 + \varepsilon_r),$$

де, за аналогією зі співвідношеннями Коші, ε_r - відносна лінійна деформація.

Проекції переміщення AA_1 точки A на осі координат позначимо i, v і w . Тоді проекції переміщення BB_1 точки B відповідно $u + du, v + dv, w + dw$.

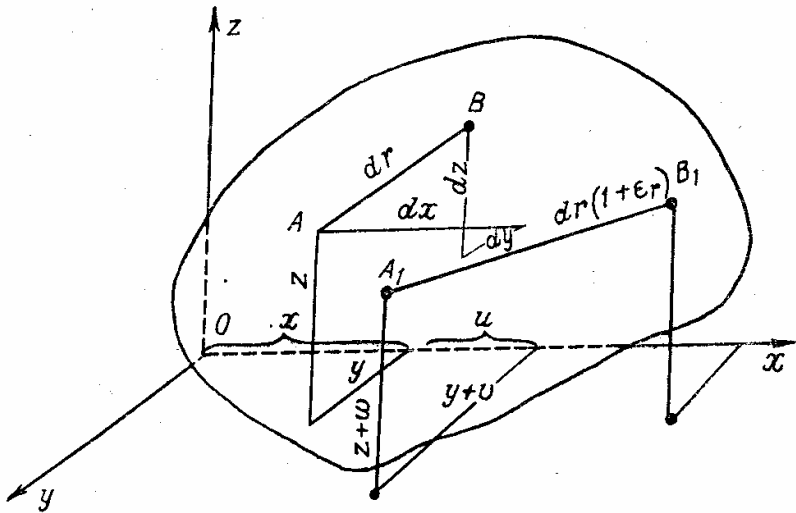


Рисунок 14

Нехтуючи величинами другого порядку малості, можна записати

$$(A_1B_1)^2 = dr^2(1 + \varepsilon_r)^2 \approx dr^2(1 + 2\varepsilon_r).$$

Як відомо з курсу вищої математики, квадрат відрізка A_1B_1 дорівнює сумі квадратів трьох його проекцій на осі координат:

$$(A_1 B_1)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dxdu + 2dydv + 2dzdw.$$

Тоді

$$1 + 2\varepsilon_r = \left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + \frac{1}{dr^2}(2dxdu + 2dydv + 2dzdw).$$

Підставляючи вирази для повних диференціалів переміщень i , v і w , з урахуванням того, що

$$\frac{\partial x}{\partial r} = l, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = m, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = n,$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

скорочуючи на 2, і використовуючи співвідношення Коші, отримаємо

$$\varepsilon_r = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl. \quad (22)$$

Порівнюючи вираз (22) з (6) для нормального напруження, можна зробити висновок, що вираз (22) може бути отриманий з формули (6) шляхом простої заміни символів σ на ε та τ на $\frac{1}{2}\gamma$. Користуючись такою заміною, можна отримати всі формули теорії деформації з аналогічних формул теорії напружень.

Аналогічно головним напруженням можна знайти і головні деформації, тобто деформації, в площині дії яких відсутній зсув. Для їх визначення використовують кубічне рівняння

$$\varepsilon^3 - I_1 \varepsilon^2 + I_2 \varepsilon - I_3 = 0,$$

коефіцієнти якого є інваріантами деформованого стану

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

$$I_2 = \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) - \varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_x \varepsilon_z - \varepsilon_y \varepsilon_z = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3,$$

$$I_3 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4}(\gamma_{xy} \gamma_{xz} \gamma_{yz} - \varepsilon_z \gamma_{xy}^2 - \varepsilon_y \gamma_{xz}^2 - \varepsilon_x \gamma_{yz}^2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3.$$

Напрями трьох головних деформацій взаємно перпендикулярні і називаються головними осями деформацій.

Очевидно, що в матеріалі, властивості якого не зв'язані з напрямом (тобто для ізотропного тіла), напрями головних напружень і головних деформації повинні збігатися.

Аналогічно тому, як це було зроблено для тензора напружень, тензор деформації можна подати у вигляді кульового і девіатора деформації. Причому при чисто об'ємній деформації (аналогом шарового тензора) відбувається лише зміна об'єму, а форма залишається без змін, а девіатору відповідає лише зміна форми, а його об'єм залишається постійним. Компоненти напружень і деформації, що відповідають зміні форми, пропорційні один одному: перші дорівнюють другим, помноженим на подвійний модуль зсуву, тобто

$$\hat{T}_\sigma = 2G\hat{T}_{def}.$$

Так само, як в теорії напружень виділялися об'ємний, плоский та лінійний напружені стани, залежно від значень головних деформацій (чи складових деформації в декартовій системі координат), можна виділити об'ємний, плоский та лінійний деформований стани. А з формул, отриманих у теорії напружень (13, 14), за допомогою звичайної заміни σ на ε та τ на $\frac{1}{2}\gamma$ можна виявити зв'язок

між головними деформаціями і деформаціями по похилій площадці для лінійного та плоского деформованих станів.

Запитання для самоконтролю

1 За допомогою яких величин та формул визначаються компоненти деформації в точці пружного тіла?

2 Що характеризують лінійні та кутові деформації? Сформулюйте правило знаків для лінійних та кутових деформацій.

3 В яких випадках необхідно використовувати рівняння спільності деформації (рівняння Сен-Венана). На які дві групи поділяють рівняння спільності деформації та який зв'язок між складовими деформації в точці вони встановлюють?

4 Що таке інваріанти деформованого стану, головні деформації та головні площадки деформації? Як вони визначаються?

5 На які дві складові можна розкласти тензор деформації? Наведіть їх. Що вони характеризують?

6 Який зв'язок існує між формулами, отриманими в теорії напружень, і формулами теорії деформації? За допомогою яких формул можна отримати значення складових деформації у довільній точці пружного тіла?

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Узагальнений закон Гука. Фізичні рівняння

Для встановлення залежності між складовими напруження і складовими деформації, що ними зумовлені, необхідно знати фізичні властивості ідеально пружного тіла. Skorистаємося даними дослідів, проведених над реальними тілами, що володіють більшою чи меншою мірою властивістю пружності. Дослідів, які давали б можливість безпосередньо встановити залежність між напруженнями і деформаціями, немає.

Закон про залежність між зовнішніми силами і змінами форми тіла, що ними зумовлені, був установлений ще в 1676 році англійським ученим Робертом Гуком. Результати подальших численних досліджень підтвердили справедливість закону Гука для багатьох реальних тіл, були встановлені ті межі, за які не повинні виходити деформації, щоб закон Гука мав місце. Межі ці різні для різних тіл. Залізо і сталь підпорядковуються закону Гука у досить широких межах, тоді як чавун навіть при малих напруженнях відхиляється від закону Гука.

На підставі наявних численних дослідів для ідеального пружного тіла закон Гука беруть в узагальненому вигляді. Допускають, що в кожній точці деформованого тіла складові напруження є лінійними функціями складових деформації. В узагальненому вигляді закон Гука не може бути перевіреном безпосереднім досвідом, у його справедливості переконуються шляхом перевірки тих висновків, які можуть бути отримані з узагальненого закону Гука аналітично.

На рис. 15 показана так звана діаграма розтягування, що виражає залежність між розтягуючим (нормальним) напруженням і відносним подовженням стрижня в цьому

напрямі. Вигляд цієї діаграми різний для різних матеріалів і істотно залежить від хімічного складу та їх будови. Діаграма вигляду *a)* характерна для металів, що мають пластичні властивості, наприклад для м'яких сталей з малим умістом вуглецю. Початкова ділянка *OA* цієї діаграми виходить прямолінійною, тобто існує пряма пропорційність між напруженням і відносним подовженням в одному напрямі. Для матеріалів, що не володіють або майже не володіють пластичними властивостями, тобто матеріалів крихких, таких, наприклад, як тверді леговані сталі, чавун, камінь, діаграма розтягування не має початкової прямолінійної ділянки. Але в більшості випадків ця ділянка може бути приблизно замінена прямою. Тому можна вважати, що при випробуванні стрижня на розтягування в межах малих подовжень для переважної більшості матеріалів справедлива така лінійна залежність між деформаціями і напруженнями:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E},$$

де E - модуль пружності (модуль Юнга, модуль пружності першого роду, модуль пружності при розтягуванні, для сталей $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Па, для дерева $E \approx 10^{10}$ Па). *Модуль пружності - це фізична константа матеріалу, яка визначається експериментально.*

Також експериментально встановлений закон, що пов'язує лінійні деформації в подовжньому і поперечному напрямках. Тіло, що зазнає розтягування уздовж осі x , одночасно зазнає стиснення в перпендикулярних напрямках:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x.$$

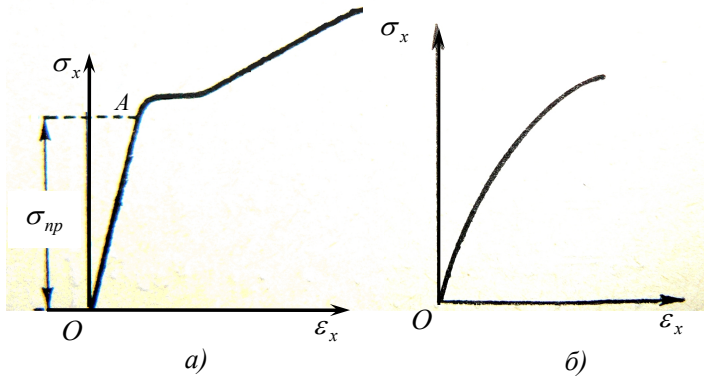


Рисунок 15 - Діаграма розтягування

Ця рівність є *законом Пуассона про поперечне стиснення при поздовжньому подовженні*, а ν має назву коефіцієнта Пуассона. Він характеризує властивості матеріалу і також визначається експериментально. Для всіх металів числові значення ν лежать в межах 0,25-0,35. Для ізотропного матеріалу величина ν не може перевищувати 0,5.

При випробуванні на чистий зсув установлена пропорційність між дотичним напруженням і кутовою деформацією в площині дії цього напруження:

$$e_{yz} = \frac{Y_z}{G}.$$

Коефіцієнт пропорційності G називається модулем зсуву або модулем пружності другого роду. Розмірність його, як і розмірність модуля першого роду, збігається з розмірністю напруження. Він не є новою пружною постійною, оскільки пов'язаний із модулем пружності і коефіцієнтом Пуассона таким співвідношенням:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Візьмемо поки що без доказу припущення про те, що в пружному, однорідному, ізотропному матеріалі нормальні напруження не викликають зсуву і, навпаки, дотичні напруження не викликають подовжень по напрямку їх дії. Дане припущення справедливе внаслідок лінійності початкових рівнянь і можливості застосування принципу суперпозиції. Щоб установити залежність між складовими деформації і складовими напружень при об'ємному напруженому стані, виділимо з тіла нескінченно малий паралелепіпед і розглянемо дію кожного з напружень σ_i, τ_{ij} окремо. Різницею на протилежних гранях можна знехтувати, оскільки вона дає деформації вищого порядку малості.

Обчислимо подовження ребра, паралельного напруженню σ_x . Від дії напруження σ_x відносно подовження ε'_x цього ребра згідно з законом Гука дорівнює

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}.$$

Напруження σ_y згідно з законом Гука викликає подовження в напрямі, перпендикулярному даному ребру:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E},$$

а у напрямі ребра згідно з законом Пуассона викликає укорочування:

$$\varepsilon''_x = -\nu\varepsilon_y,$$

або з урахуванням деформації ε_y :

$$\varepsilon_x'' = -\nu \frac{\sigma_y}{E}.$$

Аналогічно знаходимо відносне укорочування ребра від дії σ_z :

$$\varepsilon_x''' = -\nu \frac{\sigma_z}{E}.$$

На підставі принципу незалежності дії сил знаходимо повне відносне подовження ребра як суму подовжень від дії кожного з напружень:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x' + \varepsilon_x'' + \varepsilon_x''' = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

або

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)].$$

Проводячи аналогічні виклади, знаходимо лінійні деформації по напрямках осей y і z :

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

Зв'язок між кутовими деформаціями і дотичними напруженнями згідно з законом Гука при зсуві можна подати незалежно для кожної з трьох площин, паралельних координатним площинам:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}.$$

Таким чином, маємо шість формул:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}.
\end{aligned}
\tag{23}$$

які виражають лінійну залежність між складовими деформації і складовими напруження в ізотропному пружному тілі і називаються *узагальненим законом Гука у прямій формі*.

Відповідно величини головних деформацій, тобто лінійні деформації по напрямку головних напружень, можна визначити за формулами:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)], \\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)].
\end{aligned}$$

Кутові деформації по головних напрямках дорівнюють нулю.

Закон пружної зміни об'єму

При деформації тіла змінюється і його об'єм. Визначимо цю зміну. Розглянемо нескінченно малий паралелепіпед, об'єм якого до деформації дорівнює $V = dx dy dz$. З точністю до нескінченно малих величин

вищого порядку малості можна вважати, що зміна об'єму обумовлена зміною довжин його ребер, а не кутів.

Якщо до деформації довжина ребра OM становила dx , то після деформації (рис. 10) вона становитиме

$$dx' = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx = (1 + \varepsilon_x) dx.$$

Аналогічно для двох інших ребер $dy' = (1 + \varepsilon_y) dy$, $dz' = (1 + \varepsilon_z) dz$. Тоді об'єм тіла після деформації буде

$$\begin{aligned} V' &= dx' dy' dz' = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) dx dy dz = \\ &= (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Залишаючи тільки лінійні члени в останньому рівнянні (інші члени будуть малими порівняно з одиницею), отримаємо

$$V' = (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dx dy dz = (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dV.$$

Отже, відносна зміна об'єму в області малих деформацій визначається сумою трьох лінійних деформацій:

$$\Theta = \frac{V' - V}{V} = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Об'ємна деформація є інваріантом відносно вибору системи координат.

Якщо скласти перші три рівняння закону Гука в прямій формі (23), матимемо

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Якщо скористатися поняттями середньої деформації $\varepsilon_{cp} = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ і середнього напруження в точці $\sigma_{cp} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, то останній вираз можна записати у вигляді

$$\sigma_{cp} = \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_{cp}.$$

Тобто середнє напруження в точці пропорційно середній деформації в тій самій точці. Оскільки сума відносних подовжень по трьох взаємно перпендикулярних напрямках становить об'ємну деформацію, тобто $3\varepsilon_{cp} = \Theta$, то

$$\sigma_{cp} = \frac{E}{2(1-2\nu)} \Theta.$$

Це означає, що середнє напруження в точці пропорційно об'ємній деформації в околі тієї самої точки.

Останні два вирази виражають *закон пружної зміни об'єму*. Досліди показують, що цей закон є справедливим і при великих значеннях середнього напруження, що значно перевищують звичайну границю пружності матеріалу (тобто встановлений у лабораторних умовах при дослідженні одновісного розтягування чи стискання).

Вираз напружень через деформації

При розв'язанні практичних задач часто буває необхідно мати вирази складових напружень через складові деформації. Для цього скористаємося виразом для об'ємної деформації Θ , підставивши в нього вирази для

напружень через закон Гука у прямій формі (23), отримаємо:

$$\begin{aligned}\Theta &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) + \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) + \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \\ &= \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\end{aligned}$$

або

$$\Theta = \frac{1-2\nu}{E} I_1,$$

тобто відносна об'ємна деформація Θ пропорційна першому інваріанту напруженого стану.

Для вираження складових напруження через складові деформації перетворимо першу формулу узагальненого закону Гука (23) таким чином:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x + \nu\sigma_x - \nu\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

Використовуючи вираз першого інваріанта напруженого стану через відносну об'ємну деформацію, отримаємо

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[(1+\nu)\sigma_x - \frac{E\nu}{1-2\nu} \Theta \right],$$

звідки можна знайти напруження

$$\sigma_x = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Theta + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x.$$

Введемо позначення:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

тоді вираз для нормального напруження набуде вигляду

$$\sigma_x = \lambda\Theta + 2G\varepsilon_x.$$

Пружні постійні λ і G також характеризують пружні властивості матеріалу і називаються коефіцієнтами Ламе.

Аналогічним чином можна отримати формули для σ_y, σ_z . Остаточно:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\Theta + 2G\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\Theta + 2G\varepsilon_y, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda\Theta + 2G\varepsilon_z, & \tau_{xz} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (24)$$

Ці формули звичайно називають *зворотною формою закону Гука*.

Основні рівняння теорії пружності й можливі методи їх розв'язання

Випишемо ще раз усі три групи рівнянь теорії пружності.

I Статичні рівняння

1 Диференціальні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho Y = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z = 0. \end{cases}$$

2 Умови на поверхні:

$$\begin{cases} P_{nx} = \sigma_x \cos(x, n) + \tau_{xy} \cos(y, n) + \tau_{xz} \cos(z, n); \\ P_{ny} = \tau_{yx} \cos(x, n) + \sigma_y \cos(y, n) + \tau_{yz} \cos(z, n); \\ P_{nz} = \tau_{zx} \cos(x, n) + \tau_{zy} \cos(y, n) + \sigma_z \cos(z, n). \end{cases}$$

II Геометричні рівняння

3 Зв'язок між переміщеннями і деформаціями (співвідношення Коші):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}$$

4 Рівняння спільності деформацій (рівняння Сен-Венана):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}. \end{aligned}$$

III Фізичні рівняння

5 Узагальнений закон Гука в прямій формі:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Узагальнений закон Гука в зворотній формі:

$$\sigma_x = \lambda\Theta + 2G\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy},$$

$$\sigma_y = \lambda\Theta + 2G\varepsilon_y, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz},$$

$$\sigma_z = \lambda\Theta + 2G\varepsilon_z, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx},$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Використовуючи ці групи рівнянь, можна приступити безпосередньо до розв'язання загальної задачі теорії пружності про визначення напружень і деформації, що виникають в ізотропному пружному тілі під дією зовнішніх сил.

Слід підкреслити, що всі отримані вище *рівняння виведені в припущенні малих деформацій*.

Повна група рівнянь теорії пружності містить невідомі функції напружень, деформації і переміщення. Отже, необхідно заздалегідь вибрати ті величини, які беруть за основні невідомі, що підлягають визначенню в першу чергу, і за якими потім можна знайти всю решту чинників, що характеризують напружений стан і деформацію тіла. Дану задачу можна розв'язати декількома способами.

1 Як основні невідомі беруть напруження. Задача зводиться до визначення шести функцій

$$\sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z),$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}(x, y, z), \tau_{xz} = \tau_{zx}(x, y, z), \tau_{yz} = \tau_{zy}(x, y, z).$$

Вони повинні задовольняти рівняння рівноваги (16), яких недостатньо для визначення невідомих, тому необхідне задоволення шести умов спільності деформації (21). Одночасно повинні бути задоволені умови на поверхні (3). Сформульовану таким чином задачу називають *першою основною (граничною) задачею теорії пружності*.

2 Як основні невідомі беруть переміщення точок пружного тіла. У цьому випадку задача зводиться до визначення трьох невідомих функцій:

$$u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z),$$

при цьому повинні бути задоволені рівняння рівноваги (16) і умови на поверхні (3). Для цього потрібно співвідношення Коші (20) підставити в рівняння закону Гука в зворотній формі, тобто виразити напруження через переміщення, після чого отримані вирази підставити в рівняння рівноваги. Сформульовану таким чином задачу називають *другою основною (граничною) задачею теорії пружності*.

3 Як основні невідомі беруть частину переміщень і частину напружень, - так звана *змішана задача теорії пружності*.

Очевидно, що другий спосіб («розв'язання задачі в переміщеннях») з математичної точки зору більш простий, оскільки при цьому доводиться мати справу з меншим числом рівнянь і невідомих. Визначивши переміщення, за співвідношеннями Коші (20) можна знайти складові деформації $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$, а потім, підставляючи їх у рівняння узагальненого закону Гука в зворотній формі (24), визначити шукані напруження $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$.

Зазначені три основні задачі є деякою мірою схематизацією реальних фізичних задач. Ближче до реальних умов стоять так звані контактні задачі, що розглядають взаємне натиснення двох тіл: пружного на пружне або абсолютно твердого на пружне. З контактною задачею доводиться стикатися, наприклад, при розрахунку підшипників, катків і плит, рухомих опор ферм і балок, а також у задачах про натиснення штампа на плоску поверхню пружного тіла. У всіх цих задачах можуть також бути задані об'ємні сили.

При розв'язанні задач теорії пружності зворотним методом, тобто задаючи напруження і з'ясувавши, при яких силах, що діють на поверхні, виходить вибрана система напружень, може виникнути питання, чи можливо при іншій системі напружень отримати такі ж сили на поверхні. Якщо це можливо, то розв'язок рівнянь теорії пружності виявиться багатозначним: заданим силам на поверхні відповідатимуть декілька систем напружень, і необхідно з'ясувати, які з цих систем мають місце насправді. У цьому випадку при зворотному або напівзворотному способі розв'язання не можна бути упевненими у тому, що вибрана саме та система напружень, яка відповідає дійсності. Проте, якщо враховувати гіпотезу про природний стан тіла (не враховувати початкові напруження), а також закон незалежності дії сил, то можна легко довести³, що розв'язок задач теорії пружності є однозначним і тому єдиним.

Що стосується способів математичного розв'язання загальної задачі теорії пружності, то тут можна назвати такі три основні способи.

³ Доказ однозначності розв'язку задач теорії пружності можна знайти у книзі Філоненко-Бородич М.М. Теория упругости: Гостехиздат, 1947. - С. 105-108)

1 *Прямий спосіб*, який полягає в безпосередньому інтегруванні рівнянь теорії пружності.

2 *Зворотний спосіб*, згідно з яким задаються переміщеннями як функціями координат точки (x, y, z) і визначають на підставі співвідношень Коші (20) деформації, а за ними за допомогою зворотної форми закону Гука (24) напруження. Знаючи напруження, за формулами (3) встановлюють поверхневі умови, тобто ті зовнішні навантаження, які відповідають заданим переміщенням.

3 *Напівзворотний спосіб Сен-Венана*, згідно з яким задаються частиною зовнішніх сил і частиною переміщень, а решту чинників визначають з умови задоволення відповідних рівнянь повної групи теорії.

Для полегшення техніки розв'язання деяких рівнянь теорії пружності використовують спосіб послідовних наближень.

Одним з ефективних різновидів такого способу є використання в деяких задачах спочатку тих розв'язків, які одержані яким-небудь елементарним розв'язком, наприклад, знайденим в курсі опору матеріалів. Підстановка цих розв'язків у рівняння теорії пружності приводить до деяких невідповідностей (суперечностей), аналіз яких дозволяє визначити шлях коректування попереднього розв'язку, який може і не дає у результаті точного розв'язку задачі, але може привести до задовільного для практики розв'язку (більш строгому, ніж початковий елементарний розв'язок).

Зазначений спосіб послідовних наближень можна застосовувати і в методі сил, і в методі переміщень, і у разі прямого або зворотного методу розв'язання початкових рівнянь.

Розв'язання задачі теорії пружності в переміщеннях

Для розв'язання задачі теорії пружності в переміщеннях необхідно з рівнянь (16), (23) і (3) виключити невідомі складові напружень і деформації. Для цього скористаємося законом Гука в зворотній формі (24) і співвідношеннями Коші (20):

$$\sigma_x = \lambda\Theta + 2G\varepsilon_x = \lambda\Theta + 2G\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

Диференціюючи їх відповідно по x , y і z , отримаємо

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right), \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right).$$

Тоді перше рівняння рівноваги можна переписати у вигляді

$$\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) + \rho X = 0.$$

Тут

$$G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) = G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) =$$

$$= G \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = G \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u = \Delta u,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Остаточно перше рівняння рівноваги можна записати у вигляді

$$(\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + G \Delta u + \rho X = 0.$$

Аналогічно можна перетворити решту рівнянь рівноваги, проводячи колову підстановку символів x, y, z і u, v, w .

Таким чином, рівняння рівноваги в переміщеннях мають вигляд:

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + G \Delta u + \rho X &= 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + G \Delta v + \rho Y &= 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + G \Delta w + \rho Z &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Рівняння (25) називаються *рівняннями Ламе*. Вони містять в собі всі механічні, геометричні і фізичні співвідношення, на яких ґрунтується теорія пружності.

Поверхневі умови (3) також можна перетворити, якщо виразити напруження через переміщення.

Підставивши в рівняння системи (3) вирази напружень у формі (24), отримаємо:

$$\begin{aligned} P_{nx} &= \left(\lambda \Theta + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos(n, x) + \\ &+ G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(n, y) + G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(n, z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{ny} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(n, x) + \\
&+ \left(\lambda \Theta + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos(n, y) + G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(n, z), \\
P_{nz} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(n, x) + \\
&+ G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(n, y) + \left(\lambda \Theta + 2G \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cos(n, z).
\end{aligned} \tag{26}$$

Рівняння Ламе (25) спільно з умовами на поверхні (26) дозволяють перейти до безпосереднього розв'язання задач теорії пружності. Якщо рівняння (25) можна проінтегрувати і визначити переміщення u, v, w , що задовольняють умови на поверхні, то на підставі співвідношень Коші можна визначити деформації $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$. Після чого, скориставшись рівняннями узагальненого закону Гука в прямій формі (23), визначити шукані напруження $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. Проте інтегрування рівнянь (25) при дотриманні умов на поверхні (26) становить великі труднощі. Для розв'язання практичних задач у переміщеннях можна рекомендувати використання зворотного або напівзворотного способу Сен-Венана.

Розв'язання задачі теорії пружності в напруженнях

У попередніх параграфах уже не раз наголошувалося, що якщо як основні невідомі вибрані напруження, то число цих невідомих дорівнюватиме шести. Отже, трьох рівнянь рівноваги (16) і умов на поверхні (3) недостатньо для розв'язання задачі. У цьому випадку необхідно використовувати також умови спільності деформацій (21).

Оскільки умови спільності (21) зв'язують між собою деформації, ці умови необхідно перетворити, виразивши деформації через напруження за допомогою закону Гука (23). Виконуючи цю підстановку і одночасно використовуючи рівняння рівноваги (16), рівняння спільності деформації, за умови відсутності об'ємних сил, набудуть вигляду⁴:

$$\begin{aligned}
 (1+\nu)\Delta\sigma_x + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} &= 0, \\
 (1+\nu)\Delta\sigma_y + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} &= 0, \\
 (1+\nu)\Delta\sigma_z + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} &= 0, \\
 (1+\nu)\Delta\tau_{xy} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} &= 0, \\
 (1+\nu)\Delta\tau_{xz} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z} &= 0, \\
 (1+\nu)\Delta\tau_{yz} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Отримані в результаті перетворення умов спільності деформацій шість рівнянь називаються *умовами спільності Бельтрамі-Мічелла*.

Таким чином, на додаток до рівнянь рівноваги (16) і умов на поверхні (3) компоненти напружень в ізотропному тілі повинні задовольняти рівняння Бельтрамі-Мічелла (27).

⁴ Виведення цих формул тут опущено; знайти його можна у книзі Тимошенко С.П. Теория упругости. – 1934. – Ч.1

Оскільки при розв'язанні задач у напруженнях невідомих шість, а рівнянь дев'ять, то достатньо з шести рівнянь Бельтрамі-Мічелла взяти будь-які три. Отримані після інтегрування шість складових напруження повинні задовольняти умови на поверхні (3). Після цього за формулами закону Гука можна визначити складові деформацій, а за співвідношеннями Коші - складові переміщення.

Рівняння Бельтрамі-Мічелла замикають повну систему рівнянь теорії пружності, що дозволяє розв'язувати необхідні задачі в переміщеннях або в напруженнях.

Питома потенційна енергія деформації

Під дією зовнішніх сил пружне тіло деформується, а сили здійснюють роботу. Ця робота перетворюється на потенційну енергію і в подальшому, при видаленні зовнішніх сил, витрачається на відновлення первинної (недеформованої) форми. Таким чином, *пружне тіло здатне акумулювати механічну енергію, яку можна повернути при розвантаженні.*

Питома потенційна енергія - це енергія, накопичувана в одиниці об'єму тіла, при його деформації. Вирази для питомої потенційної енергії необхідні для застосування в так званих варіаційних методах теорії пружності.

Розглянемо баланс енергії при деформації пружного тіла. У цьому випадку зовнішні сили здійснюють роботу:

$$A = T + Q + U ,$$

де T - кінетична енергія; Q - тепла енергія; U - потенційна енергія.

Нехтуючи при статичному навантаженні змінами кінетичної енергії системи (повільне навантаження), а також втратами енергії на внутрішні тертя, зміною температури, магнітними і електричними явищами, які

мають місце при деформації, можна стверджувати, що зменшення потенційної енергії дорівнює потенційній енергії деформації, накопиченій пружною конструкцією.

Таким чином:

$$A = U .$$

Для обчислення питомої потенційної енергії u розглянемо одиничний об'єм, на який діють напруження σ_x , і скористаємось принципом незалежності напружень (принцип незалежності сил). Тоді робота, яку зробить σ_x на переміщенні ε_x , буде дорівнювати

$$A = \int_0^s \bar{F}(s) ds = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x .$$

Для більшості матеріалів, як це було раніше показано, існує лінійна залежність між напруженнями і деформаціями (23), тому в межах застосовності закону Гука

$$A = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x .$$

Міркуючи аналогічним чином для всіх компонент напруження і підсумовуючи всі роботи, отримаємо

$$u = \frac{1}{2} [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}] \quad (28)$$

Потенційна енергія деформації завжди позитивна. Її величина не залежить від порядку навантаження і визначається остаточними значеннями зусиль і переміщень.

Скористаємось законом Гука в зворотній формі (24):

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\theta, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy},$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\theta, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\theta, \quad Y_z = Ge_{yz}.\end{aligned}$$

Підставляючи значення відповідних напружень у вираз питомої потенційної енергії деформації, одержимо

$$u = \frac{1}{2} \left[2G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \lambda\theta^2 + G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \right]. \quad (29)$$

Якщо скористатися законом Гука в прямій формі (24), то вираз питомої потенційної енергії деформації в напруженнях матиме вигляд

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{2E} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2G(\sigma_x\sigma_z + \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2).\end{aligned} \quad (30)$$

Запитання для самоконтролю

1 У яких межах діє закон Гука для різних матеріалів?

2 Виведіть формули, що виражають узагальнений закон Гука в прямій та зворотній формах. Поясніть, чому ці формули дійсні і у випадку, коли задані нормальні напруження не є головними.

3 Виведіть формулу для визначення об'ємної деформації, якою є її розмірність. Сформулюйте закон пружної зміни об'єму.

4 Запишіть повну групу рівнянь теорії пружності. Сформулюйте основні задачі теорії пружності та методи їх розв'язання.

5 Виведіть рівняння Ламе та запишіть граничні умови для розв'язання задачі теорії пружності в переміщеннях. Чи потрібно при розв'язанні задачі у такий спосіб задоволення рівнянь спільності деформацій і чому?

6 Визначте кількість рівнянь та невідомих при розв'язанні задачі теорії пружності в напруженнях. Наведіть шляхи розв'язання цієї задачі.

7 Як ви розумієте поняття «однозначність розв'язку задач теорії пружності»?

8 Що називається питомою потенційною енергією деформації? Визначте її розмірність. Наведіть формули для визначення повної потенційної енергії деформації в деформаціях та напруженнях.

ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТАХ

Плоска деформація

Велика категорія задач теорії пружності допускає значне спрощення математичного розв'язання. Це задачі, в яких можна вважати, що зовнішні дії лежать в площинах, паралельних якій-небудь площині, наприклад xOy , і що викликані ними напруження і переміщення однакові для всіх точок будь-якої осі z , перпендикулярної до цієї площини. Напруження по площадках xOy і переміщення в напрямку осі z або відсутні, або є функціями напружень і переміщень, що виникають в площині xOy . Такі задачі об'єднуються загальною назвою - *плоскі задачі*. Розрізняють два різновиди плоскої задачі: плоский деформований і плоский напружений стан.

Деформацію тіла називають плоскою, якщо переміщення всіх його точок паралелі одній і тій самій площині (площини деформації) і залежать лише від координат точки в цій площині.

Візьмемо площину xu за площину деформації, тоді переміщення u, v будуть функціями x, y , а переміщення w дорівнюватиме нулю. Не ускладнюючи подальших висновків, можна на плоску деформацію накласти рівномірне розтягування у напрямі осі z . У такому разі переміщення w зобразиться лінійною функцією z .

Багато досить важливих технічних задач із більшою чи меншою точністю можуть бути зведені до випадку плоскої деформації. Кожен раз, коли маємо справу з довгим циліндровим або призматичним тілом, що зазнає дії сил, не змінних у напрямі довжини тіла і нормальних до цього напрямку (рис. 16 а-в), можна вважати, що в місцях, віддалених від кінців циліндра, всі елементи, на які ми

можемо поділити тіло системою поперечних перетинів, перпендикулярних до довжини циліндра, викликають одну і ту саму деформацію. Переміщення якої-небудь точки визначається її координатами в площині відповідного поперечного перетину і не залежить від положення цього перетину по довжині циліндра. Цей висновок, що приводить задачу до плоскої деформації, тим точніший, чим далі даний перетин від кінців циліндра.

До такого роду задач можна віднести, наприклад, розрахунок циліндрових трубок, що зазнають дії рівномірного внутрішнього або зовнішнього тиску. Для кожного віддаленого від кінців трубки елементарного кільця, виділеного двома площинами, перпендикулярними до осі трубки, деформації будуть приблизно одні й ті самі, і можна обмежитися розглядом одного елементарного кільця. Те саме можна сказати відносно деформації циліндрового катка (рис. 16 а), стиснутого між двома площинами силами, рівномірно розподіленими по довжині твірної циліндра. Приблизно у таких умовах знаходяться катки мостових опор.

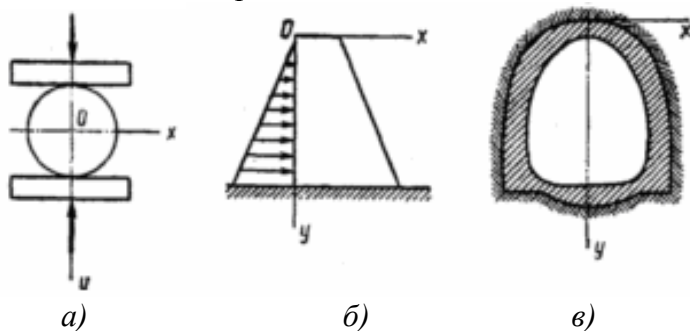


Рисунок 16

При розрахунку підпірної стінки або дамби, що має велику довжину в напрямі, перпендикулярному до

площини креслення (рис. 16 б), також можна обмежитися розглядом одного елемента, виділеного зі стінки двома перетинами, перпендикулярними до напрямку довжини стінки. Так само можна привести до плоскої задачі розрахунок циліндрового зведення, якщо його довжина у напрямі твірної велика порівняно з прольотом і навантаження у напрямі твірної не змінюється (тунель метрополітену).

У зв'язку з тим що тіло довге і навантаження не змінюється по довжині, граничні умови для переміщень мають вигляд:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y), \\ w &= 0. \end{aligned}$$

При зроблених припущеннях щодо переміщень можна записати:

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Таким чином, тензор деформацій має вигляд

$$\hat{D} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Скористаємося законом Гука в прямій формі (23). Для даної задачі матимемо:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} = 0, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] = 0, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} = 0.\end{aligned}$$

З цих рівнянь випливає

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (32)$$

Якщо на плоску деформацію накласти рівномірне розтягування у напрямі осі z , то для ε_z одержимо постійну величину.

Отже, з урахуванням (32) вісь z є однією з головних осей. Відповідне їй головне напруження σ_z не дорівнює нулю і може бути виражене через складові σ_x і σ_y . Таким чином, тензор напружень для плоского деформованого стану матиме вигляд

$$\hat{T} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{vmatrix}.$$

Таким чином, задача теорії пружності у разі плоскої деформації зводиться до визначення трьох складових напружень $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

З урахуванням набутих значень напружень закон Гука в прямій формі (21) може бути записаний в такому вигляді:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x(1-\nu^2) - \nu(1+\nu)\sigma_y], \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y(1-\nu^2) - \nu(1+\nu)\sigma_x], \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}. \end{cases} \quad (33)$$

Диференціальні рівняння рівноваги у разі плоскої деформації матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho Y &= 0. \end{aligned}$$

Якщо складова об'ємних сил у напрямку осі z дорівнює нулю ($Z=0$), то третє рівняння рівноваги відпадає, оскільки складова напруження σ_z залежить тільки від x, y .

На практиці звичайно доводиться мати справу з силою тяжіння, тому надалі обмежимося лише цим випадком і, напрямляючи вісь y вертикально вниз, перепишемо рівняння рівноваги таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho g &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Очевидно, що ці рівняння будуть задоволені, якщо взяти довільну функцію $\varphi = \varphi(x, y)$, що можна двічі диференціювати, так звану *функцію напружень*, або *функцію Ері*, таку, що:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - g\rho x. \quad (34)$$

Підставимо прийнятї вирази для складових напружень в рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = 0; \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 0. \end{cases}$$

Отже, при будь-якому виборі функції $\varphi = \varphi(x, y)$ рівняння рівноваги задовольняються тотожно. Проте ця функція не може бути вибрана довільно, оскільки деформації знайдені за допомогою цієї функції повинні задовольняти рівняння спільності деформацій. Усі рівняння спільності деформацій задовольняються тотожно, крім першого:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (35)$$

Підставляючи значень напружень (34) в рівняння закону Гука в прямій формі (23), а потім отримані вирази деформацій в рівняння спільності деформацій, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} - \nu(1+\nu) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + (1-\nu^2) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \nu(1+\nu) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = \\ = -\frac{1}{G} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}. \end{aligned}$$

З урахуванням того, що $\frac{E}{G} = \frac{E2(1+\nu)}{E} = 2(1+\nu)$, остання рівність після елементарних перетворень зводиться до вигляду

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (36)$$

Використовуючи оператора Лапласа для плоскої задачі $\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$, можемо записати

$$\Delta^2 \varphi = \Delta \Delta \varphi = 0.$$

Таким чином, у разі плоскої деформації задача теорії пружності зводиться до знаходження однієї функції напружень $\varphi = \varphi(x, y)$.

Ця функція повинна бути вибрана так, щоб у кожній точці тіла було задоволене рівняння (36) і, крім того, були виконані умови на поверхні тіла. Якщо задані сили, що діють на поверхні, то ці умови матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{X}_n &= \sigma_x \cos(x, n) + \tau_{xy} \cos(y, n) = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cos(x, n) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cos(y, n), \\ \bar{Y}_n &= \tau_{yx} \cos(x, n) + \sigma_y \cos(y, n) = \\ &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cos(x, n) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cos(y, n). \end{aligned} \quad (37)$$

Якщо на плоску деформацію накладається рівномірне розтягування у напрямі осі z , причому $\varepsilon_z = e$, то вирази для складових напруження $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ не змінюються, а вираз для складової σ_z має вигляд

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) + Ee.$$

Узагальнений плоский напружений стан. Властивості функції напружень

Раніше були з'ясовані ті спрощення, які виходять в загальній задачі теорії пружності у разі, коли тіло має форму достатньо довгого циліндра. Виявляється, що такі ж спрощення при деяких припущеннях можуть бути отримані і в іншому крайньому випадку, коли тіло циліндрової форми має дуже малу довжину, тобто є тонкою пластинкою (диском), обмеженою заданим контуром.

Товщину пластинки, що відповідає достатньо малій довжині циліндра, позначимо через $2h$ (рис. 17). Площину $xу$ розташуємо перпендикулярно до твірних циліндра так, щоб вона ділила довжину циліндра (товщину пластинки) навпіл, тоді основи циліндра, що відповідають поверхням пластинки, визначаться рівнянням $z = \pm h$. Розташовану таким чином площину $xу$ називатимемо *серединною площиною пластинки*.

Розглянемо випадок, коли об'ємні сили постійні і нормальні до твірних циліндра ($Z = 0$), а поверхні пластинки вільні від зусиль

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ при } z = \pm h, \quad (38)$$

і поверхневі зусилля, прикладені по контуру пластинки, діють в серединній площині $xу$. За цих умов серединна площина не скривляється, пластинка не зазнає вигину і при малій товщині $2h$ складові напруження σ_i, τ_{ij} , напевно, достатньо мало змінюються при зміні координати z . У такому разі середні по товщині значення складових напруження достатньою мірою характеризують напружений стан і визначення цих середніх значень має велике практичне значення.

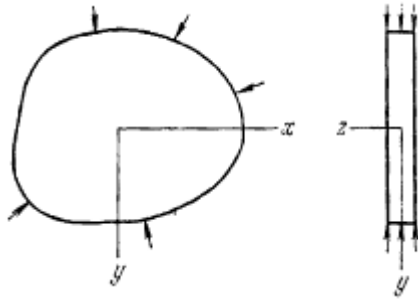


Рисунок 17

Зберігаючи для середніх значень складових напруження колишні позначення і позначаючи їх лише межею вгорі, матимемо:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_x dz;$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_y dz;$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_z dz.$$

Зв'язок між цими середніми значеннями напружень отримаємо з диференціальних рівнянь рівноваги, помножуючи їх на dz і інтегруючи в межах від $-h$ до h :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \rho \bar{X} = 0, \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \rho \bar{Y} = 0. \end{cases}$$

Тензор напружень при плоскому напруженому стані має вигляд

$$\hat{T} = \begin{vmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\tau}_{xy} & 0 \\ \bar{\tau}_{yx} & \bar{\sigma}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

У разі дії сили тяжіння, що має напрям осі y , ці рівняння набудуть вигляду

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \rho g = 0. \end{cases}$$

Рівняння, що зв'язують середні значення напружень, повністю збігаються з рівняннями, одержаними у разі плоскої деформації. Середні значення складових напруження можна виразити через похідні функції напружень φ за допомогою формул (34). Легко показати, що і в цьому випадку функція φ повинна задовольняти рівняння (36), якщо припустити, що складова напруження σ_z , що обертається в нуль на поверхнях $z = \pm h$, дорівнює нулю по всій товщині пластинки. При малій товщині пластинки таке припущення, очевидно, буде дуже близьке до дійсності, оскільки при зроблених припущеннях щодо зовнішніх сил не буде ніяких причин, які могли б викликати значні напруження σ_z . Доведемо це. З урахуванням (38) можна записати

$$\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \right) \Big|_{z=\pm h} = \left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \right) \Big|_{z=\pm h} = 0.$$

Тоді з третього рівняння рівноваги (16) за умови відсутності об'ємних сил у напрямку осі z випливає, що

$$\left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)\Big|_{z=\pm h} = -\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}\right)\Big|_{z=\pm h} - \left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}\right)\Big|_{z=\pm h} = 0. \quad (39)$$

Розкладаючи σ_z в ряд в околі точок $z = \pm h$, отримаємо

$$\sigma_z = \sigma_z(\pm h) + \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)\Big|_{z=\pm h} (z \mp h) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2}\right)\Big|_{z=\pm h} (z \mp h)^2 + \dots$$

Ураховуючи (38) і (39), матимемо

$$\sigma_z = \left(\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2}\right)\Big|_{z=\pm h} (z \mp h)^2 + \dots$$

Тобто величина σ_z пропорційна $(z \mp h)^2$, а через малість товщини пластинки h з достатньою для розрахунків точністю можна припустити, що $\sigma_z = 0$ по всій товщині пластинки. З урахуванням цього для середніх значень складових деформації отримуємо вирази:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_x - \nu \bar{\sigma}_y),$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_y - \nu \bar{\sigma}_x),$$

$$\bar{\gamma}_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \bar{\tau}_{xy}.$$

Виражаючи складові напружень $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$ за формулами (34) через φ і підставляючи набуті таким чином середні значення складових деформації в перше рівняння спільності деформацій, одержуємо рівняння (36).

Таким чином, визначення напружень у разі плоскої деформації і в тільки що розглянутому випадку, який називається *узагальненим плоским напруженим станом*,

зводиться до розв'язання одного і того самого диференціального рівняння (36). Що стосується деформацій, то вони в цих двох випадках будуть різні. Насправді, у разі узагальненого плоского напруженого стану ми взяли $\sigma_z = 0$, отже,

$$\lambda\theta + 2G\frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

звідки з урахуванням виразу об'ємної деформації отримаємо

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Тоді

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{2G}{\lambda + 2G}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Складові напруження виражаються через переміщення за допомогою формул узагальненого закону Гука в зворотній формі (24):

$$\sigma_x = \frac{2\lambda G}{\lambda + 2G}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2G\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\sigma_y = \frac{2\lambda G}{\lambda + 2G}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2G\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Порівнюючи цей результат із формулами, отриманими для плоскої деформації, робимо висновок, що переміщення у випадку узагальненого плоского напруженого стану можуть бути отримані за тими самими формулами, тільки потрібно коефіцієнт Ламе λ замінити величиною

$$\lambda' = \frac{2G\lambda}{\lambda + 2G}.$$

Питанню про інтегрування рівняння (36), до якого зводиться розв'язання плоскої задачі теорії пружності, присвячений цілий ряд робіт. З'ясовано, що це рівняння повністю визначає функцію φ , якщо на контурі задані значення φ і її похідної по нормалі $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. У задачах теорії пружності, як правило, задаються сили, прикладені по контуру, а у такому разі граничні значення $\bar{\varphi}$ і $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n}$ можуть бути знайдені з умов на поверхні (37).

Підставляючи замість складових напруження їх вирази через φ і беручи до уваги, що при прийнятому розташуванні координат (рис.18) і показаному стрілкою напрямі відліку дуги s

$$\cos(x, n) = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \cos(y, n) = -\frac{\partial x}{\partial s},$$

за відсутності об'ємних сил з рівнянь (32) отримуємо:

$$X_n = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right),$$

$$Y_n = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$$

Інтегруючи останню рівність по довжині дуги s , отримаємо:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\int_0^s Y_n ds + \alpha = -Y_s,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int_0^s X_n ds + \beta = X_s,$$
(40)

де α, β - довільні постійні. Y_s, X_s в (40) є проєкціями головного вектора всіх сил, прикладених на контурі від 0 до s відповідно на осі y і x .

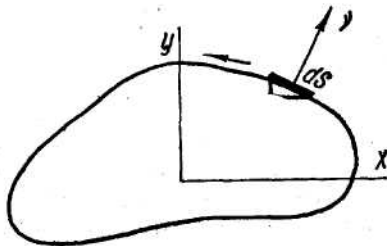


Рисунок 18

На контурі пластинки

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(x, n) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(y, n).$$

Якщо замість $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ підставити для них знайдені вище вирази, то значення функції $\bar{\varphi}$ на контурі можна подати у вигляді

$$\bar{\varphi} = \int_0^s \left[-\frac{\partial x}{\partial s} \int_0^s Y_n ds + \frac{\partial y}{\partial s} \int_0^s X_n ds \right] ds + \alpha x + \beta y + \gamma.$$

У разі простого (однозв'язного) контура можна, не порушуючи спільності результату, взяти ці постійні такими, що дорівнюють нулю, оскільки додавання до функції напружень лінійної функції x і y не впливає на величини напружень, що виражаються через другі похідні від функції напружень φ . Тобто можна записати

$$\bar{\varphi} = M_s, \quad (41)$$

де M_s - момент сил, прикладених до частини контуру, яка розглядається, відносно точки s .

При складних (багатозв'язкових) контурах, наприклад у разі плоского кільця, постійні α, β і γ на кожному контурі мають своє значення, і їх доводиться визначати з умов однозначності переміщень (умови спільності деформацій). У першому випадку розподіл напружень цілком визначається рівнянням (36) і зусиллями, прикладеними по контуру. Вирази для складових напруження не міститимуть в собі пружних постійних, і розподіл напружень не залежатиме (у разі ізотропного тіла) від пружних властивостей матеріалу. Саме тому можна переносити результати експериментального дослідження напружень, отримані для прозорих матеріалів за допомогою поляризованого світла на інші матеріали, зокрема сталь. В іншому випадку доводиться брати до уваги вирази для переміщень, і тому напруження виражатимуться формулами, що містять пружні постійні матеріалу. Розподіл напружень змінюватиметься залежно від пружних властивостей матеріалу.

Розв'язання плоскої задачі за допомогою цілих поліномів

Визначення напружень у випадку плоскої задачі теорії пружності зводиться, як було показано, до знаходження розв'язків рівняння:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0,$$

що задовольняє задані умови на поверхні (37). Якщо контур пластинки витягнутий прямокутником і зусилля розподілені по довгих сторонах цього прямокутника можуть бути представлені цілими функціями координат, то

вигідно брати розв'язки рівняння (36) у вигляді цілих поліномів. Оскільки напруження виражаються другими похідними від φ , то, розв'язуючи рівняння (36) у вигляді полінома другого ступеня, одержуємо однорідний напружений стан. У разі полінома третього ступеня напруження будуть лінійними функціями координат і т.д.

Розглянемо докладніше декілька простих розв'язків, якими скористаємося надалі при визначенні напружень в балках, що згинаються.

Якщо функцію напружень узяти у вигляді

$$\varphi = \frac{a_0}{2}x^2 + b_0xy + \frac{c_0}{2}y^2,$$

то складові напруження будуть:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c_0, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a_0, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -b_0.$$

Оскільки коефіцієнти a_0, b_0 і c_0 абсолютно довільні, то їх можна підібрати так, щоб одержати просте розтягування або стиснення у напрямі осі x або осі y , а також чистий зсув у площини xy та різні комбінації цих простих деформацій. Для визначення умов навантаження по сторонах даного прямокутника, скористаємося граничними умовами (37):

$$\begin{cases} X_n = c_0 \cos(n, x) - b_0 \cos(n, y), \\ Y_n = -b_0 \cos(n, x) + a_0 \cos(n, y). \end{cases} \quad (42)$$

Так, для сторони AB , для якої зовнішня нормаль напрямлена протилежно осі x , тобто $\cos(n, x) = -1$, $\cos(n, y) = 0$ (рис. 19), згідно з (42) матимемо

$$\begin{cases} X_{-x} = -c_0, \\ Y_{-x} = b_0. \end{cases}$$

Для паралельної сторони CD
 $(\cos(n, x) = 1, \cos(n, y) = 0)$:

$$\begin{cases} X_x = c_0, \\ Y_x = -b_0. \end{cases}$$

На стороні BC $(\cos(n, x) = 0, \cos(n, y) = 1)$:

$$\begin{cases} X_y = -b_0, \\ Y_y = a_0. \end{cases}$$

На паралельній їй стороні DA
 $(\cos(n, x) = 0, \cos(n, y) = -1)$:

$$\begin{cases} X_{-y} = b_0, \\ Y_{-y} = -a_0. \end{cases}$$

Тобто функції напружень у вигляді полінома другого ступеня відповідає зсув у площині xu спільно з розтягуванням уздовж осей x, y (рис.19).

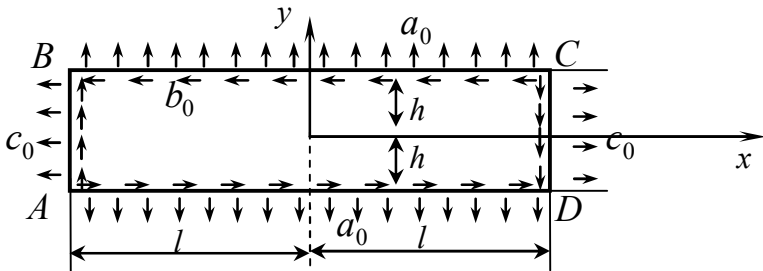


Рисунок 19

Візьмемо функцію напружень у вигляді полінома третього ступеня:

$$\varphi = \frac{a_1}{3 \cdot 2 \cdot 1} x^3 + \frac{b_1}{2 \cdot 1} x^2 y + \frac{c_1}{2 \cdot 1} xy^2 + \frac{d_1}{3 \cdot 2 \cdot 1} y^3.$$

Складові напруження набудуть вигляду:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c_1 x + d_1 y, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a_1 x + b_1 y,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -b_1 x - c_1 y.$$

Якщо всі коефіцієнти, крім d_1 , у функції напружень взяти такими, що дорівнюють нулю, то отримаємо випадок чистого вигину смуги силами, розподіленими по сторонах $x = \pm l$ (рис. 20). Так само коефіцієнту a_1 відповідає чистий вигин зусиллями, розподіленими по сторонах $y = \pm h$.

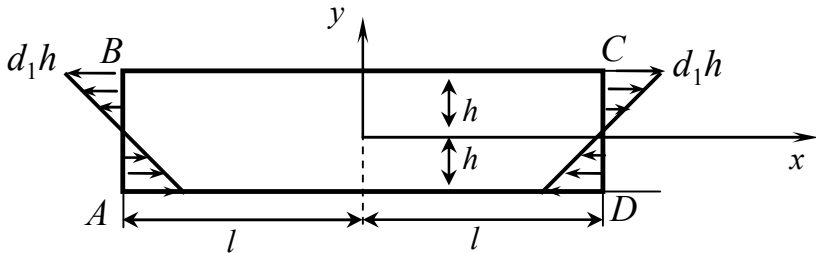


Рисунок 20

Якщо коефіцієнт b_1 або c_1 відмінний від нуля, то, крім нормальних, діятимуть також і дотичні напруження. На рис.21 показаний розподіл зусиль по контуру пластинки у разі, коли b_1 відмінний від нуля.

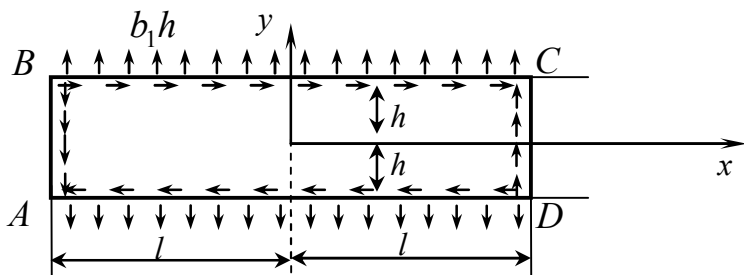


Рисунок 21

Коли проводився вибір функції напружень у вигляді поліномів другого або третього ступеня, коефіцієнти в цих поліномах могли бути абсолютно довільними, оскільки при всяких значеннях коефіцієнтів функції напружень рівняння (36) буде задоволене. У разі поліномів вищих ступенів рівняння (36) буде задоволене лише при певних співвідношеннях між коефіцієнтами. Візьмемо, наприклад, для функції напружень вираз у вигляді полінома четвертого ступеня:

$$\varphi = \frac{a_2}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_2}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_2}{2 \cdot 1} x^2 y^2 + \frac{d_2}{3 \cdot 2} x y^3 + \frac{e_2}{4 \cdot 3} y^4.$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (36), знаходимо, що воно буде задоволене лише, якщо $e_2 = -(2c_2 + a_2)$.

Для складових напруження справедливі такі вирази:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c_2 x^2 + d_2 x y - (2c_2 + a_2) y^2,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a_2 x^2 + b_2 x y + c_2 y^2,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{b_2}{2} x^2 - 2c_2 x y - \frac{d_2}{2} y^2.$$

Коефіцієнти a_2, \dots, d_2 у цих виразах абсолютно довільні. Якщо усі їх, крім d_2 , взяти такими, що дорівнюють нулю, то отримаємо:

$$\sigma_x = d_2 xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{d_2}{2} y^2.$$

Відповідний розподіл зусиль наведений на рис.22.

Візьмемо тепер функцію напружень у вигляді полінома п'ятого ступеня:

$$\varphi = \frac{a_3}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_3}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_3}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2} x^2 y^3 + \frac{e_3}{4 \cdot 3} xy^4 + \frac{f_3}{5 \cdot 4} y^5.$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (36), між коефіцієнтами знайдемо такі залежності:

$$e_3 = -(2c_3 + 3a_3); \quad f_3 = -\frac{1}{3}(b_3 + 2d_3).$$

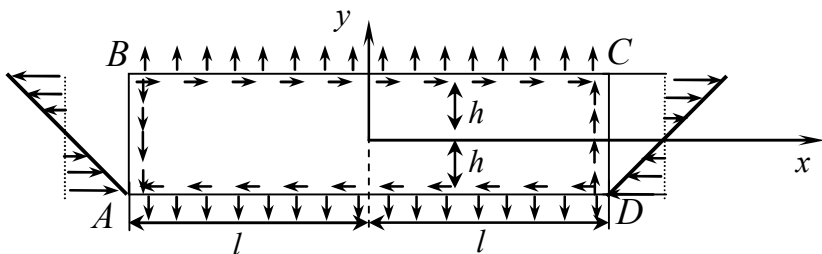


Рисунок 22

Складові напруження у цьому випадку матимуть вигляд:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{c_3}{3} x^3 + d_3 x^2 y - (2c_3 + 3a_3) xy^2 - \frac{1}{3} (b_3 + 2d_3) y^3,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 xy + \frac{d_3}{3} y^3,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{b_3}{3} x^3 - c_3 x^2 y - d_3 xy^2 + \frac{1}{3} (2c_3 + 3a_3) y^3.$$

У цих виразах коефіцієнти a_3, \dots, d_3 можна вибирати абсолютно довільно. Надалі нам знадобиться випадок, коли всі ці коефіцієнти, крім d_3 , є такими, що дорівнюють нулю. За цієї умови складові напруження будуть такими:

$$X_x = d_3 x^2 y - \frac{2}{3} d_3 y^3, \quad Y_y = \frac{d_3}{3} y^3, \quad X_y = -d_3 xy^2.$$

Таким чином, отриманий розподіл напружень для прямокутної смуги, по подовжніх сторонах якої прикладені рівномірно розподілені нормальні напруження $Y_y = \pm \frac{d_3}{3} y^3$ і дотичні напруження $X_y = -d_3 y^2 x$, що подаються, як і в раніше розглянутому розв'язку, у вигляді лінійної функції від x .

Обмежимося поки що цими простими розв'язками і застосуємо їх до дослідження вигину балки силою, прикладеною на кінці, і навантаженням, рівномірно розподіленим по довжині.

Розв'язання за допомогою поліномів для функції напружень становить практичний інтерес через те, що легко дає точні розв'язки для багатьох, хоча й штучних задач. Однак комбінація з таких розв'язків (шляхом додавання чи віднімання) і подібних їм окремих результатів може дозволити безпосередньо отримати розв'язки і для реальних умов на поверхні.

Вигин консолі силою, прикладеною до вільного кінця

Припустимо, що балка, зображена на рис.23, згинається силою Q . Розмір балки в напрямі, перпендикулярному до площини рисунка (ширина балки), може бути або дуже великим, тоді матимемо справу з плоскою деформацією, або, навпаки, достатньо малим, коли напруження можна замінити їх середніми значеннями по ширині і звести визначення напружень до розв'язання узагальненої плоскої задачі. Як у першому, так і в другому випадку ширина балки не відіграє ніякої ролі, і надалі цю ширину можна взяти такою, що дорівнює одиниці. Тоді Q буде згинальною силою, віднесеною до одиниці ширини балки.

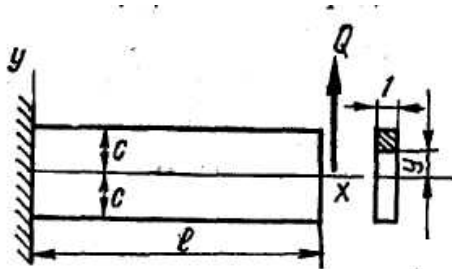


Рисунок 23

Для визначення напружень в даному випадку скористаємося розв'язком у вигляді полінома четвертого ступеня. Щоб звільнитися від дотичних напружень по верхній і нижній гранях балки, накладемо на розв'язок задачі у вигляді полінома другого ступеня ($\tau_{xy} = -b_0$) напруження, що відповідають чистому зсуву, і підберемо значення коефіцієнта b_0 так, щоб була задоволена умова

$$-\frac{d_2}{2}c^2 - b_0 = 0.$$

Крім того, потрібно звільнитися від нормальних напружень на кінці балки $x = +l$, оскільки вигин балки зумовлений дотичною силою Q . Отримати це можна, приєднуючи до взятого розв'язку чистий вигин $\sigma_x = d_1 y$ (див. рис. 20) і підбираючи невідомий поки що коефіцієнт d_1 так, щоб була виконана умова

$$d_1 l y + d y = 0.$$

Остаточно на підставі цих умов отримуємо такий розподіл напружень:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -d_2(l-x)y; \\ \sigma_y &= 0; \\ \tau_{xy} &= \frac{d_2}{2}(c^2 - y^2) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Легко помітити, що при цьому верхня і нижня грані балки будуть вільні від будь-яких зусиль. На кінці балки $x = +l$ діятимуть лише дотичні напруження, які можуть бути зведені до однієї поперечної сили. Залишається підібрати невідомий поки що коефіцієнт d_2 так, щоб ця сила дорівнювала заданій силі Q . Підсумовуючи дотичні напруження по кінцевому перетину балки, отримаємо

$$Q = \int_{-c}^{+c} \frac{d_2}{2}(c^2 - y^2) dy = \frac{2}{3} d_2 c^3,$$

звідки

$$d_2 = \frac{3Q}{2c^3} = \frac{Q}{J},$$

де $J = \frac{2c^3}{3}$ - момент інерції поперечного перетину балки відносно нейтральної лінії.

Підставляючи знайдене значення d_2 у розв'язок (41) одержимо:

$$\sigma_x = -\frac{Q(l-x)y}{J}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{Q(c^2 - y^2)}{2J} = \frac{QS}{J}.$$

Тут S - статичний момент відносно нейтральної лінії частини поперечного перетину, заштрихованої на рис.23.

Отриманий розподіл напружень збігається з тим, яке дає елементарна теорія вигину. Отже, для балок, поперечний перетин яких є прямокутником, для розподілу напружень по висоті поперечного перетину балки можна взяти лінійний закон для нормальних напружень і параболічний закон для дотичних.

Вирішивши питання про розподіл напружень, перейдемо до визначення переміщень точок балки при вигині. Раніше (див. плоский напружений стан) було показано, що переміщення можуть виходити різними залежно від того, розв'язується задача плоскої деформації або про плоский напружений стан. Припустимо надалі, що розглядається узагальнена плоска задача і визначимо прогинання балки, що має достатньо малу ширину. За цієї умови напруження $\sigma_z = 0$, і для складових деформації маємо такі значення:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{Q(l-x)y}{EJ}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\nu Q(l-x)y}{EJ}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{Q}{2J} \frac{c^2 - y^2}{G}. \end{aligned} \quad (44)$$

Шляхом інтегрування перших двох рівнянь (44) знаходимо такі загальні вирази для переміщень:

$$u = -\frac{Qy}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + f(y),$$

$$v = \frac{\nu Qy^2}{2EJ} (l - x) + \phi(x).$$

Тут через $f(y)$, $\phi(x)$ позначені невідомі поки що функції y і x .

Підставляючи знайдені вирази для переміщень в останнє рівняння (44), отримуємо:

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = \frac{Q}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + d,$$

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = \frac{\nu Qy^2}{2EJ} - \frac{Qy^2}{2GJ} + e.$$
(45)

Тут d і e - постійні величини, пов'язані з умовою

$$d + e = \frac{Qc^2}{2GJ}.$$

Інтегруючи (45), знайдемо функції $\phi(x)$ і $f(y)$:

$$\phi = \frac{Q}{EJ} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + dx + h,$$

$$f = \frac{\nu Qy^3}{6EJ} - \frac{Qy^3}{6GJ} + ey + g,$$

де h і g - довільні постійні величини. З урахуванням останніх виразів, для переміщень u і v отримаємо такі формули:

$$u = -\frac{Q}{EJ}y\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{\nu Q}{6QJ}y^3 - \frac{Q}{6GJ}y^3 + ey + g,$$

$$v = \frac{\nu Q}{2EJ}y^2(l-x) + \frac{Q}{EJ}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + dx + h.$$

Довільні постійні в цих виразах повинні бути визначені з умов закріплення балки.

Закріпимо точку балки на початку координат. Тоді довільні постійні h і g будуть такими, що дорівнюють нулю. Вважаючи $y=0$, для прогинань осі балки знаходимо такий вираз:

$$(v)_{y=0} = \frac{Q}{EJ}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + dx.$$

Кривизна зігнутої осі становитиме

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{Q(l-x)}{EJ} = \frac{M}{EJ},$$

що повністю збігається з результатом елементарної теорії вигину, побудованої на гіпотезі плоских перетинів. Останній член у виразі для прогинання характеризує вплив дотичних напружень на прогинання балки. Значення довільної постійної d визначається з третьої умови закріплення. Щоб усунути можливість обертання балки як твердого тіла відносно осі z , крім точки, необхідно ще закріпити який-небудь лінійний елемент.

Розглянемо два випадки: випадок закріплення елемента балки, що проходить через початок координат і збігається з напрямом осі x , і випадок закріплення елемента, що проходить через початок координат і напрямлений по осі y .

У першому випадку маємо умову

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0,y=0} = 0.$$

Довільна постійна d дорівнює нулю. Викривлений поперечний перетин, що відповідає закріпленому кінцю балки, займе положення, показане на рис. 24 а, і прогинання балки на вільному кінці зобразиться формулою:

$$(v)_{x=l} = \frac{Ql^3}{3EJ}.$$

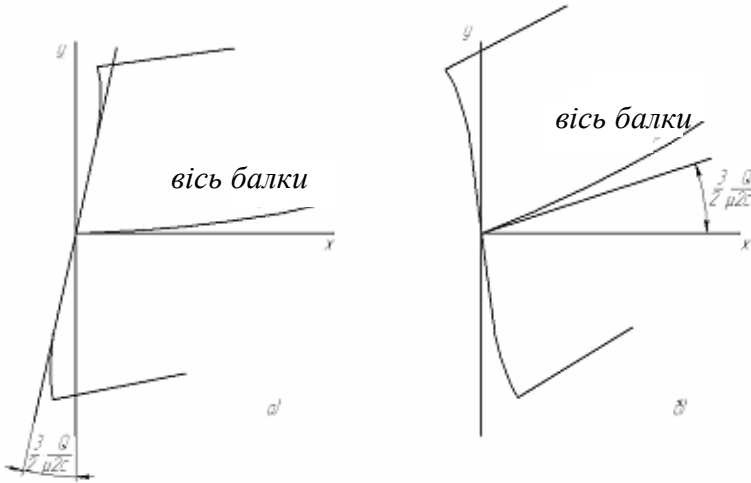


Рисунок 24

У другому випадку третя умова закріплення буде такою:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=0,y=0} = 0.$$

Розташування закріпленого кінця балки після деформацій показано на рис. 24 б. Для довільної постійної d отримаємо значення $d = \frac{3 Q}{2 2Gc}$, що відповідає зсуву по нейтральному шару балки, що згинається. Прогинання на вільному кінці балки в цьому випадку буде

$$(v)_{x=l, y=0} = \frac{Ql^3}{3EJ} + \frac{3 Ql}{2 2Gc}.$$

Цей результат збігається з тим, що дає елементарна теорія вигину, якщо при обчисленні прогинань взятий до уваги вплив дотичних напружень і узято при цих підрахунках максимальне значення зсуву, що відповідає нейтральному шару балки, що згинається.

На практиці доводиться мати справу зі способами закріплення, відмітними від тільки що розглянутих випадків. Звичайно на практиці закріплюють декілька точок поперечного перетину, при цьому, як правило, розподіл напружень і деформацій біля закріпленого кінця може значно відрізнятись від того, який було отримано у розглянутих вище випадках.

Вигин балки на двох опорах рівномірно розподіленим навантаженням

Розглянемо балку прямокутного поперечного перетину, що вигинається суцільним вертикальним навантаженням, що рівномірно розподілене по верхній грані (рис. 25). Ширину балки візьмемо такою, що дорівнює одиниці. Тобто це задача про узагальнений плоский напружений стан. q - навантаження, що віднесене до одиниці довжини балки. Тоді дотичні зусилля, що діють по краях балки,

повинні у сумі давати реакції, що дорівнюють ql . Задача зводиться до розв'язання рівняння (36), що задовольняє умови на повздовжніх сторонах балки:

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_{y=h} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{y=h} = -q, \quad (\sigma_y)_{y=-h} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{y=-h} = 0, \\ \tau_{xy} = \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_{y=\pm h} = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Крім того, зусилля по поперечних сторонах ($x = \pm l$) мають дорівнювати вертикальній силі ql (величина реакцій A та B). Отже, при $x = \pm l$ маємо такі додаткові умови

$$\int_{-h}^h \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-h}^h \sigma_x y dy = 0, \quad \int_{-h}^h \tau_{xy} dy = \pm ql. \quad (47)$$

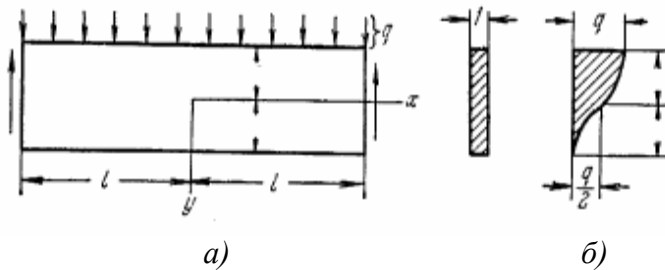


Рисунок 25

Скористаємось розв'язками плоскої задачі в цілих поліномах. Виходячи з рис. 19, 21 та 22, для того, щоб звільнитися від дотичних напружень по сторонах $y = \pm h$ та від нормальних напружень по стороні $y = -h$, на розв'язок задачі у вигляді полінома п'ятого степеня

необхідно накласти напруження, що відповідають функціям напружень

$$\varphi_1 = \frac{b_1}{2} x^2 y, \quad \varphi_2 = \frac{a_0 x^2}{2}.$$

Тоді вирази для напружень матимуть вигляд:

$$\sigma_x = -\frac{2}{3} d_3 y^3 + d_3 x^2 y,$$

$$\sigma_y = \frac{d_3}{3} y^3 + b_1 y + a_0,$$

$$\tau_{xy} = -d_3 xy^2 - b_1 x.$$

З умови відсутності дотичних напружень по верхній та нижній сторонах балки $(\tau_{xy})_{y=\pm h} = 0$ знаходимо, що $b_1 = -d_3 h^2$. Умова відсутності нормальних напружень по нижній стороні балки приводить до рівняння $-\frac{d_3}{3} h^3 - b_1 h + a_0 = 0$, звідки з урахуванням знайденого значення b_1 отримуємо $a_0 = -\frac{2}{3} d_3 h^3$.

Для визначення постійної d_3 скористаємось умовою для нормальних напружень по верхній стороні балки $(\sigma_y)_{y=h} = -q$, з якої $d_3 = \frac{3q}{4h^3}$.

Підставляючи знайдені значення постійних у загальні вирази для напружень, отримуємо:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{3q}{4h^3} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right), \\ \sigma_y &= \frac{3q}{4h^3} \left(\frac{y^3}{3} - h^2 y - \frac{2}{3} h^3 \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{3q}{4h^3} (h^2 - y^2) x.\end{aligned}\tag{48}$$

Знайдений розподіл напружень задовольняє всі умови на повздовжніх сторонах балки (46), а також першу та третю умови (47). Для того щоб дорівнювали нулю моменти на кінцях балки, накладемо на розв'язок (48) напруження, що відповідають чистому вигину $\sigma_x = d_1 y$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$ (рис. 20), і визначимо постійну d_1 з умови, що при $x = \pm l$

$$\int_{-h}^h \sigma_x y dy = \int_{-h}^h \left[\frac{3q}{4h^3} \left(l^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_1 y \right] y dy = 0.$$

Звідки

$$d_1 = -\frac{3q}{4h} \left(\frac{l^2}{h^2} - \frac{2}{5} \right).$$

Тобто

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{3q}{4h^3} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) - \frac{3q}{4h} \left(\frac{l^2}{h^2} - \frac{2}{5} \right) y = \\ &= \frac{q}{4h^3} (x^2 - l^2) y + \frac{3q}{4h^2} \left(\frac{2}{5} h^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right).\end{aligned}\tag{49}$$

Перший член у цьому виразі – це напруження, що дає елементарна теорія вигину (методами опору матеріалів), а другий – необхідна поправка. Значення цієї поправки не залежить від x і є малою порівняно з максимальним

напруженням вигину, якщо довжина балки є великою порівняно з її висотою. Для таких балок елементарна теорія вигину дає досить точні значення нормального напруження σ_x . Необхідно зауважити, що вираз (49) є точним розв'язком лише у тих випадках, коли нормальні зусилля σ_x на кінцях $x = \pm l$ розподілені за законом

$$\sigma_x = \frac{3q}{4h^2} \left(\frac{2}{5} h^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right).$$

Головний вектор і головний момент цих зусиль дорівнюють нулю. Тобто, виходячи з принципу Сен-Венана, можна зробити висновок, що їх вплив на напруження на значному віддаленні від кінців (на відстані, що є більшою від висоти балки) є таким малим, що ним можна знехтувати.

Розходження між точним розв'язком та приблизним, що відповідає першому члену (49), зумовлене тим, що при виведенні наближеного розв'язку припускалося, що повздожні волокна балки знаходяться в умовах чистого розтягування. Однак, як це впливає з розв'язку (48), між цими волокнами діють стискальні напруження σ_y . Ці напруження і дають поправку, що подана другим членом виразу (49). Розподіл стискальних напружень σ_y по висоті балки показано на рис. 25 б). Розподіл дотичних напружень, значення яких знаходять за третім рівнянням (48), збігається з тим, що дає елементарна теорія вигину.

Рівняння вигнутої осі балки можна отримати тим самим способом, як це було зроблено для вигину консолі силою, прикладеною на кінці. Виявляється⁵, що вираз для

⁵ Виведення рівняння вигнутої осі балки можна знайти у книзі Тимошенко С.П., Гуд'єр С.П. Теорія упругости. – М. Наука, 1975. –С. 66-67

кривизни відрізнятиметься від того, який дає елементарна теорія. Це зумовлено тим, що при елементарному розв'язку задачі впливом напружень σ_y , як правило, нехтують.

Запитання для самоконтролю

- 1 *Яку задачу називають плоскою? Наведіть приклади таких задач.*
- 2 *Що таке плоска деформація? Запишіть тензор напружень і тензор деформації для цієї задачі.*
- 3 *Як виражаються компоненти напруження через функцію напружень?*
- 4 *Виведіть основне рівняння плоскої задачі та граничні умови у декартовій системі координат для визначення напружень.*
- 5 *Наведіть приклади задач, які можуть бути зведені до задачі узагальненого плоского напруженого стану. Запишіть тензор напружень і тензор деформації для цієї задачі.*
- 6 *Сформулюйте основні (дві) властивості функції напружень для простого однозв'язного контуру.*
- 7 *Визначте, якому навантаженню по краях прямокутника довжиною l та товщиною h відповідає функція напружень, що має вигляд $\varphi(x, y) = ax^2 + by^3$.*
- 8 *Визначте, який вигляд повинна мати функція напружень, що відповідає навантаженню по краях прямокутника, показаному на рис. 21.*
- 9 *Запишіть граничні умови для задачі вигину консолі поперечною силою.*

ВИСНОВКИ

1 Основною метою теорії пружності є визначення напруження і деформації при будь-яких навантаженнях на поверхні і всередині пружного тіла будь-якої форми.

На відміну від опору матеріалів, що базується на гіпотезі плоских перетинів та інших припущеннях, теорія пружності має на меті відносно строге розв'язання задачі при мінімальній кількості початкових гіпотез.

Задачею точного розв'язку в теорії пружності є отримання такої системи функцій напружень, переміщень і деформацій, щоб у кожній точці пружного тіла були забезпечені умови рівноваги і умови спільності (безперервності) тіла, а біля границі тіла внутрішні сили перебували б в рівновазі із зовнішніми силами, що діють на поверхнях (на межі) тіла.

2 Для досягнення цієї мети теорія пружності має у своєму розпорядженні такі групи рівнянь:

а) три статичні рівняння (рівняння рівноваги), справедливі для кожної точки тіла, з яких випливає, що інтенсивності зміни (градієнти) нормальних і дотичних напружень уздовж координатних осей і самі напруження між собою не є незалежними, а повинні підпорядковуватися певним диференціальним співвідношенням (16);

б) шість геометричних рівнянь (20), справедливих для кожної точки пружного тіла, з яких, з одного боку, випливає, що компоненти деформації (лінійні подовження і кутові деформації) зв'язані диференціальними співвідношеннями з функціями переміщень, а з іншого - інтенсивності зміни деформацій уздовж координатних осей і самі деформації між собою не є незалежними, а мають задовольняти певні диференціальні співвідношення, що називаються рівняннями спільності деформації (21);

в) шість фізичних рівнянь (23 або 24), справедливих для кожної точки пружного тіла, що зв'язують складові напруження у кожній точці з компонентами деформації для тієї ж точки.

Інакше кажучи, в кожному конкретному тілі (зі своїми пружними характеристиками і умовами навантаження) зазначені безперервні функції для складових напружень, деформацій і переміщень виявляються взаємозв'язаними, тобто існує зв'язок не тільки між функціями, що входять до кожної окремої групи, але однієї групи рівнянь з рівняннями іншої групи. Цей взаємозв'язок зумовлюється фізичною природою досліджуваного тіла.

3 До повної групи рівнянь теорії пружності входять п'ятнадцять невідомих функцій. Теоретично можна знайти незліченну безліч розв'язків, кожен із яких перетворив би у тотожність всі перелічені рівняння, тобто забезпечив рівновагу і безперервність тіла в околі будь-якої точки всередині пружного тіла. Проте кожен такий розв'язок відповідав би своїм особливим статичним умовам (зовнішнім навантаженням) і кінематичним умовам на поверхні тіла (наявність або відсутність тих або інших зв'язків). Тому істинним розв'язком задачі може бути лише той, що пов'язаний із конкретними, заданими граничними умовами, і тому конкретний розв'язок повинен задовольняти дійсні граничні умови. Часто ці умови задаються у статичному плані і для кожної точки на границі тіла подаються трьома граничними умовами (3). Залежно від того, які ці умови (задані переміщення, напруження чи обоє одночасно), розв'язок задачі може бути проведений методом переміщень, методом сил або змішаним методом.

4 Велика категорія задач теорії пружності допускає значне спрощення математичного розв'язання. Спрощення це полягає в тому, що в цих задачах напружено-

деформований стан можна розглядати лише в одній площині (так звані плоскі задачі). На практиці такий випадок у чистому вигляді отримати досить важко, але з деяким наближенням його можна спостерігати в багатьох задачах. Розрізняють два різновиди плоскої задачі: плоский деформований і плоский напружений стан. Ці різні за своєю фізичною суттю задачі описуються одним диференціальним рівнянням (36) четвертого порядку у частинних похідних, яке має задовольняти граничні умови (37). У декартовій системі координат можна отримати наглядний та простий розв'язок плоскої задачі за допомогою цілих поліномів, який можна використати при розв'язанні таких практичних задач, як вигин консолі силою на кінці та вигин балки на двох опорах рівномірно розподіленим навантаженням. Розв'язки цих задач відрізняються від елементарних розв'язків (є їх уточненням), що зумовлено меншою кількістю припущень та більш строгим підходом до розв'язання задач методами теорії пружності.

Список літератури

1. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.-ры, 1959. – 364 с.
2. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – К.: Наукова думка, 1972. – 508 с.
3. Тимошенко С.П., Гудьер С.П. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
4. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1982. – 261с.
5. Безухов Н.И. Теория упругости и пластичности. – М.: Гос. изд-во технико-теорет. литературы, 1953. – 420 с.

Навчальне видання

ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ

Конспект лекцій

для студентів спеціальності
8.080303 „Динаміка і міцність”
денної форми навчання

Частина 1 Напружено-деформований стан у точці тіла.
Плоска задача теорії пружності в декартових координатах

Відповідальний за випуск проф. В.А. Марцинковський

Редактор Т.Г. Чернишова

Комп'ютерне верстання Ю.Я. Тарасевич

Підп. до друку 26.02.2010.

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 6,74. Обл.-вид. арк. 4,91. Тираж 40 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007