ДЕРЖАВНА СЛУЖБА СТАТИСТИКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ СТАТИСТИКИ, ОБЛІКУ ТА АУДИТУ
Кафедра економічної кібернетики

STATE STATISTICS SERVICE OF UKRAINE
NATIONAL ACADEMY OF STATISTICS, ACCOUNTING AND AUDITING
The chair of economic cybernetics

СТІЙКІСТЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

THE STABILITY OF DYNAMIC SYSTEMS WITH CONTINUOUS TIME

TRAINING MANUAL

для студентів економічних спеціальностей
денної та заочної форм навчання

for students of economic specialties
of full-time and distance learning

УДК 517.938(075)
ББК 22.161.61я73
К13

Укладачі:
В. А. Кадієвський, д.е.н., професор, завідувач кафедри економічної кібернетики Національної академії статистики, обліку та аудиту
Л. П. Перхун, к.п.н., доцент, доцент кафедри економічної кібернетики ДВНЗ «Українська академія банківської справи Націаонального банку України»
С. М. Братушка, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри економічної кібернетики ДВНЗ «Українська академія банківської справи Націаонального банку України»
О. О. Синявська, асистент кафедри економічної кібернетики ДВНЗ «Українська академія банківської справи Націаонального банку України»

Рецензенти:
В. Г. Бабчук, к. ф-м. н., професор кафедри економічної кібернетики Національної академії статистики, обліку та аудиту
С.П. Шаповалов, к. ф.-м. н., доцент кафедри комп'ютерних наук Сумського державного університету

Рекомендовано Вченою Радою економіко-статистичного факультету Національної академії статистики, обліку та аудиту від 28.11.2013 р.

Кадієвський В.А., Перхун Л.П., Братушка С.М., Синявська О.О.
К13 Стійкість динамічних систем з неперевним часом: навчальний посібник / В.А. Кадієвський, Л.П. Перхун, С.М. Братушка, О.О. Синявська. – Суми: Видавництво: ПП Вінниченко М.Д., ФОП Литовченко Є.Б., 2014. – 120 с.

ISBN 978-966-1569-26-9

У навчальному посібнику наведено теоретичні основи якісного дослідження стійкості динамічних систем, що описані одним диференціальним рівнянням або системою диференціальних рівнянь. Подана довідкова інформація щодо застосування системи MathCAD для проведення чисельних експериментів. Запропоновано практичні завдання за варіантами для засвоєння та закріплення теоретичного матеріалу.

Видання призначено для студентів економічних спеціальностей денної та заочної форм навчання, аспірантів тощо.

УДК 517.938(075)
ББК 22.161.61я73

ISBN 978-966-1569-26-9

UDC 517.938(075)

Authors:
V. Kadiyevskiy, d.e.s., Professor, Head of the Chair of Economic Cybernetics of the National Academy of Statistics, Accountung and Auditing
L. Perkhun, c.p.s., Associate Professor, Associate Professor of the Chair of Economic Cybernetics of the Ukrainian Academy of Banking of the National Bank of Ukraine
S. Bratushka, c.p.-m.s., Associate Professor, Associate Professor of the Chair of Economic Cybernetics of the Ukrainian Academy of Banking of the National Bank of Ukraine
O. Syniavska, Assistant Professor of the Chair of Economic Cybernetics of the Ukrainian Academy of Banking of the National Bank of Ukraine

Reviewers:
V. Babchuk, c.p.-m.s., Professor of the Chair of Economic Cybernetics of the National Academy of Statistics, Accountung and Auditing
S. Shapovalov, c.p.-m.s., Associate Professor of the Chair of Computer Science of the Sumy State University

Recommended by the Academic Council of Faculty of Economics and Statistics
from 11.28.2013

V. Kadiyevskiy, L. Perkhun, S. Bratushka, O. Syniavska
K13 An investigation of the stability of dynamic systems with continuous time [Training manual] / V. Kadiyevskiy, L. Perkhun, S. Bratushka, O. Syniavska. – Sumy: M. Vinnuchenko, E. Lutovchenko, 2014. – 120 p.

ISBN 978-966-1569-26-9

In this training manual there are theoretical foundations of the qualitative study of the stability of dynamical systems described by one differential equation or a system of differential equations. There is the background information about the usage of MathCAD for conduction the numerical experiments. Variants of the practical tasks for learning and consolidation of theoretical material are proposed.

This training manual for students of economic specialties of full-time and distance learning.

UDC 517.938(075)

ISBN 978-966-1569-26-9

ЗМІСТ

CONTENTS

ВСТУП

Одним з основних методів дослідження економічних систем та процесів є математичне моделювання. На сьогодні в економічній теорії загальноприйнятими є досить велика кількість різноманітних моделей: модель товарного ринку, модель грошового ринку, модель ринку робочої сили, модель взаємодії згаданих ринків, моделі однопродуктової та багатопродуктової фірм, модель поведінки споживача тощо, які, за своєю сутністю, є рівноважними моделями. Але більшість економічних процесів протікає у часі, тому виникає потреба у таких підходах до моделювання, які б дозволяли враховувати та аналізувати можливу динаміку розвитку систем.

Математичним інструментом для опису динаміки економічних систем є диференціальні і різницеві рівняння та їх системи. Однак їх аналітичний розв’язок можна знайти далеко не завжди, особливо у нелінійних випадках. Це актуалізувало потребу у застосуванні якісних методів та чисельних комп’ютерних експериментів для дослідження поведінки динамічних економічних систем.

У навчальному посібнику розглянуто теоретичні основи якісного дослідження стійкості динамічних систем, що описані одним нелінійним диференціальним рівнянням або системою лінійних диференціальних рівнянь. Наведена довідкова інформація щодо застосування системи MathCAD для проведення чисельних експериментів. Запропоновано практичні завдання за варіантами для засвоєння та закріплення теоретичного матеріалу.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

1.1 Основні поняття

У загальному розумінні ***динамічна система*** (ДС) – це система будь-якої природи (фізичної, хімічної, біологічної, соціальної, економічної тощо), стан якої змінюється в часі (дискретно або неперервна) [3, с. 6].

Модель економічної динаміки – дескриптивна динамічна детермінована економіко-математична модель економічного процесу в термінах апарата диференціальних і (або) різницевих рівнянь, яку використовують для дослідження детермінованої в часі поведінки економічних систем під впливом внутрішніх і зовнішніх факторів з метою аналізу рівноваги й управління стійкістю.

Економіко-математична модель – математичне відображення економічного процесу або економічної системи, що використовується під час дослідження замість об'єкту-оригіналу – з метою аналізу, визначення кількісних або логічних зв'язків між його різними частинами.

Дескриптивна модель – модель, що призначена для опису і пояснення фактів, що спостерігаються, або для прогнозування поведінки об’єктів, на відміну від нормативних моделей, що призначені для знаходження бажаного, наприклад, оптимального стану об’єкта.

Детермінована модель – аналітичне подання закономірності, операції тощо, у якому для даної сукупності вхідних значень на виході системи може бути отримано єдиний (детермінований) результат.

1.2 Властивості динамічних систем

Основні властивості динамічних систем можна умовно поділити на дві групи: властивості, що характеризують їх як систему (системоутворюючі властивості) і властивості ДС, що характеризують їх з точки зору динамічності.

Системоутворюючі властивості складних динамічних систем

1. *Цілісність* (емерджентність). У системі окремі частини функціонують спільно, складаючи в сукупності процес функціонування системи як цілого. Сукупне функціонування різнорідних взаємопов'язаних елементів породжує якісно нові функціональні властивості цілого, що не мають аналогів у властивостях його елементів. Це означає принципову неможливість зведення властивостей системи до суми властивостей її елементів.

2. *Структура*. При дослідженні системи структура постає як спосіб опису її організації. Залежно від поставленої задачі дослідження здійснюється декомпозиція системи на елементи і встановлюються відносини та зв'язки між ними, що є суттєвими для досліджуваної проблеми. Разом з тим, декомпозиція системи на елементи і зв'язки визначається внутрішніми властивостями даної системи (не поділиш одного студента навпіл). Структура динамічна за своєю природою, її еволюція в часі і просторі відображає процес розвитку систем (кожен із запропонованих розподілів змінюється з часом).

3. *Нескінченність пізнання системи*. Під цією властивістю розуміють неможливість повного пізнання системи і всебічного її подання кінцевою множиною описів, тобто кінцевою кількістю якісних і кількісних характеристик. Тому система може бути подана нескінченою кількістю структурних і функціональних варіантів, що відображають різні аспекти системи.

4. *Ієрархічність системи*. Кожен елемент у декомпозиції системи може розглядатися як цілісна система, елементи якої, у свою чергу, можуть бути також подані як системи. Але, з іншого боку, будь-яка система – лише компонент ширшої системи.

5. *Елемент*. Під елементом розуміють найменшу ланку в структурі системи, внутрішня будова якої не розглядається на вибраному рівні аналізу. Відповідно до властивості *4* будь-який елемент є системою, але на вибраному рівні аналізу ця система характеризується тільки цілісними характеристиками.

Властивості динамічних систем, що характеризують їх з погляду динамічності

1. *Взаємодія із зовнішнім середовищем*. Система реагує на дію навколишнього середовища, еволюціонує під цією дією, але одночасно зберігає якісну визначеність і властивості, що відрізняють її від інших систем.

2. *Стан системи*. Стан системи визначається станами її елементів. Теоретично кількість можливих станів системи дорівнює кількості всіх сполучень можливих станів елементів. Проте взаємодія елементів призводить до обмеження кількості реально можливих поєднань. Зміна стану елементу може відбуватися неявно, неперервно і стрибкоподібно.

3. *Поведінка системи*. Під поведінкою системи розуміють закономірний перехід з одного стану в інший, що обумовлений властивостями елементів і структурою.

4. *Неперервність функціонування*. Система існує, поки функціонують соціально-економічні та інші процеси в суспільстві, які не можуть бути перервані, інакше система перестане функціонувати. Всі процеси в ЕС, як у живому організмі, взаємопов'язані. Функціонування частин визначає характер функціонування цілого, і навпаки. Функціонування системи пов'язано з неперервними змінами, накопичення яких приводить до розвитку.

5. *Розвиток системи*. Життєдіяльність складної системи є постійною зміною фаз функціонування і розвитку, яка виражається в неперервній функціональній і структурній перебудові системи, її підсистем і елементів.

6. Еволюція економічних систем визначається однією з найважливіших властивостей складних систем – *здібністю до саморозвитку*. Центральним джерелом саморозвитку є неперервний процес виникнення і розв’язання протиріч. Розвиток, як правило, пов'язаний з ускладненням системи, тобто із збільшенням її внутрішнього різноманіття.

7. *Динамічність*. Економічна система функціонує і розвивається в часі, вона має передісторію і майбутнє, характеризується певним життєвим циклом,

у якому можуть бути виділені певні фази: виникнення, зростання, розвиток, стабілізація, деградація, ліквідація або стимул до зміни.

8. *Складність*. Економічна система характеризується великою кількістю неоднорідних елементів і зв'язків, поліфункціональністю, поліструктурністю, багатокритеріальністю, багатоваріантністю розвитку і властивостями складних систем.

9. *Гомеостатичність*. Гомеостатичність відображає властивість системи до самозбереження, протидію руйнуючим впливам середовища.

10. *Цілеспрямованість*. Всім динамічним системам в економіці властива цілеспрямованість, тобто наявність певної мети і прагнення її досягнення. Розвиток системи пов'язаний саме із зміною мети.

11. *Керованість*. Свідома організація цілеспрямованого функціонування системи та її елементів називається керованістю. У процесі життєдіяльності система за допомогою цілеспрямованого управління розв’язує постійно виникаючі в ній суперечності та реагує на зміну внутрішніх і зовнішніх умов свого існування. Відповідно до умов, що змінюються, вона змінює свою структуру, корегує цілі розвитку і зміст діяльності елементів, тобто відбувається цілеспрямована самоорганізація системи, яка на практиці реалізує здібність до саморозвитку. Однією з основних функцій самоорганізації є збереження в процесі еволюції системи її якісної визначеності.

Властивості керованості проявляються також у таких особливостях, як відносна автономність і функціональна керованість.

Відносна автономність функціонування економічних систем означає, що в результаті дії зворотного зв'язку кожна із складових вихідного сигналу може бути змінена за рахунок зміни вхідного сигналу, до того ж інші складові залишаються незмінними.

Функціональна керованість економічної системи означає, що відповідним вибором вхідних сигналів можна добитися будь-якого вихідного сигналу.

12. *Адаптивність*. Адаптивність економічної системи визначається двома видами адаптації – пасивною й активною. *Пасивна адаптація* є внутрішньою

характеристикою економічної системи, яка має у своєму розпорядженні певні можливості саморегулювання. *Активна адаптація* є механізмом адаптивного управління економічною системою й організацію його ефективного здійснення.

13. *Інерційність*. Інерційність економічної системи проявляється у виникненні запізнювання в системі, яка симптоматично реагує на збурюючі й управляючі дії. Такі запізнювання враховуються, зокрема, за допомогою лагів, що входять до моделі опису систем. Розрізняють *внутрішні лаги*, або лаги ухвалення рішень щодо стабілізуючих дій, і *зовнішні лаги*, що відображають затриману в часі реакцію системи на відповідні дії.

14. *Стійкість*. Система визнається стійкою, якщо при достатньо малих змінах умов функціонування її поведінка суттєво не змінюється. У межах теорії систем досліджуються структурна стійкість і стійкість траєкторії поведінки системи. Стійкість ЕС забезпечується такими аспектами самоорганізації, як диференціація і лабільність (чутливість). *Диференціація* – це прагнення системи до структурного і функціонального різноманіття елементів, яка забезпечує не тільки умови виникнення і вирішення протиріч, але й визначає здатність системи швидко пристосовуватися до наявних умов існування. Більше різноманітності – більше стійкості, і навпаки. *Лабільність* означає рухливість функцій елементів при збереженні стійкості структури системи в цілому.

15. *Стан рівноваги*. Стійкість системи пов'язана з її прагненням до стану рівноваги, який припускає таке функціонування елементів системи, при якому забезпечується підвищена ефективність руху до цілей розвитку. У реальних умовах система не може повністю досягти стану рівноваги, хоча і прагне до нього. Елементи системи функціонують по-різному в різних умовах, їх динамічна взаємодія постійно впливає на рух системи. Система прагне до рівноваги, на це направлені зусилля управління, але, досягаючи його, вона тут же відходить від нього. Отже, стійка економічна система постійно знаходиться в стані динамічної рівноваги, вона неперервно коливається щодо положення рівноваги, що є не тільки її специфічною властивістю, але й умовою безперервного виникнення суперечностей як рушійних сил еволюції.

1.3 Поняття рівноваги, стійкості та особливої точки

Рівновага системи – це такий її стан, який триває як завгодно довго за відсутності зовнішніх впливів. Наприклад, рівновага на ринку деякого товару, рівновага політичних сил у суспільстві тощо (рух системи задається нульовим вектором, тобто рух відсутній).

Під дією зовнішніх впливів рівновага може бути порушена і система перейде в інший стан. У цьому випадку у дію вступає інша характеристика динамічної системи – поведінка. Залежно від будови системи, її властивостей тощо, поведінка системи може суттєво змінюватись у часі. Принципово різними є два варіанти розвитку подій після того, як на систему подіяло деяке збурення ззовні: повернення до початкового стану і подальше віддалення від початкового стану. Під ***стабільністю*** розуміють здатність системи повертатися в рівноважний стан у випадку, якщо вона була виведена з нього. У такому випадку стан рівноваги називають стабільним (stability). Другому варіанту відповідає нестабільна поведінка системи. Відповідно розрізняють ***стійкі*** і ***нестійкі*** системи.

Динамічні системи, в яких час вимірюється неперервно, задаються диференціальними рівняннями (одним або системою).

Особливою точкою називається точка, у якій праві частини диференціальних рівнянь приймають нульове значення. Особливих точок може бути одна, кілька і не бути зовсім. З точки зору якісної теорії диференційних рівнянь нас буде цікавити поведінка системи в особливих точках (стійка, нестійка тощо).

1.4 Дослідження стійкості рівноваги у системах, що описані одним диференціальним рівнянням

Нехай маємо динамічну систему, що описана одним диференціальним рівнянням. Зазначимо, що в більшості випадків отримати аналітичний розв’язок диференціального рівняння не вдається, а якщо навіть і вдається, то відповідь містить неявні функції, властивості яких важко проаналізувати.

Розглянемо більш детально якісний метод дослідження диференціального рівняння виду $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

Розв'язок даного рівняння може не містити дійсних коренів, може мати один дійсний корінь або кілька.

Припустимо, що рівняння $f(x)=0$ не має дійсних коренів.

Отже, крива $y = f(x)$ не перетинає вісь x. Тоді $\frac{dx}{dt}$ весь час зберігає знак і всі розв'язки $x(t)$ будуть монотонними функціями, зростаючими або спадаючими, залежно від знаку $f(x)$.

Нехай тепер рівняння $f(x)=0$ має дійсні корені $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Вони називаються стаціонарними розв'язками, особливими точками або точками рівноваги.

Нехай x_i – стаціонарна точка рівняння $f(x)=0$, а (x_{i-1}, x_i) і (x_i, x_{i+1}) - два інтервали, які примикають до неї.

На кожному з цих інтервалів поведінка системи може бути представлена траєкторією певного виду.

Якщо обидві точки, які описують рух на інтервалах (x_{i-1}, x_i) і (x_i, x_{i+1}), при зростанні часу t наближаються до стаціонарної точки x_i, то стаціонарна точка називається ***стійкою*** (рис. 1.1).

Якщо обидві точки, які описують рух на інтервалах (x_{i-1}, x_i) і (x_i, x_{i+1}), при зростанні часу t віддаляються від стаціонарної точки x_i, то стаціонарна точка називається ***нестійкою*** (рис. 1.1).

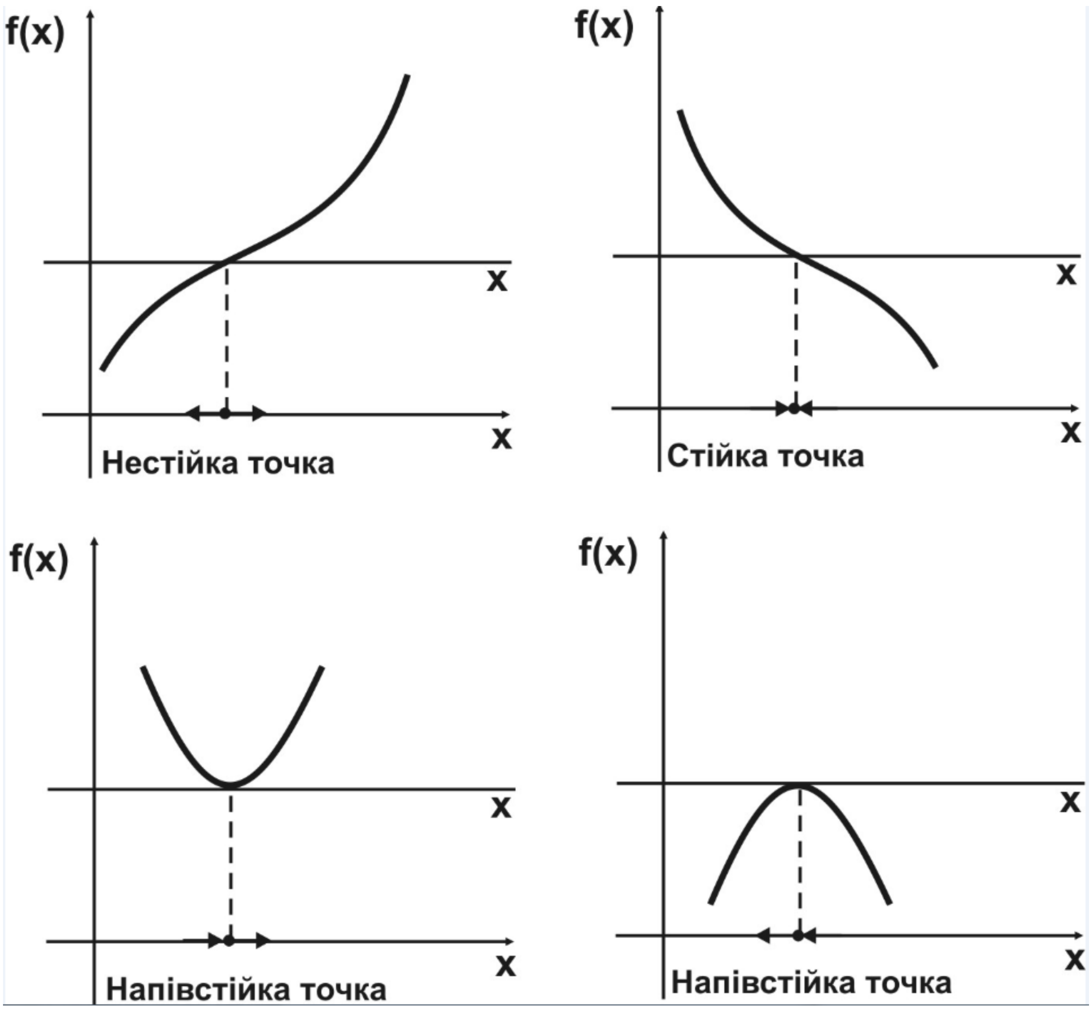


Рис. 1.1 – Ілюстрація стійкості, нестійкості та напівстійкості стаціонарних точок

Якщо на одному з інтервалів (x_{i-1}, x_i) і (x_i, x_{i+1}) значення іксів наближаються до точки x_i, а на іншому віддаляються від x_i, то стаціонарна точка називається ***напівстійкою*** (рис. 1.1).

Отже, у випадку опису динамічної системи одним диференціальним рівнянням питання про стійкість точок рівноваги можна вирішити за допомогою аналізу графіку самої функції *f(x)*. Можливі три випадки:

1. Поблизу стану рівноваги функція $f(x)$ змінює знак з «+» на «-» при зростанні x. Стан рівноваги стійкий (рис. 1.2).

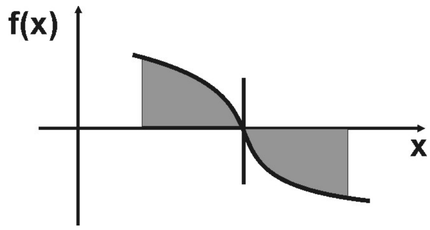


Рис. 1.2 – Стійка точка рівноваги (аналіз за графіком функції)

2. Поблизу стану рівноваги функція $f(x)$ змінює знак з «-» на «+» при зростанні x. Стан рівноваги нестійкий (рис. 1.3).

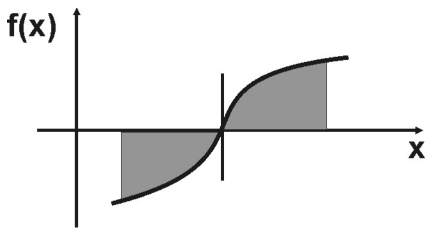


Рис. 1.3 – Нестійка точка рівноваги (аналіз за графіком функції)

3. Поблизу стану рівноваги функція $f(x)$ не змінює знак. Стан рівноваги напівстійкий (рис. 1.4).

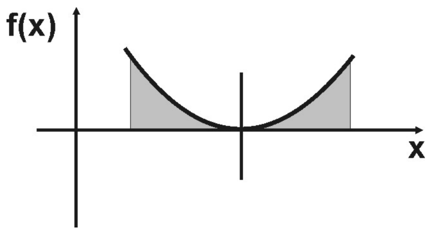


Рис. 1.4– Напівстійка точка рівноваги (аналіз за графіком функції)

Приклад: визначити стійкість точок рівноваги для функції, графік якої зображено на рис. 1.5.

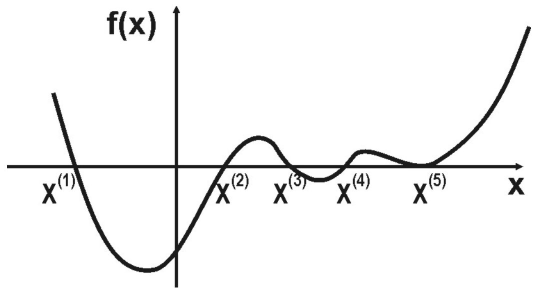


Рис. 1.5– Приклад графіку для визначення стійкості точок рівноваги

Розв’язок є стійким у точках $x^{(1)}$і $x^{(3)}$), нестійким у точках $x^{(2)}$, $x^{(4)}$ і напівстійким у точці $x^{(5)}$.

1.5 Дослідження стійкості рівноваги у системах, що описані двома диференціальними рівняннями

Нехай тепер маємо динамічну систему, яка задана системою нормальних автономних лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) = cx_1 + dx_2 \end{cases}.$$

Дана система буде мати єдиний розв’язок, якщо відповідний детермінант не дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 .$$

Точки рівноваги системи знайдемо, якщо розв’яжемо систему:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = 0 \\ cx_1 + dx_2 = 0 \end{cases}.$$

Стійкість положення рівноваги визначається власними числами матриці системи. Власні числа можна визначити з так званого характеристичного рівняння $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$, де $\sigma = a + d = tr(A)$ - слід матриці; $\Delta = ad - bc = \det(A)$ - детермінант.

Корені характеристичного рівняння можуть бути як дійсні, так і комплексні, як однакові, так і різні, нульові тощо. Характер стійкості особливих точок подано у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Стійкість точки рівноваги залежно від коренів характеристичного рівняння

Характеристика коренів характеристичного рівняння	Стійкість точки рівноваги
λ_1, λ_2 - дійсні, від'ємні, різні	стійка
λ_1, λ_2 - дійсні, додатні, різні	нестійка
λ_1, λ_2 - дійсні, різні, різних знаків	нестійка
λ_1, λ_2 - комплексні з від'ємною дійсною частиною $\lambda_1 = p + iq, \lambda_2 = p - iq$, $p < 0$	стійка
λ_1, λ_2 - комплексні з додатною дійсною частиною $\lambda_1 = p + iq, \lambda_2 = p - iq$, $p > 0$	нестійка
λ_1, λ_2 - чисто уявні $\lambda_1 = iq, \lambda_2 = -iq$	стійка, але не асимптотично
λ_1, λ_2 - нульові	стійка, але не асимптотично або нестійка
λ_1, λ_2 - дійсні, однакові, від'ємні	стійка
λ_1, λ_2 - дійсні, однакові, додатні	нестійка

Зазначені випадки поширюються і на системи більш високих порядків. Узагальнюючи, можна навести такі твердження стосовно стійкості тривіального розв'язку системи (її особливих точок):

1. Якщо всі характеристичні числа системи мають від'ємні дійсні частини (тобто або вони дійсні від'ємні числа, або комплексні числа, дійсні частини яких від'ємні), то тривіальний розв'язок системи асимптотично стійкий.

2. Якщо хоча б одне характеристичне число системи має додатну дійсну частину (тобто або це число дійсне додатне, або комплексне з додатною дійсною частиною), то тривіальний розв’язок системи нестійкий.

3. Якщо серед характеристичних чисел системи немає чисел з додатними дійсними частинами, але є прості числа (тобто не кратні) з нульовою дійсною частиною, то тривіальний розв’язок системи є стійким, але не асимптотично.

4. Якщо серед характеристичних чисел системи немає чисел з додатними дійсними частинами, але є кратні числа з нульовими дійсними частинами, то можливі як стійкі, так і нестійкі тривіальні розв’язки.

Ознака стійкості – від’ємність дійсних частин коренів характеристичного рівняння (теорема Ляпунова).

1.6 Критерії стійкості

Стійкість або нестійкість особливих точок можна встановити навіть не розв’язуючі відповідне характеристичне рівняння. Для цього існує ряд критеріїв.

Нехай маємо характеристичне рівняння n-го порядку:

$$a_0\lambda^{(n)} + a_1\lambda^{(n-1)} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 .$$

Слід зазначити, що у випадку будь-якої розмірності коефіцієнт $a_0 = 1$ завжди.

Як відомо з лінійної алгебри, *необхідною, але не достатньою* умовою того, що всі дійсні частини коренів зазначеного характеристичного рівняння від’ємні, є нерівності $a_j > 0,\ j = \overline{1:n}$.

Це означає, що, якщо хоча б один з коефіцієнтів характеристичного рівняння від’ємний, то знайдеться хоча б один корінь, який буде мати невід’ємну дійсну частину. Отже, особлива точка буде нестійкою.

Сформульована вище умова є достатньою для рівнянь першого та другого ступенів.

Для застосування інших критеріїв складемо з коефіцієнтів зазначеного вище характеристичного рівняння так звану матрицю Гурвіца (рис. 1.6Рис.) за правилами:

1) по головній діагоналі запишемо коефіцієнти характеристичного рівняння, починаючи з другого $a_1, a_2, \dots, a_n$;

2) над головною діагоналлю запишемо коефіцієнти з більшими індексами;

3) під головною діагоналлю запишемо коефіцієнти з меншими індексами;

4) при нестачі коефіцієнтів відповідні елементи матриці заповнимо нулями.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

Рис. 1.6 – Матриця Гурвіца

Введемо такі позначення:

$\Delta_1 = a_1,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix},\ \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$ і т.д. – головні діагональні мінори матриці Гурвіца, або «визначники Гурвіца».

Критерій Рауса-Гурвіца (необхідна і достатня умова стійкості). Дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння будуть дійсними від'ємними або матимуть від'ємні дійсні частини, отже, <u>***система буде стійкою***</u>, якщо при усіх додатних коефіцієнтах $(a_k > 0, k = \overline{1:n})$ будуть додатними головний визначник Гурвіца і всі його головні діагональні мінори.

Система буде знаходитись на межі стійкості, якщо $\Delta_n = 0$ і всі попередні мінори Гурвіца додатні. Умова $\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} = 0$ розпадається на дві:

1) $a_n = 0$;

2) $\Delta_{n-1} = 0$.

У першому випадку система знаходиться на межі аперіодичної стійкості (нейтральна стійкість). Якщо в даному випадку розв’язати характеристичне рівняння, то отримаємо один корінь нульовий, а другий від’ємний.

У другому випадку система знаходиться на коливальній межі стійкості. При розв’язанні відповідного характеристичного рівняння отримаємо два спряжених комплексних кореня.

Критерій Л’єнара-Шипара (необхідна і достатня умова стійкості). Дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння будуть дійсними від’ємними або матимуть від’ємні дійсні частини, отже, ***<u>система буде стійкою</u>***, якщо при усіх додатних коефіцієнтах $(a_k > 0, k = \overline{1:n})$ будуть додатними мінори Δ_{n-1}, Δ_{n-3}, Δ_{n-5}, …

Приклад. Дослідити на стійкість точку рівноваги сиистеми:

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}.$$

Знайдемо координати точки рівноваги, прирівнявши праві частини рівнянь до нуля:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

Отримаємо точку з координатами (0;0).

Випишемо матрицю коефіцієнтів $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Розрахуємо її слід і детермінант: $\sigma = -1$, $\Delta = -1$.

Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 1 * \lambda - 1 = 0.$$

Як бачимо, у характеристичному рівнянні маємо один від'ємний коефіцієнт, це означає, що необхідні умови стійкості точки не виконались. Висновок: точка рівноваги нестійка.

1.7 Завдання для контролю

1. Дати визначення поняттю «динамічна система».

2. Розкрити сутність поняття «модель економічної динаміки».

3. Охарактеризувати системоутворюючі властивості складних динамічних систем.

4. Дати визначення поняттям рівноваги, стійкості, стаціонарності динамічної системи.

5. Проілюструвати графічно стійкість, асимптотичну стійкість та нестійкість (за Ляпуновим) особливих точок динамічної системи.

6. Сформулювати правила складання головного визначника Гурвіца.

7. Порівняти критерії стійкості Рауса–Гурвіца і Л'єнара–Шипара.

8. Проілюструвати графічно стійкість, нестійкість та напівстійкість стаціонарних точок динамічної системи, що описана одним диференціальним рівнянням.

9. Встановити відповідність між поняттями та їх тлумаченням:

1	Рівновага	A	це такий стан, який триває як завгодно довго при відсутності зовнішніх впливів
2	Стабільність (стійкість)	B	здатність системи повертатися в рівноважний стан у випадку, якщо вона була виведена з нього
3	Стаціонарність	C	означає, що характер (закон) функціонування системи не змінюється в часі

10. У випадку опису динамічної системи одним диференційним рівнянням поблизу стану рівноваги функція   змінює знак з «+» на «-». В цьому випадку стан рівноваги:

а) стійкий;

б) нестійкий;

в) напівстійкий.

1.8 Завдання для самостійного розв'язання

1.8.1 Дослідження точки рівноваги на стійкість за критеріями Рауса-Гурвіца і Л'єнара-Шипара

За даними Вашого варіанту (табл. 1.2):

1) знайти координати точки рівноваги у MathCad:

а) методом оберненої матриці;

б) за допомогою функції lsolve;

в) за допомогою обчислювального блоку Given/Find;

2) дослідити систему на стійкість двома критеріями: Рауса-Гурвіца і Л'єнара-Шипара. Результати порівняти. При застосуванні зазначених критеріїв використати функцію виділення підматриць (**submatrix(A,ir,jr,ic,jc)** – повертає підмасив, що складається зі всіх елементів, що містяться в рядках з *ir* по *jr* і стовпцях з *ic* по *jc* масиву A).

Таблиця 1.2

№ варіанта	Завдання	№ варіанта	Завдання
1	$\begin{cases} x' = -x + y + 2z \\ y' = -x - y + z \\ z' = -2x - y - z \end{cases}$	8	$\begin{cases} x' = -x + 2y + 3z \\ y' = -2x - y + 2z \\ z' = -3x - 2y - z \end{cases}$
2	$\begin{cases} x' = -x + 2y + z \\ y' = -2x - y + 2z \\ z' = -x - 2y - z \end{cases}$	9	$\begin{cases} x' = -x + 3y + 2z \\ y' = -3x - y + 3z \\ z' = -2x - 3y - z \end{cases}$
3	$\begin{cases} x' = -x - y + 2z \\ y' = x - y - z \\ z' = -2x + y - z \end{cases}$	10	$\begin{cases} x' = -x + 3y + z \\ y' = -3x - y + 3z \\ z' = -x - 3y - z \end{cases}$
4	$\begin{cases} x' = -x + y - 2z \\ y' = -x - y + z \\ z' = 2x - y - z \end{cases}$	11	$\begin{cases} x' = -x + y + 3z \\ y' = -x - y + z \\ z' = -3x - y - z \end{cases}$
5	$\begin{cases} x' = -x - 2y + 3z \\ y' = 2x - y - 2z \\ z' = -3x + 2y - z \end{cases}$	12	$\begin{cases} x' = -x - 2y - 3z \\ y' = 2x - y - 2z \\ z' = -3x + 2y - z \end{cases}$

Продовження таблиці 1.2

№ варіанта	Завдання	№ варіанта	Завдання
6	$\begin{cases} x' = -x + y - 3z \\ y' = -x - y + z \\ z' = 3x - y - z \end{cases}$	13	$\begin{cases} x' = -x - 3y - 2z \\ y' = 3x - y - 3z \\ z' = 2x + 3y - z \end{cases}$
7	$\begin{cases} x' = -x - y + 3z \\ y' = x - y - z \\ z' = -3x + y - z \end{cases}$	14	$\begin{cases} x' = -x - y - 3z \\ y' = x - y - z \\ z' = 3x + y - z \end{cases}$
15	$\begin{cases} x' = -x + 3y - 2z \\ y' = -3x - y + 3z \\ z' = 2x - 3y - z \end{cases}$	18	$\begin{cases} x' = -x - 3y + 2z \\ y' = 3x - y - 3z \\ z' = -2x + 3y - z \end{cases}$
16	$\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = -x - y + z \\ z' = -x - y - z \end{cases}$	19	$\begin{cases} x' = -x + 2y + 2z \\ y' = -2x - y + 2z \\ z' = -2x - 2y - z \end{cases}$
17	$\begin{cases} x' = -x - 2y + z \\ y' = 2x - y - 2z \\ z' = -x + 2y - z \end{cases}$	20	$\begin{cases} x' = -x + 2y - z \\ y' = -2x - y + 2z \\ z' = x - 2y - z \end{cases}$

1.8.2. Графічне дослідження стійкості точок рівноваги динамічної системи, що описана одним диференціальним рівнянням

За даними Вашого варіанту (табл. 1.3) знайти точки рівноваги для системи, що описана одним диференціальним рівнянням та дослідити їх на стійкість.

Таблиця 1.3

№ варіанта	Завдання	№ варіанта	Завдання
1	$x' = x^2 + 2x - x^3 + \sin(x/2)$	4	$x' = x^2 + 12x - x^3 + \sqrt[3]{x}$
2	$x' = x^2 + 2x - x^3 + x/2$	5	$x' = x^2 + 2x - \cos(x^3)$

Продовження таблиці 1.3

№ варіанта	Завдання	№ варіанта	Завдання
3	$x' = x^3 + x - x^2 + 1$	6	$x' = x^2 + 2\cos x - x^4$
7	$x' = \sqrt{x} - x^2 + 2x - x^3$	14	$x' = \sin^2 x + 2x - x^3$
8	$x' = tg(x^2) + 2x - x^3$	15	$x' = \lg x^2 + 2x - x^3$
9	$x' = \frac{2}{x^2} + 2x - x^3$	16	$x' = x^4 + 2x^3 - x^2 + ctg(x/2)$
10	$x' = x^2 + 2x - x^3 + \cos(x/2)$	17	$x' = x^2 + 2x^4 - x^3 + e^x$
11	$x' = x^4 + 2x - x^3 + arctg(x/2)$	18	$x' = x^2 + 2\sqrt{x+1} - x^3$
12	$x' = x^2 + 2x\sin(x) - x^3$	19	$x' = -x^2 - 2x + x^3 - \sin(x/2)$
13	$x' = -x^2 + 2x + 4x^3 + \ln(x/2)$	20	$x' = -7x^2 + x - x^3 + \sin(x^2/2)$

РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

2.1 Сутність та способи лінеаризації нелінійних динамічних систем

Лінеаризація – один з найбільш розповсюджених методів аналізу нелінійних систем. Ідея лінеаризації – використання лінійної системи для апроксимації поведінки рішень нелінійної системи в околі точки рівноваги. Лінеаризація дозволяє виявити більшість якісних і, особливо, кількісних властивостей нелінійної системи.

Методи лінеаризації мають обмежений характер, тобто еквівалентність вихідної нелінійної системи та її лінійного наближення зберігається лише для обмежених просторових або часових масштабів системи, або для певних процесів, до того ж, якщо система переходить з одного режиму роботи в інший, то слід змінити й її лінеаризовану модель.

Існує кілька способів лінеаризації. Розглянемо два з них: метод заміни змінних та за допомогою Якобіана.

Лінеаризація нелінійних динамічних систем методом заміни змінних. Лінеаризація системи нелінійних рівнянь в околі точки рівноваги може бути досягнута шляхом заміни змінних так, щоб точка рівноваги перетворилася в початок координат.

Рівняння, отримані в результаті зазначеної дії, будуть лінійними і називатимуться *лінеаризацією* початкової системи.

Точки початкової системи, що знаходяться в околі точки рівноваги, будуть відповідати точкам в околі початку координат нової системи.

Нас буде цікавити:

а) значення нових змінних, що близькі до нуля;

б) за яких умов нелінійними виразами можна знехтувати.

Розглянемо нелінійну систему:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}, \tag{2.1}$$

яка має точку рівноваги (p,q).

Перетворення

$$\begin{cases} u = x - p \\ v = y - q \end{cases}. \tag{2.2}$$

переводить точку рівноваги (p,q) в початок координат.

Диференціювання перетворення (2.2) має вигляд:

$$\begin{cases} u' = x' \\ v' = y' \end{cases}. \tag{2.3}$$

Після заміни змінних, підставивши їх нові значення (2.4) в кожне рівняння (2.1), виділимо лінійну частину (2.5):

$$\begin{cases} x = u + p \\ y = v + q \end{cases}, \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} u' = au + bv + F(u,v) \\ v' + cu + dv + G(u,v) \end{cases}. \tag{2.5}$$

де $F(u,v)$ і $G(u,v)$ складаються лише з нелінійних виразів.

Лінійна система

$$\begin{cases} u' = au + bv \\ v' = cu + dv \end{cases} \tag{2.6}$$

є лінеаризацією нелінійної системи (2.1) за умов, що вирази $F(u,v)$ і $G(u,v)$ є поліноміальними, а також

$$\frac{F(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} \to 0,\ \frac{G(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} \to 0,\ \sqrt{u^2+v^2} \to 0. \qquad (2.7)$$

Ці останні умови забезпечують те, що нелінійні вирази $F(u,v)$ і $G(u,v)$ на стільки малі порівняно з u та v при наближенні до точки рівноваги, що ними можна знехтувати.

Приклад 2.1. Лінеаризувати систему $\begin{cases} x' = f(x,y) = -2x+y \\ y' = g(x,y) = -y+x^2 \end{cases}$ методом заміни змінних.

Розв'язання. Знайдемо точки рівноваги динамічної системи. Для цього розв'яжемо систему $\begin{cases} -2x+y=0 \\ -y+x^2=0 \end{cases}$. Отримаємо точки рівноваги з координатами (0;0) і (2;4).

Лінеаризація проводиться для кожної точки окремо.

Лінеаризуємо вхідну систему в точці (0;0). Для цієї точки заміна (див. формулу (2.2)) не знадобиться, отже рівняння заданої динамічної системи залишаться без змін: $\begin{cases} x' = -2x+y \\ y' = -y+x^2 \end{cases}$.

Нелінійний вираз присутній тільки у другому рівняння, він є поліноміальним, тому, за доведеним вище, ним можна знехтувати.

Отримуємо лінеаризовану систему: $\begin{cases} x' = -2x+y \\ y' = -y \end{cases}$.

Лінеаризуємо вхідну систему в точці (2;4). За формулою (2.2) використаємо заміну: $\begin{cases} x = u+2 \\ y = v+4 \end{cases}$ для переведення точки рівноваги у початок координат. Рівняння вхідної динамічної системи набувають вигляду:

$$\begin{cases} u' = -2(u+2)+v+4 = -2u+v \\ v' = -(v+4)+(u+2)^2 = 4u-v+u^2 \end{cases}.$$

Нелінійний вираз присутній тільки у другому рівняння, він є поліноміальним, тому ним можна знехтувати. Отримуємо лінеаризовану систему: $\begin{cases} u' = -2u+v \\ v' = 4u-v \end{cases}$.

Лінеаризація на основі якобіана. Існують і інші способи лінеаризації. Один з них - лінеаризація на основі матриці Якобі. Елементами даної матриці є частинні похідні функцій f і g: $a = \frac{df}{dx}$, $b = \frac{df}{dy}$, $c = \frac{dg}{dx}$, $d = \frac{dg}{dy}$. Матриця $J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ називається *якобіаном*.

Лінеаризацією нелінійної динамічної системи (2.1) є система:

$$\begin{cases} u' = au+bv \\ v' = cu+dv \end{cases}. \tag{2.8}$$

Приклад 2.2. Лінеаризувати динамічну систему попереднього прикладу $\begin{cases} x' = f(x,y) = -2x+y \\ y' = g(x,y) = -y+x^2 \end{cases}$ за допомогою якобіана.

Розв’язання. Знайдемо елементи якобіана: $\frac{\partial f}{\partial x} = -2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -1$.

Відповідно, маємо: $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$. Координати особливих точок заданої динамічної системи знайдено у попередньому прикладі: (0;0) та (2;4).

Проведемо лінеаризацію вхідної системи в точці (0;0). Підставимо координати у вираз якобіана. Отримуємо $J_{(0;0)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. За формулою (2.8), лінеаризацією вхідної динамічної системи у точці (0;0) є система $\begin{cases} u' = -2u+v \\ v' = -v \end{cases}$.

Лінеаризація заданої системи, що проведена методом заміни змінних, дає аналогічний результат (див. приклад 2.1).

Проведемо лінеаризацію вхідної системи в точці (2;4). Підставимо координати у вираз якобіана. Отримуємо $J_{(2;4)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. За формулою (2.8), лінеаризацією вхідної динамічної системи у точці (2;4) є система $\begin{cases} u' = -2u + v \\ v' = 4u - v \end{cases}$.

Лінеаризація заданої системи, що проведена методом заміни змінних, дає аналогічний результат (див. приклад 2.1).

2.2 Теорема Хартмана-Гробмана

Теорема Хартмана-Гробмана визначає випадки, коли висновки, отримані при дослідженні лінеаризованої системи, можна перенести на її нелінійний аналог.

Теорема Хартмана-Гробмана: якщо якобіан не має нульових або чисто уявних значень, то фазовий портрет нелінійної системи в околі точки її рівноваги подібний до фазового портрета її лінеаризації.

Висновки з теореми Хартмана-Гробмана:

- якщо лінеаризована система має нульове власне значення або чисто уявні власні значення, нічого не можна сказати про нелінійну систему;

- якщо для сліду (σ) та детермінанту (Δ) характеристичного рівняння лінеаризованої системи виконуються одночасно умови $\begin{cases} \sigma \le 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$, то точка рівноваги відповідної нелінійної системи є атрактором і стійка;

- у всіх інших випадках (окрім $\begin{cases} \sigma = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$) точка рівноваги відповідної нелінійної системи є нелінійним сідлом і нестійка.

<u>Приклад 2.3</u>. Визначити, якщо це можливо, типи точок рівноваги для нелінійної динамічної системи, що задана у прикладі 2.2: $\begin{cases} x' = f(x,y) = -2x + y \\ y' = g(x,y) = -y + x^2 \end{cases}$.

Розв'язання. Знаходження точок рівноваги заданої системи та її лінеаризація у кожній з них наведено у прикладах 2.1 та 2.2.

Дослідимо лінеаризовану систему, що відповідає точці (0;0). За результатами прикладу 2.2 маємо для дослідження систему $\begin{cases} u' = -2u + v \\ v' = -v \end{cases}$.

Складемо матрицю коефіцієнтів даної системи: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Знайдемо слід та детермінант даної матриці: $\sigma = -3$, $\Delta = (-2)(-1) = 2$. Як бачимо, виконуються умова $\begin{cases} \sigma \le 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$. Отже, за теоремою Хартмана-Гробмана, точка рівноваги (0;0) є атрактором і стійка.

Дослідимо лінеаризовану систему, що відповідає точці (2;4). За результатами прикладу 2.2 маємо для дослідження систему $\begin{cases} u' = -2u + v \\ v' = 4u - v \end{cases}$.

Складемо матрицю коефіцієнтів даної системи: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Знайдемо слід та детермінант даної матриці: $\sigma = -3$, $\Delta = (-2)(-1) - 4 = -2$. Умова $\begin{cases} \sigma \le 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ не виконана.

Отже, за теоремою Хартмана-Гробмана, точка рівноваги (2;4) є нелінійним сідлом і нестійка.

Теорема Хартмана-Гробмана має два серйозних обмеження:

1) вона не надає інформації про випадки, коли лінеаризація не проста (при нульовому детермінанті) або є центром (при нульовому сліді);

2) теорема надає інформацію про поведінку рішень тільки поблизу точки рівноваги. Для того, щоб зробити глобальний прогноз, нам необхідні додаткові більш складні дослідження. Для цього використовують концепції консервативних систем, оборотних систем та функцію Ляпунова.

2.3 Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте основну ідею лінеаризації.
2. Які основні методи лінеаризації?
3. Сформулюйте теорему Хартмана-Гробмана.
4. До яких випадків не можна застосовувати теорему Хартмана-Гробмана?
5. Якими мають бути слід та детермінант лінеаризованої системи, щоб відповідна нелінійна система була стійкою?
6. Якими мають бути слід та детермінант лінеаризованої системи, щоб відповідна нелінійна система була нестійкою?
7. Що таке «якобіан»? Як він розраховується?
8. Які висновки можна зробити з теореми Хартмана-Гробмана, якщо $\begin{cases} \sigma \le 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$?
9. Які висновки можна зробити з теореми Хартмана-Гробмана, якщо $\begin{cases} \sigma \ge 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$?
10. Які висновки можна зробити з теореми Хартмана-Гробмана, якщо $\begin{cases} \sigma = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$?

2.4 Завдання для самостійного розв'язання

За даними Вашого варіанту (табл. 2.1):

1. Знайти особливі точки системи.
2. Провести лінеаризацію системи різними методами, результати порівняти.
3. Дослідити стійкість нелінійної системи за теоремоюХартмана-Гробмана.

Таблиця 2.1

№ вар	Завдання	№ вар	Завдання
1	$\begin{cases} x' = y^2 - 3x + 2 \\ y' = x^2 - y^2 \end{cases}$	2	$\begin{cases} x' = x - y - e^x \\ y' = x - y \end{cases}$
3	$\begin{cases} x' = y - 3x \\ y' = x + x^3 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x' = x - y - xy \\ y' = x - y + y^2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - (4 + x^2 + y^2)y \end{cases}$	13	$\begin{cases} x' = x - y - ey \\ y' = x + y \end{cases}$

Продовження таблиці 2.1

№ вар	Завдання	№ вар	Завдання
5	$\begin{cases} x' = -3y + xy - 4 \\ y' = -x^2 + y^2 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x' = x - y + xy \\ y' = x^2 - y + y^2 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - (1 + x^2 + y^2)y \end{cases}$	15	$\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - (4 + x^2 + y^2)x \end{cases}$
7	$\begin{cases} x' = 1 - e^{x+y} \\ y' = x - y \end{cases}$	16	$\begin{cases} x' = -4y - xy - 2 \\ y' = -x^2 + y^2 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x' = y^2 - 1 \\ y' = x - y^2 \end{cases}$	17	$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - (1 - x^2 - y^2)y \end{cases}$
9	$\begin{cases} x' = x^2 - x \\ y' = -y \end{cases}$	18	$\begin{cases} x' = 1 - e^{x-y} \\ y' = x - y \end{cases}$
10	$\begin{cases} x' = y^2 - x + 4 \\ y' = x^2 - 2y^2 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x' = 2y^2 - 1 \\ y' = x - 4y^2 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x' = 3y - 3x \\ y' = x + x^3 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x' = x^2 - 2x + y \\ y' = -y \end{cases}$

РОЗДІЛ 3. ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ З ПИТАНЬ ВИКОРИСТАННЯ ПАКЕТУ MATHCAD ДЛЯ ЗАДАНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

3.1 Робота з графікою

***Шаблони графіків в системі* MathCAD.** Графічний процесор системи MathCAD дозволяє створювати різноманітні види графіків: у декартовій і полярній системах координат, графіки поверхонь, тривимірні фігури тощо.

Для побудови графіків використовуються шаблони. Їх перелік представлений в підменю *График* пункту *Вставка* головного меню (рис. 3.1).

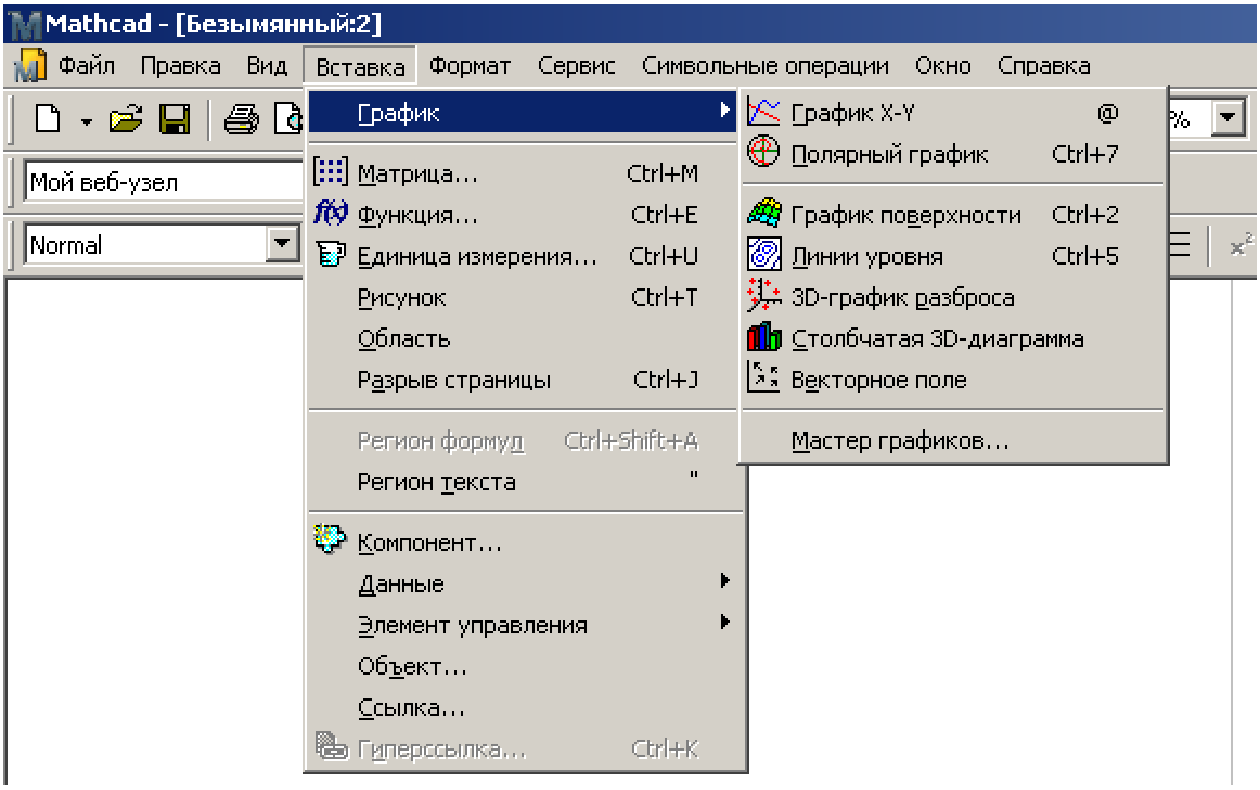


Рис. 3.1– Виклик шаблону графіка

Більшість параметрів графічного процесора, необхідних для побудови графіків, за замовчанням задається автоматично, тому для початкової побудови графіка будь-якого вигляду досить задати його тип.

Система **MathCAD** підтримує різні *типи шаблонів графіків* (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Типи графіків у MathCAD

Позначення шаблону графіку у системі MathCAD	Характеристика типу графіку
График X-Y	шаблон двовимірного графіку в декартовій системі координат
Полярный график	шаблон графіку в полярних координатах
График поверхности	шаблон тривимірного графіку
Линии уровня	шаблон для контурного графіку тривимірної поверхні
3D-график разброса	шаблон для графіка у вигляді точок у тривимірному просторі
Столбчатая 3D-диаграмма	шаблон для зображення у вигляді стовпчикової діаграми
Векторное поле	шаблон для графіку векторного поля на площині
Мастер графиков...	запуск майстра для побудови тривимірних графіків із заданими властивостями

Побудова двовимірного графіку. Незаповнений шаблон графіку (рис. 3.2) є великим порожнім прямокутником з шаблонами введення даних (або місцями введення) у вигляді темних маленьких прямокутників, розташованих біля осей абсцис і ординат майбутнього графіка.

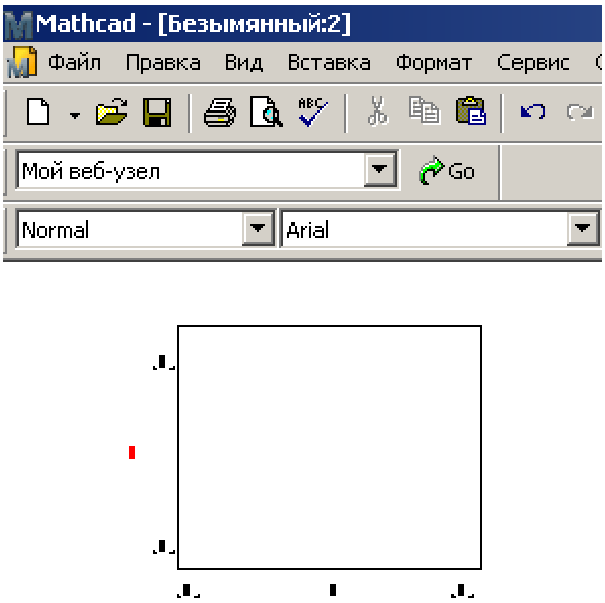


Рис. 3.2 – Шаблон для двовимірного графіку

У виділені чорними прямокутниками місця необхідно ввести вирази для координат точок по осях X (горизонтальна вісь) і Y (вертикальна вісь). У загальному випадку це можуть бути функції деякої змінної x.

<u>Приклад 3.1.</u> Побудувати графік функції $x' = x^2 + 2\sin x - x^4$.

Необхідні налаштування для побудови зазначеного графіку проілюстровані на рис. 3.3.

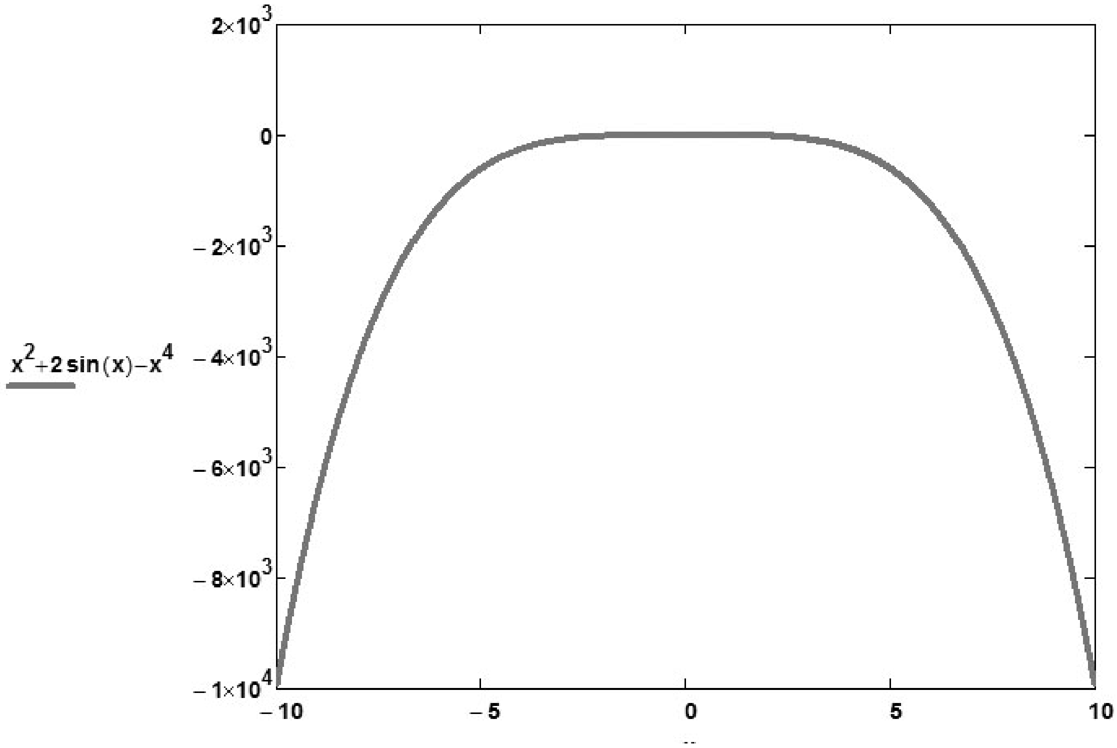
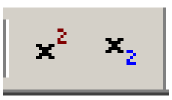


Рис. 3.3 – Налаштування для побудови графіку функції $x' = x^2 + 2\sin x - x^4$

Зауваження. Для введення символів верхніх регістрів застосовують кнопки  з панелі інструментів.

Зміна налаштувань двовимірного графіка. Графічний процесор системи MathCAD дозволяє здійснювати наступні переналаштування графіків:

1) зміна розміру відображення;
2) переміщення графіка;
3) зображення кількох графіків в одному шаблоні;

4) форматування;

5) зміна масштабу графіку.

Зміна розміру відображення. Для зміни розміру відображення графіку необхідно його виділити (клацнути на ньому лівою клавішею миші) і за допомогою маркерів змінити розмір на необхідний.

Переміщення графіка. Для переміщення графіка потрібно підвести курсор до краю графіка (зміниться курсор) і при натиснутій лівій клавіші перемістити графік по листу.

Зображення кількох графіків в одному шаблоні. Для зображення кількох графіків в одному шаблоні, необхідно зліва від графіку через кому ввести ще одне рівняння (рис. 3.4).

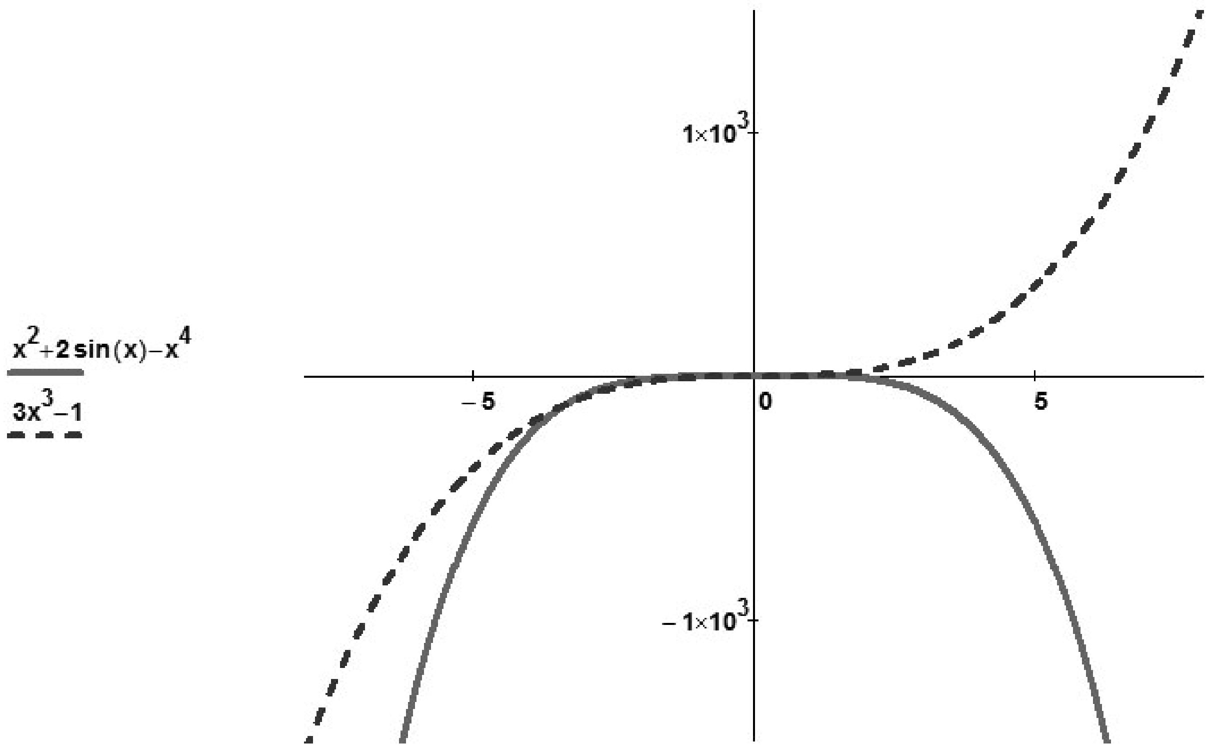


Рис. 3.4 – Приклад зображення двох графіків в одному шаблоні

Форматування графіків. Діалогове вікно форматування графіків викликається подвійним клацанням лівої клавіші миші на графіку і містить вкладки «Оси X,Y», «Трассировка», «Формат числа», «Подписи», «По умолчанию) (рис. 3.5).

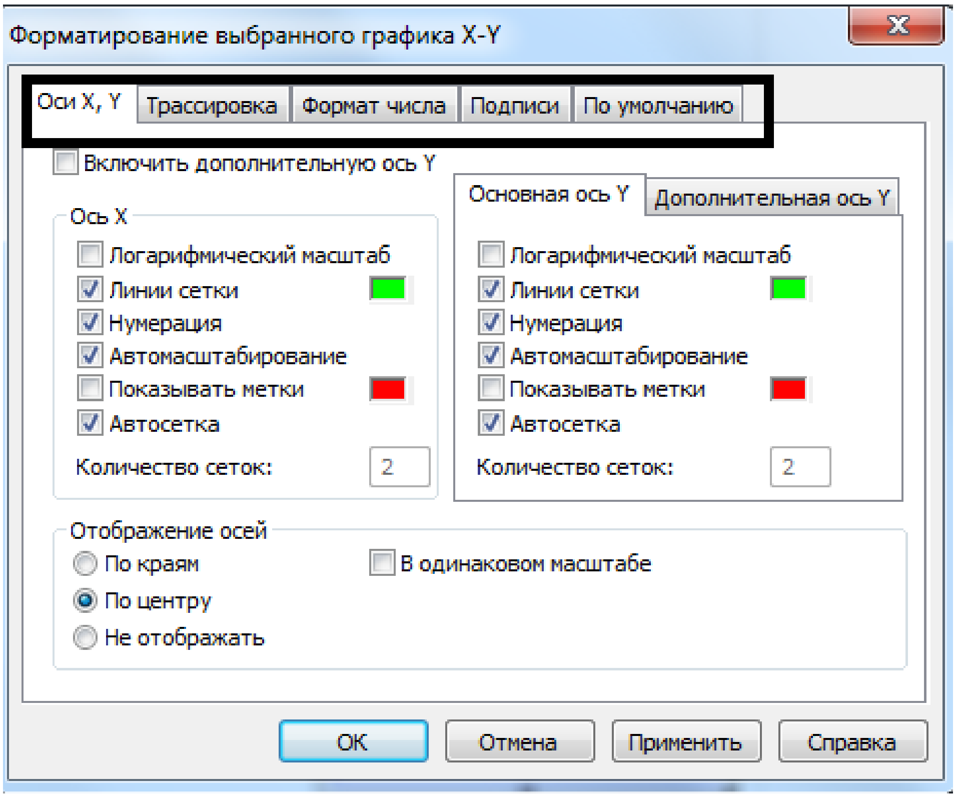


Рис. 3.5 – Вкладки вікна форматування графіків

Для виконання завдання лабораторної роботи слід вибрати опції вкладки «Оси X,Y», виділені на рис. 3.6.

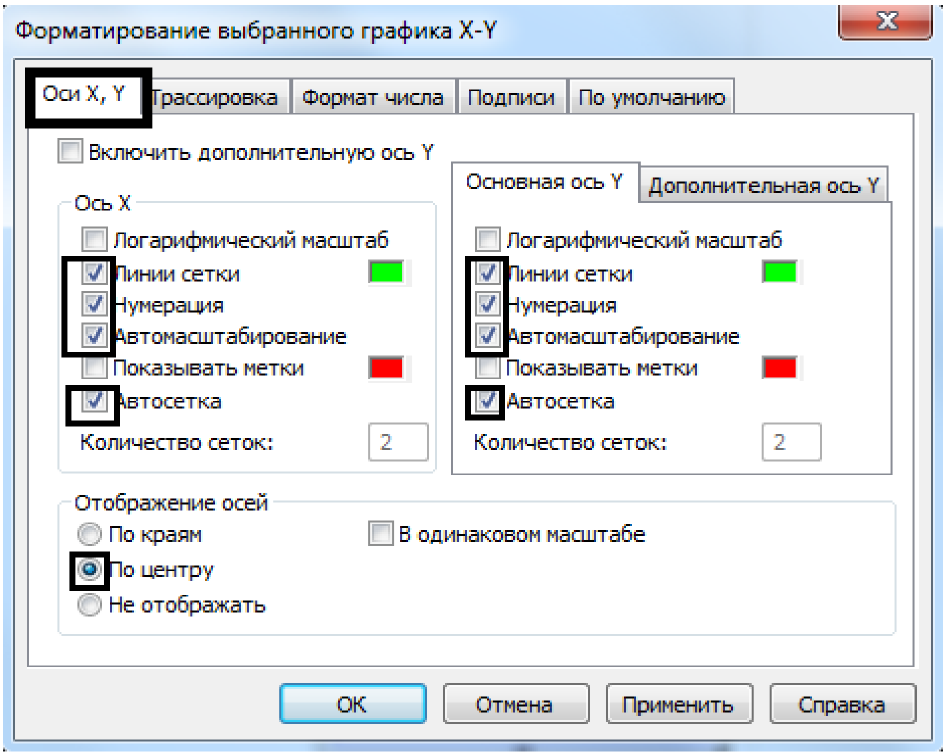


Рис. 3.6 – Основні опції вкладки «Оси X,Y» діал. вікна форматування графіків

Пояснимо їх використання.

Опція *Линии сетки* дозволяє винести на графік горизонтальні і(або) вертикальні лінії сітки (рис. 3.7).

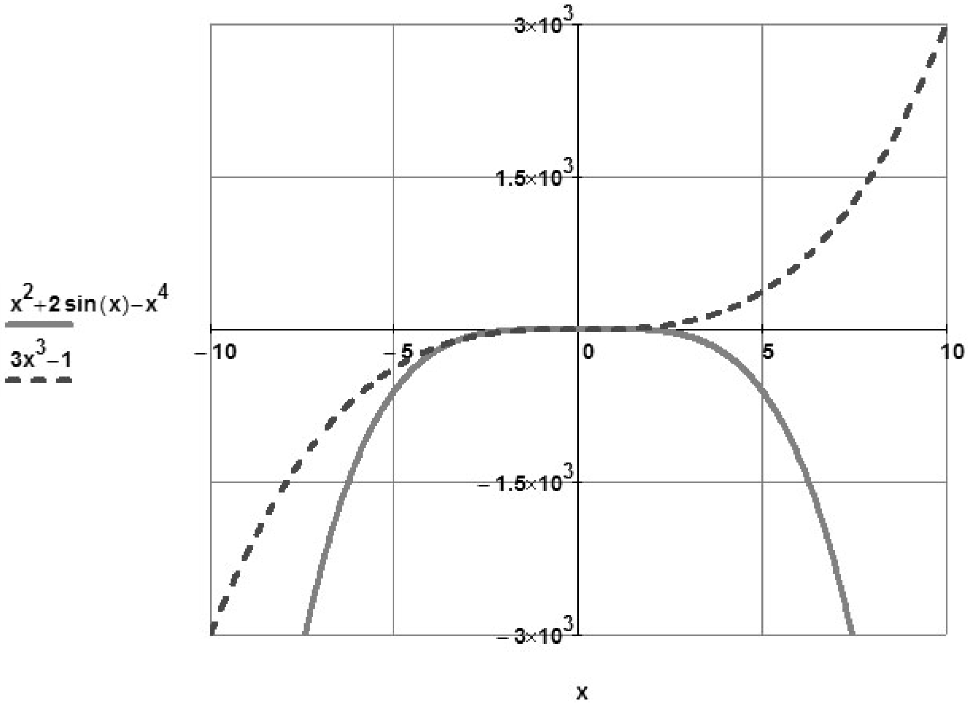


Рис. 3.7 – Відображення ліній сітки на графіку

Опція *Нумерация* виводить надписи на осях (рис. 3.8).

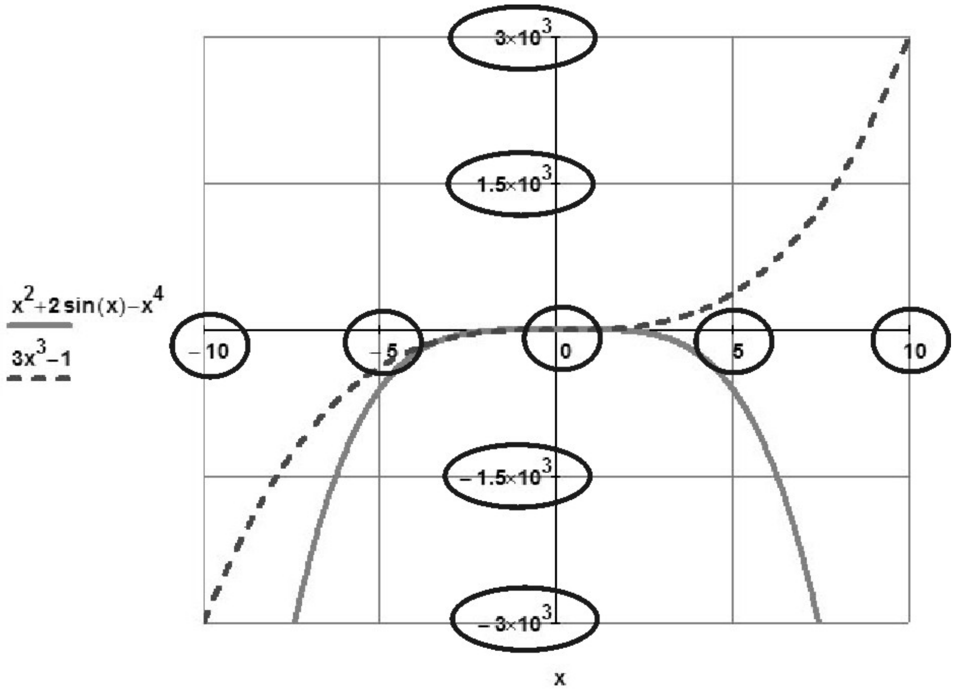


Рис. 3.8 – Результат вибору опції *Нумерация* на вкладці «Оси X,Y» діалогового вікна форматування графіків

Опція *Автомасштабирование* автоматично розбиває вікно графіку на рівні інтервали по горизонталі і по вертикалі, що дозволяє чітко визначити границі цих інтервалів. Зовнішній вигляд графіків без завдання цієї опції представлено на рис. 3.9.

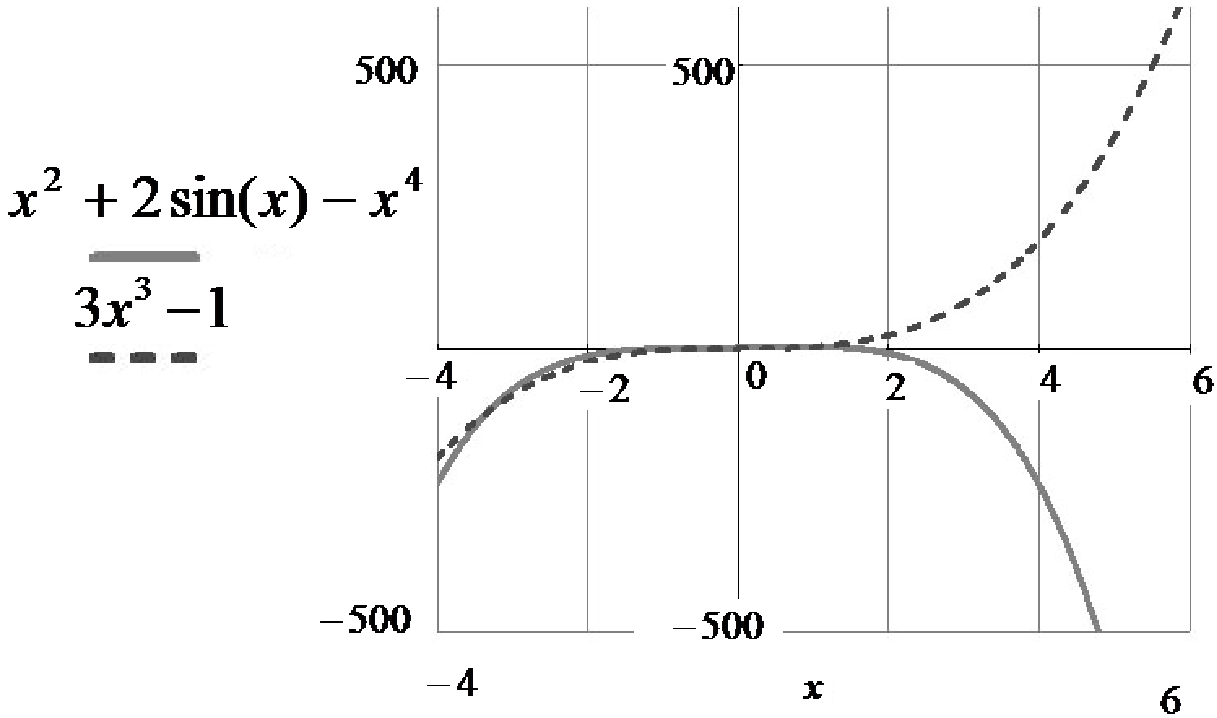


Рис. 3.9 – Зовнішній вигляд графіку з відключеною опцією *Автомасштабирование*

Відключення опції *Автосетка* дозволяє в ручному режимі встановити відстань між горизонтальними та вертикальними лініями сітки через завдання додаткової опції *Количество сеток*. Якщо відключити опцію *Автосетка* і задати *Количество сеток 5* (рис. 3.9), то отримаємо графіки у форматі, зображеному на рис. 3.11Рис..

Опція *Отображение осей* дозволяє встановити відображення осей по центру або по краях для більш зручного сприйняття графіку. Відображення осей взагалі можна відключити. На рис. 3.13 - зображення попереднього графіку, тільки зображення осей перенесено на края (необхідні параметр формування зображено на рис. 3.12).

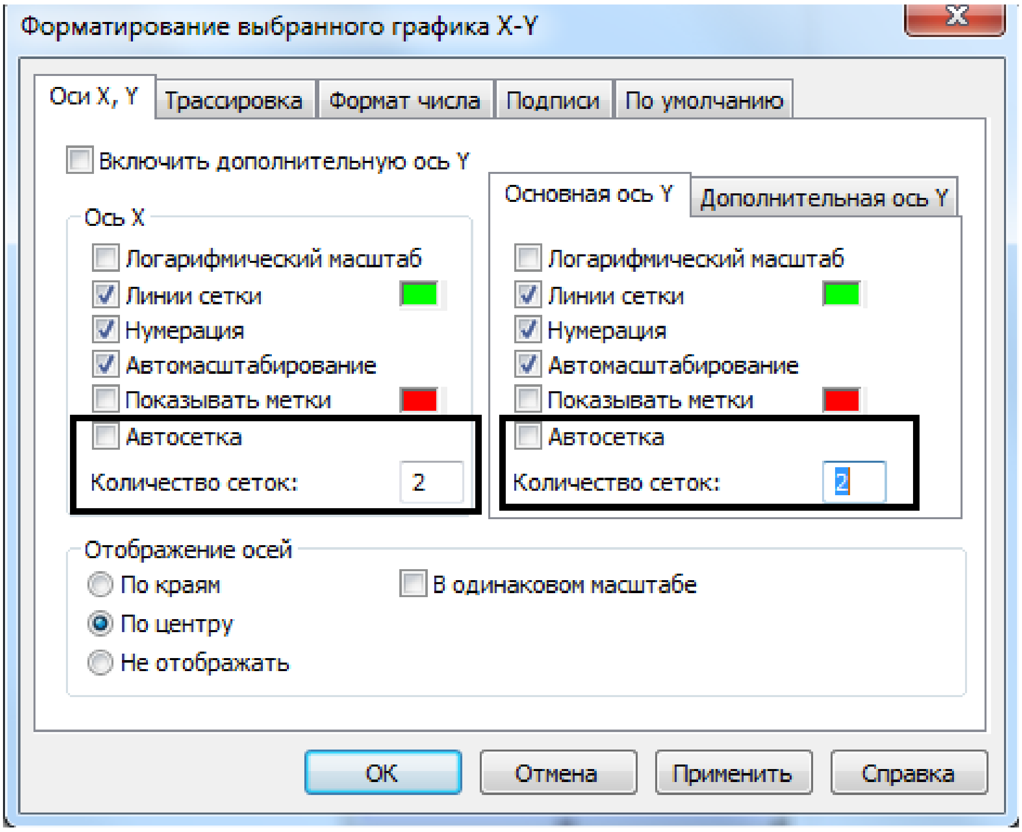


Рис. 3.10 – Завдання кількості ліній сітки вручну

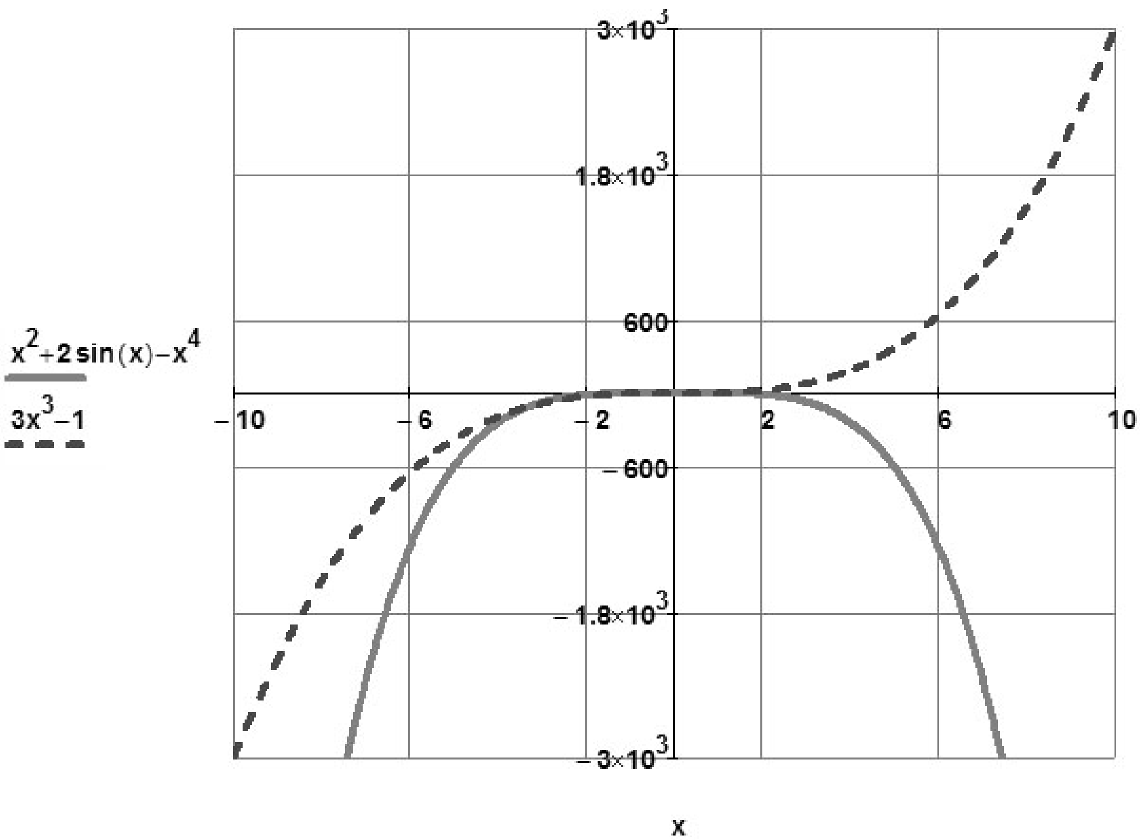


Рис. 3.11 – Формат виведення графіку із завданням кількості ліній сітки вручну (кількість ліній 5)

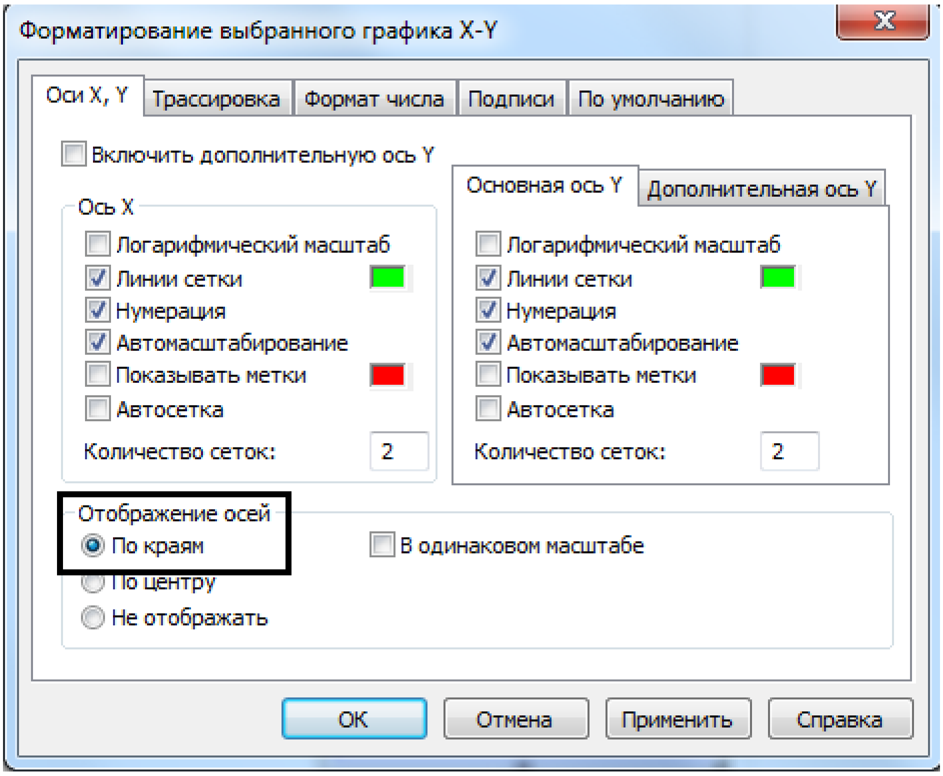


Рис. 3.12 – Встановлення режиму відображення осей по краях графіку

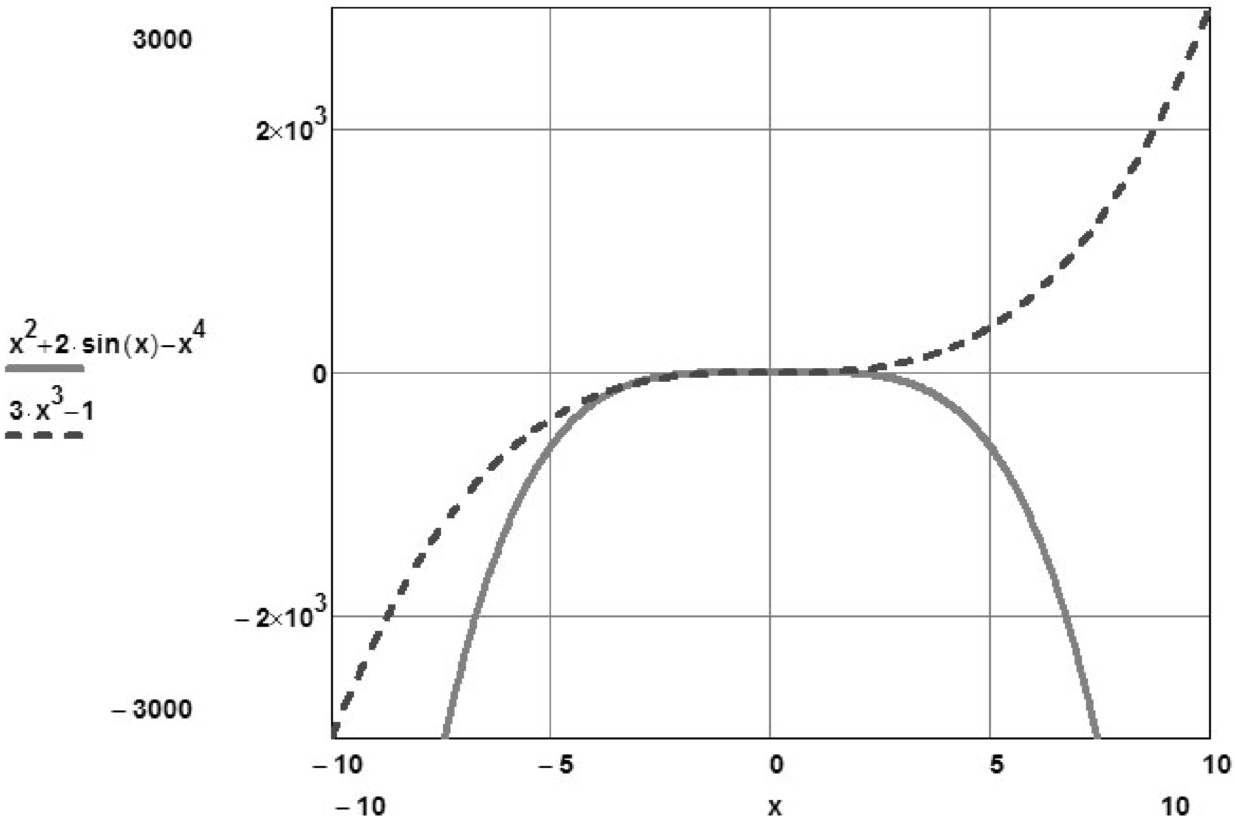


Рис. 3.13 – Зображення графіку з осями по краях

Звичайно, що існують і інші можливості форматування графіків, але в межах виконання поставлених завдань вони не відіграють суттєвого значення.

Зміна масштабу графіку. Якщо виділити побудований графік (клацнути на ньому лівою клавішею миші), то можна побачити його масштаб, заданий автоматично. За замовчуванням межі аргументу задаються відрізком [-10, 10] (рис. 3.14). Масштаб по осі Y MathCAD встановлює автоматично.

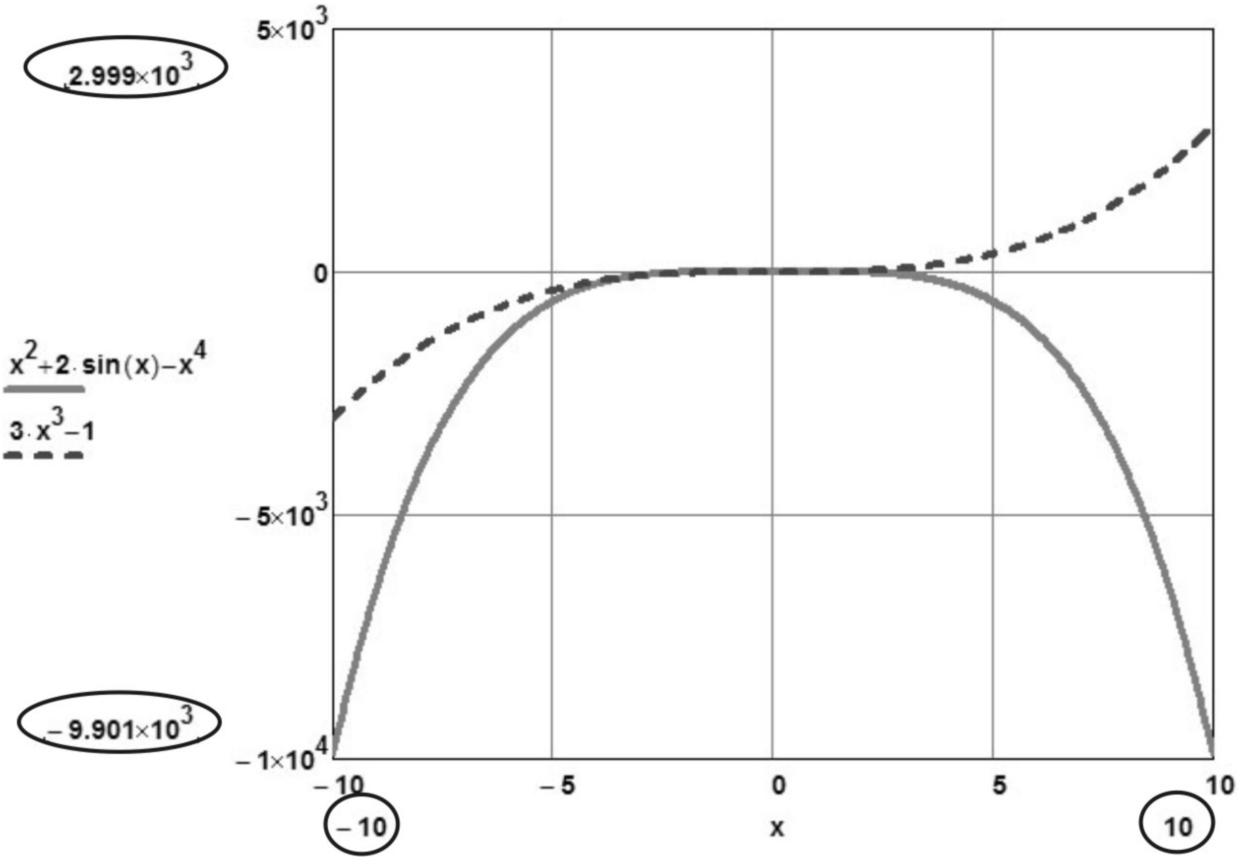


Рис. 3.14 – Автоматичний масштаб графіку

Для зміни масштабу зображення графіку необхідно змінити його вручну у вікні графіку. Нехай, наприклад, необхідно з’ясувати, скільки разів побудовані графіки перетинають вісь аргументу (іншими словами, знайти, скільки коренів має відповідне рівняння). Задамо границі аргументу [-1; 2]. Результат відображено на рис. 3.15.

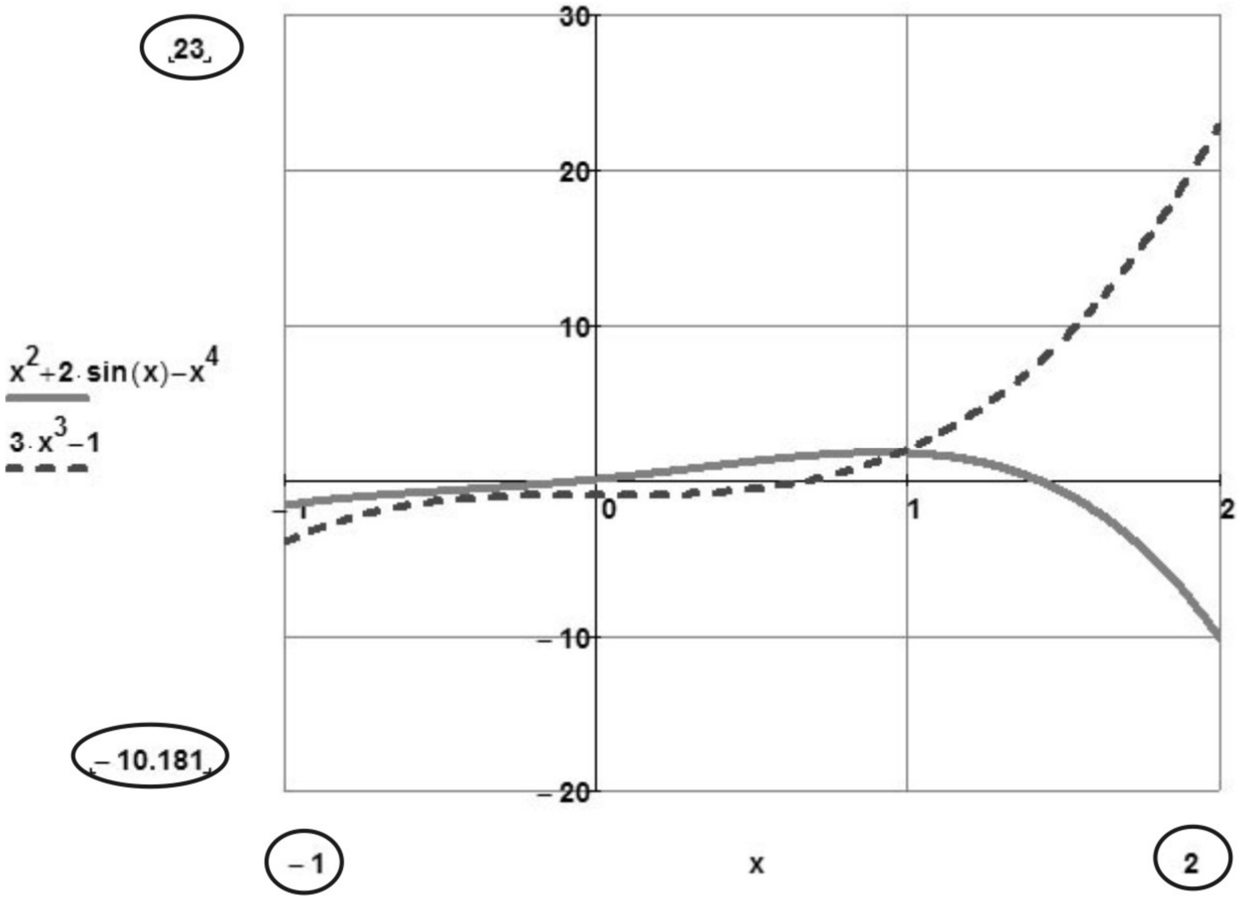


Рис. 3.15 – Зображення графіку при зміні границь аргументу

Як видно з рис. 3.15, рівняння $x^2 + 2\sin x - x^4 = 0$ має два корені, а рівняння $3x^3 - 1 = 0$ – тільки один.

3.2 Розв’язання рівнянь

Розв’язання рівнянь за допомогою ключового слова solve. Для знаходження коренів рівнянь у системі MathCAD викликають панель інструментів «Символьные преобразования с ключевыми словами» (рис. 3.16) та на ній вибирають ключове слово *solve*.

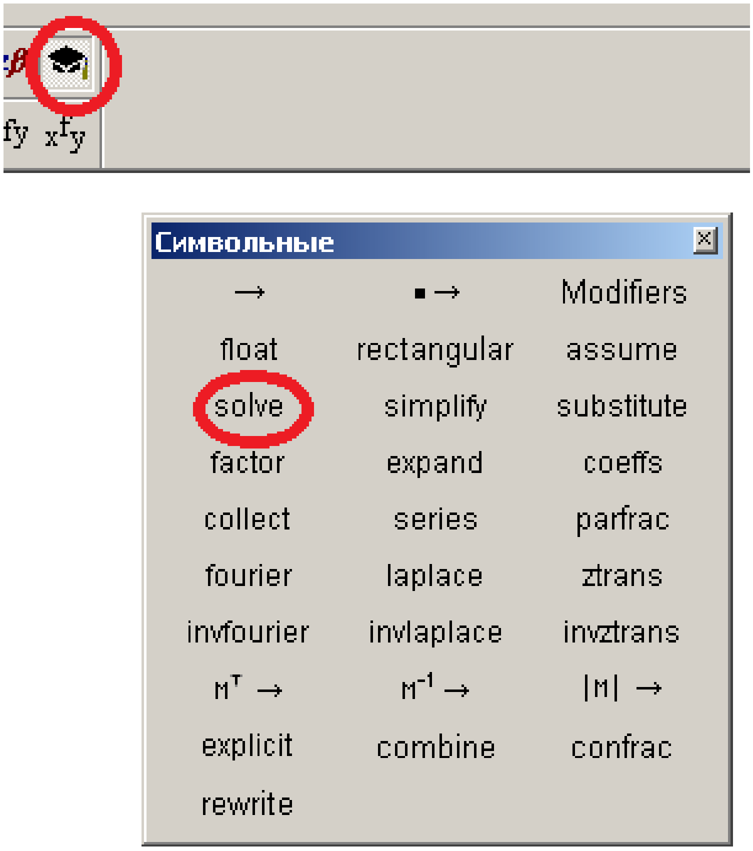


Рис. 3.16 – Виклик панелі інструментів «Символьные преобразования с ключевыми словами»

На робочому листі з’являється виділена позиція для введення рівняння та виведення його розв’язку (рис. 3.17).

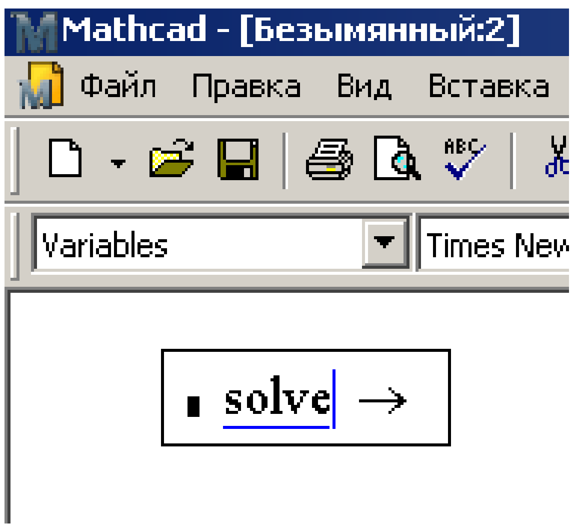


Рис. 3.17 – Виділена позиція для введення рівняння та виведення його розв’язку

Зліва від ключового слова *solve* необхідно ввести рівняння, після ключового слова через кому ввести змінну-аргумент, клацнути лівою кнопкою миші за межами виділеної позиції. Результат з’явиться справа від символу $\rightarrow$.

Розв’язки рівняння $3x^3 - 1 = 0$ наведено на рис. 3.18.

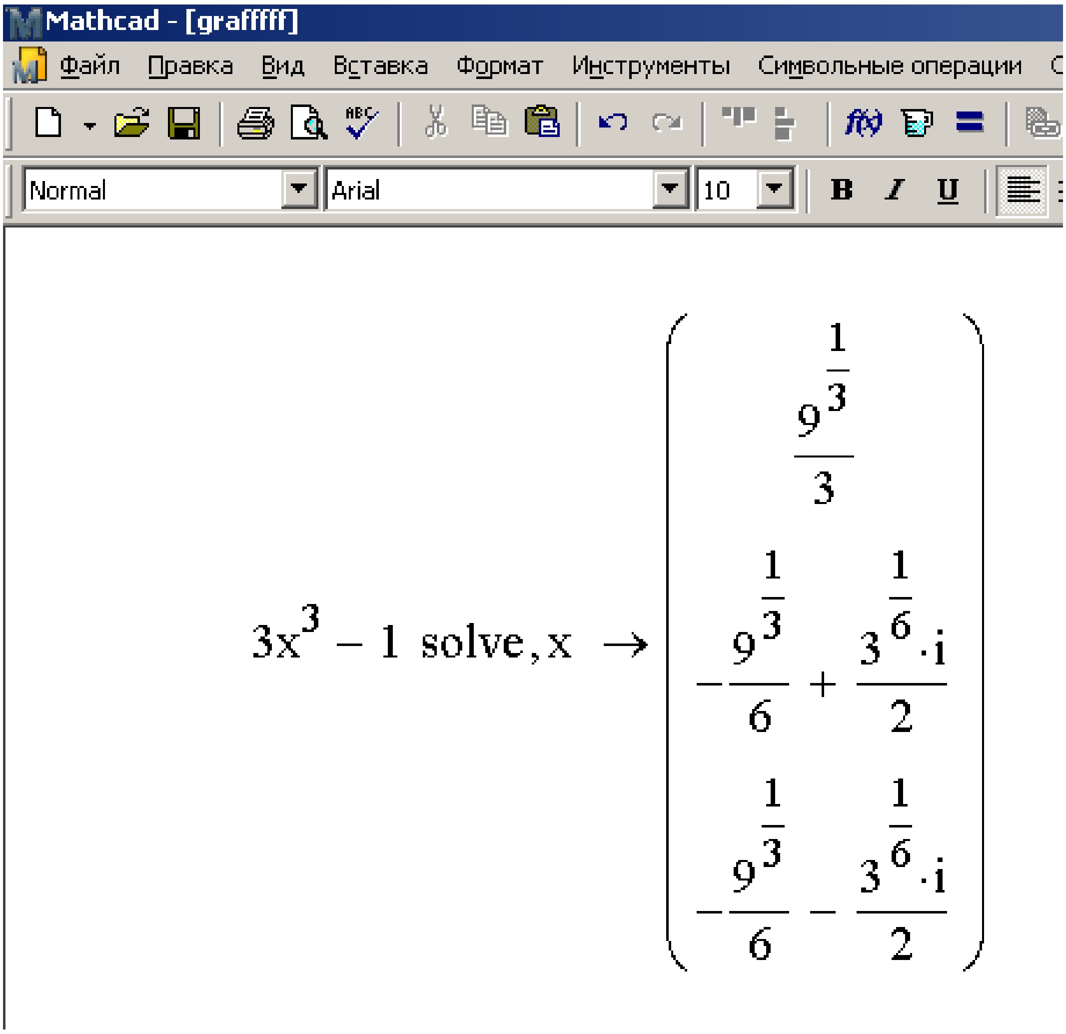


Рис. 3.18 – Розв’язок рівняння $3x^3 - 1 = 0$, отриманий із застосуванням ключового слова *solve*

Як видно з рис. 3.18, рівняння $3x^3 - 1 = 0$ має три корені – один дійсний і два комплексні. Для виконання поставлених у лабораторній роботі завдань нас цікавитимуть тільки дійсні корені. Графік функції $3x^3 - 1 = 0$ має один перетин з віссю аргументу (рис. 3.15), отже у подальшому досліджується стійкість однієї точки рівноваги $x = 9^{1/3}\!/_3$. Поведінка системи у даній особливій точці є нестійкою, так як графік зростає при переході через точку $x = \frac{9^{1/3}}{3}$.

Розв'язок рівняння $x^2 + 2\sin x - x^4 = 0$ дає незадовільні результати (рис. 3.19) щодо визначення кількості точок рівноваги та їх координат.

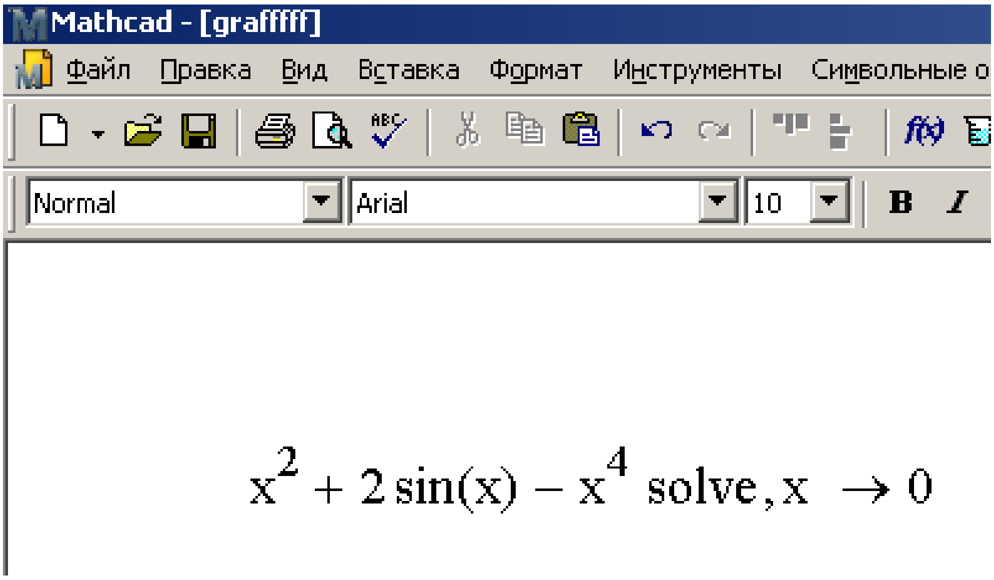


Рис. 3.19 – Розв'язок рівняння $x^2 + 2\sin x - x^4 = 0$, отриманий із застосуванням ключового слова *solve*

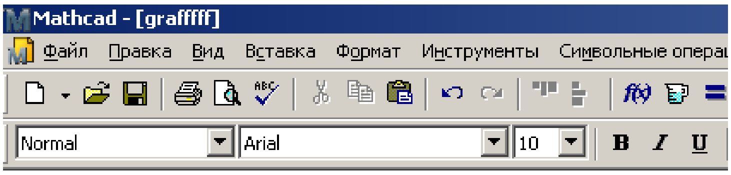
Результатом розв'язання рівняння із застосуванням ключового слова *solve* є одна точка $x = 0$, але на графіку відповідної функції (рис. 3.15) явно видно, що цих коренів два (принаймні, дійсних) і вони різні. Для того, щоб їх знайти, можна скористатися функцією *root* або виконати трасування графіку.

Розв'язання рівнянь за допомогою функції root. Функція *root* має синтаксис *Root(f(x),x)*. Першим аргументом функції *root* є безпосередньо саме рівняння, розв'язки якого необхідно знайти. Другим аргументом функції є незалежна змінна рівняння.

Слід зазначити, що дана функція шукає корінь рівняння в околі певної наперед заданої точки. Тобто, результатом роботи функції *root* є тільки один корінь, який знаходиться в околі наперед заданого наближення.

Щоб задати початкове наближення, необхідно перед викликом функції *root* надати аргументу *x* певного значення.

Так, з рис. 3.15 видно, що перший корінь рівняння $x^2 + 2\sin x - x^4 = 0$ знаходиться в околі точки $x = 0$, а другий близький, наприклад, до точки $x = 1.5$. Знаходження коренів рівняння $x^2 + 2\sin x - x^4 = 0$ за допомогою функції *root* проілюстровано на рис. 3.20.



$$x := 0$$

$$x1 := \mathrm{root}\left(x^2 + 2\sin(x) - x^4, x\right)$$

$$x1 = 0$$

$$x := 1.5$$

$$x2 := \mathrm{root}\left(x^2 + 2\sin(x) - x^4, x\right)$$

$$x2 = 1.411$$

Рис. 3.20 – Розв’язок рівняння $x^2 + 2\sin x - x^4 = 0$, отриманий із застосуванням функції *root*

Розв’язання рівнянь за допомогою трасування графіку функції. Трасування дозволяє більш точно вивчити особливості графіку. Щоб увімкнути режим трасування, у контекстному меню відповідного графіку (викликається клацанням правої клавіші миші на об’єкті) вибрати пункт Трассировка… (рис. 3.21).

У результаті у робочому полі MathCAD з’явиться вікно трасування, а у полі графіку пунктирні лінії, що перетинаються (рис. 3.22).

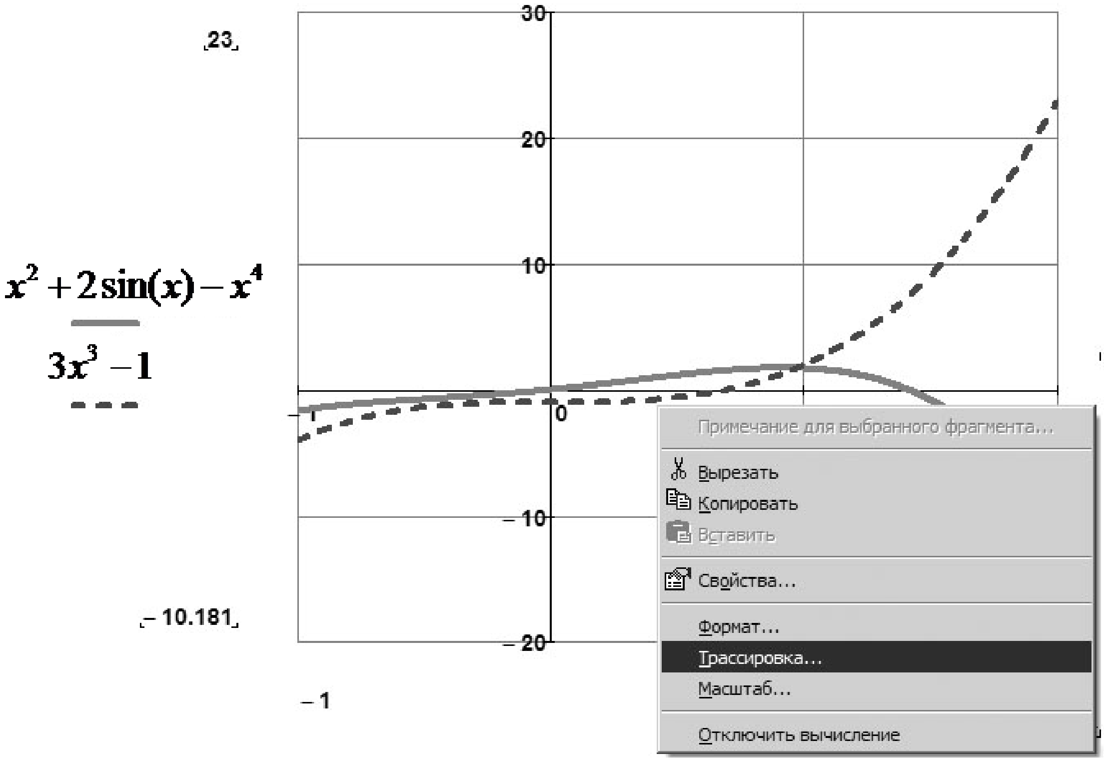


Рис. 3.21 – Виклик режиму трасування

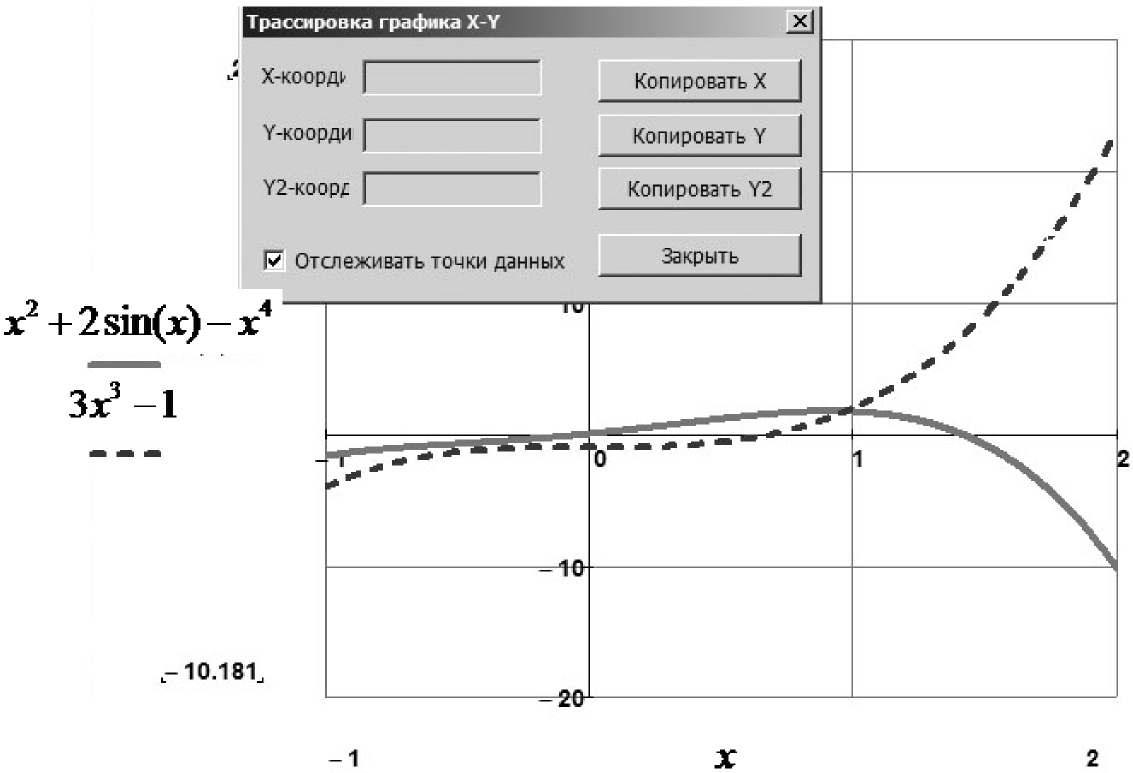


Рис. 3.22 – Результат виклику вікна «Трассировка графика X-Y»

При пересуванні вказівника миші по графіку пересувається і точка перетину ліній трасування. При цьому координати точки відображаються у вікні трасування у полях «X-координата», «Y-координата». Лінії трасування можна переміщувати також за допомогою клавіш керування курсором, що дозволяє більш точно визначити координати необхідної точки. Натискання кнопок «Копировать X» або «Копировать Y» призводить до копіювання відповідного числа у буфер обміну, що дозволяє потім вставити його у будь-яке місце робочого листа.

Результат визначення координат другого ненульового кореня для рівняння $x^2 + 2\sin x - x^4 = 0$ подано на рис. 3.23.

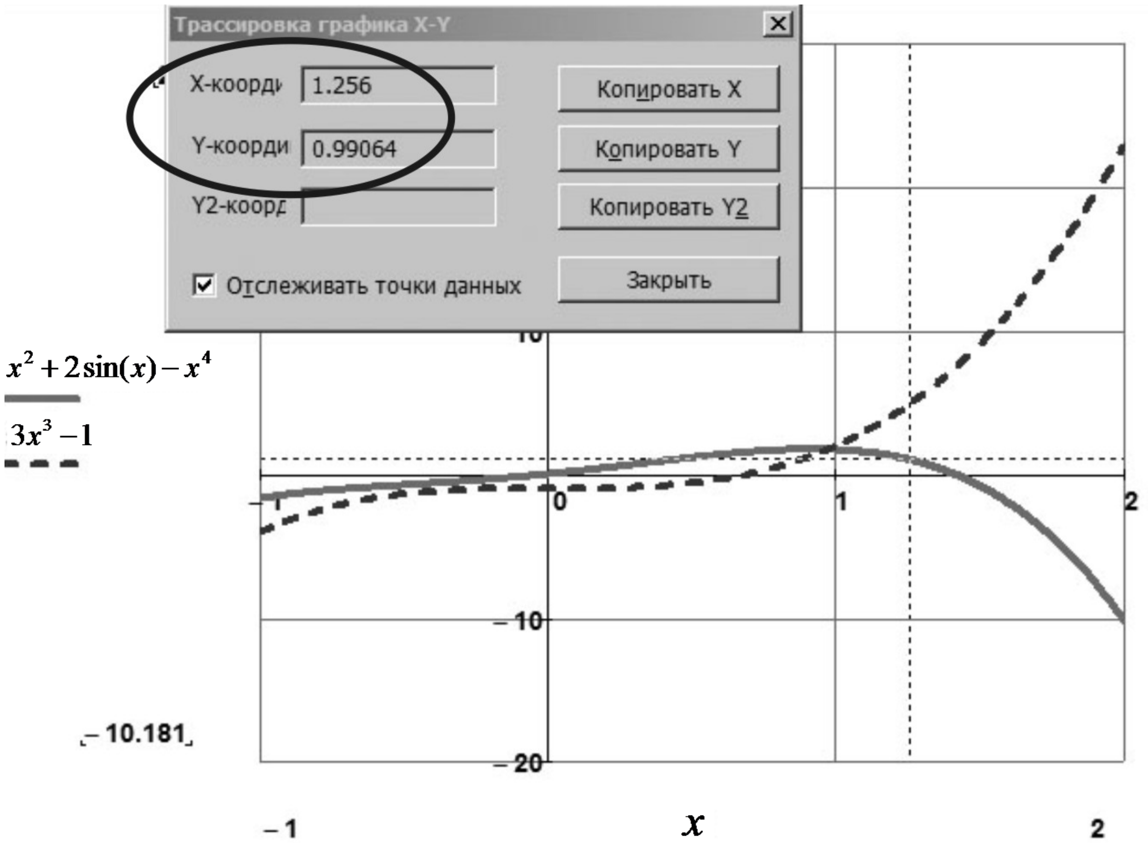


Рис. 3.23 – Знаходження координат ненульового кореня рівняння $x^2 + 2\sin x - x^4 = 0$ за допомогою трасування

Зазначимо, що пересувати вертикальну лінію трасування слід до тих пір, поки не буде отримано найменше відхилення від нульового значення ординати. Даний спосіб визначає точку $x = 1.412$ як ненульовий корінь, що тільки на $x = 0.001$ відрізняється від кореня, отриманого за допомогою функції *root*.

3.3 Робота з матрицями

Опис матриць у системі MathCAD. Кожен елемент матриці характеризується індексованою змінною, а його положення в матриці визначається двома індексами: номером рядка та номером стовпця.

Для вказівки підрядкових індексів після імені змінної (назви матриці або вектора) вводиться знак відкриваючої квадратної дужки «[». Для елементів матриці першим індексом вказується номер рядка. За замовчуванням у пакеті MathCAD індекси починаються з нуля. Початковий номер (нижня межа індексів) задається значенням системної змінної ORIGIN.

Для того, щоб нумерація індексів починалася з іншого номера, потрібно вибрати пункти головного меню «Инструменты→Параметры рабочего листа», перейти на вкладку «Встроенные переменные», для опції ORIGIN встановити необхідну нижню межу значення індексації (рис. 3.24).

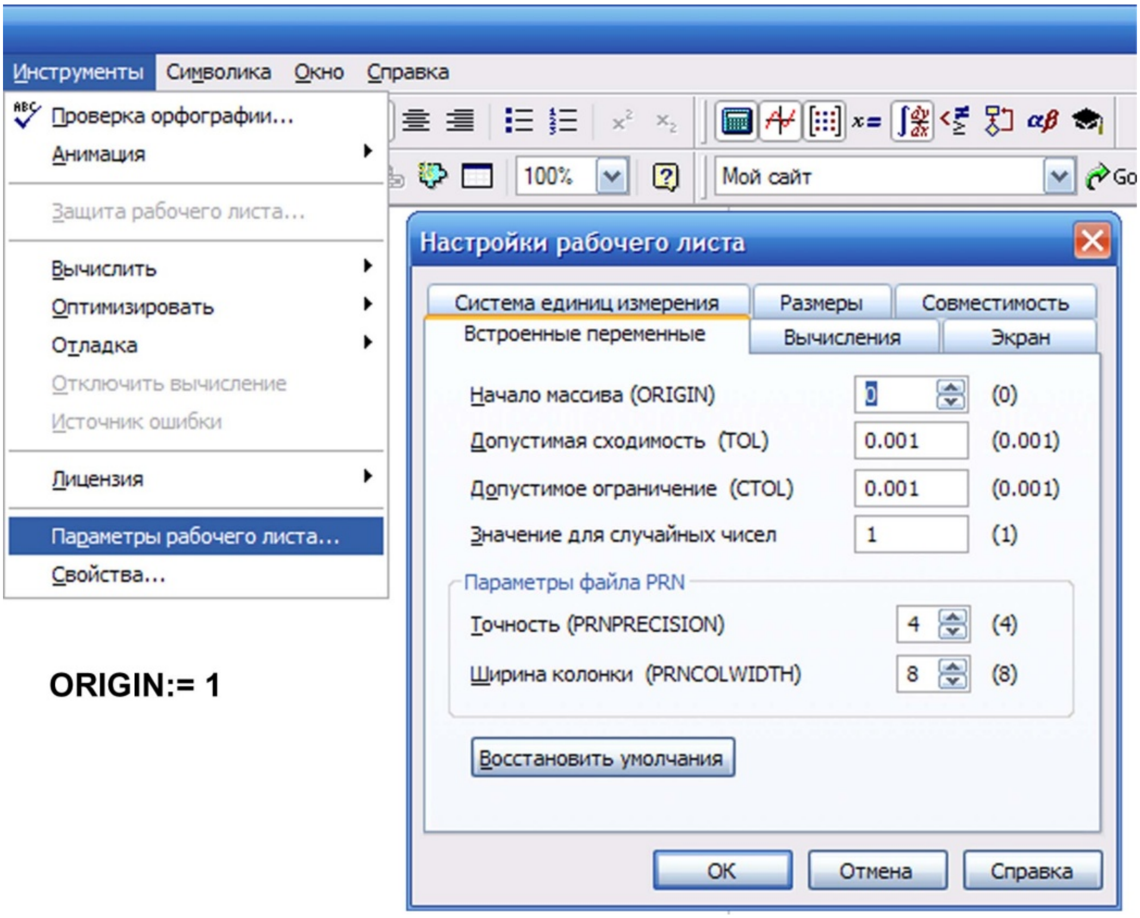


Рис. 3.24 – Встановлення початкових значень номерів індексів масиву

Завдання векторів і матриць.

<u>1 спосіб</u> (за допомогою шаблону введення матриці). Для введення шаблону можна:

- скористатися пунктами головного меню «Вставить→Матрицу…» головного меню;

- обрати відповідну піктограму на панелі інструментів «Матриця»;

- натиснути клавіш <Ctrl>+<M> (рис. 3.25).

Описані дії призведуть до появи діалогового вікна, в якому треба вказати розмірність матриці, тобто кількість рядків і стовпців. Після натиснення клавіші <ОК> або кнопки <Добавить> в діалоговому вікні буде виведено шаблон матриці або вектора (вектор матиме один з параметрів розмірності, рівний 1) (рис. 3.25-3.26).

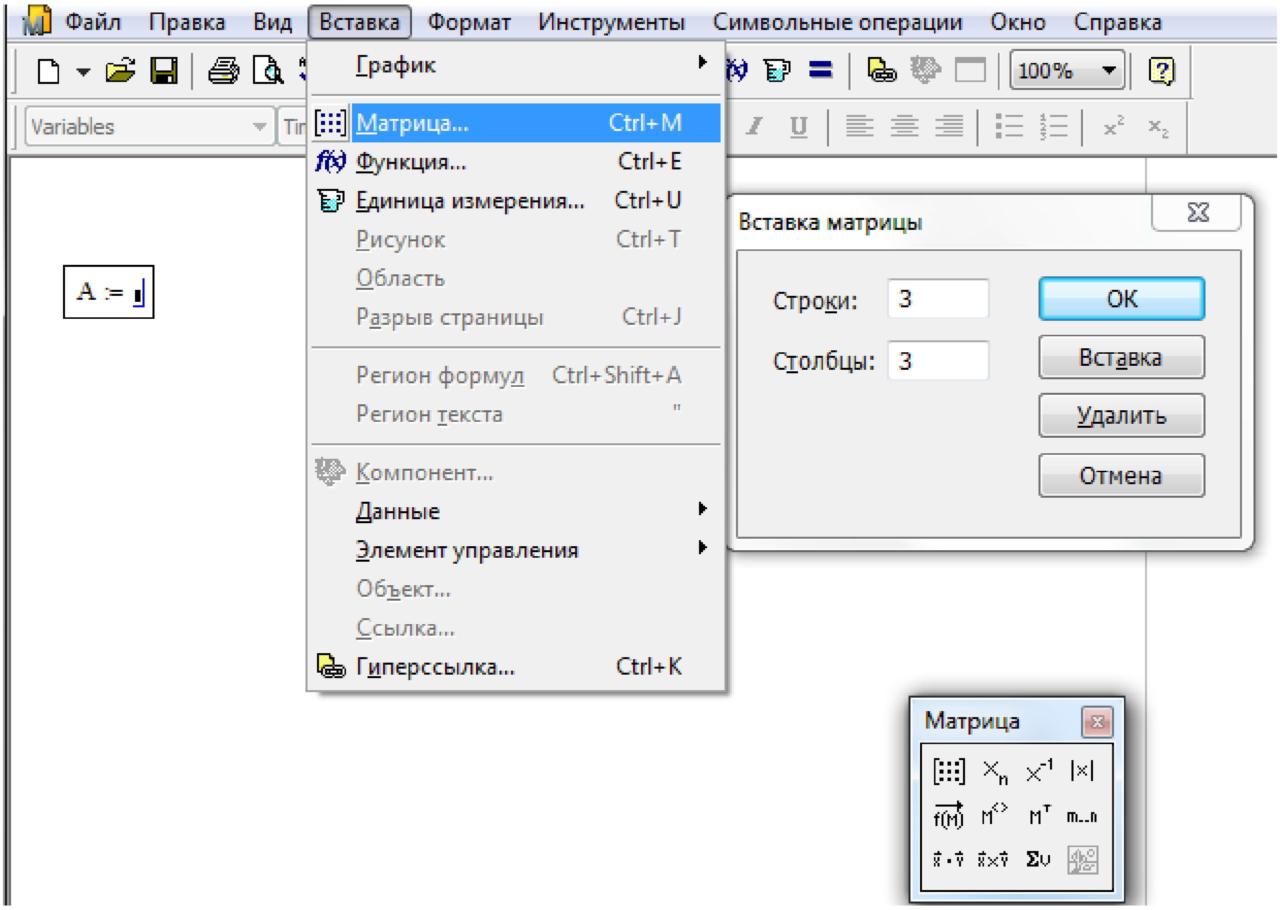


Рис. 3.25 – Завдання матриці за допомогою шаблону

Такий шаблон складається із загальних дужок і місця введення значень (числових або символьних) елементів матриці. Одне з місць введення значень активізується курсором миші. Далі вводяться всі елементи матриці шляхом переміщення за шаблоном за допомогою миші або клавіш переміщення курсору.

Якщо введення закінчено, але не заповнені всі елементи шаблону, системою буде виведено повідомлення про помилку. Це повідомлення дається червоним кольором в рамці з лінією, і вказує на незаповнений шаблон або на кілька незаповнених шаблонів (рис. 3.27).

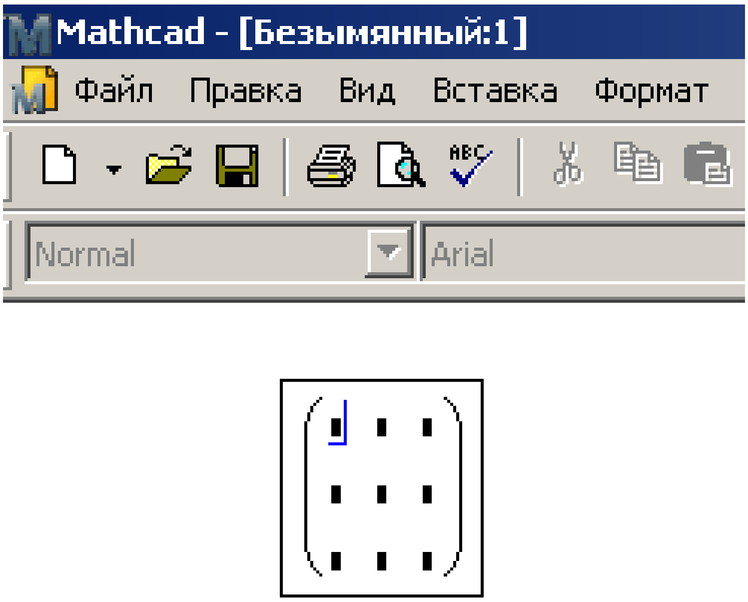


Рис. 3.26 – Шаблон для введення матриці

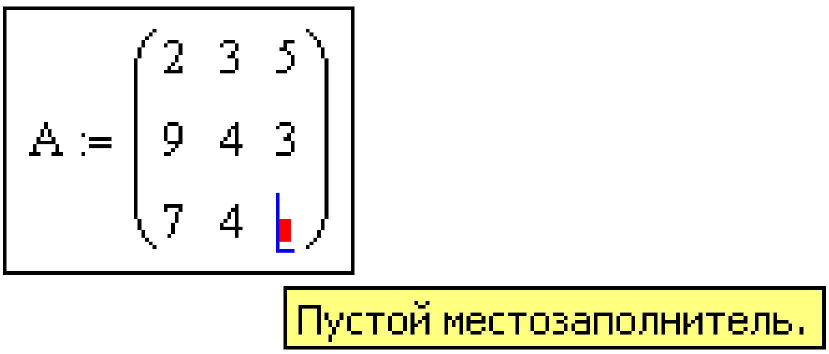


Рис. 3.27 – Приклад помилки при введені елементів матриці

Зауваження 1. Слід зазначити різницю між застосуванням символів «=» і «:=» у MathCad.

Символ «:=» застосовується у тому випадку, якщо справа від цього знаку знаходиться деякий математичний вираз, значення якого надається змінній, що знаходиться зліва від знаку «:=».

Символ «=» використовуються для перегляду значення певної змінної.

Зауваження 2. Для знищення будь-якого об'єкту, створеного у MathCAD, необхідно обвести його курсором. Об'єкт буде помічено «пунктирною» рамкою (рис. 3.28). Далі можна виконати будь-яку стандартну дію для знищення символів (натиснути клавішу *Del*, *BackSpase* тощо).

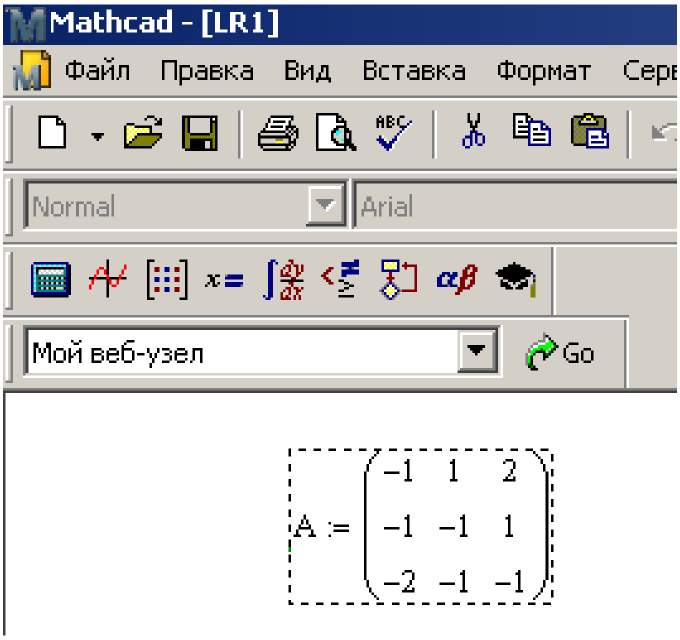


Рис. 3.28 – Знищення об'єктів у MathCAD

Зауваження 3. При виконанні обчислень слід враховувати, що змінні, які Ви використовуєте у формулах, мають бути задані раніше (а на робочому листі MathCAD розташовані лівіше і вище), ніж вони згадуються.

<u>2 спосіб</u> (за допомогою вбудованої функції matrix). Функція matrix має такий синтаксис: *matrix (m,n,f)*. Параметр *m* задає кількість рядків створюваної матриці, параметр *n* - кількість стовпців, параметр *f* – функція, за якою обчислюються елементи створюваної матриці.

Приклад використання описаного способу подано на рис. 3.29.

$$ORIGIN := 1$$

$$f(i,j) := i + j \qquad n := 4$$

$$i := 1..n \quad j := 1..n$$

$$A := matrix(n, n+1, f) \qquad B_{i,j} := i + j$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.29 – Визначення елементів матриць за допомогою функцій

Функції для роботи з матрицями. У MathCAD з матрицями можна виконувати операції додавання, віднімання, множення на константу тощо.

Однак для того, щоб скористатися операторами, необхідно спочатку матриці дати відповідне позначення (рис. 3.30).

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.30 – Позначення матриць

Для роботи з векторами і матрицями система MathCAD містить ряд функцій:

1) identity(n) - створює одиничну квадратну матрицю розміром *n*x*n*;

2) augment(M1, M2) - об'єднує в одну матриці *M1* і *M2*, з однаковою кількістю рядків (об'єднання йде сторона до сторони);

3) stack(M1, M2) - об'єднує дві матриці *M1* і *M2*, що мають однакову кількість стовпців, розміщуючи *M1* над *M2*;

4) submatrix(A, ir, jr, ic, jc) - повертає матрицю, що складається зі всіх елементів, що знаходяться у матриці *A* в рядках з *ir* по *jr* і стовпцях з *ic* по *jc* ($ir < jr, ic > jc$);

4) cols(M) - повертає кількість стовпців матриці *M*;

5) rows(M) - повертає кількість рядків матриці *M*;

6) rank(M) - повертає ранг матриці *M*;

7) diag(M) - створює вектор, елементами якого є головна діагональ матриці *M*;

8) tr(M) - повертає слід (суму елементів головної діагоналі) квадратної матриці *M*;

9) mean(M) - повертає середнє значення елементів масиву *M*;

10) median(M) - повертає медіану елементів масиву *M*.

Деякі обчислення значень матриць можна виконувати за допомогою піктограм на панелі «Матрица» (рис. 3.31, 3.32).

Рис. 3.31– Панель «Матрица»

Зокрема, на панелі знаходяться піктограми, за допомогою яких можна обчислити визначник матриці, обернену матрицю, транспоновану матрицю тощо (рис. 3.32).

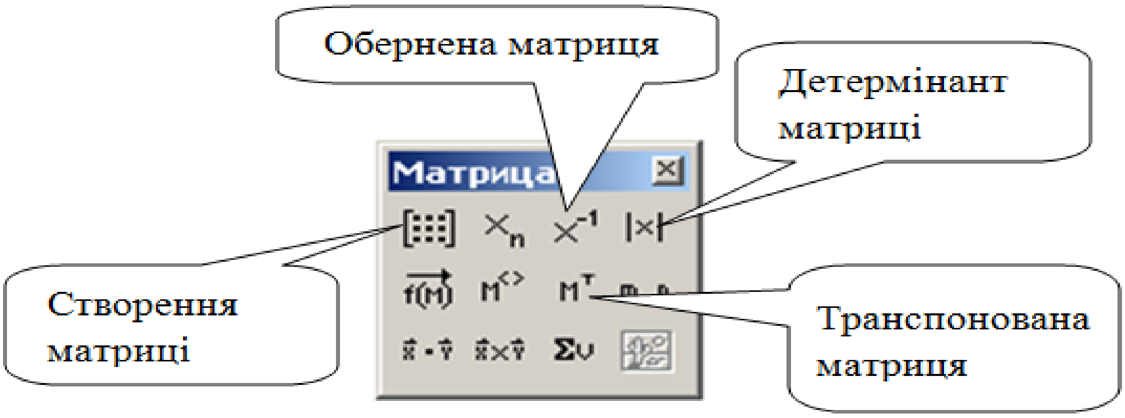


Рис. 3.32 – Дії з матрицями за допомогою піктограми «Матрица»

Приклади роботи з матрицею приведено на рисунку 3.33.

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{diag(B)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{tr(B)} = -1 \qquad \mathbf{mean(B)} = -0.111$$

$$\mathbf{median(B)} = -1$$

$$|\mathbf{B}| = -3$$

Рис. 3.33 – Визначення деяких характеристик матриці

Зауваження 4. Якщо необхідно знайти рішення деякого виразу у символьному вигляді, то для виведення його виразу на екран замість знаків рівності використовується символ $\rightarrow$ панелі інструментів «Вычисления».

Приклад: скласти характеристичне рівняння системи:

$$\begin{cases} x' = -x + 2y + z \\ y' = -4x - y + 2z \\ z' = -x - 2y - 8z \end{cases}.$$

Розв’язання даного завдання у MathCAD проілюстровано на рис. 3.34.

$$A := \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ -4 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & -8-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A| \to -\lambda^3 - 10\lambda^2 - 30\lambda - 73$$

Рис. 3.34 – Виведення розв’язку у символьному вигляді

Власні вектори і власні значення матриць. Однією з найпоширеніших задач обчислювальної лінійної алгебри є задача пошуку власних векторів і власних значень матриці ***A***, що знаходяться з розв’язку рівняння $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ відносно компонент невідомого вектора $\vec{x}$ і скалярної величини λ. Якщо знайдено деякий розв’язок зазначеного рівняння, то вектор $\vec{x}$ називається власним вектором матриці ***A***, а λ - відповідним йому власним значенням.

Для розв’язання задач на знаходження власних векторів і власних значень матриць в MathCAD вбудовано кілька функцій, що реалізують досить складні обчислювальні алгоритми:

1) eigenvals(A) - повертає вектор, що містить власні значення матриці ***A***;

2) eigenvec(A, L_i) - визначає власний вектор одиничної довжини, що відповідає власному значенню $\boldsymbol{L_i}$ квадратної матриці ***A***;

3) *eigenvecs(A)* - повертає матрицю з нормалізованих власних векторів, які відповідають власним значенням квадратної матриці ***A***; ***i***-тий стовпчик поверненої матриці є власним вектором, що відповідає ***n***-му власному значенню, розрахованому функцією eigenvals (результатом є матриця всіх власних векторів одразу).

Приклад використання описаних функції подано на рис. 3.35.

Слід зазначити, що при використанні функції *eigenvec* другим параметром є елемент вектора власних значень. Елементи векторів мають індекси. Для того, щоб звернутись до елементу вектора, необхідно вибрати форму для його введення з панелі «Матриця» (рис. 3.36).

ORIGIN := 1

Завдання матриці

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Власні значення матриці C

$$\mathrm{eigenvals}(C) = \begin{pmatrix} -2.71 \\ 0.271 \\ 5.439 \end{pmatrix}$$

Власні вектори, що відповідають знайденим власним значенням матриці C

$$\mathrm{eigenvecs}(C) = \begin{pmatrix} 0.415 & -0.76 & -0.625 \\ 0.432 & 0.611 & -0.321 \\ -0.801 & -0.222 & -0.711 \end{pmatrix}$$

Власний вектор, що відповідає власному значенню λ_2 матриці C

$$\mathrm{eigenvec}(C, L_2) = \begin{pmatrix} -0.76 \\ 0.611 \\ -0.222 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.35 – Приклад розрахунку власних значень та векторів матриці

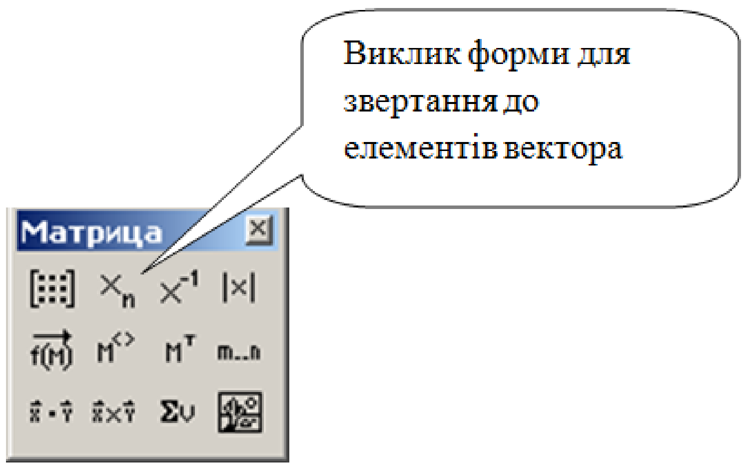


Рис. 3.36 – Виклик форми для звертання до елементів вектора

Окрім задачі пошуку власних векторів і власних значень іноді розглядають більш загальну задачу - так звану задачу знаходження узагальнених власних значень.

Нехай маємо дві квадратні матриці розміру ***n***. Узагальнені власні значення знаходяться з розв'язку рівняння $A\vec{x} = \lambda B\vec{x}$. Ненульовий вектор $\vec{x}$, що є розв'язком зазначеного рівняння, називається власним вектором узагальненої пари ***AB***, а число λ - власним значенням узагальненої пари ***AB.***

Для розв'язання описаної задачі в пакеті реалізовано дві вбудовані функції, дія яких аналогічна розглянутим вище для випадку однієї матриці:

1) *genvals (A, B)* - повертає вектор ***v*** власних значень, кожен з яких задовольняє завданню на узагальнені власні значення;

2) *genvecs (A, B)* - повертає матрицю нормалізованих власних векторів, що відповідають власним значенням, повернутим функцією *genvals*. ***A***, ***B*** - квадратні матриці однакового порядку.

3.4 Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) в матричній формі має вигляд ***AX=B***, де ***A***, ***X*** і ***B*** – матриці. Відомо, що така система сумісна (теорема Кронекера-Капеллі), якщо ранг розширеної матриці дорівнює рангу матриці системи, тобто ***rank(A)=rank(A|B)***. Сумісна система має єдиний розв'язок, якщо ***rank(A)=rank(A|B)=n***, де ***n*** - розмірність матриці ***A***.

У пакеті MathCAD для розв'язання СЛАР існує три способи: як матричне рівняння, із застосуванням функції *lsolve(A,B)* та шляхом використання обчислювального блоку *Given-Find*.

<u>1 спосіб</u> розв'язування систем алгебраїчних рівнянь (як матричне рівняння).

Якщо матричне рівняння ***AX=B*** помножити зліва на A^{-1}, отримаємо $A^{-1}AX= A^{-1}B$ або $X= A^{-1}B$.

Приклад розв'язання системи алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} x - y - 3z = 3 \\ 3x + 4y - 5z = -8 \\ 2y + 7z = 17 \end{cases}$ наведено на рис. 3.37.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} 9.634 \\ -4.561 \\ 3.732 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.37 – Розв'язання системи рівнянь матричним способом

<u>2 спосіб</u> розв'язування систем алгебраїчних рівнянь (за допомогою функції *lsolve*).

Формат функції: ***lsolve(A, B)***. Функція має два параметри: ***A*** - квадратна, несингулярна матриця, що складається з коефіцієнтів при змінних у рівняннях; ***B*** - вектор, що має стільки ж рядів, скільки рядів у матриці ***A*** і складається з вільних членів рівнянь. Як результат використання даної функції повертається вектор розв'язку ***X*** такий, що ***AX=B***.

На рис. 3.38 подано зразок розв'язання системи рівнянь, наведеної у попередньому прикладі.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$X := lsolve(A, B) \qquad X1 = \begin{pmatrix} 9.634 \\ -4.561 \\ 3.732 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.38 – Розв'язання системи рівнянь за допомогою функції *lsolve*

Як бачимо з рис. 3.37 та рис. 3.38, вектори ***X*** і ***X1*** співпадають, що говорить про рівнозначність застосування описаних способів розв'язування систем алгебраїчних рівнянь.

3 спосіб розв'язування систем алгебраїчних рівнянь (за допомогою обчислювального блоку *Given-Find*).

Алгоритм застосування обчислювального блоку:

1) задати початкові значення для шуканих величин;
2) записати ключове слово *Given*;
3) задати вихідну систему рівнянь (знак «=» у системі рівнянь вводиться за допомогою комбінації клавіш *[Ctrl]+[=]*;
4) задати функцію *Find* (перелік шуканих змінних, відокремлених комою).

Приклад застосування обчислювального блоку *Given-Find* для розв'язання заданої раніше системи лінійних алгебраїчних рівнянь подано на рис. 3.39.

$$x := 0 \qquad y := 0 \qquad z := 0$$

$$Given$$

$$x - y - 3z = 3$$

$$3x + 4y - 5z = -8$$

$$2y + 7z = 17$$

$$Find(x, y, z) = \begin{pmatrix} 9.634 \\ -4.561 \\ 3.732 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.39 –Використання обчислювального блоку *Given-Find* для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Аналогічно до функції *Find* застосовується і працює функція *Minerr*, але, на відміну від *Find*, вона дозволяє шукати не точне, а наближене значення з мінімальною середньоквадратичною похибкою.

Якщо в результаті пошуку коренів системи рівнянь функцією *Minerr* не може бути одержане подальше уточнення поточного наближення до розв'язку, функція *Minerr* повертає це наближення. Функція *Find* в цьому випадку повертає повідомлення про помилку.

Якщо для розв'язку системи рівнянь застосовуються обчислювальні блоки *Given-Find* або *Given-Minerr*, то після отримання результатів необхідно здійснювати перевірку їх достовірності.

Приклад практичної реалізації обчислювального блоку *Given-Minerr* та один із способів перевірки подано на рис. 3.40.

Рис. 3.40 –

$$x := 0 \qquad y := 0 \qquad z := 0$$

Given

$$x - y - 3z = 3$$

$$3x + 4y - 5z = -8$$

$$2y + 7z = 17$$

$$Minner(x, y, z) = \begin{pmatrix} 9.634 \\ -4.561 \\ 3.732 \end{pmatrix}$$

Перевірка

$$x := 9.634 \qquad y := -4.561 \qquad z := 3.732$$

$$x - y - 3z = 2.9999$$

$$3x + 4y - 5z = -8.002$$

$$2y + 7z = 17.002$$

Рис. 3.40 – Використання обчислювального блоку *Given-Minerr* для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь

INTRODUCTION

One of the main methods of analyzing the economic systems and processes is the mathematical modeling. Today in economic theory there are a large number of different conventional models: a model of commodity market, money market model, the model of the labor market, the model of the interaction of these markets, the models of one food manufacturer and multifood manufacturer, the model of consumer behavior , etc., which, in essence, are the equilibrium models. But most economic processes occurring at the time, so there is a need for such approaches to modeling that would allow to consider and to analyze the possible dynamics of the system's developing

The mathematical tool for describing the dynamics of economic systems is the differential and difference equations and their systems. However, their analytical solution can't always be found, especially in nonlinear cases. It's actualized the need for a qualitative methods and numerical computer experiments for studying the behavior of the dynamic economic systems.

In this training manual there are the theoretical foundations of the qualitative study of the stability of dynamical systems described by one nonlinear differential equation or a system of linear differential equations. There is the background information about the usage of MathCAD for conduction the numerical experiments. Variants of the practical tasks for learning and consolidation of theoretical material are proposed.

PART 1. THEORETICAL BASIS OF INVESTIGATION OFTHE STABILITY OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS

1.1 Main definitions

In a general sense the ***dynamic system*** (DS) is a system of any nature (physical, chemical, biological, social, economic, etc.), the condition of which varies in time (discrete or continuous) [3, p. 6].

The model of economic dynamics is a descriptive deterministic dynamic economic-mathematical model of the economic process in terms of tools of the differential and (or) difference equations, which is used to study the deterministic time behavior of economic systems under the influence of internal and external factors to analyze the balance and stability control.

Economic-mathematical model is a mathematical reflection of the economic process or economic system used in the study instead of the original object – for the analysis, investigation the quantitative and logical connections between its various parts.

Descriptive model is a model that is designed to describe and explain the observed facts, or to predict the behavior of objects, unlike standard models, designed for finding desired, for example, the optimum state of the object.

Deterministic model is an analytical representation of patterns, operations, etc., which for a given set of input values at the output of the system can be obtained only one (deterministic) result.

1.2 The properties of dynamic systems

The main properties of dynamic systems can be divided into two groups: the features that characterize them as a system (system-properties) and properties of the DS, describing them in terms of dynamism.

System-properties of complex dynamic systems

1. *The integrity* (emergence). Some parts of the system are functioning together, putting together the functioning process of the system as a whole. A cumulative operation of heterogeneous interrelated element creates qualitatively new functional properties of the whole, which have no analogues in the properties of its elements. This means the impossibility of the properties reduction of the system to the sum of the properties of its elements.

2. *The structure.* In the investigation of the structure of the system it's presented as a way of describing its organization. Depending on the task the decomposition of the system is made and relations between its elements are established, which are essential for the study of the problem. However, decomposition of the system into elements and relations defined by intrinsic properties of the system (one student can't divide in half). The structure dynamic in nature, its evolution in time and space reflects the development of the system (each of the proposed distribution changes over time).

3. *The infinity of studying the system.* This property shows the inability of the full studying of the system and its comprehensive presentation as the final set of descriptions (the ultimate number of qualitative and quantitative characteristics). Therefore, the system can be described by the infinite number of structural and functional options that reflect different aspects of the system.

4. *The hierarchy of the system.* Each element in the decomposition of the system can be considered as a complete system, the elements of which, in turn, can also be presented as a system. On the other hand, any system is just the component of a larger system.

5. *An element.* As the element the smallest link in the structure of system is understood. The internal structure of the link is not considered on the selected level of analysis. According to the property 4, any element becomes a system, but at the selected level of analysis this system is characterized only by integral characteristics.

The properties of dynamic systems that characterize them in terms of dynamism

1. *The interaction with the environment.* The system responds to the effects of environmental, evolving during this action, but also saves qualitative determination and characteristics that distinguish it from other systems.

2. *The system status.* The system status is determined by the state of its elements. Theoretically, the number of possible states of the system equals the number of combinations of possible states of the elements. However, the interaction of elements results to limiting the number of possible combinations. Changing the status of the element can be invisible, uninterrupted and discontinuous.

3. *The behavior of the system.* The behavior of the system is the natural transition from one state to another, which is explained by the properties and structure.

4. *The continuity of operation.* The system exists until there are socio-economic and other processes in society that cannot be interrupted or the system will cease to function. All processes in the ES, as in vivo, are interrelated. Functioning of the parts determine the functioning of the system, and vice versa. The functioning of the system is related to continuous changes, the accumulation of which leads to development.

5. *Development of the system.* The vital activity of complex system is the constant change of the development phases, which is reflected in the continuous functional and structural changes to the system, its subsystems and elements.

6. The evolution of economic systems is determined by one of the most important properties of complex systems – *the ability to self-development*. The central source of self-development is a continuous process of solving conflicts. Development is usually associated with the complexity of the system, i.e. an increase of its internal diversity.

7. *Dynamism.* The economic system operates and develops over time, it has a background and a future, and it is characterized by a certain life cycle, which can be

identified by certain phases: the emergence, growth, development, stabilization, degradation, liquidation or incentive to change.

8. *Complexity.* A large number of heterogeneous elements and connections, multifunctional, multiplicity and properties of complex systems characterizes the economic system.

9. *Gomeostatic* reflects a property of the system to self-preservation, combating of damage effects of the environment.

10. *Purposefulness.* All dynamic economic systems are purposeful, i.e. the presence of a particular purpose and desire to achieve it. Development of the system is linked to the change goals.

11. *Controllability.* Conscious organization focused operation of the system and its elements is called controllability. In the life of the system, using a focused management, it solves recurring controversies and it reacts to changing internal and external conditions of existence. According to changing conditions, it changes its structure, adjusts objectives of the development and content of elements that is purposeful self-organizing system that implements practical capacity for self-development. One of the main functions of self-organizing is the preservation of the system qualitative certainty in the process of its evolution.

The controllability properties are shown in such features as relative autonomy and functional control.

The relative autonomy of functioning economic systems means that as a result of feedback each of the components of the output signal can be changed by changing the input signal, besides other components remain unchanged.

Functional control of the economic system means that any output signal can be achieved by the appropriate choice of input signals.

12. *Adaptability.* Adaptability of economic system is determined by two types of adaptation – passive and active. *Passive adaptation* is an internal characteristic of economic system that has certain features of self-regulation. *Active adaptation* is a mechanism of adaptive control and organization of the system effective implementation.

13. *The inertia.* The inertia of the economic system is manifested in delay in a system that symptomatically responds to disturbing and control actions. Such delay is counted by means of lags included in the description of the model. There are *internal lags*, or lags of making decisions in stabilizing actions and *external lags*, reflecting the delayed in time response of the system to appropriate action.

14. *Stability*. The system is stable if its behavior does not change for sufficiently small changes in the conditions of its operation. The stability of ES provided by such issues of self-organizing as differentiation and sensitivity. *Differentiation* – is an aspiration of the system for the structural and functional diversity of elements which provides not only the conditions of emergence and resolution of conflicts, but also the system's ability to quickly adaptation to the existing conditions. More diversity - more stability and vice versa. *Sensitivity* means the mobility of the features of elements while system maintains the stability of its structure.

15. *The equilibrium*. The stability of the system is related to its desire to equilibrium, which implies a functioning the elements of the system at which the increased efficiency of movement to the development goals takes place. In reality, the system can’t fully achieve equilibrium, although it tends to it. Elements of the systems operate differently in different circumstances, their dynamic interaction always affects the motion of the system. The system seeks to equilibrium, the effort of the management directed on it, but reaching it, the system immediately goes away. Thus, stable economic system is constantly in a state of dynamic equilibrium, it continuously varies on the equilibrium that is not only its specific property, but also the condition of the continuous emergence of contradictions as the driving force of evolution.

1.3The definition of equilibrium, stability and fixed points

The equilibrium of the system is the condition which lasts indefinitely in the absence of external influences. For example, the equilibrium on the market of a product, the balance of political forces in society, etc. (the movement of the system is given by the zero vector, so there is no movement).

Under the external factor's influence the balance may be disturbed and the system will move to another state. In this case, another characteristic of dynamic systems is considered. It's called behavior. Depending on the structure of the system, its features, etc., the behavior of the system can significantly changes in time. Fundamentally, there are two different versions of events after the system had an effect from some external disturbance: a return to the initial state and the subsequent removal from the initial state. The ***stability*** is the ability of the system to return to the equilibrium state if it has been taken out of it. In this case, the equilibrium is called stable (stability). The second option corresponds to the unstable behavior of the system. Accordingly ***stable*** and ***unstable*** systems are distinguished.

Dynamical systems in which time is measured continuously, set by the differential equation (or a system).

A fixed point is the point at which the right parts of the differential equations return the zero value. Fixed points can be one, a few and not be at all. In terms of the qualitative theory of differential equations we are interested in the behavior of fixed points (stable, unstable, etc.).

1.4 An investigation of the stability of equilibrium in systems described by one differential equation

Suppose we have a dynamic system described by one differential equation. Note that in most cases we can't obtain analytical solution of the differential equation, and even if we can, then the answer contains an implicit function which properties are difficult to analyze.

Let's in details consider the qualitative research method of the differential equation of the form $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

Suppose that the equation $f(x)=0$ has no real roots. So the curve does not intersect the axis x. So $\frac{dx}{dt}$ all the time saves it's sign and all the solutions $x(t)$ will be the monotone functions, increasing or decreasing depending on the sign of $f(x)$.

Now let the equation $f(x)=0$ has real roots $x_1, x_2, \ldots, x_k$. They are called stationary solutions, fixed points or balance points.

Let x_i is a stationary point of the equation $f(x)=0$ and (x_{i-1}, x_i) and (x_i, x_{i+1}) – two intervals that are adjacent to it (Figure 1).

At each of these intervals the behavior of the system can be represented by the trajectory of a certain type.

If both points that describe the movement at intervals (x_{i-1}, x_i) and (x_i, x_{i+1}) with increasing of the time t approaching the stationary point x_i, stationary point is called ***stable*** (Figure 1.1).

If both points that describe the movement at intervals (x_{i-1}, x_i) and (x_i, x_{i+1}) with increasing of the time t go away from the stationary point x_i, stationary point is called ***unstable*** (Figure 1.1).

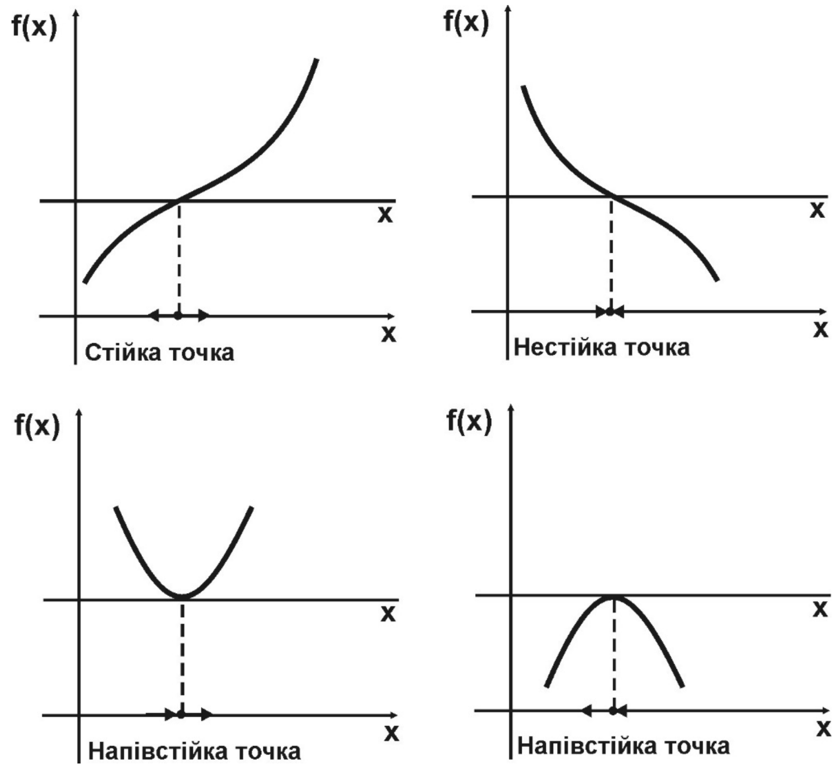


Figure 1 – The illustration of stable, unstable and semistable stationary points

If at one of the intervals (x_{i-1}, x_i) and (x_i, x_{i+1}) the values of x are close to the point x_i and at the other go away from x_i, the fixed point is called ***semistable*** (Figure 1.1).

Thus, in the case of describing the dynamical system by one differential equation, the question about the stability of the equilibrium points can be solved by analyzing the graph of the function $f(x)$. There are three cases:

1. Near the equilibrium condition function $f(x)$ changes the sign from "+" to "-" in growth of x. The equilibrium condition is stable (Figure 1.2).

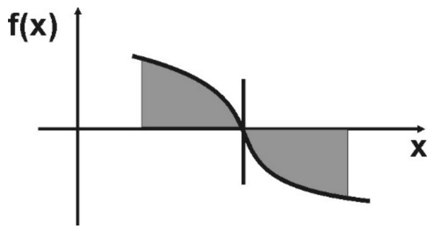


Figure 1.2 – The stable equilibrium point (graphical analyzing)

2. Near the equilibrium condition function $f(x)$ changes the sign from "-" to "+" in growth of x. The equilibrium condition is unstable (Figure 1.3).

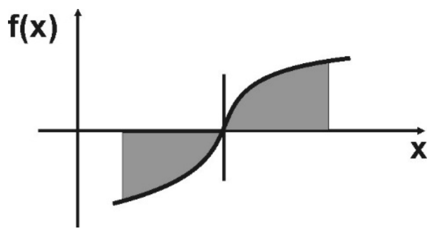


Figure 1.3 – The unstable equilibrium point (graphical analyzing)

3. Near the equilibrium condition function $f(x)$ doesn't change the sign. The equilibrium condition is semistable (Figure 1.4).

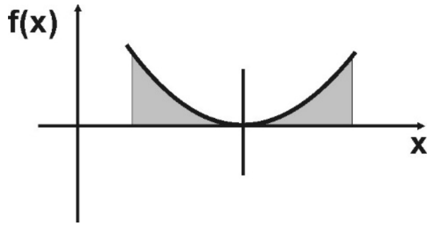


Figure 1.4 – The semistable equilibrium point (graphical analyzing)

Example: to determine the stability of equilibrium points for functions whose graph is shown in Figure 1.5.

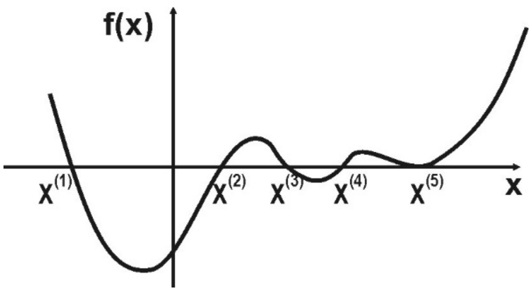


Figure 1.5 – The example of the graph for the stability of equilibrium points determination

The solution is stable for points $x^{(1)}$and $x^{(3)}$, unstable for points $x^{(2)}$, $x^{(4)}$ and semistable for point $x^{(5)}$.

1.5 An investigation of the stability of equilibrium in systems described by two differential equations

Suppose that now we have a dynamic system described by a system of the normal autonomous linear homogeneous differential equations with constant coefficients:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) = cx_1 + dx_2 \end{cases}.$$

This system will have a unique solution if the corresponding determinant is not zero:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 .$$

The equilibrium points of the system would be found, if we solve the system:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = 0 \\ cx_1 + dx_2 = 0 \end{cases} .$$

The stability of the equilibrium is determined by the eigenvalues of the system's matrix. Eigenvalues can be determined by the characteristic equation $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$, where $\sigma = a + d = tr(A)$ – is the matrix trace; $\Delta = ad - bc = \det(A)$ – is the determinant.

The roots of the characteristic equation can be real, complex, repeating or different, zero, etc. The nature of the stability of fixed points is given in Table 1.1.

Table 1.1

The stability of the fixed points depending from the roots of the characteristic equation

The type of roots of the characteristic equation	The stability of the fixed point
λ_1, λ_2 - real, negative, different	stable
λ_1, λ_2 - real, positive, different	unstable
λ_1, λ_2 - real, different, with different signs	unstable
λ_1, λ_2 - complex with negative real part $\lambda_1 = p + iq, \lambda_2 = p - iq$, $p < 0$	stable
λ_1, λ_2 - complex with positive real part $\lambda_1 = p + iq, \lambda_2 = p - iq$, $p > 0$	unstable
λ_1, λ_2 - purely imaginary $\lambda_1 = iq, \lambda_2 = -iq$	stable, but not asymptotically
λ_1, λ_2 - zero	stable, but not asymptotically or unstable
λ_1, λ_2 - real, repeating, negative	stable
λ_1, λ_2 - real, repeating, positive	unstable

These cases apply to systems of higher orders. Summarizing, we can give the following statement regarding the stability of the trivial solution of the system (its fixed points):

1. If all the characteristic numbers of the system have negative real parts (i.e. they are real, negative numbers or complex numbers, with the real negative parts), then the trivial solution of the system is asymptotically stable.

2. If at least one of a characteristic number of the system has positive real part (i.e. this number positive or complex with positive real part), then the trivial solution of the system is unstable.

3. If the characteristic numbers of the system are not numbers with positive real part, but they are simple (i.e. not multiple) with zero real part, then the trivial solution of the system is stable, but not asymptotically.

4. If the characteristic numbers of the system are not numbers with positive real part, but they are multiple with zero real part, then the trivial solutions can be stable and unstable.

The feature of the stability – is the negativity of real parts of roots of the characteristic equation (Liapunov theorem).

1.6 The criteria of stability

The stability or instability of the fixed points can be set even without solving the corresponding characteristic equation. For doing this, there are a number of criteria.

Suppose we have the n-th order characteristic equation:

$$a_0\lambda^{(n)} + a_1\lambda^{(n-1)} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 .$$

It should be noted that in case of any dimension the coefficient $a_0 = 1$ every time.

From the linear algebra, a necessary but not sufficient condition that all the real parts of the roots of this characteristic equation are negative, are the inequalities $a_j > 0,\ j = \overline{1:n}$.

This means that if at least one of the coefficients of the characteristic equation is negative, then there is at least one root, which will have negative real part. Thus, the fixed point is unstable.

The condition that formulated above is a sufficient for the equations of first and second orders.

For the application of other criteria let's compose the Hurwitz matrix using the coefficients of the characteristic equation (Figure 1.6) by the rules:

1) in the main diagonal write the coefficients of the characteristic equation from the second $a_1, a_2, \dots, a_n$;

2) above the main diagonal write the coefficients with larger indexes;

3) under the main diagonal write the coefficients with smaller indexes;

4) with a shortage of coefficients in the matrix elements write zeros.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

Figure 1.6 – The Hurwitz matrix

Let's enter the following notation:

$\Delta_1 = a_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$ etc. – the main diagonal minors of Hurwitz matrix, or “Hurwitz determinants”.

Rause-Hurwitz criterion (necessary and sufficient condition of the stability). The real parts of all the roots of the characteristic equation will be real negative or will have negative real parts, so ***<u>the system will be stable</u>***, if with all positive coefficients $(a_k > 0, k = \overline{1:n})$ the main Hurwitz determinant and its all main diagonal minors will be positive.

If we remember that $\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}$ and according to the requirements of the theorem, $\Delta_{n-1} > 0$, then to fulfill the last condition is necessary to $a_n > 0$.

The system will be on the edge of stability if $\Delta_n = 0$ and all previous minors of Hurwitz matrix are positive. The condition $\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} = 0$ divided into two:

1) $a_n = 0$;

2) $\Delta_{n-1} = 0$.

In the first case the system is on the edge of aperiodic stability (neutral stability). If in this case to solve the characteristic equation, we’ll get one zero root and the negative second root.

In the second case, the system is on the oscillatory edge of stability. After solving the corresponding characteristic equation we’ll get two complex conjugate roots.

Lenara-Shypara criterion (necessary and sufficient condition of the stability). The real parts of all the roots of the characteristic equation will be real negative or will have negative real parts, so ***<u>the system will be stable</u>***, if with all positive coefficients $(a_k > 0, k = \overline{1:n})$ the minors Δ_{n-1}, Δ_{n-3}, Δ_{n-5}, ... will be positive.

Example. Investigate the stability of the equilibrium point of the system:

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Let's find the coordinates of the fixed point, equating the right sides of equations to zero:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

We'll get the point with coordinates (0, 0).

Let's write the matrix of coefficients $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculate its trace and determinant: $\sigma = -1$, $\Delta = -1$.

We'll receive the characteristic equation:

$$\lambda^2 + 1 * \lambda - 1 = 0$$

As you can see, the characteristic equation have a negative coefficient, which means that the necessary conditions are not fulfilled in terms of stability. Conclusion: the point of equilibrium is unstable.

1.7 Control questions

1. Give the definition of the term "dynamic system".
2. Discover the essence of the term "the model of economic dynamics".
3. Describe the system-properties of complex dynamic systems.
4. Define the concept of equilibrium, stability, stationarity of the dynamic system.
5. Illustrate graphically the stability, asymptotic stability and instability (by Liapunov) of fixed points of the dynamic system.
6. Formulate the rules for drafting the main determinant of Hurwitz matrix.
7. Compare the Rause-Hurwitz and Lenara-Shypara criterions.
8. Illustrate graphically the stability, instability and semistability of fixed points of a dynamic system described by one differential equation.
9. Set the correspondence between concepts and their interpretation:

1	Equilibrium	A	is the condition which lasts indefinitely in the absence of external influences
2	Stability	B	is the ability of the system to return to the equilibrium state if it has been taken out of it
3	Stationarity	C	means that the nature of functioning of the system does not change over time

10. In the case of describing the dynamic system by one differential equation the function changes the sign from “+” to “-” near the equilibrium. So the equilibrium is:

a) stable;
b) unstable;
c) semistable.Tasks

1.8 Tasks

1.8.1 An investigation the stability of the equilibrium point by using Rause-Hurwitz and Lenara-Shypara criterions

Based on the data specified for your variant (Table 1.2):

1) find the coordinates of the equilibrium point in MathCad using:

a) the inverse matrix method;
b) the lsolve function;
c) the computing unit Given/Find.

2) investigate the stability of the system using two criteria: Rause-Hurwitz criterion and Lenara-Shypara. Compare the results. In applying these criteria use the function for submatrices selection (**submatrix(A,ir,jr,ic,jc)** – returns the subarray which consists of all elements contained in the rows from *ir* to *jr* and columns from *ic* to *jc* oh the array A).

Table 1.2

№ var	Task	№ var	Task
1	$\begin{cases} x' = -x + y + 2z \\ y' = -x - y + z \\ z' = -2x - y - z \end{cases}$	4	$\begin{cases} x' = -x + 2y + 3z \\ y' = -2x - y + 2z \\ z' = -3x - 2y - z \end{cases}$
2	$\begin{cases} x' = -x + 2y + z \\ y' = -2x - y + 2z \\ z' = -x - 2y - z \end{cases}$	5	$\begin{cases} x' = -x + 3y + 2z \\ y' = -3x - y + 3z \\ z' = -2x - 3y - z \end{cases}$
3	$\begin{cases} x' = -x - y + 2z \\ y' = x - y - z \\ z' = -2x + y - z \end{cases}$	6	$\begin{cases} x' = -x + 3y + z \\ y' = -3x - y + 3z \\ z' = -x - 3y - z \end{cases}$

Continuous of Table 1.2

№ var	Task	№ var	Task
7	$\begin{cases} x' = -x + y - 2z \\ y' = -x - y + z \\ z' = 2x - y - z \end{cases}$	14	$\begin{cases} x' = -x + y + 3z \\ y' = -x - y + z \\ z' = -3x - y - z \end{cases}$
8	$\begin{cases} x' = -x - 2y + 3z \\ y' = 2x - y - 2z \\ z' = -3x + 2y - z \end{cases}$	15	$\begin{cases} x' = -x - 2y - 3z \\ y' = 2x - y - 2z \\ z' = -3x + 2y - z \end{cases}$
9	$\begin{cases} x' = -x + y - 3z \\ y' = -x - y + z \\ z' = 3x - y - z \end{cases}$	16	$\begin{cases} x' = -x - 3y - 2z \\ y' = 3x - y - 3z \\ z' = 2x + 3y - z \end{cases}$
10	$\begin{cases} x' = -x - y + 3z \\ y' = x - y - z \\ z' = -3x + y - z \end{cases}$	17	$\begin{cases} x' = -x - y - 3z \\ y' = x - y - z \\ z' = 3x + y - z \end{cases}$
11	$\begin{cases} x' = -x + 3y - 2z \\ y' = -3x - y + 3z \\ z' = 2x - 3y - z \end{cases}$	18	$\begin{cases} x' = -x - 3y + 2z \\ y' = 3x - y - 3z \\ z' = -2x + 3y - z \end{cases}$
12	$\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = -x - y + z \\ z' = -x - y - z \end{cases}$	19	$\begin{cases} x' = -x + 2y + 2z \\ y' = -2x - y + 2z \\ z' = -2x - 2y - z \end{cases}$
13	$\begin{cases} x' = -x - 2y + z \\ y' = 2x - y - 2z \\ z' = -x + 2y - z \end{cases}$	20	$\begin{cases} x' = -x + 2y - z \\ y' = -2x - y + 2z \\ z' = x - 2y - z \end{cases}$

1.8.2 Graphical investigation of the stability of equilibrium points of the dynamic system described by one differential equation

Based on the data specified for your variant (Table 1.3) estimate the equilibrium points for the system described by one differential equation and investigate their stability.

Table 1.3

№ var	Task	№ var	Task
1	$x' = x^2 + 2x - x^3 + \sin(x/2)$	4	$x' = x^2 + 12x - x^3 + \sqrt[3]{x}$
2	$x' = x^2 + 2x - x^3 + x/2$	5	$x' = x^2 + 2x - \cos(x^3)$
3	$x' = x^3 + x - x^2 + 1$	6	$x' = x^2 + 2\cos x - x^4$
7	$x' = \sqrt{x} - x^2 + 2x - x^3$	14	$x' = \sin^2 x + 2x - x^3$
8	$x' = tg(x^2) + 2x - x^3$	15	$x' = \lg x^2 + 2x - x^3$
9	$x' = \frac{2}{x^2} + 2x - x^3$	16	$x' = x^4 + 2x^3 - x^2 + ctg(x/2)$
10	$x' = x^2 + 2x - x^3 + \cos(x/2)$	17	$x' = x^2 + 2x^4 - x^3 + e^x$
11	$x' = x^4 + 2x - x^3 + arctg(x/2)$	18	$x' = x^2 + 2\sqrt{x+1} - x^3$
12	$x' = x^2 + 2x\sin(x) - x^3$	19	$x' = -x^2 - 2x + x^3 - \sin(x/2)$
13	$x' = -x^2 + 2x + 4x^3 + \ln(x/2)$	20	$x' = -7x^2 + x - x^3 + \sin(x^2/2)$

PART 2. THEORETICAL BASIS OF INVESTIGATION OFTHE STABILITY OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS

2.1 The essence and methods of linearization of nonlinear dynamic systems

Linearization is one of the most common methods of analysis of nonlinear systems. The main idea of linearization is the usage of a linear system to approximate the behavior of solutions of nonlinear systems in the vicinity of the equilibrium point. Linearization reveals most qualitative and, especially, quantitative properties of nonlinear systems.

Linearization methods are limited, i.e. equivalence of the original nonlinear system and its linear approximation is saved only for the limited spatial and temporal scales of the system or for specific processes, moreover, if the system goes from one mode to another, you should change and its linearized model.

There are several ways of linearization. We'll discuss two of them: the method of replacing variables and using the Jacobian.

The linearization of nonlinear dynamic systems by replacing variables. Linearization of systems of nonlinear equations in the vicinity of equilibrium can be achieved by replacing the variables so that the point of equilibrium turned in origin.

The equations derived from specified action will be linear and called the *linearization* of the primary system.

The points of primary system located in the vicinity of the equilibrium point will respond to points in the vicinity of the origin of the new system.

We are interested in:

a) the value of new variables that are close to zero;

b) the conditions under which nonlinear expressions can be neglected.

Let's consider the nonlinear system:

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}, \tag{2.1}$$

which has the equilibrium point (p,q).

The conversion

$$\begin{cases} u = x - p \\ v = y - q \end{cases}. \tag{2.2}$$

transfers the equilibrium point (p,q) in the origin.

Differentiation of the conversion (2.2) has the form:

$$\begin{cases} u' = x' \\ v' = y' \end{cases} \tag{2.3}$$

After replacing variables by substituting their new values (2.4) in each equation (2.1), select the linear part (2.5):

$$\begin{cases} x = u + p \\ y = v + q \end{cases}, \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} u' = au + bv + F(u,v) \\ v' + cu + dv + G(u,v) \end{cases} \tag{2.5}$$

where $F(u,v)$ and $G(u,v)$ consisting only of nonlinear expressions.

The linear system

$$\begin{cases} u' = au + bv \\ v' = cu + dv \end{cases}. \tag{2.6}$$

is a linearization of the nonlinear system (2.1) if the expressions $F(u,v)$ and $G(u,v)$ are the polynomial, and

$$\frac{F(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} \to 0, \ \frac{G(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} \to 0, \ \sqrt{u^2+v^2} \to 0. \qquad (2.7)$$

The latter condition ensures that nonlinear expressions $F(u,v)$ and $G(u,v)$ are so small compared to u and v approaches the equilibrium point, that they can be neglected.

Example 2.1. Make the system $\begin{cases} x' = f(x,y) = -2x + y \\ y' = g(x,y) = -y + x^2 \end{cases}$ linear by replacing the variables.

Solving. Let's find the equilibrium points of the dynamic system. We need to solve this system $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ -y + x^2 = 0 \end{cases}$. We obtain the equilibrium point with coordinates (0;0) and (2;4).

Linearization is performed separately for each point.

Let's linearize the input system at the point (0;0). For this point the replacement (see formula (2.2)) is not necessary, so the equation of given dynamical system remains unchanged: $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -y + x^2 \end{cases}$.

Nonlinear expression is present only in the second equation, it is a polynomial, so as proved above, it can be neglected.

We'll get the linearized system: $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -y \end{cases}$.

Let's linearize the input system at the point (2;4). According the formula (2.2) we'll use the substitution: $\begin{cases} x = u + 2 \\ y = v + 4 \end{cases}$ for transformation the equilibrium point at the origin. Input dynamic system equation becomes:

$$\begin{cases} u' = -2(u+2) + v + 4 = -2u + v \\ v' = -(v+4) + (u+2)^2 = 4u - v + u^2 \end{cases}.$$

Nonlinear expression is present only in the second equation, it is a polynomial, so it can be neglected. We'll get the linearized system: $\begin{cases} u' = -2u + v \\ v' = 4u - v \end{cases}$.

The linearization using Jacobian. There are other methods of linearization. One of them is the linearization based on Jacobi matrix. The elements of this matrix are the partial derivatives of functions f and g: $a = \frac{df}{dx}$, $b = \frac{df}{dy}$, $c = \frac{dg}{dx}$, $d = \frac{dg}{dy}$. The matrix $J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ is called the Jacobian.

The linearization of nonlinear dynamic system (2.1) is a system:

$$\begin{cases} u' = au + bv \\ v' = cu + dv \end{cases} \tag{2.8}$$

<u>Example 2.2.</u> Make the system $\begin{cases} x' = f(x,y) = -2x + y \\ y' = g(x,y) = -y + x^2 \end{cases}$ linear by using the Jacobian.

<u>Solving</u>. Let's find the Jacobian elements: $\frac{\partial f}{\partial x} = -2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -1$.

Accordingly, we have: $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$. The coordinates of fixed points of the given dynamic system were founded in the previous example: (0;0) and (2;4).

Let's make the linearization of the input system in the point (0;0). We'll substitute the coordinates to the Jacobian expression. We'll get $J_{(0;0)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

According the formula (2.8), the linearization of the input dynamic system in the point (0;0) is the system $\begin{cases} u' = -2u + v \\ v' = -v \end{cases}$. The linearization of a given system, conducted by replacing the variables, gives a similar result (see example 2.1).

Let's make the linearization of the input system in the point (2;4). We'll substitute the coordinates to the Jacobian expression. We'll get $J_{(2;4)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. According the formula (2.8), the linearization of the input dynamic system in the point (2;4) is the system $\begin{cases} u' = -2u + v \\ v' = 4u - v \end{cases}$. The linearization of a given system, conducted by replacing the variables, gives a similar result (see example 2.1).

2.2 The Hartman-Hrobman theorem

The Hartman-Hrobman theorem identifies cases when the findings obtained in the investigation of linearized system can be moved to its linear counterpart.

The Hartman-Hrobman theorem: if the Jacobian hasn't zero or purely imaginary values, the phase portrait of the nonlinear system in the vicinity of its equilibrium point is similar to the phase portrait of its linearization.

The conclusions of the Hartman-Hrobman theorem:

- if the linearized system has zero eigenvalue or purely imaginary eigenvalues, nothing can be said about the nonlinear system;
- if for the trace (σ) and determinant (Δ) of the characteristic equation of linearized system the conditions $\begin{cases} \sigma \le 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ are performed simultaneously, the equilibrium point of the relevant nonlinear system is attractor and stable;
- in all other cases (excluding $\begin{cases} \sigma = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$) the equilibrium point of the relevant nonlinear system is nonlinear saddle and unstable.

Example 2.3. Determine, if it is possible, the types of equilibrium points for nonlinear dynamic system given in example 2.2: $\begin{cases} x' = f(x,y) = -2x + y \\ y' = g(x,y) = -y + x^2 \end{cases}$.

Solving. Finding the equilibrium points of given system and its linearization in each of these are given in examples 2.1 and 2.2.

Let's explore the linearized system corresponding to the point (0;0). As a result of example 2.2 we have to study the system $\begin{cases} u' = -2u + v \\ v' = -v \end{cases}$. We form the matrix of coefficients of the system: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Then we'll find the trace and determinant of the matrix: $\sigma = -3$, $\Delta = (-2)(-1) = 2$. As you can see, the conditions $\begin{cases} \sigma \le 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ are true. So, by Hartman-Hrobman theorem the equilibrium point (0;0) is the attractor and stable.

Let's explore the linearized system corresponding to the point (2;4). As a result of example 2.2 we have to study the system $\begin{cases} u' = -2u + v \\ v' = 4u - v \end{cases}$. We form the matrix of coefficients of the system: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Then we'll find the trace and determinant of the matrix: $\sigma = -3$, $\Delta = (-2)(-1) - 4 = -2$. As you can see, the conditions $\begin{cases} \sigma \le 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ are not true. So, by Hartman-Hrobman theorem the equilibrium point (2;4) is the nonlinear saddle and unstable.

The Hartman-Hrobman theorem has two major limitations:

1) it does not provide information when linearization is not easy (at zero determinant) or when it's the center (with zero trace);

2) theorem provides information about the behavior of solutions near equilibrium point only. To make a global outlook, we need more research more difficult. For this purpose, the concept of conservative systems, circulating systems and Lyapunov function are used.

2.3 Control questions

1. Formulate the main idea of linearization.
2. What are the main methods of linearization?

3. Formulate the Hartman-Hrobman theorem.

4. In which cases the Hartman-Hrobman theorem can not be used?

5. What should be the trace and determinant of linearized system for corresponding nonlinear system was stable?

6. What should be the trace and determinant of linearized system for corresponding nonlinear system was unstable?

7. What is the "Jacobian"? How is it calculated?

8. What can you conclude from the Hartman-Hrobman theorem, if $\begin{cases}\sigma \le 0\\ \Delta > 0\end{cases}$?

9. What can you conclude from the Hartman-Hrobman theorem, if $\begin{cases}\sigma \ge 0\\ \Delta > 0\end{cases}$?

10. What can you conclude from the Hartman-Hrobman theorem, if $\begin{cases}\sigma = 0\\ \Delta = 0\end{cases}$?

2.4 Tasks

According to your variant (Table 2.1):

1. Find the fixed points.

2. Perform the linearization of the system by various methods, compare the results.

3. Investigate the stability of the nonlinear system using the Hartman-Hrobman theorem.

Table 2.1

№ var	Task	№ var	Task
1	$\begin{cases}x' = y^2 - 3x + 2\\ y' = x^2 - y^2\end{cases}$	2	$\begin{cases}x' = x - y - e^x\\ y' = x - y\end{cases}$
3	$\begin{cases}x' = y - 3x\\ y' = x + x^3\end{cases}$	12	$\begin{cases}x' = x - y - xy\\ y' = x - y + y^2\end{cases}$
4	$\begin{cases}x' = y\\ y' = -x - (4 + x^2 + y^2)y\end{cases}$	13	$\begin{cases}x' = x - y - ey\\ y' = x + y\end{cases}$

Continuous of Table 2.1

5	$\begin{cases} x' = -3y + xy - 4 \\ y' = -x^2 + y^2 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x' = x - y + xy \\ y' = x^2 - y + y^2 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - (1 + x^2 + y^2)y \end{cases}$	15	$\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - (4 + x^2 + y^2)x \end{cases}$
7	$\begin{cases} x' = 1 - e^{x+y} \\ y' = x - y \end{cases}$	16	$\begin{cases} x' = -4y - xy - 2 \\ y' = -x^2 + y^2 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x' = y^2 - 1 \\ y' = x - y^2 \end{cases}$	17	$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - (1 - x^2 - y^2)y \end{cases}$
9	$\begin{cases} x' = x^2 - x \\ y' = -y \end{cases}$	18	$\begin{cases} x' = 1 - e^{x-y} \\ y' = x - y \end{cases}$
10	$\begin{cases} x' = y^2 - x + 4 \\ y' = x^2 - 2y^2 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x' = 2y^2 - 1 \\ y' = x - 4y^2 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x' = 3y - 3x \\ y' = x + x^3 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x' = x^2 - 2x + y \\ y' = -y \end{cases}$

PART 3. REFERENCES ON USING MATHCAD PACKAGE FOR A GIVEN COMPUTATION

3.1 Graphics

The templates of plots in the MathCAD. The graphics processor of MathCAD allows you to create various types of plots: in Cartesian and polar coordinate systems, graphics of surfaces, three-dimensional shapes etc.

For plotting templates are using. Their list is presented in the submenu *Graph* of the item *Insert* of the main menu (Figure 3.1).

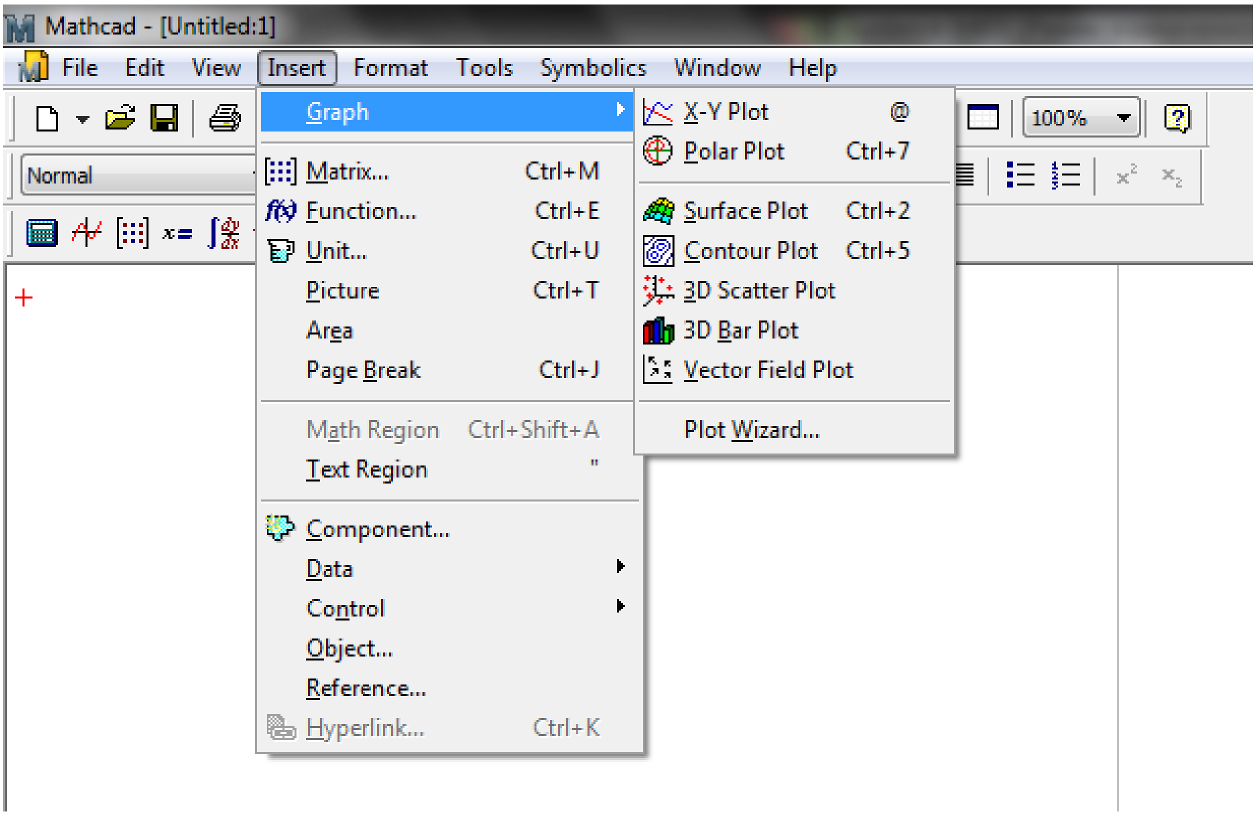


Figure 3.1– Calling graphics templates

Most GPU settings needed for plotting is set automatically, so to make the graph it’s enough to set its type.

MATHCAD supports the following types of graphs templates (Table 3.1).

Table 3.1

Types of graphs templates

Chart template	Characteristic of chart's type
График X-Y	the template of two-dimensional chart in Cartesian coordinates
Полярный график	the template of chart in polar coordinates
График поверхности	the template of three-dimensional chart
Линии уровня	the template for three-dimensional surface contour chart
3D-график разброса	the template of chart as the points in three-dimensional space
Столбчатая 3D-диаграмма	the template for the image as a column chart
Векторное поле	the template for vector field on the plane
Мастер графиков...	launching the wizard to build a three-dimensional chart with desired properties

Construction of a two-dimensional graph. Blank template of the graph (Figure 3.2) is a large empty box with data entry templates (or injection site) as a dark small rectangle located at the axis of abscissas and ordinates of the future graph.

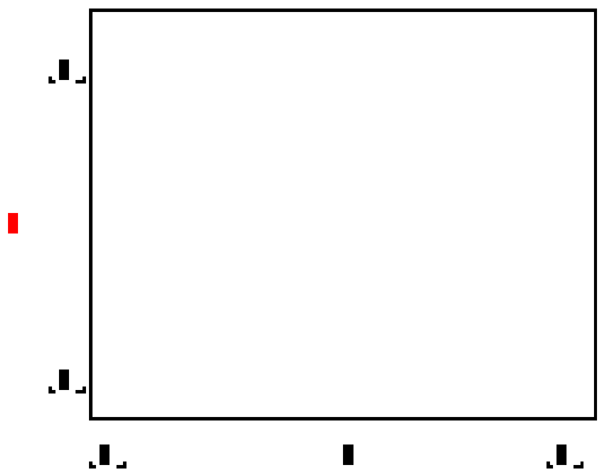


Figure 3.2– The template for a two-dimensional graph

In the black highlighted box space user must enter expressions for the coordinates of points on the axes X (horizontal axis) and Y (vertical axis). In general, it can be a variable function of x.

<u>Example 3.1.</u> Construct a graph of the function $x' = x^2 + 2\sin x - x^4$.

Required settings for the construction of this graph are illustrated in Figure 3.3.

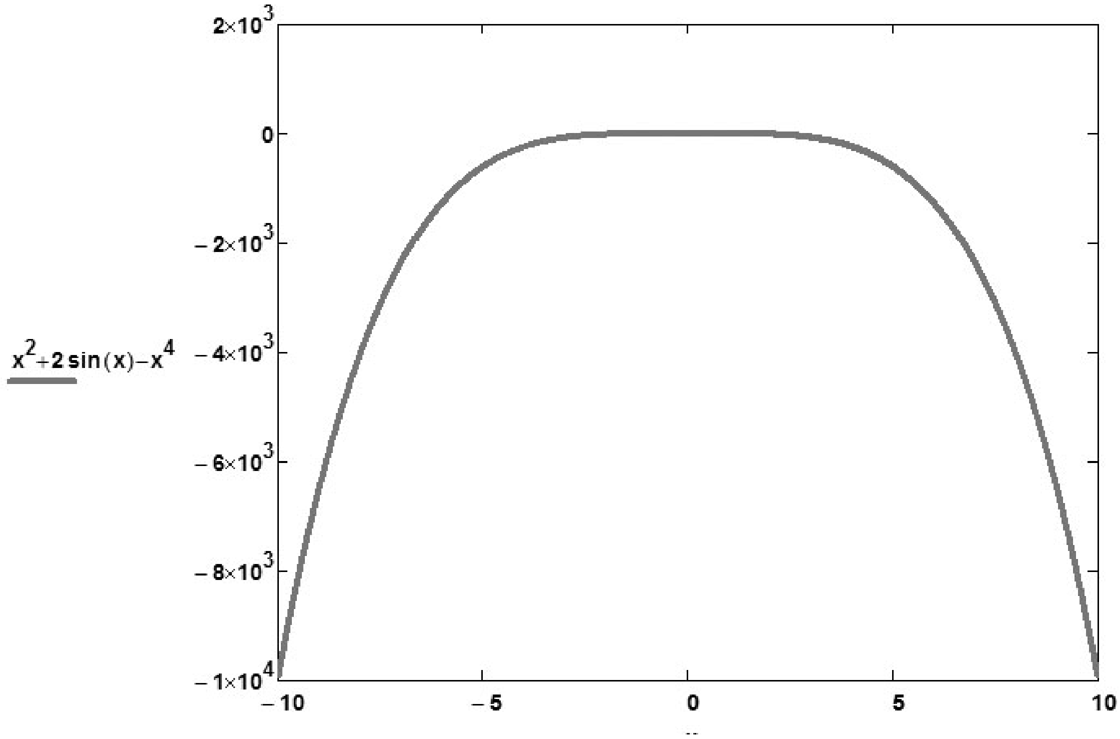
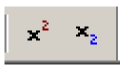


Figure 3.3 – Settings for the construction a graph of the function

$x' = x^2 + 2\sin x - x^4$

Remark. To enter uppercase user can apply button  from the toolbar.

Changing the settings of two-dimensional graphics. The graphics processor of MathCAD allows for graph reconfiguration by the following:

1) changing the display size;

2) moving of graphics;

3) imaging of several graphs in the same template;

4) formatting the graph;

5) scaling graphs.

Changing the display size. To resize the graph display user must select it (click on it with the left mouse button) and use the markers to change the size to needed.

Moving of graphics. To move the graph users need to bring the cursor to the edge of the graph (the cursor will change) and while holding down the left button to move the graph.

Imaging of several graphs in the same template. To image multiple graphs in one template, you need in the left of the graph comma introduce another equation (Figure 3.4).

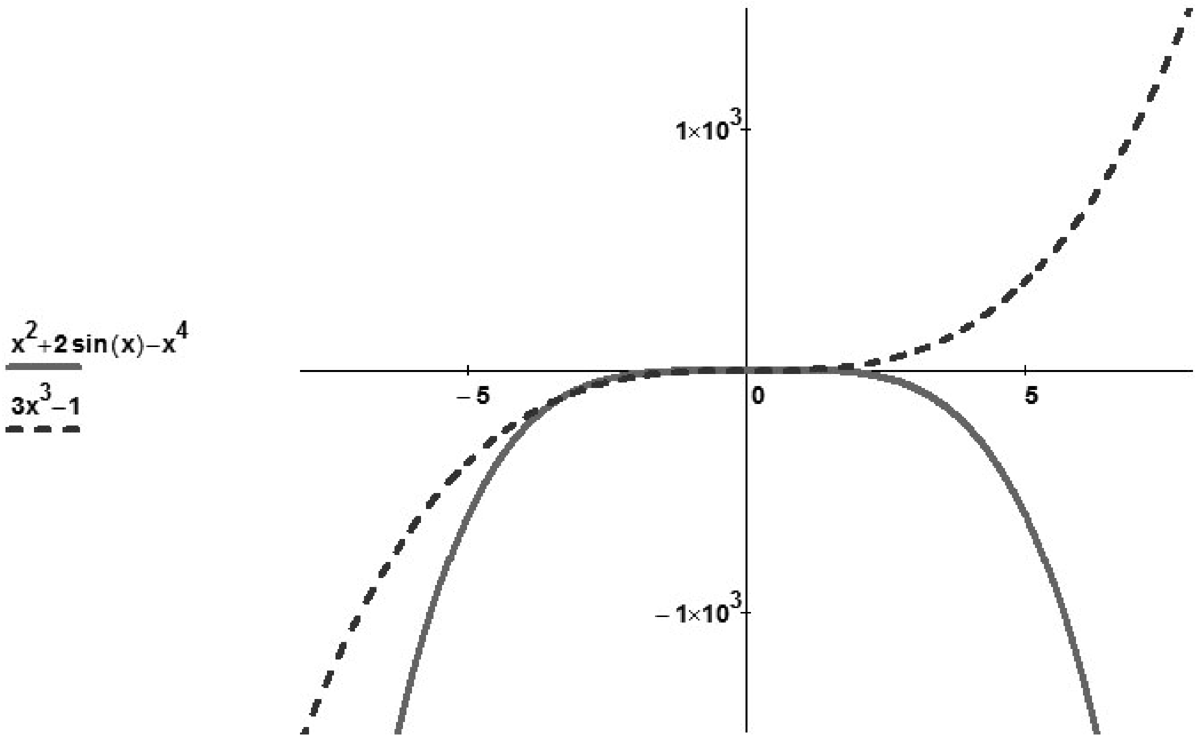


Figure 3.4 – The example of imaging of several graphs in the same template

Formatting the graph. Dialog for formatting graphs called by double clicking the left mouse button on the plot and it contains the tabs “X-Y Axes”, “Traces”, “Number Format”, “Labels”, “Defaults” (Figure 3.5).

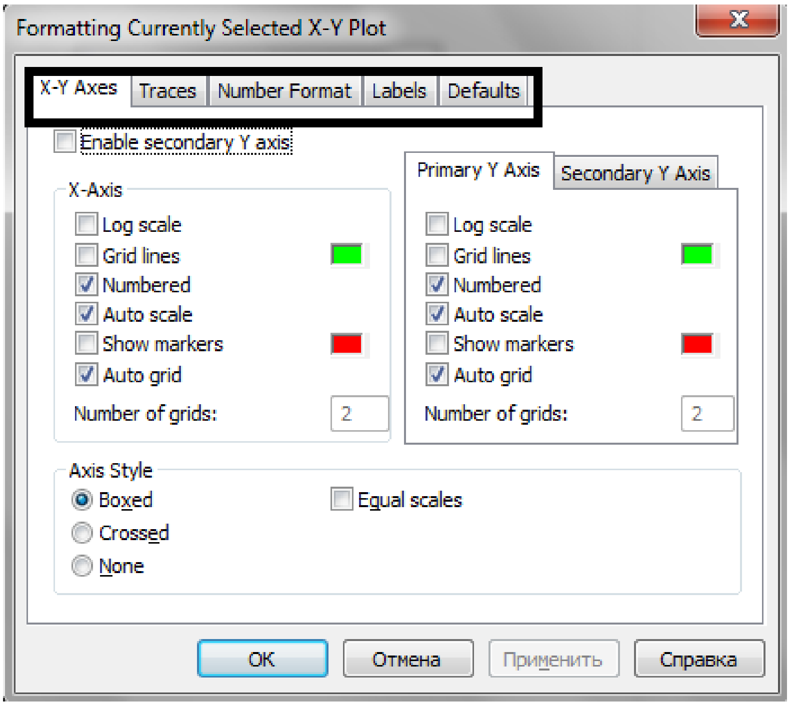


Figure 3.5 – The tabs of “Formatting Plot” dialog

For making the laboratory work you should select tab “X-Y Axes”, marked in Figure 3.6.

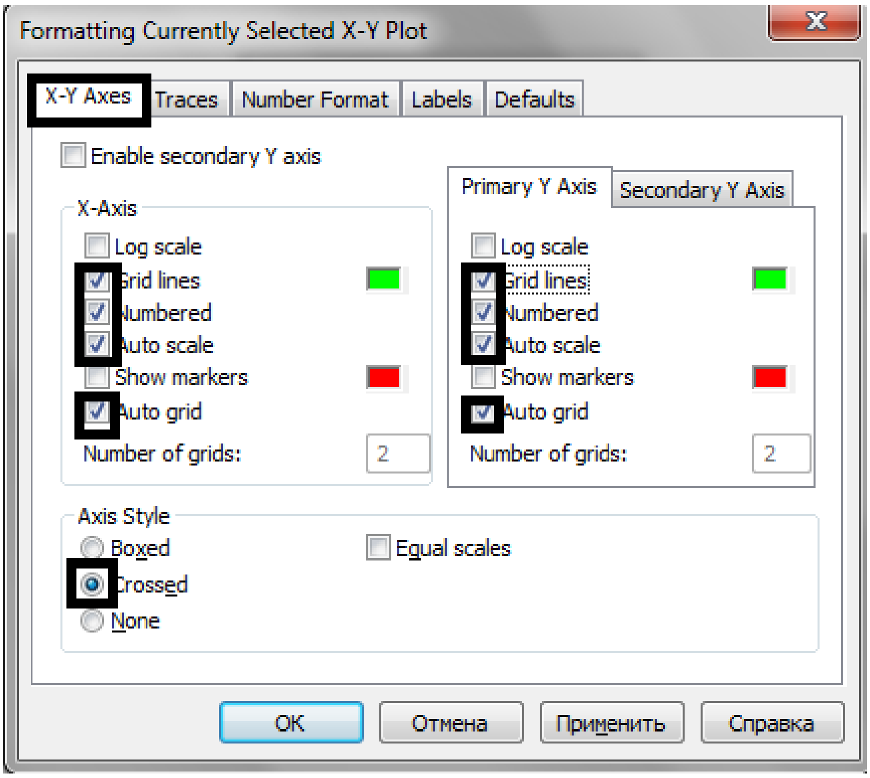


Figure 3.6 – The main options of “X-Y Axes” tab

Let's explain their using.

Option *Grid lines* allows you to make on the plot horizontal and (or) vertical grid lines (Figure 3.7).

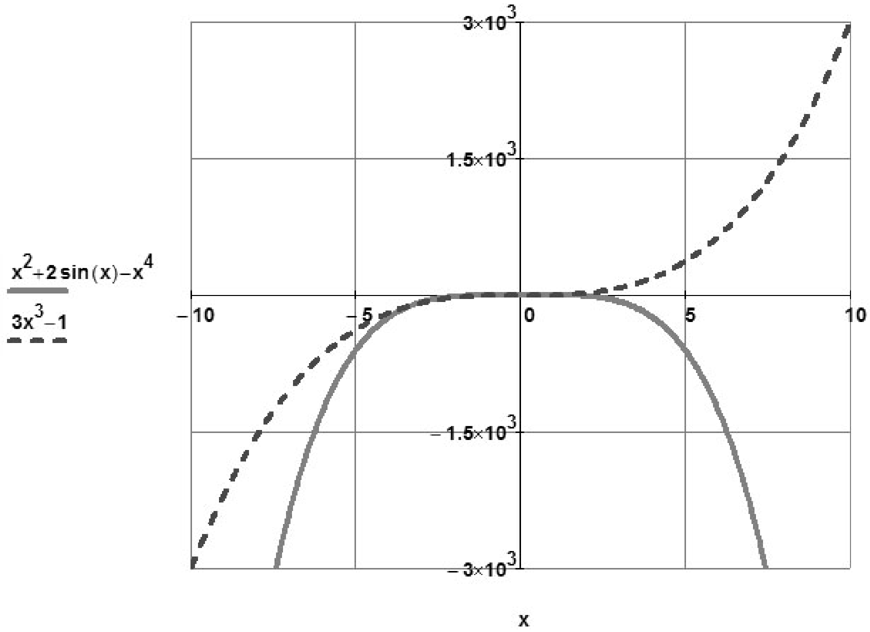


Figure 3.7 – Grid lines

Option *Numbered* displays the inscriptions on the axes (Figure 3.8).

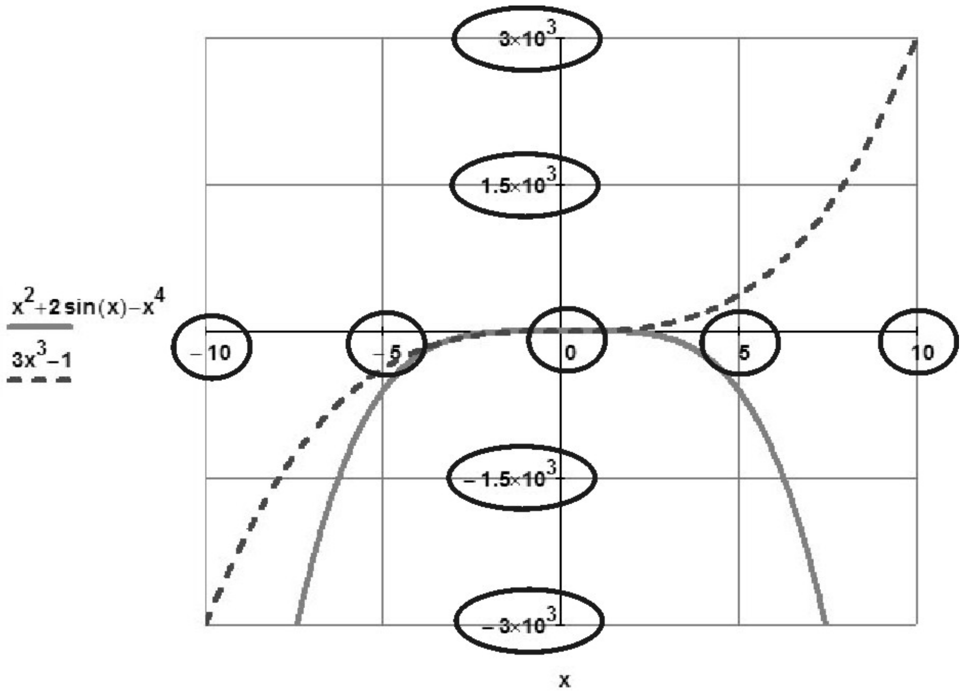


Figure 3.8 – Option's *Numbered* results

Option *Auto grid* automatically splits the graphics window at a level spaced horizontally and vertically, allowing you to define the borders of these intervals. The appearance of graphs without specifying this option is presented in Figure 3.9.

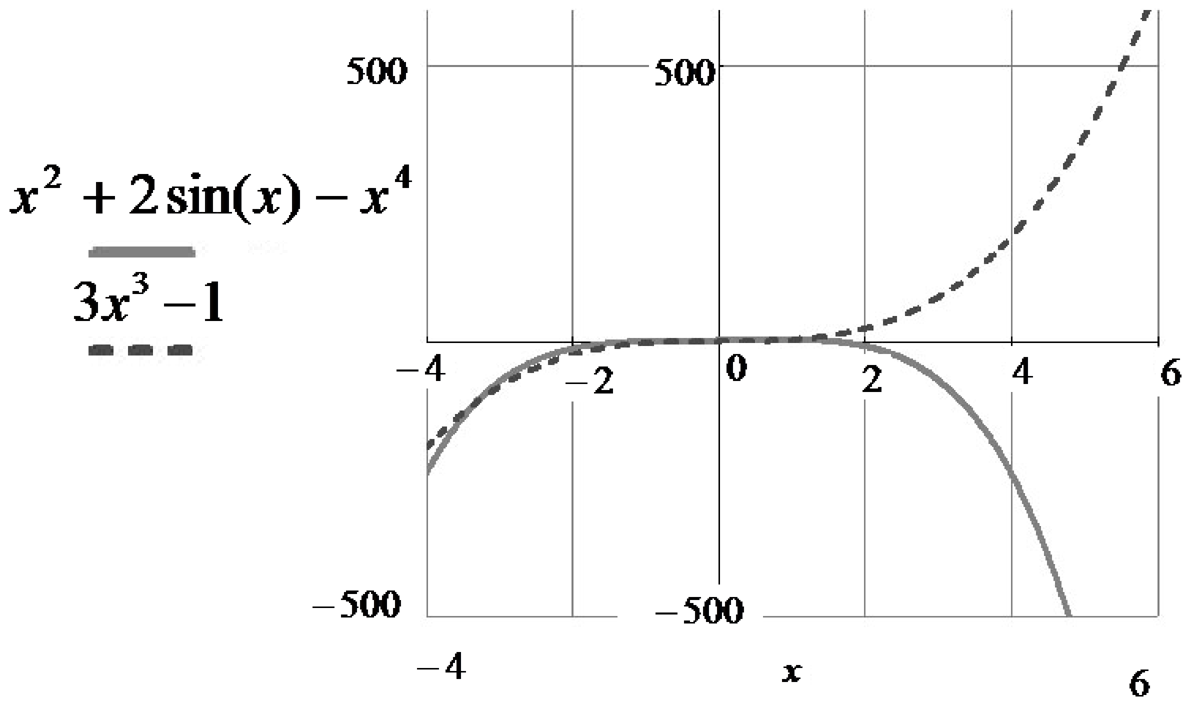


Figure 3.9 – The appearance of graphs without specifying *Auto grid* option

Disabling the option *Auto grid* allows manually set the distance between the horizontal and vertical grid lines through the assignment of additional options *Number of grids*. If you disable the option *Auto grid*, and set *Number of grids* 5 (Figure 3.9), we'll get the plots in the format shown in Figure 3.11.

Option *Axis Style* allows to set the display of the axes in the center or on the edges for easy perception of the plot. Showing all the axes can be disabled. A Figure 3.13 shows the preview of the graph but the axes are on the edges (the required parameter is shown in Figure 3.12).

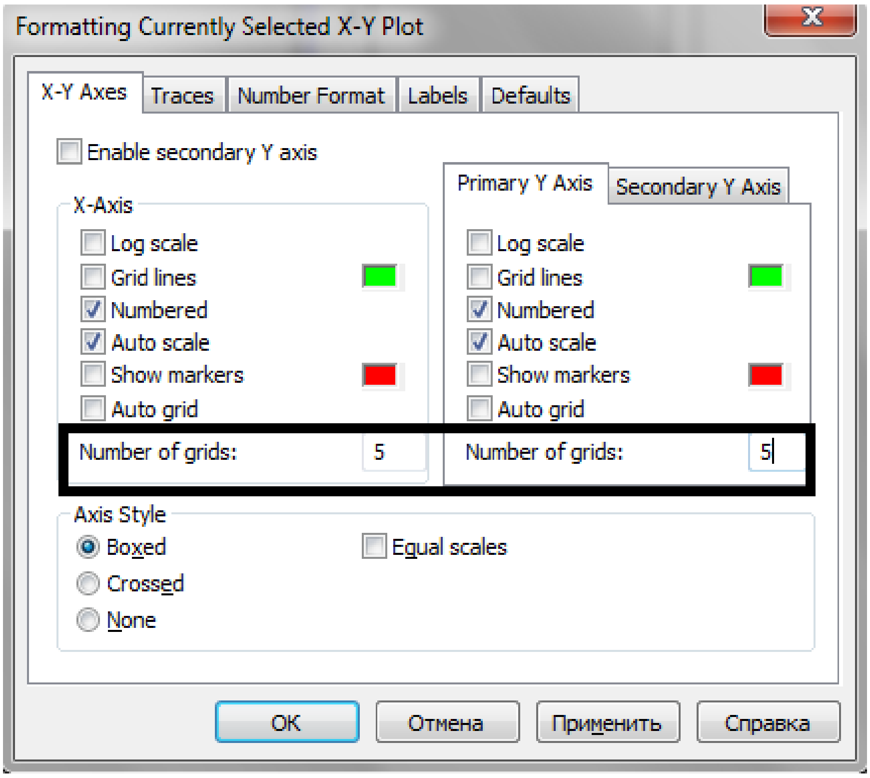


Figure 3.10 – Manually setting the number of grids

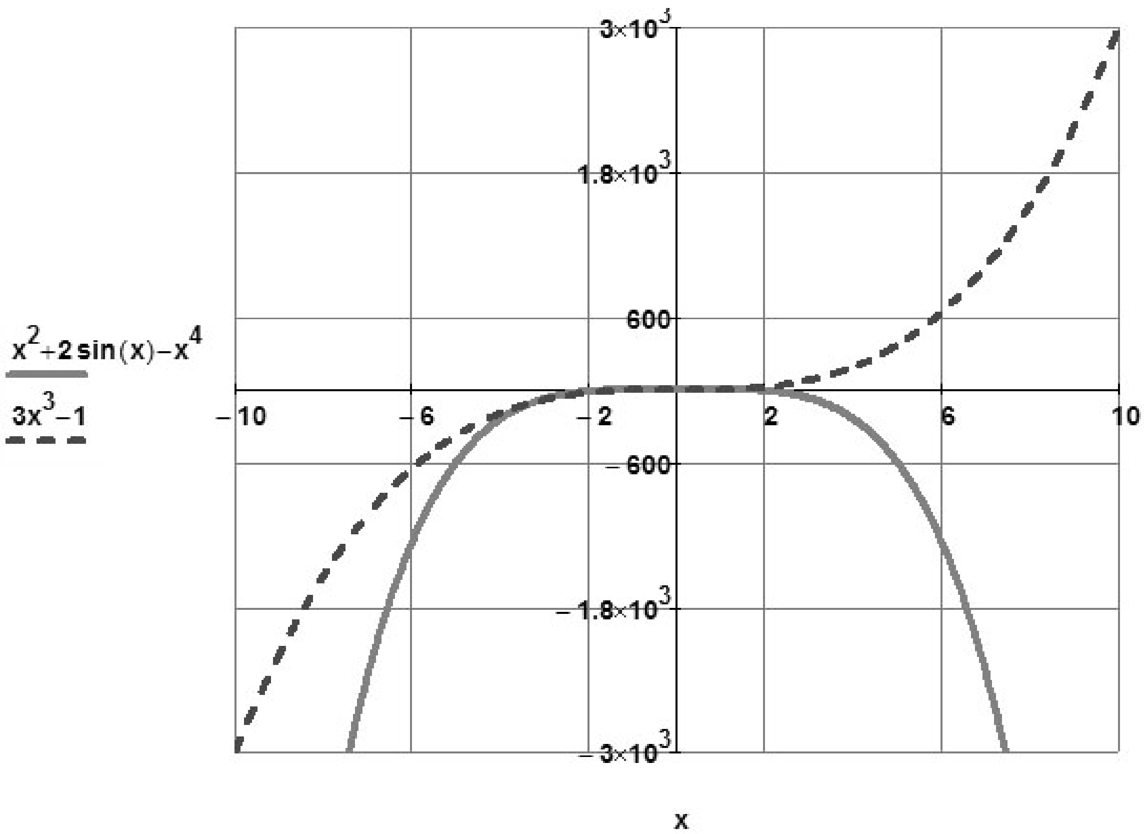


Figure 3.11 – The result of manually setting the number of grids (number of grids 5)

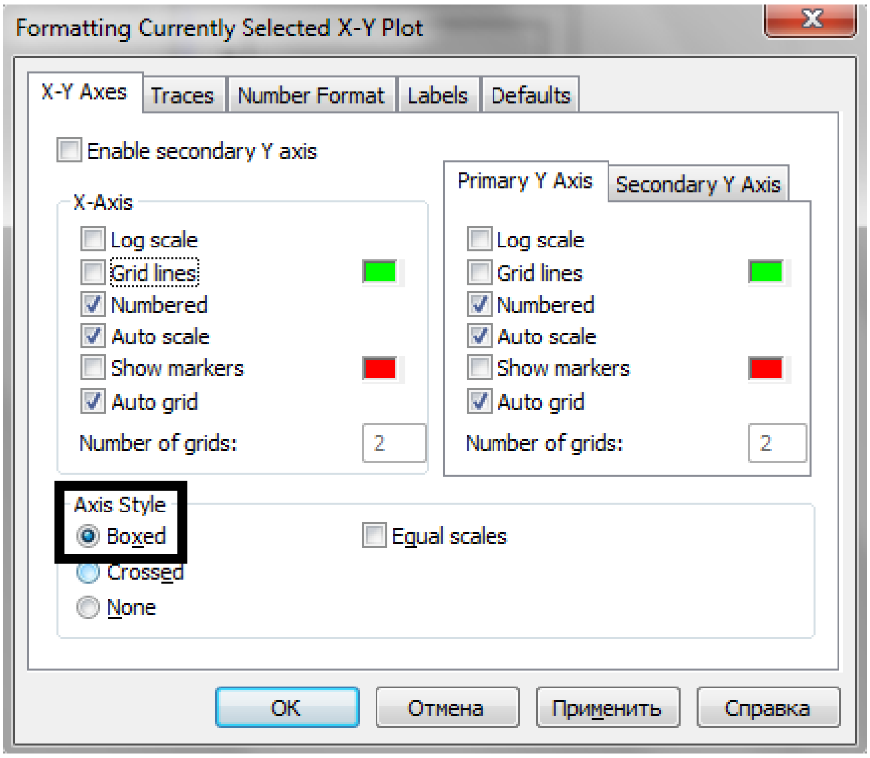


Figure 3.12 – Setting the parameter

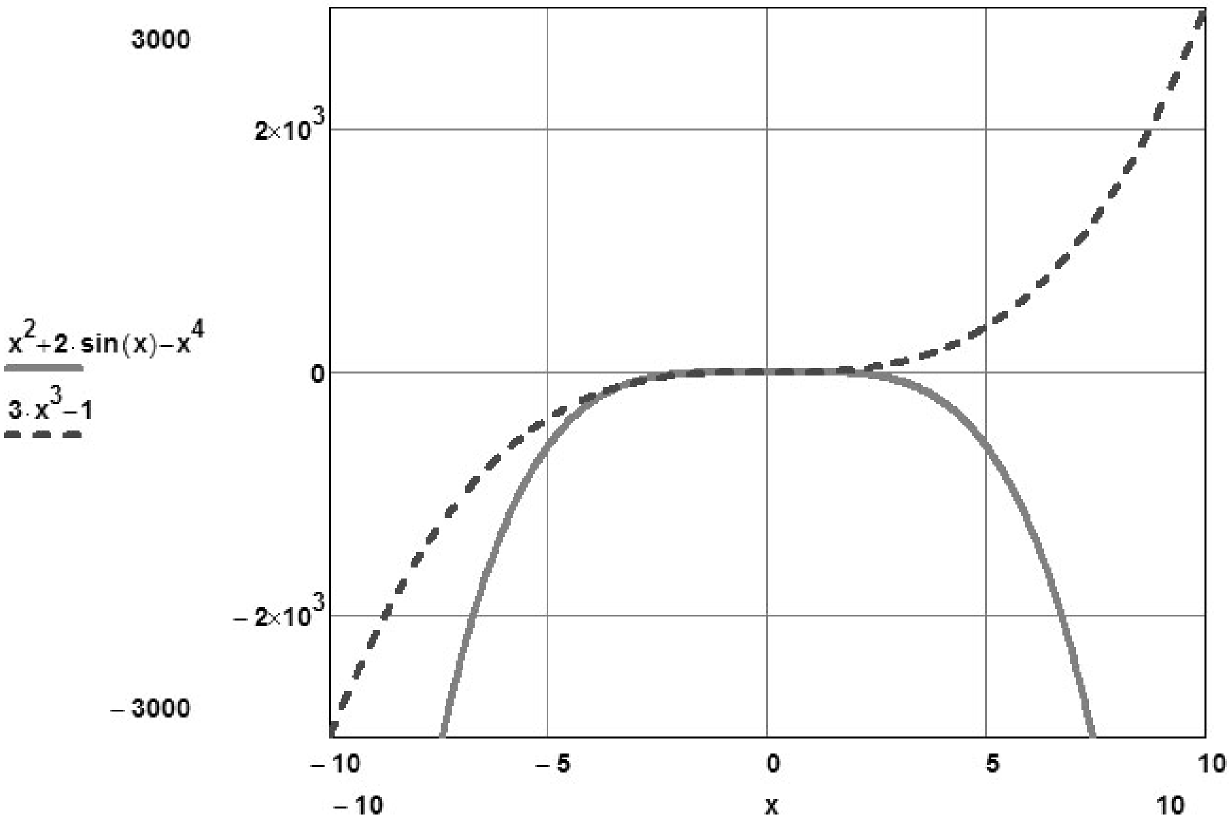


Figure 3.13 – Graph with the axes on the edges

Scaling graphs. When you select a graph (click on it with the left mouse button), you can see its scale which made automatically. The default limits are setting by the argument interval [-10, 10] (Figure 3.14). The scale on the axis Y MathCAD installs automatically.

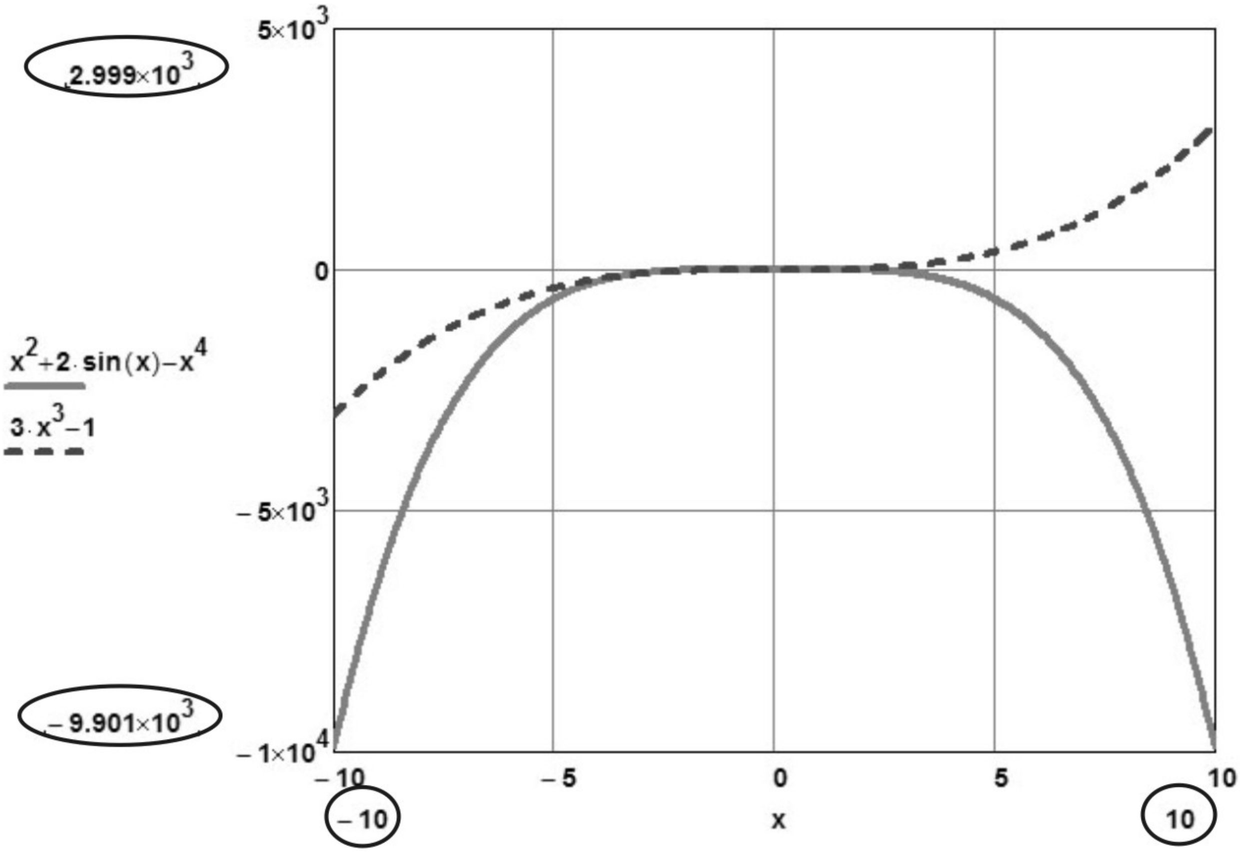


Figure 3.14 – Automatically scaling of the plot

For scaling the plot user must change it manually in the plot window. Suppose, for example, we need to find how many times the graphs intersect an axis argument (in other words, to find how many roots has a corresponding equation). Let's set the argument limits [-1, 2]. The result is shown in Figure 3.15.

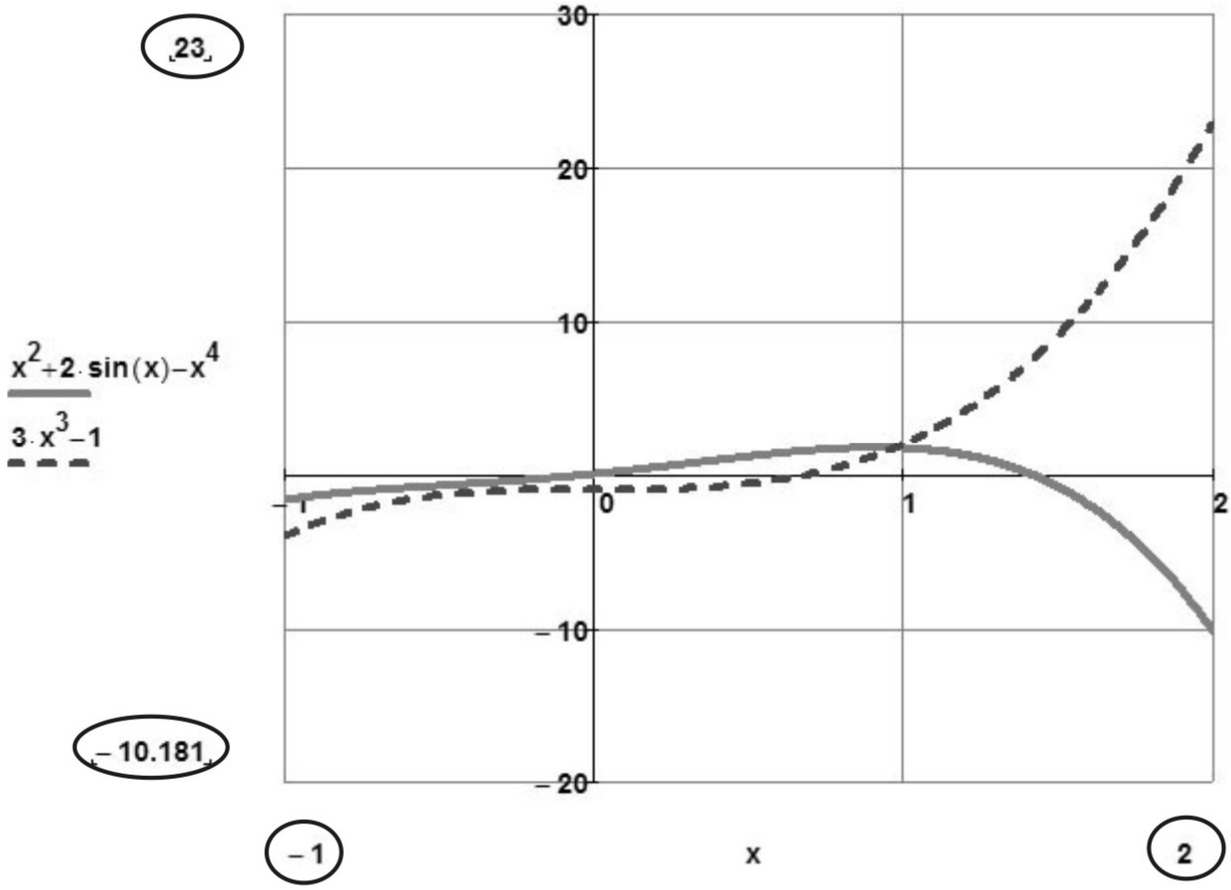


Figure 3.15 – Changing the argument limits

As you see from Figure 67, the equation $x^2 + 2\sin x - x^4 = 0$ has two roots, and the equation $3x^3 - 1 = 0$ - one root.

3.2 Solving equations

Equations solving by using the keyword solve. To find the roots of equations in the MathCAD user need to choose the toolbar “Symbolic” (Figure 3.16) and choose there the keyword *solve*.

On the worksheet the highlighted item for displaying the input equation and its solution appears (Figure 3.17).

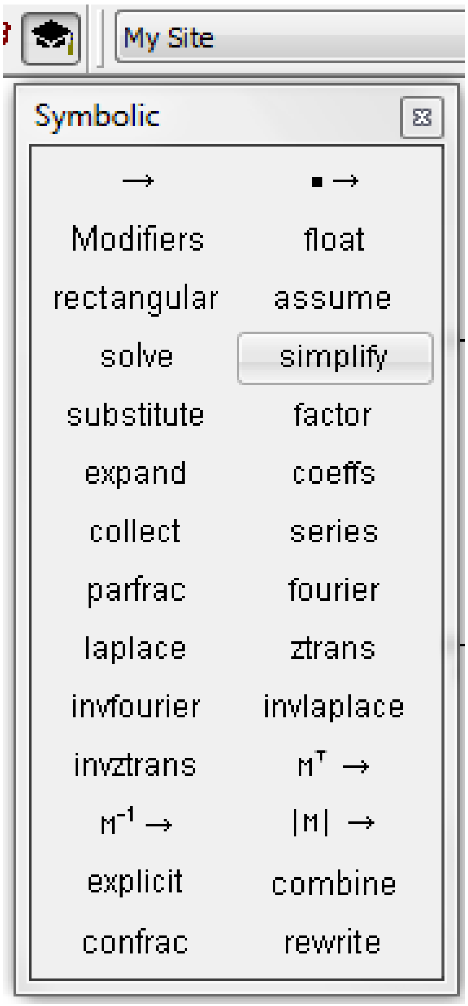


Figure 3.16 - The toolbar “Symbolic” choosing

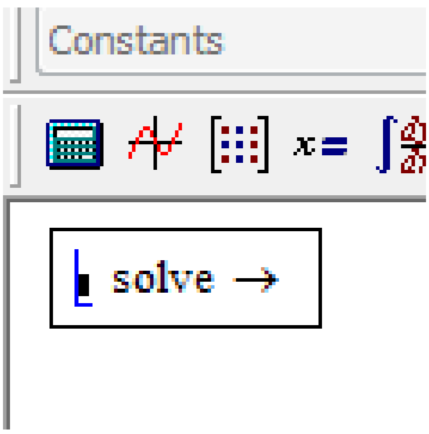


Figure 3.17 – The highlighted item for displaying the input equation and its solution

To the left of the keyword *solve* user must enter the equation after the keyword, separated by commas enter a variable-argument, click on the left mouse button outside the selected position. The result will appear to the right of the symbol $\rightarrow$.

The solutions of the equation $3x^3 - 1 = 0$ are shown in Figure 3.18.

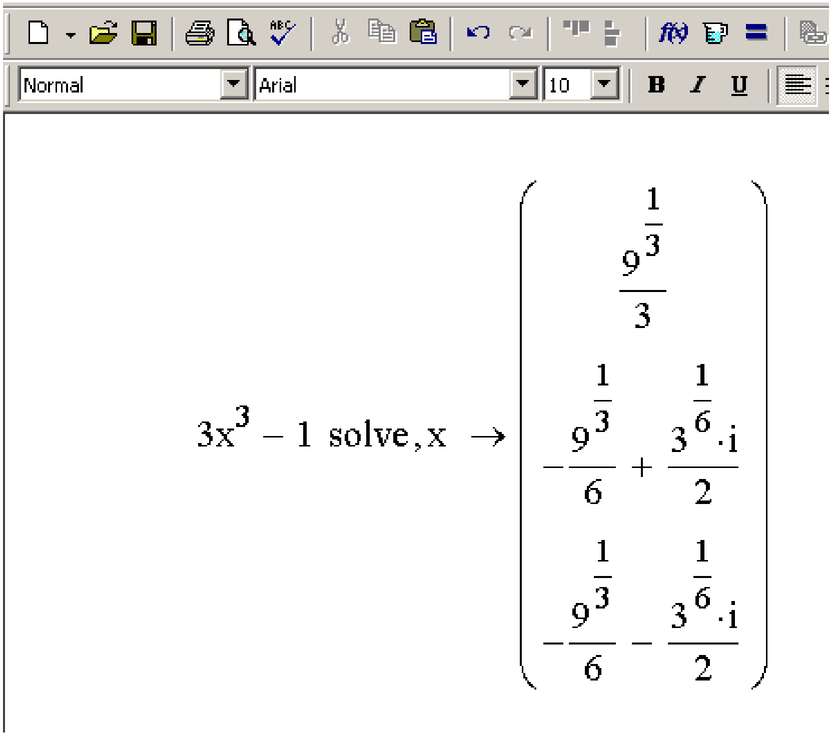


Figure 3.18 – The solutions of the equation $3x^3 - 1 = 0$ using the keyword *solve*

As you see from Figure 3.18, the equation has three roots - one real and two complex. To perform the tasks in the laboratory work we will be interested only in real roots. Graph of the function $3x^3 - 1 = 0$ has one intersection with the argument axis (Figure 3.15), thus further we must investigate the stability of one equilibrium point $x = 9^{1/3}/3$. The behavior of the system in this fixed point is unstable.

However, the solution of the equation $x^2 + 2\sin x - x^4 = 0$ gives poor results (Figure 3.19) for determining the number of points of equilibrium and their coordinates.

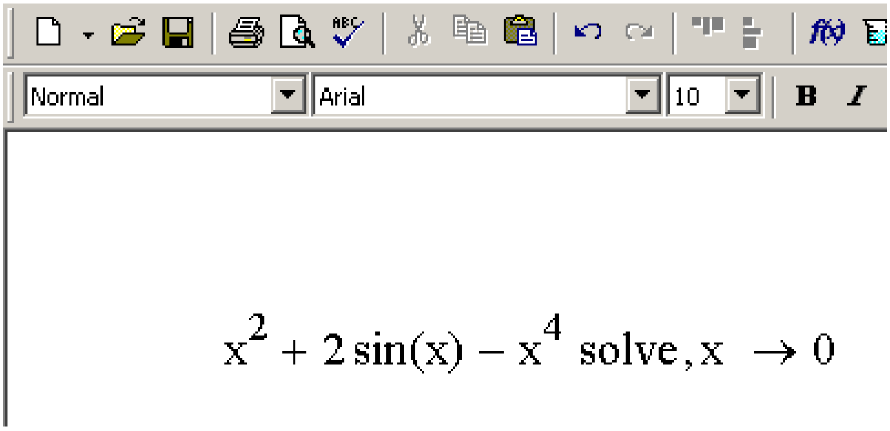


Figure 3.19 – The solution of the equation $x^2 + 2\sin x - x^4 = 0$ using the keyword *solve*

The result of solving the equations using the keyword *solve* is one point $x = 0$, but on the graph of the corresponding function (Figure 3.15) clearly shown that there are two roots (at least, really) and they are different. To find them, you can use the function *root* or tracing graph.

Equations solving by using the function root. The function *root* has syntax is root *Root (f (x), x)*. The first argument of the function is the equation, whose solutions must be found. The second argument is an independent variable of the equation.

Note that this function finds for the root of the equation in the neighborhood of a certain predetermined point. The result of *root* function is only one root, which is in the vicinity of the pre-specified approach.

To set the initial approximation, it is necessary before calling the function *root* user need to provide a certain value of the argument *x*.

Thus, from Figure 3.15 you can see that the first root of the equation $x^2 + 2\sin x - x^4 = 0$ is in the neighborhood of the point $x = 0$ and the other neighbors, for example, to a point $x = 1.5$. Finding the roots of the equation $x^2 + 2\sin x - x^4 = 0$ by using *root* illustrated in Figure 3.20.

$x := 0$

$x1 := \mathrm{root}\left(x^2 + 2\sin(x) - x^4, x\right)$

$x1 = 0$

$x := 1.5$

$x2 := \mathrm{root}\left(x^2 + 2\sin(x) - x^4, x\right)$

$x2 = 1.411$

Figure 3.20 – The solution of equation $x^2 + 2\sin x - x^4 = 0$ using the function *root*

Equations solving by tracing the graph of the function. Tracing can more accurately examine the structure of the graph. You can turn tracing on in graphics context menu (called by right click on the object) and select *Trace*... (Figure 3.21).

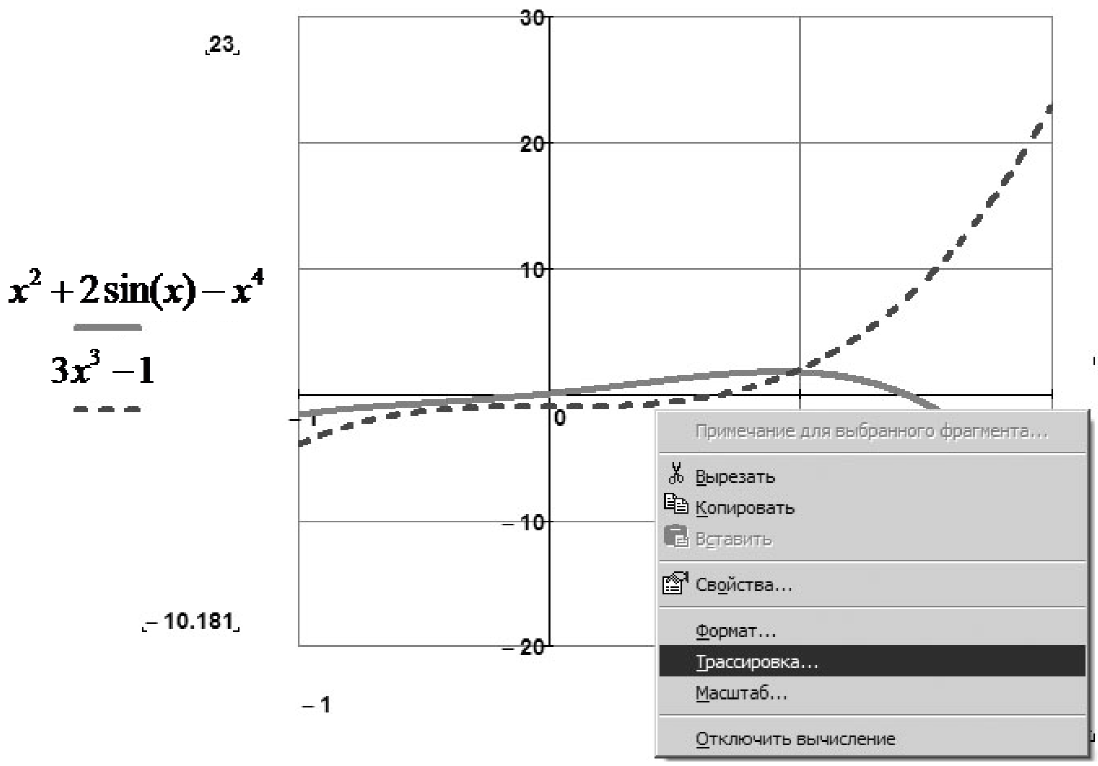


Figure 3.21 – Choosing *Trace*... mode

As a result, in the MathCAD box tracing will appear and in graphics box – dotted lines that intersect (Figure 3.22).

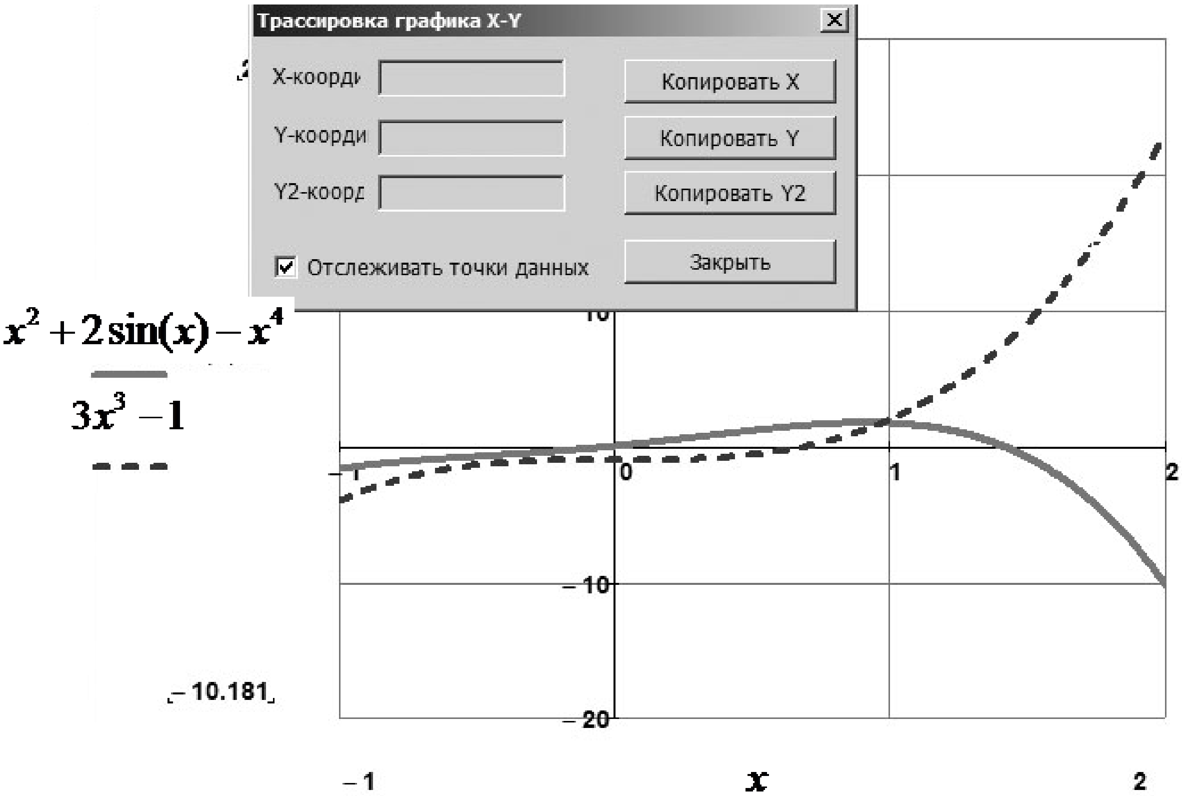


Figure 3.22 – The result of choosing *Trace…* mode

By moving the mouse pointer over the chart the point of intersection of lines tracing also moves. The point coordinates appear in the trace window in the fields of “X-value”, “Y-value”. Tracing lines can also move by using the cursor keys, allowing you more accurately determine the coordinates of the desired point. Pressing “Copy X” or “Copy Y” results in copying the appropriate number to the clipboard, allowing you then to paste it in any place of the worksheet.

The result of the determination the coordinates of the second nonzero root for the equation $x^2 + 2\sin x - x^4 = 0$ is shown in Figure 3.23.

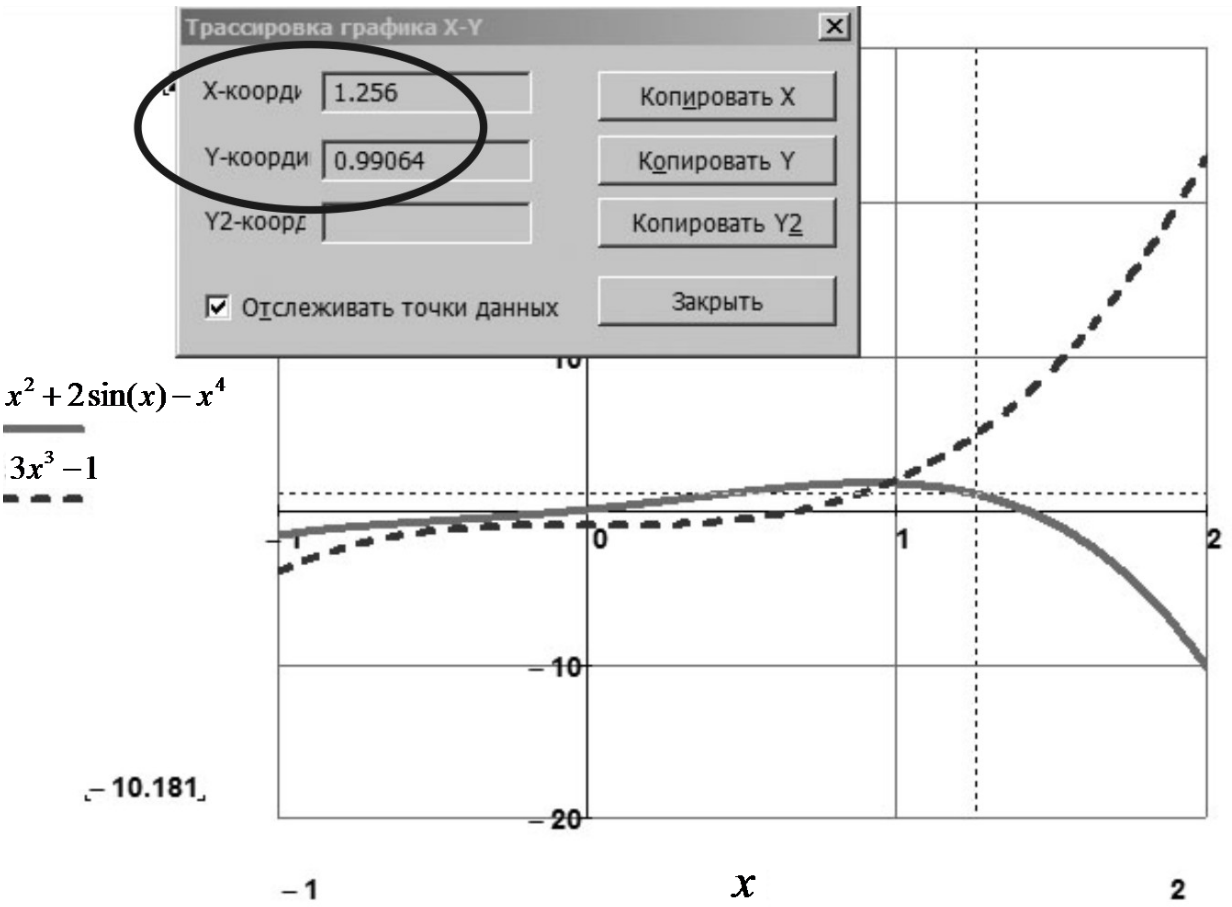


Figure 3.23 – The result of the determination the coordinates for the equation $x^2 + 2\sin x - x^4 = 0$ using tracing

Note that moving the vertical tracing line should be as long as it receives the least deviation from zero ordinate. This method defines a point $x = 1.412$ as a non-zero root, which is only on $x = 0.001$ different from the root, obtained by using the *root* function.

3.3Working with matrices

Matrices description in MathCAD system. Each element of the matrix is characterized by the indexed variable, and its position in the matrix is determined by two indexes: the row and column number.

To specify suffix after the variable name (the name of the matrix or the vector) the mark of the opening square bracket “[” is introduced. For matrix elements the first index indicates the row number. By default, the package MathCAD indexes starting from zero. Initial number (lower bound of the index) is given by the value of the system variable ORIGIN.

For indexes numbering started the other number, you can select the main menu items

To numbering indices started the other room, you must select the main menu item “Tools → Worksheet Options”, then switch to tab “Built-In Variables” and for ORIGIN option install the required lower limit of the indexing value (Figure 3.24).

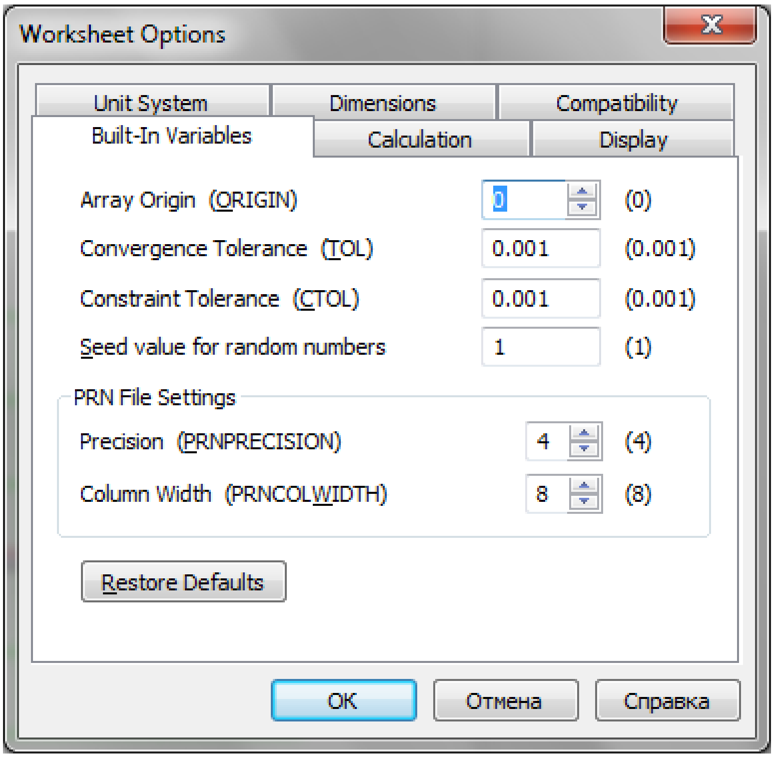


Figure 3.24 – The starting limit of the indexing value setting

Vectors and matrices setting

<u>The 1 way</u> (using the template of theinput matrix). To insert a template, you can:

- use the menu tool “Insert → Matrix ...” from the main menu;
- choose the appropriate icon on the toolbar, “The Matrix”;
- press key <Ctrl> + <M> (Figure 77).

The described actions will lead to the appearance of the dialog box, in which you must specify the dimension of the matrix, i.e. the number of rows and columns. When you press <OK> or the <Add> in the dialog box the template of the matrix or vector will be displayed (vector will have one of the parameters of dimension equal to 1) (Figure 3.25-3.26).

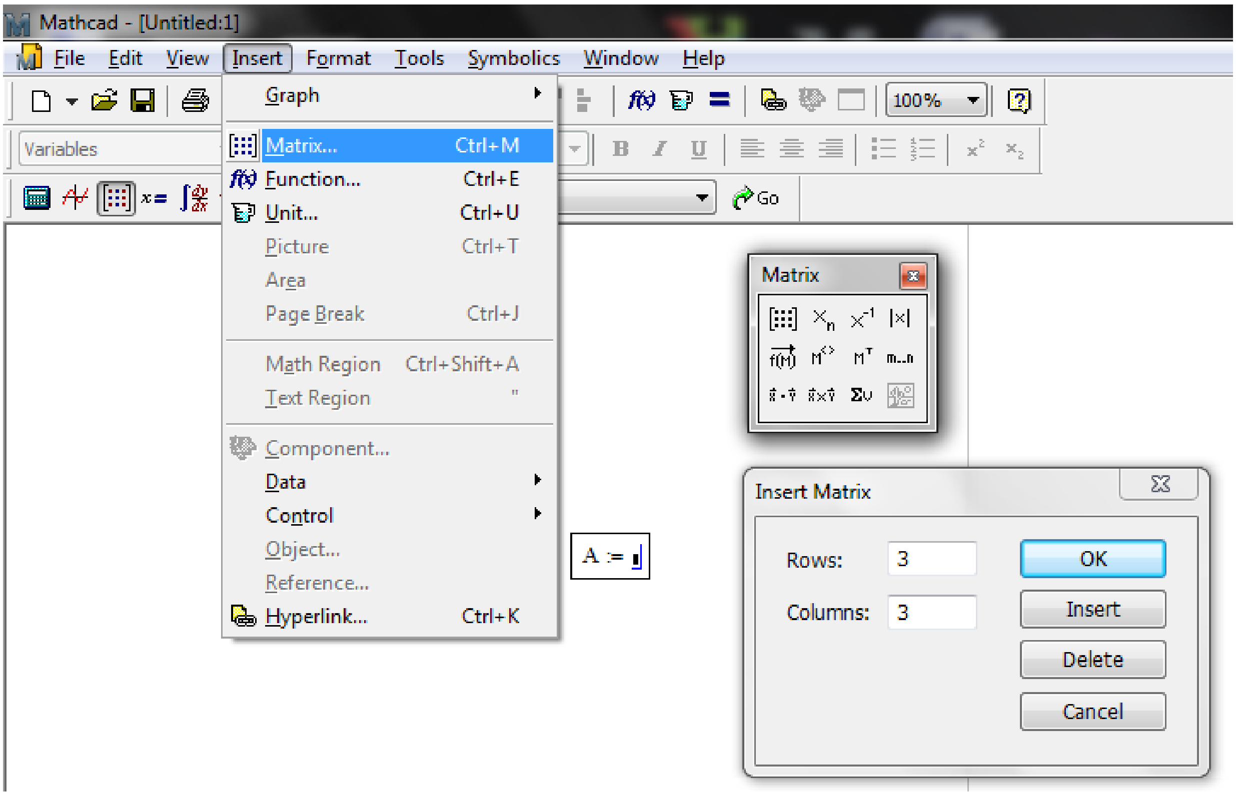


Figure 3.25 – Matrix setting using the template

This template consists of general brackets and the place for a setting value (numeric or symbolic) of the matrix elements. One of the places of a value activates by the mouse cursor. Then all the elements of the matrix are entered by moving on a template with the mouse or cursor keys.

If the introduction is over, but don't all the elements of the matrix are entered, the system will return the error message. This notice is given in red in the frame with the line, and points to a blank template or several blank templates (Figure 3.27).

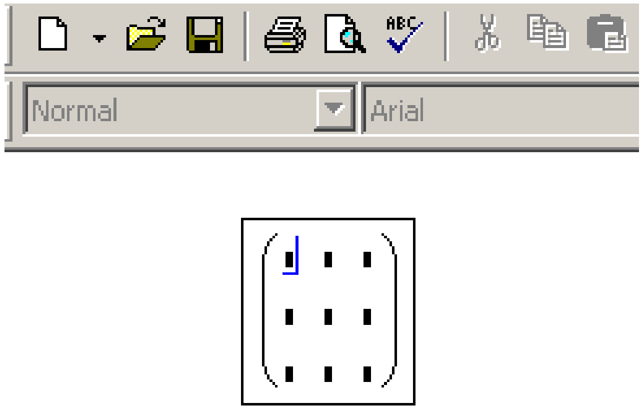


Figure 3.26 – The template for matrix entering

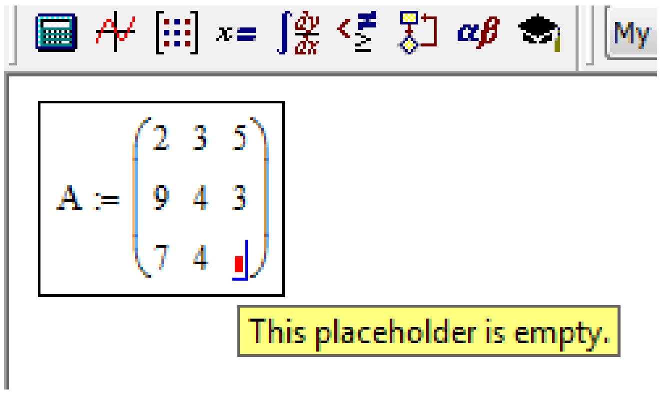


Figure 3.27 – An example of the error

Note 1. Note the difference between the usage of the symbols “=” and “:=” in MathCad.

The symbol “:=” is used in the case if the right part of this sign is a mathematical expression whose value is given to a variable that is in left of the symbol “:=”.

The symbol “=” is used to view the value of a particular variable.

Note 2. To remove any objects created in MathCad, it is necessary to cut the cursor around it. The object is marked by the “dotted” box (Figure 3.28). Then you can perform any standard action to remove characters (press *Del*, *BackSpase* etc.).

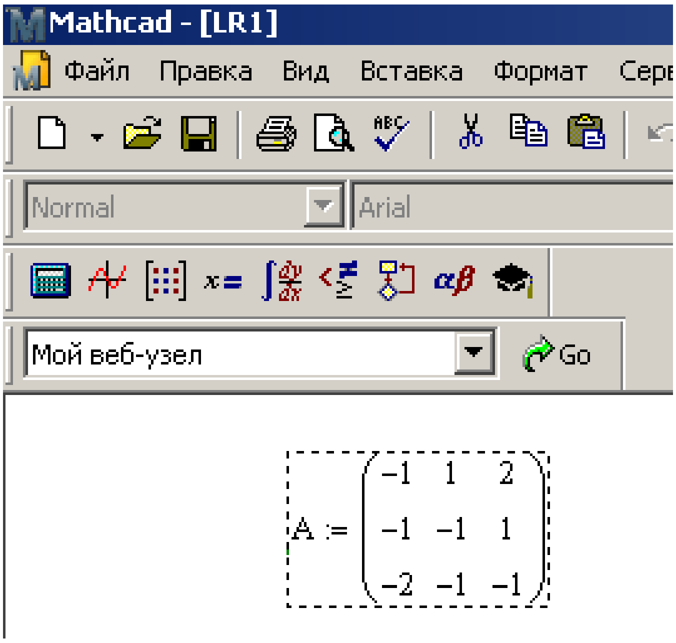


Figure 3.28 – Removing of the object

Note 3. When the calculations perform user should know that the variables that you use in formulas must be set before (and on MathCad worksheet located to the left and above) than they appear.

The 2 way (by using the built-in function *matrix*). The function *matrix* has the following syntax: *matrix (m, n, f)*. The parameter *m* specifies the number of rows of the matrix, the parameter *n* – the number of columns, the parameter *f* - function, which is calculated the elements of the matrix is created.

Example of the usage of the described method is shown in Figure 3.29.

$$\mathbf{ORIGIN} := 1$$

$$\mathbf{f(i,j) := i + j} \qquad \mathbf{n := 4}$$

$$\mathbf{i := 1..n} \quad \mathbf{j := 1..n}$$

$$\mathbf{A := matrix(n, n+1, f)} \qquad \mathbf{B_{i,j} := i + j}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Figure 3.29 – Creation of the matrix by using the function *matrix*

The functions for working with matrices. In MathCAD user can make with matrices the operations of addition, subtraction, multiplication by a constant etc.

However, for using the operators, you must give the appropriate matrix notation (Figure 35).

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Figure 3.29 – The matrix notation

MathCAD system contains a number of functions for working with vectors and matrices:

1) *identity(n)* - creates a unit square matrix with the size *n*x*n*;
2) *augment(M1, M2)* - combines into one the matrices *M1* and *M2* with the same number of rows (the combination goes side by side);
3) *stack(M1, M2)* - combines into one the matrices *M1* and *M2* with the same number of columns placing M1 over M2;
4) *submatrix(A, ir, jr, ic, jc)* – returns a matrix consisting of all the elements in the matrix *A* in the rows from *ir* to *jr* and columns from *ic* to *jc* (*ir* <*jr*, *ic*> *jc*);
5) *cols(M)* – returns the number of columns of the matrix *M*;
6) *rows(M)* - returns the number of rows of the matrix *M*;
7) *rank(M)* – returns the rank of the matrix *M*;
8) *diag(M)* – creates a vector which elements are the main diagonal elements of the matrix *M*;
9) *tr(M)* – returns the trace (sum of diagonal elements) of a square matrix *M*;
10) *mean(M)* - returns the average value of the array *M*;
11) *median(M)* - returns the median of the array elements *M*.

Some calculations of values of the matrix can be performed by using icons in the “Matrix” (Figure 3.31, 3.32).

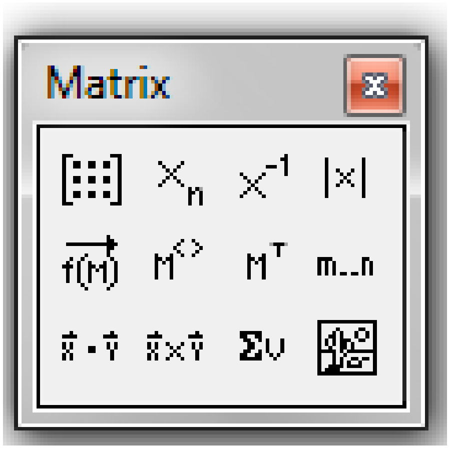


Figure 3.31 – Panel “Matrix”

The panel found the icon you can use to calculate the determinant of the matrix, the inverse matrix, transposed matrix, etc. (Figure 37).

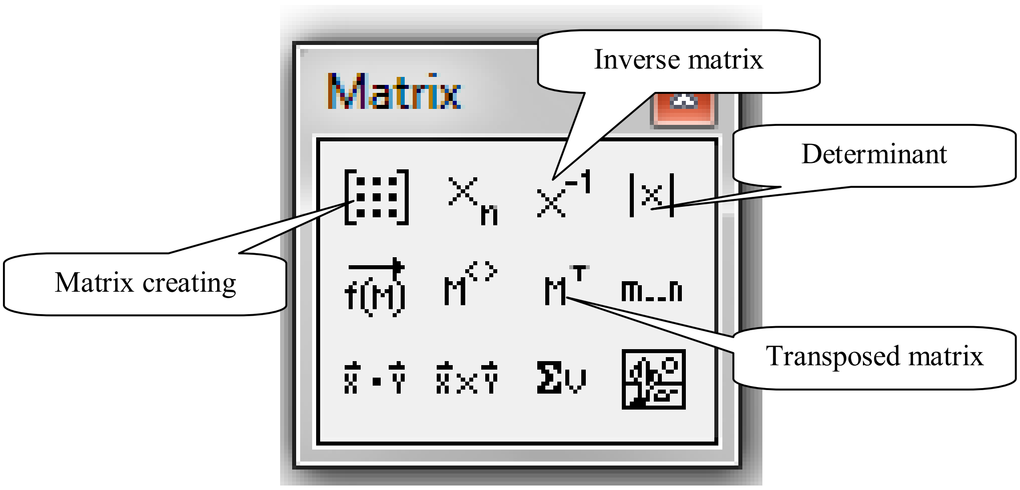


Figure 3.32 – Panel “Matrix”

The examples of working with the matrix shown in Figure 3.33.

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{diag}(B) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{tr}(B) = -1 \qquad \operatorname{median}(B) = -1$$

$$\operatorname{mean}(B) = -0.111 \qquad |B| = -3$$

Figure 3.33 – Working with matrix

Note 4. If you want to find a solution of some expressions in symbolic form, then for outputing it to the screen instead of the equals sign use symbol → from the toolbar “Evaluation”.

Example: make the characteristic equation of the system:

$$\begin{cases} x' = -x + 2y + z \\ y' = -4x - y + 2z \\ z' = -x - 2y - 8z \end{cases}$$

The solution of this task in MathCad illustrated by Figure 3.34.

$$A := \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ -4 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & -8-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A| \to -\lambda^3 - 10\lambda^2 - 30\lambda - 73$$

Figure 3.34 – The symbol solution

Eigenvectors and eigenvalues of the matrix. One of the most common problems of computational linear algebra is the task of finding eigenvectors and eigenvalues of the matrix *A*, which are the solution of equation $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ relatively the unknown components of the vector $\vec{x}$ and the scalar quantity λ . If you find a solution of this equation, the vector called eigenvector of the matrix A, and λ - the corresponding eigenvalue.

To solve the tasks of finding eigenvectors and eigenvalues of the matrix MathCAD has several functions that implement a difficult complex oh the computational algorithms:

3) *eigenvals(A)* – returns a vector which contains the eigenvalues of the matrix A;

4) *eigenvec(A, L_i)* – defines a vector of unit length which is corresponding to the eigenvalues L_i of a square matrix A;

5) *eigenvecs(A)* – returns the matrix of normalized eigenvectors that correspond to eigenvalues of a square matrix A; i-th column of the returned matrix is the eigenvector that corresponds to the n-th eigenvalue, calculated by the function *eigenvals* (the result is a matrix of all eigenvectors).

An example of the usage of the described functions is shown in Figure 3.35.

$$ORIGIN := 1$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{eigenvals}(C) = \begin{pmatrix} -2.71 \\ 0.271 \\ 5.439 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{eigenvecs}(C) = \begin{pmatrix} 0.415 & -0.76 & -0.625 \\ 0.432 & 0.611 & -0.321 \\ -0.801 & -0.222 & -0.711 \end{pmatrix} \quad \mathrm{eigenvec}\left(C, L_2\right) = \begin{pmatrix} -0.76 \\ 0.611 \\ -0.222 \end{pmatrix}$$

Figure 3.35 – An example of calculating the eigenvalues of the matrix and the eigenvectors

Note that when user uses the function *eigenvec* the second parameter is the element of the vector of eigenvalues. Elements of vectors have indexes. To refer to an element of the vector, you must select the form for its outputting from panel “Matrix” (Figure 3.36).

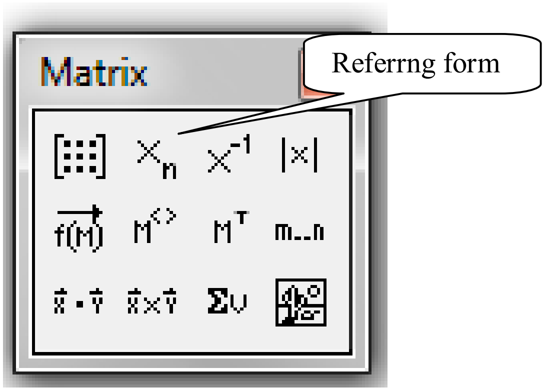


Figure 3.36 – Selecting the form for referring to an element of the vector

Except the problem of finding eigenvectors and eigenvalues it’is sometimes considered a more general problem - the so-called problem of finding the generalized eigenvalues.

Suppose that we have two square matrix with size *n*. The generalized eigenvalues are founded from the solution of the equation $A\vec{x} = \lambda B\vec{x}$. Non-zero vector $\vec{x}$ is a solution of this equation and it’s called a generalized eigenvector of the pair *AB* and the number λ – the generalized eigenvalue of the pair *AB*.

To solve the described task in the package are realized two built-in functions, performance of which is the similar as for the example above for the case of one matrix:

1) *genvals (A, B)* – returns the vector *v* of the eigenvalues, each of which satisfies the task in generalized eigenvalues;

2) *genvecs (A, B)* – returns a matrix of the normalized eigenvectors corresponding to the eigenvalues returned by the function *genvals*. *A, B* – are the square matrices of the same order.

3.4 Solving the systems of linear algebraic equations

The system of linear algebraic equations (SLAE) in matrix form looks like $AX = B$, where A, X, B - matrices. It is known that such a system compatible (Kronecker-Capelli theorem) if the rank of the extended matrix equals the rank of the matrix of the system, i.e., $rank\ (A) = rank\ (A \mid B)$. Compatible system has a unique solution if $rank\ (A) = rank\ (A \mid B) = n$, where n - is the dimension of the matrix A.

There are three ways for solving SLAE in the package MathCAD: as a matrix equation, using the function *lsolve (A, B)* and by using the computing unit *Give-Find*.

The 1 way of the solving the systems of algebraic equations (as a matrix equation).

If the matrix equation $AX = B$ multiplied from the left by A^{-1}, we'll have $A^{-1}AX= A^{-1}B$ or $X= A^{-1}B$.

An example of solving the system of algebraic equations:

$$\begin{cases} x - y - 3z = 3 \\ 3x + 4y - 5z = -8 \\ 2y + 7z = 17 \end{cases}$$

is in the Figure 3.37.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} 9.634 \\ -4.561 \\ 3.732 \end{pmatrix}$$

Figure 3.37 – Solving the systems by the matrix way

The 2 way of the solving the systems of algebraic equations (by using function *lsolve*).

The format of the function: *lsolve (A, B)*. The function has two parameters: A - square matrix consisting of the coefficients of the variables in equations; B - vector which has as many rows as rows in the matrix *A* and consists of free membership of the equations. As a result this function returns the solution vector *X* such that $AX = B$.

In the Figure 3.38 there is an example of solving the equations given in the previous example.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$X := lsolve(A, B) \qquad X1 = \begin{pmatrix} 9.634 \\ -4.561 \\ 3.732 \end{pmatrix}$$

Figure 3.38 – Solving the systems of algebraic equations by using *lsolve*

As you can see, the results in vectors *X* and *X1* are the same.

The 3 way of the solving the systems of algebraic equations (by using the computing unit *Give-Find*).

The algorithm for the using of computing unit:

1) set the initial values for the unknown quantities;

2) add the keyword *Given*;

3) set the initial system of equations (the sign "=" in the system of equations is entered using the keyboard shortcut *[Ctrl] + [=]*);

4) set the function *Find* (the list of desired variables, separated by a comma).

An example of computing the *Given-Find* block for solving a system of linear algebraic equations is presented in Figure 3.39.

$$x := 0 \qquad y := 0 \qquad z := 0$$

Given

$$x - y - 3z = 3$$
$$3x + 4y - 5z = -8$$
$$2y + 7z = 17$$

$$Find(x, y, z) = \begin{pmatrix} 9.634 \\ -4.561 \\ 3.732 \end{pmatrix}$$

Figure 3.39 – An example of computing the *Given-Find* block for solving a system of linear algebraic equations

Similarly the *Find* function user can apply the function *Minerr*, but, in contrast to *Find*, it allows you to search not exact but an approximate value with the minimum mean square error.

If you can't find more accurate roots using *Minerr* function, the function returns this approach. The function *Find* in this case returns an error message.

If for finding the solution of the system of equations the computational blocks *Given-Find* or *Given-Minerr* are used, so after receiving the results you need to verify their authenticity.

Examples of practical implementation of the computing unit *Given-Minerr* and one way of checking are presented in the Figure 3.40.

$$x := 0 \qquad y := 0 \qquad z := 0$$

Given

$$x - y - 3z = 3$$
$$3x + 4y - 5z = -8$$
$$2y + 7z = 17$$
$$Minner(x, y, z) = \begin{pmatrix} 9.634 \\ -4.561 \\ 3.732 \end{pmatrix}$$

Checking

$$x := 9.634 \qquad y := -4.561 \qquad z := 3.732$$
$$x - y - 3z = 2.9999$$
$$3x + 4y - 5z = -8.002$$
$$2y + 7z = 17.002$$

Figure 3.40 – The usage of the computing unit *Given-Minerr*

Список використаних джерел

References

1. MathCAD: Руководство пользователя: MathCAD 6.0; Mathcad PLUS 6.0 [Текст] / пер. с англ. – М.: Филинъ, 1996.- 712 с.
2. Борисенко С.Д. Стійкість розв'язків систем диференціальних рівнянь : навчальний посібник / С.Д. Борисенко, М.Є.Дудкін. – К.: НТУУ «КПІ», 2000. – 15 с.
3. Данилов Ю. А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение / Ю.А. Данилов. – М.: Постмаркет, 2001. – 189 с.
4. Моделирование экономической динамики [Текст] : Учебное пособие / Т. С. Клебанова, Н. А. Дубровина, О. Ю. Полякова [и др.]; [2-изд., стереотип]. – Х.: ИД «ИНЖЭК», 2005. – 244 с.
5. Новожилова М.В. Моделювання економічної динаміки. Навчально-методичний посібник для самостійної роботи / М.В. Новожилова, П.М. Коюда, І. А. Чуб. – Харків: ХДТУБА, 2006. – 140 с.
6. Плис А.И. MathCAD: математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина – М.: Финансы и статистика, 1999. – 656 с.

ДЛЯ НОТАТКІВ

Навчальне видання

КАДІЄВСЬКИЙ В.А.
ПЕРХУН Л.П.
БРАТУШКА С.М.
СИНЯВСЬКА О.О.

СТІЙКІСТЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

(Навчальний посібник)

(Українською та англійською мовами)

За редакцією авторів

Підписано до друку 10.11.14. Формат 60x84/16. Гарнітура Times Roman.
Папір офсетний. Друк офсетний. Умовн.-друк. арк. 6,98. Обл-.вид.-арк. 2,77.
Тираж 300 примірників. Зам. 10/11. Ціна договірна.

Видавництво: ПП Вінниченко М.Д., ФОП Литовченко Є.Б.

40022, м. Суми, вул. Газети «Правда», 9/10.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК. № 2314 від 14.10.2005 р. м. Київ.

Віддруковано ФОП Литовченко Є.Б.
40030, м. Суми, вул. Кузнечна, 6/4.

Свідоцтво про державну реєстрацію ФОП.
Серія В02. № 754976.