Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут

ІНФОРМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
У чотирьох частинах
Частина 4
«**Обробка інженерної інформації за допомогою математичного пакета MathCAD**»
для студентів спеціальності
6.090220 «Обладнання хімічних виробництв та підприємств будівельних матеріалів»
усіх форм навчання

Затверджено
на засіданні кафедри системотехніки та інформаційних технологій як конспект лекцій з дисципліни «Інформатика».
Протокол № 1 від 31. 08. 2007 р.

Суми
Видавництво СумДУ
2010

Інформатика: конспект лекцій у чотирьох частинах. – Частина 4: Обробка інженерної інформації за допомогою математичного пакета MathCAD / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010 – 123 с.

Кафедра системотехніки та інформаційних технологій

Зміст

Вступ

Сьогодні вміння розв'язувати різноманітні інженерні задачі з використанням новітніх комп'ютерних технологій є досить важливим. Наявність спеціальної літератури, різноманітних рекомендацій та посібників не забезпечують в повному обсязі самостійну роботу студентів інженерних спеціальностей. Тому даний конспект лекцій, присвячений вивченню основ програмного та апаратного забезпечення ОС Windows, є актуальним та необхідним.

Конспект лекцій «Інформатика» складається з чотирьох частин. Перша частина має назву «Апаратне та програмне забезпечення ОС Windows». Ця частина складається з чотирьох розділів та містить матеріал з основ інформатики, основ побудови персональних комп'ютерів, основ роботи в операційній системі Windows, сервісних та службових програм для обслуговування персональних комп'ютерів.

Друга частина має назву «Файловий менеджер та комп'ютерні мережі» та містить матеріал з основ роботи в комп'ютерній мережі, побудованої в операційній системі Windows, роботі з файловим менеджером Total Commander та основ теорії алгоритмізації.

Третя частина має назву «Обробка інженерної інформації за допомогою пакета MS Office» та складається з десяти лекційних тем. Матеріал частини містить інформацію щодо роботи у програмах Word, Excel, Access. Перші лекції присвячені основам роботи у текстовому редакторі, роботі з графічними об'єктами та таблицями у текстовому редакторі. Інші лекції містять матеріал про основні відомості табличного редактору Excel, про функції електронної таблиці Excel та робота з ними, графічне представлення даних, принципи розв'язування прикладних задач в Excel та поняття про макроси. Останні лекції містять матеріал щодо роботи у системі управління базами даних Access.

Четверта частина має назву «Обробка інженерної інформації за допомогою математичного пакета MathCAD» та відповідно містить матеріал щодо обробки інженерної інформації у математичному пакеті MathCAD.

Конспект лекцій містить рисунки із зображенням проміжних кроків у Word, Excel, Access, а також результатами розв'язування типових задач. Надаються детальні пояснення про хід розв'язування задач, що дозволяє студентам самостійно вивчати теоретичний матеріал, готуватися до виконання практичних та самостійних робіт.

У конспекті лекцій описується російськомовна версія програми Office 2003, тому пункти меню програми написані російською мовою жирним шрифтом.

Лекція № 11

ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТИ ПРОГРАМИ MATHCAD

Мета лекції: ознайомитися з основними елементами математичного пакета MathCAD.

Питання лекції:

1 Загальні характеристики математичного пакета MathCAD.

2 Головне меню MathCAD.

3 Склад панелі **Математика**.

4 Оформлення документів у MathCAD.

1 Загальні характеристики математичного пакета MathCAD

1.1 Визначення математичного пакета MathCad

Математичний редактор MathCad – це інтегрований пакет, за допомогою якого можна робити математичні розрахунки, зосередивши увагу тільки на математичній стороні задачі.

MathCad поєднує в собі елегантність математичного написання документа з обчислювальною потужністю персонального комп'ютера.

MathCad створений як інструмент розрахунків для інженерів. Він не призначений для професійних математиків – для їх є інші системи. MathCad не призначений для програмування складних задач, для цього існує система Mathlab та інші мови програмування. Він створений як потужний інструмент, який дозволяє розв'язувати рутинні задачі, які виникають в інженерній практиці:

- розв'язок алгебраїчних рівнянь;
- розв'язок систем алгебраїчних рівнянь;

- розв’язок диференціальних рівнянь;
- аналіз функцій;
- пошук екстремумів;
- числове та аналітичне диференціювання;
- побудова графіків.

Головною перевагою MathCad є легкість та наглядність програмування задачі, відображення складних математичних виразів в тому вигляді, в якому вони звичайно записуються на аркуші паперу, тобто відсутність спеціальної мови програмування, простота використання, можливість створення засобами MathCad високоякісних технічних звітів з таблицями, графіками та текстом.

1.2 Огляд версій MathCad

Одна з перших версій MathCad 2.5 фактично являє собою мікрокалькулятор для роботи в DOS. Версія MathCad 5 працювала вже в Windows та включала в себе всі групи функцій, які є в останніх версіях. Але функцій у кожній групі було менше, ніж зараз. Однак у MathCad 5 є корисна особливість – ця версія дозволяє вручну встановлювати параметри стилів, вибрати кирилицю як основний шрифт в усіх стилях.

Важливим кроком в розвитку MathCad стала версія MathCad 7, в котрій була відпрацьована проста та зручна версія.

На жаль в останніх версіях під впливом професійних математиків простота та зручність відійшли на інший план. Пріоритетом стало збільшення точності розрахунків та чітке дотримання правил математики. Від версії до версії зростала кількість обмежень на використання розмінностей та деяких вбудованих функцій.

Але для студентів та інженерів висока точність розрахунків не є пріоритетною. Інженерні розрахунки, як правило, є наближеними в силу розкиду даних, неточного знання умов експлуатації конструкцій та довільного вибору коефіцієнтів запасу.

Наприклад, самою повільною операцією в MathCad є операція інтегрування. Методи, що застосовуються в алгоритмі

MathCad для інтегрування точні, але повільні. Використання більш точного, але більш простого методу трапецій дозволяє збільшити швидкість інтегрування в десятки разів.

В останніх версіях з'явилося багато нових вбудованих функцій, але і багато нових обмежень. У версії MathCad 8 з'явилася функція розв'язку звичайних диференційних рівнянь Odesolve. У MathCad 2000 з'явилося вісім нових функцій регресії, що дозволяють одержати коефіцієнти рівнянь, апроксимуючого масиву даних. У MathCad 2001 з'явилися функції перетворення координат: декартових у полярні, циліндричні у сферичні та навпаки. В MathCad 11 з'явилися дві нові функції розв'язку диференціальних рівнянь в частих похідних, Pdesolve та Numol, але дозволяючи розв'язувати лиш самі прості рівняння с двома невідомими. В версіях MathCad 12, 13 та 14 з'явився новий напрямок розв'язку обчислювальної системи. Фірма Mathsoft перейшла на нові Net-технології створення MathCad-файлів. Мабуть тому MathCad 12 має не виключні помилки. В версіях MathCad 13 та 14 сумісність версій відновлена.

2 Головне меню MathCad

2.1 Склад головного вікна

Головне вікно системи MathCad показано на рис. 11.1. У результаті налаштування, воно може набути вигляду, зручного для користувача.

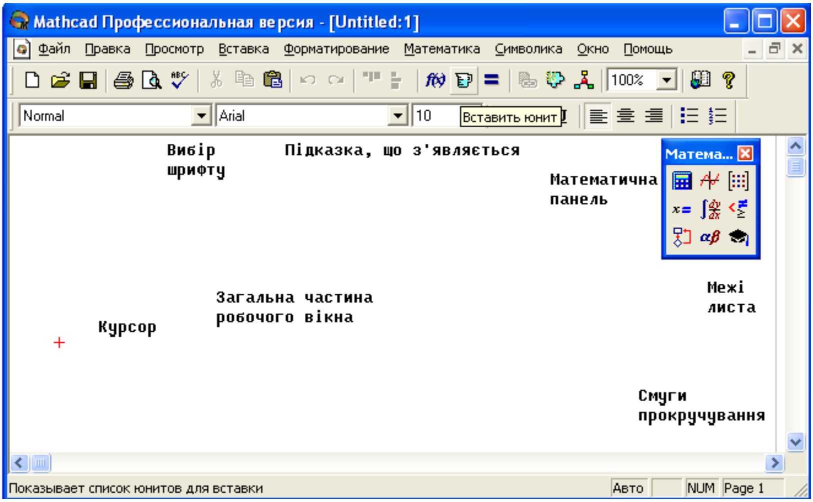


Рисунок 11.1 – Головне вікно системи MathCad

Верхній рядок включає (рис. 11.2) заголовок з ім'ям відкритого документа, кнопки закриття, відкриття та згортання документа.

Рисунок 11.2 – Рядок заголовка вікна

У рядку 2 (рис. 11.3) знаходиться головне меню системи, що дає доступ до всіх функцій та команд програми. В правому куті знаходяться кнопки керування відкритим активним вікном документа.

Рисунок 11.3 – Головне меню системи

Вигляд меню ***Файл***, зображене на рис. 11.4.

Призначення команд меню ***Файл***:

Новый – відкрити вікно для нового документа;

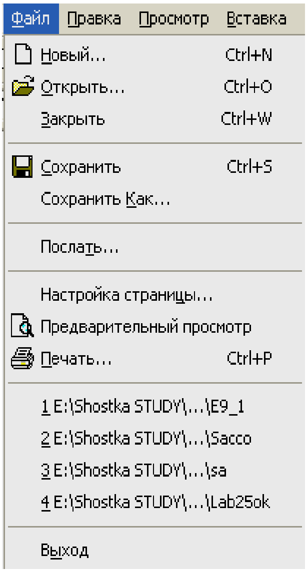


Рисунок 11.4 – Меню Файл

Открыть – відкрити існуючий документ;

Закрыть – закрити існуючий документ;

Сохранить – зберегти на диску за старою адресою;

Сохранить как… – зберегти на диску з новим ім’ям;

Послать – відправити засобами електронної пошти;

Настройки страницы – встановити параметри сторінки;

Предварительный просмотр – перегляд сторінки перед друкуванням;

Печать – друкування документа;

Выход – вихід з MathCad.

У рядку 3 (рис. 11.5) знаходиться панель інструментів ***Стандартная***, яка дублює функції та команди головного меню для більш швидкого доступу до них.

Рисунок 11.5 – Панель інструментів ***Стандартная***

У рядку 4 (рис. 11.6) знаходиться панель інструментів ***Форматирование***, яка призначена для форматування тексту документа: вибір стилю шрифту, вибір самого шрифту та його розмірів, вибір форми шрифту (жирний, курсив, підкреслений), вирівнювання тексту (по лівому краю, по правому краю, посередині), та вибір параметрів списку (маркований, нумерований).

Рисунок 11.6 – Панель інструментів ***Форматирование***

При запуску програми автоматично з'являється панель інструментів ***Математики*** (рис. 2.1), яка призначена для здійснення різного роду математичних обчислень.

Головне вікно програми MathCad містить основну частину вікна, межі листа, смуги прокручування та рядок стану (рис. 11.1). Курсор в основній частині робочого вікна відображається у вигляді знаку «+». При підведенні курсора до панелі інструментів з'являється підказка.

Пунктирна лінія нижньої межі листа з'являється при вертикальній прокрутці і при накладанні на її будь-якого об'єкта MathCad вона може бути зсунута на відміну від бокової межі.

2.2 Склад головного меню

Головне меню математичного пакета MathCAD (рис. 11.3) складається з таких меню: ***Файл, Правка, Просмотр, Вставка, Форматирование, Математика, Символика, Окно, Помощник.***

Меню ***Файл*** було розглянуто вище.

Меню ***Прака*** (рис. 11.7) охоплює команди виправлення тексту:

- відміна та повернення виконаних дій для раціональної організації редагування;
- копіювання, переміщення в буфер, вставка звичайна та спеціальна;
- видалення фрагментів та виділення всіх об'єктів;
- пошук, заміна та перехід на вказану сторінку;
- перевірка орфографії;
- редагування зв'язків з об'єктом та редагування впровадженого зовнішнього об'єкта в тому додатку, в якому він утворювався.

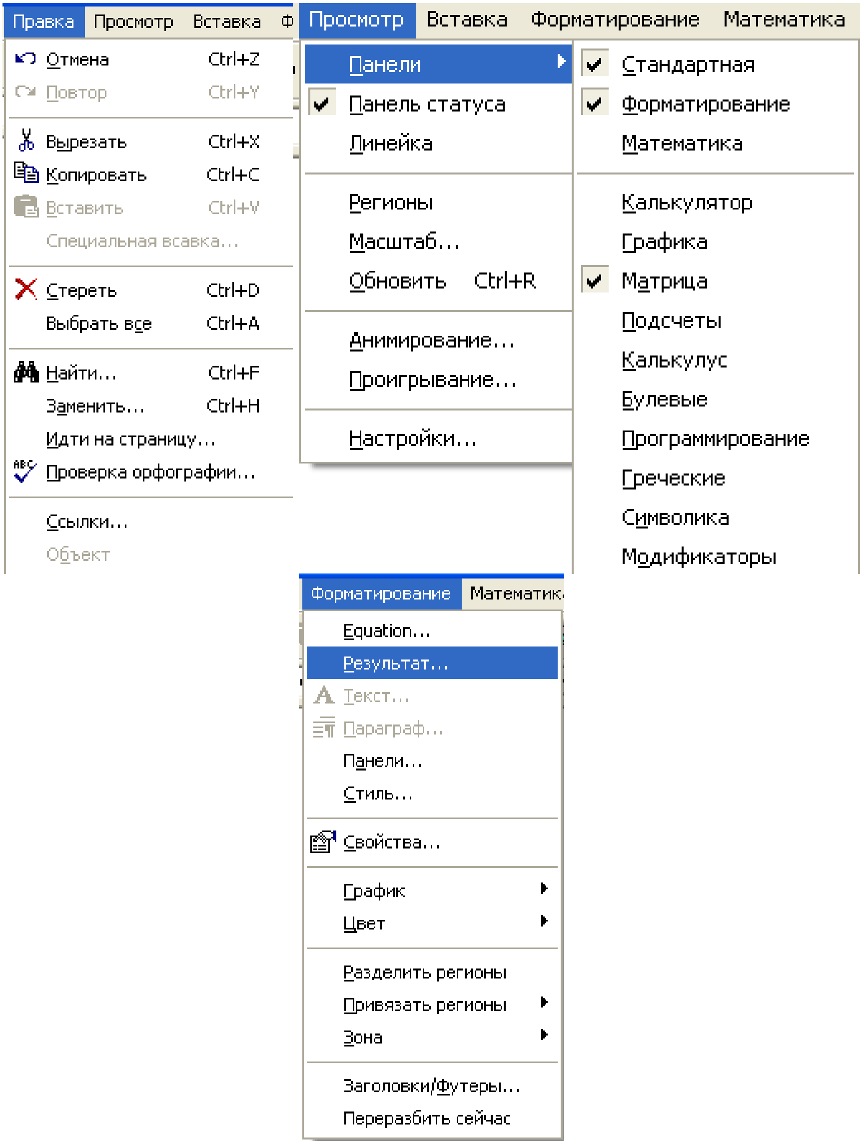


Рисунок 11.7 – Панелі інструментів Правка, Просмотр, Форматирование

Меню ***Просмотр*** (рис. 11.7) служить для керування інтерфейсом, зовнішнім виглядом робочого поля програми та для виконання таких дій:

- впровадження панелі інструментів;
- впровадження лінійки;
- утворення регіонів;
- масштабування та оновлення виду екрана;
- ефекти анімації;
- загальні налаштування та налаштування мережі Інтернет.

Перша група команд (*Панели*, рис. 11.7) містить додаткове підменю для встановлення додаткових панелей: ***Стандартная, Форматирование, Математика***, а також для вибіркового ввімкнення через систему меню та контролю встановлення всіх інструментальних компонентів. Дія завершується вибором потрібного пункту в додатковому меню, яке потім відображається в головному вікні програми.

Меню ***Формат*** (рис. 11.7) використовується для зміни набору характеристик чи атрибутів основних об'єктів. Це меню дозволяє покращити якість оформлення робочого документа:

- відформатувати текст, формули та графіки;
- розділити та вирівняти області в двох напрямках;
- перенести лінію розбиття з ліквідацією перетину області

Меню ***Вставка*** (рис. 11.8) вводить у документ такі об'єкти:

- графіки заданих типів;
- шаблони матриць, вбудованих функцій, картинки;
- області введення тексту та математичних виразів;
- зовнішні об'єкти, керуючі елементи, посилання та гіперпосилання.

Наприклад, підменю *Функція* призначене для того, щоб вставити вбудовану функцію з запропонованого списку імен, що розділений за категоріями (рис. 2.9)

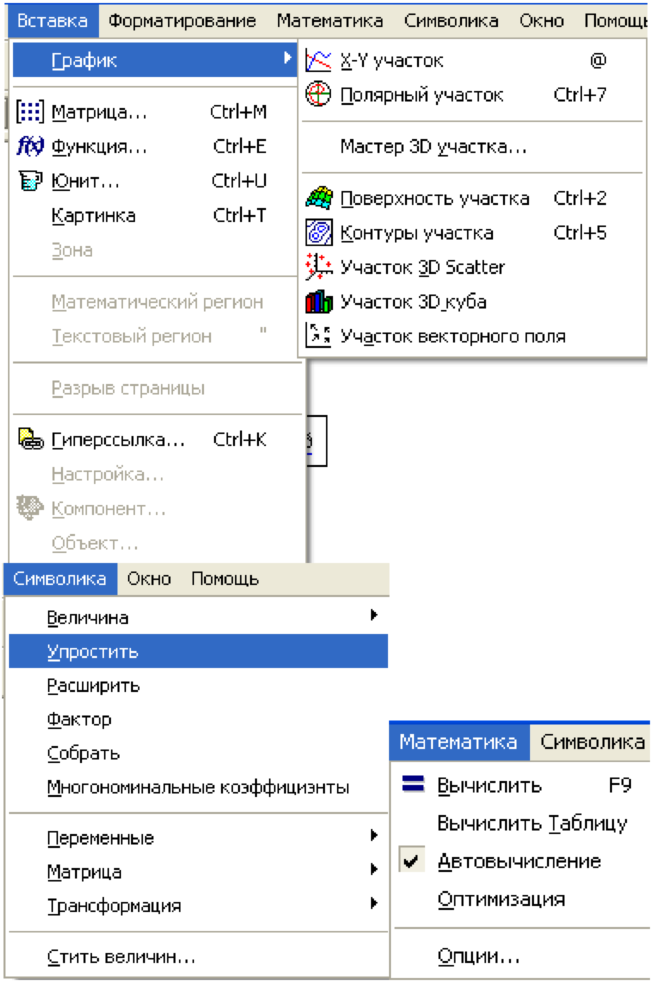


Рисунок 11.8 – Панелі інструментів Вставка, Символика, Математика

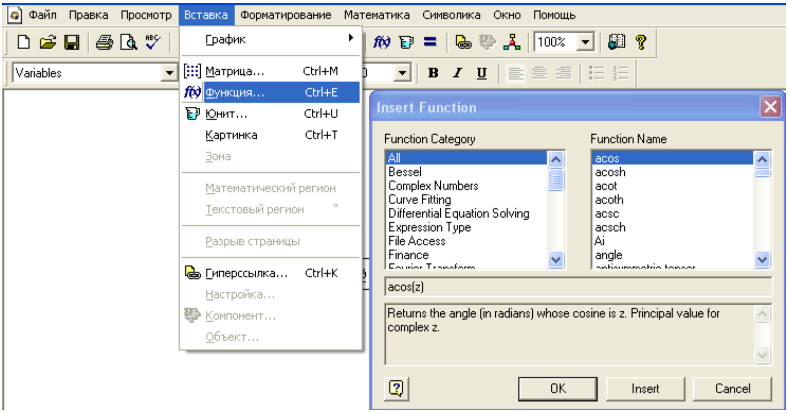


Рисунок 11.9 – Діалогове вікно для впровадження функції

При виборі функції в двох нижніх текстових полях діалогового вікна з’являється повідомлення про використані позначення змінних та про синтаксис виразу, яке потім з’явиться в робочому вікні в формі шаблону.

Меню ***Символика*** (рис. 2.8) виконує такі дії:

- символьні розрахунки виразів;
- операції зі змінними та матрицями;
- інтегральні перетворення;
- налаштування стилю представлення символьних обчислень

Меню ***Математика*** виконує такі операції:

- обчислення та автообчислення;
- оптимізацію;
- налаштування опцій при обчисленні.

Меню ***Окно*** керує розміщенням вікон документів програми, які можуть розташовуватися таким чином:

- вікна каскадом;
- вікна по горизонталі;
- вікна по вертикалі.

Меню ***Помощь*** організовує виклик довідкової інформації, інформацію про версію програми, а також доступ до ресурсів та електронних книг.

3 Склад панелі Математика

3.1 Загальний вид панелі *Математика*

Панель інструментів ***Математика*** зображена на рис. 11.10

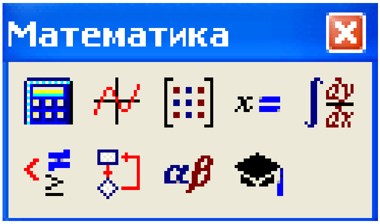
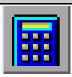
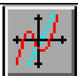
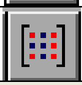
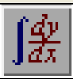
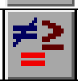


*Рисунок 11.10 – Панель інструментів **Математика***

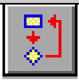
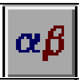
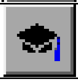
Якщо панель інструментів ***Математика*** не з’являється автоматично, то її можна налаштувати завдяки використанню меню ***Просмотр→Панели→ Математика***.

Склад панелі інструментів ***Математика*** та призначення її елементів показаний у таблиці 11.1.

*Таблиця 11.1 – Склад панелі інструментів **Математика**.*

Значок	Назва	Виконувана дія
	Панель калькулятор	Вставка шаблонів загальних математичних операцій, цифр, знаків арифметичних операцій
	Панель графики	Дозволяє створювати графіки та вставляти шаблони графіків
	Панель векторов и матрицы	Вставка шаблонів векторів та матриць та операцій над ними
	Панель оценки	Це панель присвоєння значень та виводу результатів розрахунків
	Панель исчислений	Вставка шаблонів диференціювання, інтегрування та додавання
	Булевая панель	Вставка логічних операторів

Продовження таблиці 11.1

Значок	Назва	Виконувана дія
	Панель программирования	Операторі, що необхідні для створення програмних модулів
	Панель греческих символов	Панель, що дозволяє вставляти грецькі літери
	Панель символических кодовых слов	Вставка операторів символьного числення

3.2 Панель Калькулятор

Панель ***Калькулятор*** (рис. 11.11) включає в себе цифри від 0 до 9, знаки алгебраїчних операцій, деякі елементарні функції та загально важливі константи.

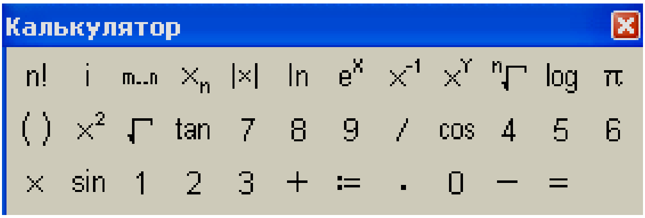


Рисунок 11.11 – Панель Калькулятор

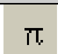
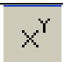
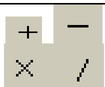
Активізація кнопок панелі виводить символи з позиціями для виведення інформації. Позиції для виведення позначені затушованими прямокутниками. При введені в позицію необхідного виразу затушований прямокутник зникає.

Призначення деяких кнопок панелі інструментів ***Калькулятор*** показана в таблиці 11.2.

Таблиця 11.2 – Призначення деяких кнопок панелі інструментів ***Калькулятор***

Кнопка	Назва	Виконувана дія
$\sqrt{\ }$	*Квадратный корень*	Для введення квадратного кореня
$\sqrt[n]{\ }$	*Энный корень*	Для введення кореня n-го порядку
$\lvert x \rvert$	*Абсолютное значение*	Бере модуль числа
:=	*Присвоить*	Виконує операцію присвоєння функції
=	*Равно*	Використовується для виведення на екран значення змінної
m..n	*Переменная диапазона*	Означає присвоєння змінній зліва ряду послідовних значень
( )	*Круглые скобки*	Відповідає виразу, взятому в дужки
x_n	*Нижний индекс*	Забезпечує визначення елементів індексної змінної
.	*Десятичная точка*	Забезпечує розділення цілої та дробової частини числа
e^x	*Экспоненсыал*	Використовується для взяття експоненти до степеня
ln	*Натуральный логарифм*	Використовується для обчислення натурального логарифму
x^{-1}	*Инверсия*	Використовується для розрахунку інверсного значення числа
n!	*Факториал*	Використовується для розрахунку факторіала
log	*Логарифм*	Використовується для розрахунку логарифма

Продовження таблиці 11.2

Кнопка	Назва	Виконувана дія
	*Пи*	Використовується для введення числа π (3.14), яке також можна вивести за допомогою комбінації клавіш Crtl+Shift+P
	*Возведение в степень*	Використовується для взяття деякого числа в довільний степінь, чого також можна досягти за рахунок використання комбінації клавіш Shift+^
	*Тангенс, косинус, синус*	Використовуються для розрахунку тригонометричних функцій тангенсу, синуса та косинуса кута
	*Прибавление, вычитание Умножение, деление*	Використовуються для виконання арифметичних операцій додавання, віднімання, множення та ділення

Наприклад, активізувавши першу кнопку з таблиці 11.2 на панелі інструментів Калькулятор одержимо на екрані заготовку . Якщо в позицію введення, відзначену затушованим прямокутником, вести, наприклад x, то одержимо .

3.3 Панель Исчислений

Панель ***Исчислений*** зображена на рис. 11.12

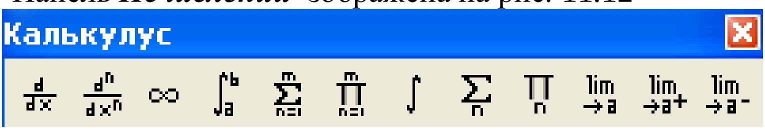


*Рисунок 11.12 – Панель **Исчислений***

Призначення кнопок панелі ***Исчислений*** наведені в таблиці 11.3.

Таблиця 11.3 – Призначення кнопок панелі ***Исчислений***

Кнопка	Назва	Операція
$\frac{d}{dx}$	Производная 1-го порядка	Використовується для обчислення похідної 1-го порядку
$\frac{d^n}{dx^n}$	Производная n-го порядка	Використовується для обчислення похідної n -го порядку
∞	Бесконечность	Використовується для завдання нескінченності
$\int_a^b$	Определенный интеграл	Використовується для обчислення визначено інтегралу
$\sum_{n=1}^{m}$	Суммирование	Додавання діапазону чисел
$\prod_{n=1}^{m}$	Произведение	Добуток діапазону чисел
$\int$	Неопределенный интеграл	Використовується для обчислення невизначеного інтеграла
$\sum_{n}$	Суммирование переменной диапазона	Використовується для додавання ранжованого діапазону
$\prod_{n}$	Произведение переменной диапазона	Використовується для добутку ранжованого діапазону
$\lim_{\to a}$	Двусторонний предел	Використовується для обчислення границь функцій
$\lim_{\to a^+}$	Верхний придел	Використовується для обчислення верхньої границі функції
$\lim_{\to a^-}$	Нижний придел	Використовується для обчислення нижньої границі функції

3.4 Панель ***Матриця***

Панель ***Матриця*** зображена на рис. 11.13

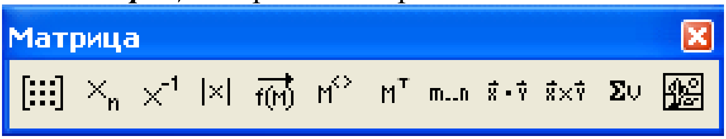
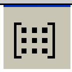
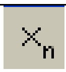
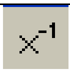
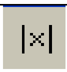
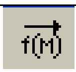
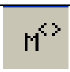
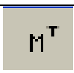


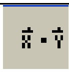
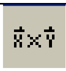
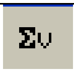
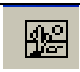
Рисунок 11.13 – Панель ***Матриця***

Матричні оператори використовують для здійснення різноманітних матричних та векторних перетворень. Призначення кнопок панелі ***Матриця*** показані в таблиці 11.4.

Таблиця 11.4 – Призначення кнопок панелі ***Матриця***

Кнопка	Назва	Призначення	Комбінація клавіш
	Матрица	Використовують для завдання розміру матриці	Ctrl+M
	Нижний индекс	Використовують для завдання нижнього індексу	[
	Инверсия	Використовують для обчислення інверсного значення	
	Эпитоп	Використовують для обчислення визначника матриці або модуля вектора	
	Векторизация	Перетворення величини на векторну	Ctrl+-
	Матричный столбец	Використовують для виділення матричного стовпця з матриці	Ctrl+6
	Транспонация матрицы	Використовують для здійснення операції транспонування матриці	Ctrl+1

Продовження таблиці 11.4

Кнопка	Назва	Призначення	Комбінація клавіш
	Переменная диапазона	Використовують для завдання границь діапазону ранжованої змінної	;
	Скалярное произведение	Використовують для скалярного добутку	*
	Векторное произведение	Використовують для матричного (векторного) добутку	Ctrl+8
	Векторная сумма	Використовують для знаходження векторної суми	Ctrl+4
	Рисунок	Використовують для впровадження рисунка формату .bmp в документ програми	Ctrl+T

3.5 *Булевая панель*

Булевая панель (рис. 11.14) використовується для здійснення логічних операцій. Призначення кнопок панелі показано в таблиці 11.5.

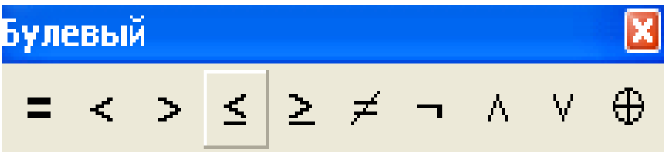


Рисунок 11.14 – ***Булевая панель***

Результатом дії логічних чи булевих операторів є тільки числа 0 (якщо логічний вираз, що записаний за їх допомогою є Істина) чи 1 (якщо логічне значення Хибне).

Таблиця 11.5 – Призначення кнопок ***Булевая панель***

Кнопка	Назва	Призначення	Комбінація клавіш
=	Равно	Логічна операція дорівнює.	Ctrl+
<	Меньше чем	Логічні операції порівняння операторів	<
>	Больше чем		>
≤	Меньше чем или равно		Ctrl+9
≥	Больше чем или равно		Ctrl+0
≠	Не равно	Логічна операція не дорівнює.	Ctrl+3
¬	Не	Логічна операція заперечення, яка інвертує будь-яку логічну дію	Ctrl+Shift+1
∧	И	Логічна операція И, яка повертає значення Істина, коли всі вирази виконуються або істині	Ctrl+Shift+7
∨	Или	Логічна операція ИЛИ, яка повертає значення Істина, коли виконується хоча б один з виразів або один вираз приймає значення істина	Ctrl+Shift+6
⊕	Эксключив	Логічна операція, яка повертає 1, якщо хоча б один з виразів, але не обидва ненульові	Ctrl+Shift+5

Розглянемо приклади використання логічних операцій:

1. Оператори порівняння

$2 = 3 = 0 \qquad 7 = 7 = 1 \qquad 0 \neq 0 = 0$

$5 > 1 = 1 \qquad 3 < \infty = 1 \qquad 3 > 3 = 0 \qquad 3 \geq 3 = 1$

2. Логічні оператори

$1 \vee 0 = 1 \qquad 0 \vee 0 = 0 \qquad 1 \vee 1 = 1$

$1 \wedge 0 = 0 \qquad 0 \wedge 0 = 0 \qquad 1 \wedge 1 = 1$

$1 \oplus 0 = 1 \qquad 0 \oplus 0 = 0 \qquad 1 \oplus 1 = 0$

$\neg 1 = 0 \qquad \neg 0 = 1$

3.6 Панель *Греческих символов*

Панель ***Греческих символов*** зображена на рис. 11.15.

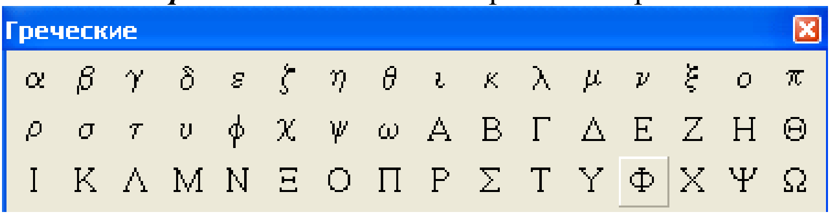


Рисунок 11.15 – Панель ***Греческих символов***

3.7 Панель *Оценки*

Панель ***Оценки*** (рис. 11.16) використовується для завдання символів присвоєння та двійкових операторів.

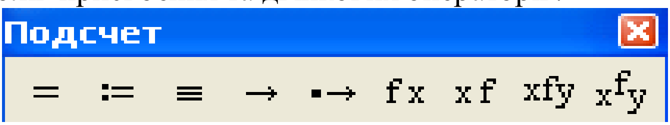


Рисунок 11.16 – Панель ***Оценки***

Призначення кнопок панелі ***Оценки*** подані в таблиці 11.6.

Таблиця 11.6 – Призначення кнопок панелі ***Оценка***

Кнопка	Назва	Призначення	Комбінація клавіш
$=$	Численно равно	Використовується при рівності	=
$:=$	Определение	Використовується для присвоєння значення однієї змінної значення іншої змінної	:
$\equiv$	Глобальное определение	Використовується для глобального визначення змінної	Shift+~
$\rightarrow$	Значение символической величины	Використовується для одержання результату обчислень символьної величини	Ctrl+.
$\blacksquare\rightarrow$	Символическая оценка	Використовується для оцінки результатів обчислення символьної величини	Ctrl+Shift+.
f x	Оператор перед	Використовується, коли оператор діє зліва	
x f	Оператор после	Використовується, коли оператор діє справа	
xfy	Оператор внутри	Використовується, коли оператор діє всередині	
$_x{}^f{}_y$	Оператор дерево	Використовується, коли оператор у вигляді дерева	

3.8 Панель *Символика*

Панель ***Символика*** (рис. 11.17) використовується для обчислення функцій у символьному вигляді.

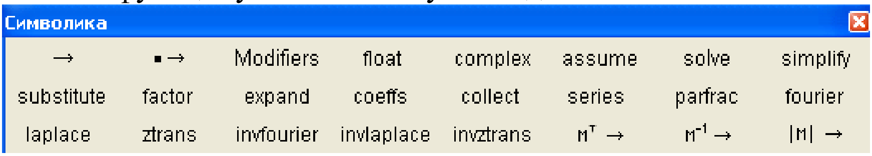


Рисунок 11.17 – Панель ***Символика***

3.9 Панель *Программирование*

Панель ***Программирование*** (рис. 11.18) використовується для здійснення операцій програмування.

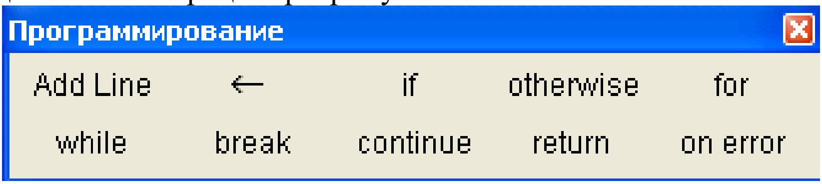


Рисунок 11.18 – Панель ***Программирование***

3.10 Панель *Графики*

Панель ***Графики*** (рис. 11.19) використовують для побудови графіків функцій.

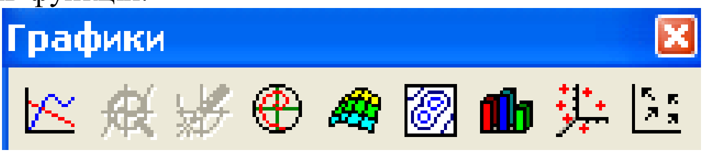


Рисунок 11.19 – Панель ***Графики***

4 Оформлення документів у MathCAD

4.1 Способи оформлення документа

Розрахунки в MathCAD можуть бути оформлені по-різному:

1. Друковані матеріали – документи роздруковані на принтері.
2. Web-сторінки – документи, що переглядаються за допомогою браузерів, які розміщені в Інтернеті.
3. Документи MathCAD – самого додатка MathCAD.
4. Електронні підручники – оформлені спеціальним чином інтерактивні документи MathCAD.
5. Фрагменти документів, які експортуються та оформлюються в інших додатках, наприклад, у документах Microsoft Word.

Перелічимо елементи оформлення документів, які можна застосовувати в MathCAD як для проведення математичних розрахунків, так і для дизайну оформлення:

- текстові області;
- математичні області чи формули;
- графіки чи графічні області;
- компоненти інших додатків;
- впроваджені об'єкти.

За межами границь областей знаходиться пуста частина документа. Окрім перелічених часто бувають корисними використання таких додаткових елементів оформлення:

- закриті та виділені області – колонтитули;
- розмітка документів – розриви сторінок, стилі та поля;
- посилання;
- гіперпосилання.

4.2 Розміщення елементів оформлення

Важливим елементом оформлення розрахунків є правильне та зрозуміле розміщення об'єктів за документом MathCAD.

Для впровадження того чи іншого елемента потрібно попередньо вибрати місце документа, куди він буде впроваджений. Це здійснюється завдяки курсора введення. Потім необхідно скористатися відповідним пунктом меню Вставка, або однією з панелей інструментів, або як для введення формули просто почати вводити символи з клавіатури.

Компоненти вставляються за допомогою пункту меню ***Вставка→Компонент***, а впроваджений об'єкт можна вставити, розмістивши його в буфер обміну з області іншого додатка, та після перемикання в MathCAD, натиснути комбінацію клавіш Ctrl+V.

4.3 Переміщення областей по документу

Щоб змінити місце розташування будь-якої області в документі MathCAD необхідно:

1. Натиснути в її межах мишею. Після цього область буде виділена, а курсор, опинившись усередині неї, набуде форми ліній введення.
2. Не натискаючи кнопок, необхідно помістити вказівник миші на границю області, щоб він змінив вигляд стрілки на форму руки.
3. Тепер необхідно натиснути ліву кнопку миші та, утримуючи її, перетягнути об'єкт на нове місце.

Але слід пам'ятати, що порядок слідування формул та графіків у документі впливає на розрахунки.

4.4 Введення тексту

Для введення тексту в документ необхідно в головному меню вибрати команду ***Вставка→Текстовый регион***, також можна ввести з клавіатури символ “ (кавичка). При цьому на екрані з'явиться текстова область, в якій можна друкувати текст.

Ще текст можна друкувати, змінивши латинський шрифт на російський та друкувати текст прямо в математичній області. Коли надруковане перше слово, при натисканні клавіші пробілу область з надрукованим словом автоматично з математичної перетворюється в текстову.

У текстову область можна вставляти математичну область. Для цього в головному меню MathCAD необхідно вибрати команду ***Вставка→ Математический регион***. Вставлена математична область бере участь в обчисленнях на рівні з іншими математичними виразами.

Шрифти MathCAD погано сприймають кирилицю. Зокрема, зручний по роботі в Word шрифт Times New Roman кирилицю не сприймає. З кирилицею працюють шрифти System, Ms Sans Serif та Fixedsys.

Завдяки панелі інструментів ***Форматирование*** можна форматувати текст та математичні формули.

Висновок

Отже, математичний пакет MathCAD має дуже зручний та наглядний апарат для проведення різноманітних розрахунків, що реалізуються завдяки панелі інструментів ***Математика*** та зручний інструментарій для оформлення документів.

Лекція № 12

ОСНОВИ РОБОТИ В MATHCAD

Мета лекції: Ознайомитися з основними принципами роботи математичного пакета MathCAD.

Питання лекції:

1 Елементарні математичні розрахунки у MathCAD.
2 Спеціальні обчислення у MathCAD.
3 Символьні обчислення у MathCAD.
4 Математичні та векторні операції у MathCAD.

1 Елементарні математичні розрахунки MathCAD

1.1 Типи даних у MathCad

Усі математичні записи на робочому полі документа MathCad візуально знайомі кожній людині ще зі школи. При роботі математичного процесора кожна незаблокована математична формула в документі MathCad приймається до виконання.

Розрахунки в MathCad здійснюються над даними, що подані в типовій формі у відповідності з характером операторів та використовуваних функцій.

Система MathCad підтримує такі типи даних:

1. *Іменована константа*

   Число π – це числова іменована константа. Найбільш важливі константи мають власне позначення (наприклад e, % та ∞).

2. *Іменовані змінні*

   Іменовані змінні діляться на звичайні та системні. Визначаючі їх імена називаються ідентифікаторами, які складаються з латинських чи грецьких літер. Звичайним змінним хоча б один раз повинні бути присвоєні числові значення, які під час роботи можуть змінюватися. Системні змінні одержують раніш визначені системою початкові значення.

3. *Ранжовані змінні*

Ранжовані змінні є допоміжними та забезпечують діапазон значень в указаних межах при заданому кроці зміни. MathCad обчислює вирази з такою зміною по всіх її значеннях. Ітерації здійснюються без явного завдання циклу. Збереження всієї сукупності результатів досягається за рахунок індексації утворюючого масиву.

4. *Матриці та вектори*

Матриці та вектори – це одномірні чи двомірні масиви даних. Перейти до них у межах багатьох задач вдається, якщо використовувати ранжовані змінні.

5. *Файлові дані*

Дані можуть зберігатися окремо від документа в іншому файлі, що визначає суттєву різницю при роботі з ними. Файли корисні при збереженні великих об’ємів табличних даних.

Змінним надають значення за допомогою спеціального оператору присвоєння (:=). Ім’я змінної в шаблоні (:=)записується зліва. Оператор присвоєння передбачає передачу конкретного значення чи математичного виразу справа на ліво. Якщо в будь-якій формулі числових розрахунків не визначена та чи інша зміна, то MathCad висвітлить її червоним кольором.

1.2 Проведення простих розрахунків у MathCad

Приклад 12.1. Необхідно визначити довжину кола L, якщо розрахункова формула має вид: $L = 2 \cdot \pi \cdot R$.

У MathCad розрахунок матиме вигляд, зображений на рис. 12.1

З рис. 1.1 видно, що обчислення здійснюється в три етапи. На першому етапі необхідно задати значення змінної радіуса кола R. На другому етапі необхідно ввести розрахункову формулу, де іменовану константу π вводимо завдяки панелі ***Греческие*** меню ***Математика.*** На останньому кроці необхідно набрати L та натиснути знак $=$ і MathCad видасть відповідь

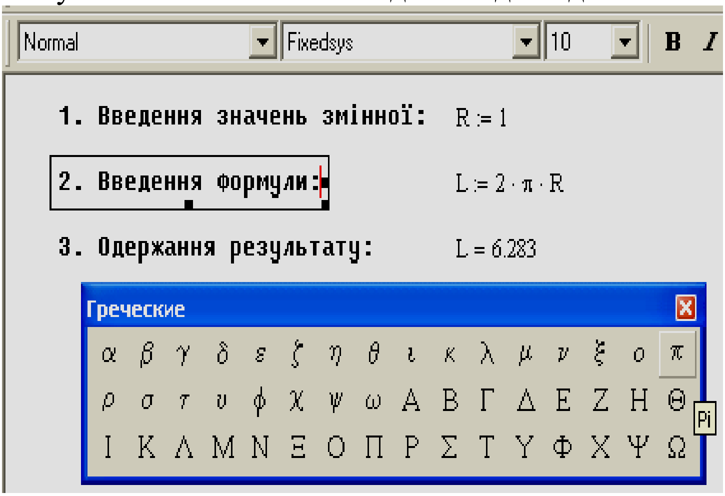


Рисунок 12.1 – Обчислення довжини кола

При введені пояснень українською мовою необхідно використовувати один із шрифтів, який розуміє кирилицю, наприклад, Fixedsys, інакше програма замість букв видасть незрозумілі ієрогліфи та значки.

Точність розрахунків можна встановити за допомогою меню ***Форматирование→Результат***. На вкладці Number Format вибрати пункт Decimal та в полі Number of decimal places виставити необхідну кількість знаків після крапки (рис. 12.2).

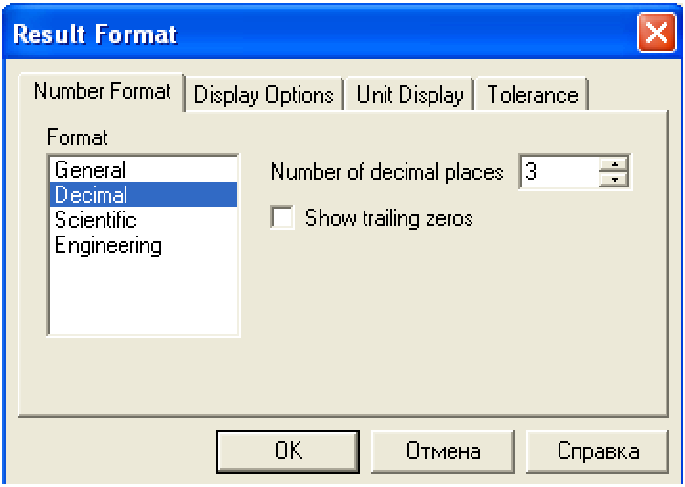


Рисунок 12.2 – Завдання потрібної кількості знаків після крапки

Приклад 12.2. Обчислити значення виразів:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{\sqrt[4]{1+\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\sqrt[4]{3}}}$, $3^{\sqrt{\sqrt{3}+5}}$, $e^{\log(5+1/3)}$;

$a=1,\quad b=3.22,\quad p=\pi$

2) $c=\dfrac{a+b}{2},\quad d=\dfrac{a-b}{2},\quad g=\sin(\dfrac{\pi}{2}),\quad f=\dfrac{c^2+d^2+g^2}{\sqrt{3}}$

У програмі MathCAD розв'язок даного прикладу має вид, зображений на рис. 12.3 та 12.4.

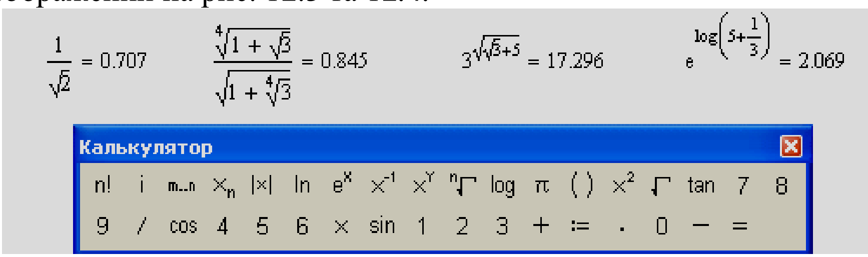
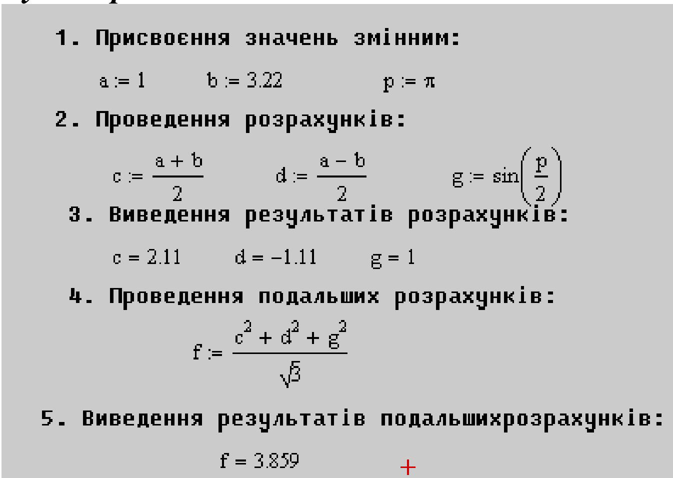


Рисунок 12.3 – Розв'язок першої частини прикладу 1.2

Набір виразів здійснюємо за допомогою панелі інструментів ***Калькулятор***.



1. Присвоєння значень змінним:

$a := 1 \qquad b := 3.22 \qquad p := \pi$

2. Проведення розрахунків:

$c := \frac{a+b}{2} \qquad d := \frac{a-b}{2} \qquad g := \sin\left(\frac{p}{2}\right)$

3. Виведення результатів розрахунків:

$c = 2.11 \qquad d = -1.11 \qquad g = 1$

4. Проведення подальших розрахунків:

$f := \frac{c^2 + d^2 + g^2}{\sqrt{3}}$

5. Виведення результатів подальшихрозрахунків:

$f = 3.859$

Рисунок 12.4 – Розв’язок другої частини прикладу 1.2

При введені значення змінних необхідно деяким змінним присвоювати результати, тобто в документі програми MathCAD вводити знак присвоєння, натискаючи комбінацію клавіш Shift+: або вибравши знак присвоєння з однієї з панелей інструментів ***Математика,*** наприклад, на панелі Калькулятор вибрати знак «:=».

Приклад 12.3. Обчислити для значень x 1, 5 та 7 значення y для таких функцій:

$$y1 = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x^5}}; \qquad y2 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-x^2/22};$$

$$y3 = \frac{\arctan(x)}{2}.$$

Розв’язок у MathCAD буде мати вигляд, зображений на рис. 12.5.

Для завдання ряду значень необхідно скористатися панеллю Векторов и матриц та задати вхідні дані у вигляді матриці, тоді результат обчислень теж буде подано у вигляді матриць. Такий підхід використовується, коли необхідно для однієї і тієї ж формули обчислити різні значення виразу y залежно від вхідних значень x.

Рисунок 12.5 – Розв'язок прикладу 12.3

Для завдання функції arctan(x) необхідно на панелі інструментів ***Стандартная*** вибрати кнопку ***Вставить функцию*** чи скористатися пунктом меню ***Вставка→ Вставить функцию***. Після чого з'явиться діалогове вікно, в якому потрібно в полі категорії вибрати категорію тригонометричні, а потім в полі ім'я функції вибрати потрібну функцію.

2 Спеціальні обчислення в MathCad

2.1 Основні положення

Спеціальні обчислення в системі MathCad включають такі операції:

- обчислення похідних;

- табуляція функцій;
- обчислення суми ряду чисел;
- обчислення добутку ряду чисел;
- обчислення границь;
- розкладення функції в степеневий ряд.

2.2 Обчислення похідних

Система MathCad дозволяє обчислювати похідні будь-якого порядку при необмеженій кількості символьних змінних. При цьому використовуються два різних способи.

Перший спосіб ґрунтується на символьних обчисленнях. Цей спосіб виконується за допомогою команд меню ***Символика→Переменные →Дифференцировать***.

Технологія реалізації цього методу базується на виконанні таких кроків:

- введення виразу, похідну якого необхідно знайти;
- виділення за допомогою подвійного клацання мишки змінної диференціювання;
- звертання до команд меню ***Символика→Переменные →Дифференцировать;***

Після виконання команди ***Дифференцировать*** на екрані з’явиться значення похідної.

Розглянемо на прикладі можливості цього методу.

Приклад 12.4. Необхідно знайти похідну такої функції:

$$y(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln(2 \cdot x) - x \cdot e^{-x}.$$

Розв’язок наведений на рис. 12.6.

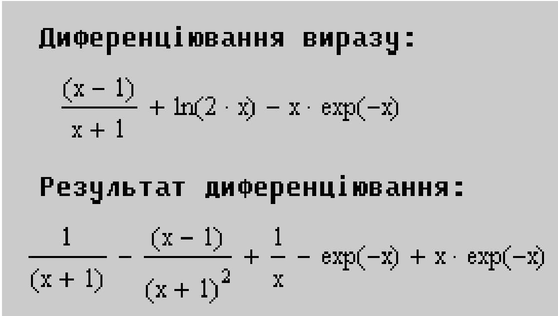


Рисунок 12.6 – Результат диференціювання для прикладу 12.4

Основна перевага цього методу – простота.

Але він має і такі недоліки:

1. Для одержання n-ї похідної необхідно звертатися n раз до пункту меню Символика.
2. Вираз похідної досить складний, він не спрощується системою.

Другий спосіб ґрунтується на зверненні до маркерів введення похідної. При використанні цього способу на екрані виводиться відповідний шаблон введення, в чорні позиційні маркери вводяться вирази для функції, змінна диференціювання та порядок похідної. Для одержання розв’язку досить натиснути клавішу виводу розв’язку.

Технологія цього способу полягає в виконанні таких операцій:

- виклик на екран шаблону похідної;
- введення функції, змінної та порядку диференціювання;
- одержання результату.

Шаблон похідної можна викликати на екран за допомогою клавіатури або миші. Натиснувши комбінацію клавіш Shift+? чи Shift+Ctrl+?, одержимо на екрані шаблони відповідно першої та n-ї похідної. Того ж самого можна досягти, якщо клацнути мишею по відповідному шаблону на панелі інструментів ***Калькулятор***.

Введення функції здійснюється за допомогою клавіатури у відповідності з маркерами введення.

Перехід з одного позиційного маркеру в інший здійснюється натисненням клавіші Tab чи →, або лівої клавіші миші у відповідності з маркером введення.

Одержати результат можна шляхом натискання клавіш Shift+F9, також можна використовувати кнопку символьних обчислень панелі інструментів ***Символика***.

Розглянемо на прикладі можливість цього методу.

Приклад 12.5. Необхідно обчислити похідну функції:

$$\frac{x-1}{x+1}+\frac{a+b\cdot x}{a-b\cdot x}+\sin(2\cdot x)\cdot\cos(2\cdot).$$

Розв'язок наведений на рис. 12.7.

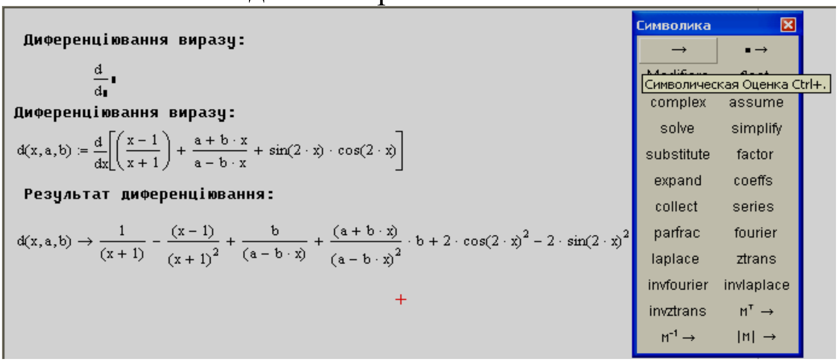


Рисунок 12.7 – Розв'язок для прикладу 12.5

З рис. 12.7 видно, що розв'язок надто громіздкий. Спроби спростити його не привели до успіху.

На основі проведення аналізу можна зробити висновок, що система MathCAD дозволяє одержати похідну функції n-го порядку, але вираз похідної часто дуже складний.

2.3 Табуляція функцій

Табульованими є функції подані у вигляді таблиці. Табуляцію можна здійснити шляхом обчислення функції для всіх значень аргументів. Такий процес є дуже громіздким. Тому в багатьох математичних системах є функції, що дозволяють, по відомому вектору вихідних даних одержати функцію у вигляді таблиці, що утворюється з двох стовпців: x та f(x).

У системі MathCAD такої вбудованої функції немає, але ця задача розв'язується іншими способами.

Перший спосіб ґрунтується на виконанні таких процедур:

1. Присвоєння змінній (наприклад x) значень аргументів табульованої функції. При цьому крок таблиці повинен бути постійним. Змінна x подається в такому вигляді: $x0,\ x0+h....xk$, де $x0$ – початкове значення аргумента; h – крок таблиці; xk – кінцеве значення аргумента. Наприклад, $x := 0,\ 0.2\,..\,3$. У такому представленні змінна x називається ранжованою змінною.
2. Введення табульованої функції, якій може бути присвоєне ім'я.
3. Одержання розв'язку шляхом натиснення клавіші «=». Якщо табульованій функції було присвоєне ім'я, наприклад $f :=$, то розв'язок одержують шляхом введення символу f та натисненням на клавішу «=» (дорівнює).

Покажемо технологію табулювання на прикладі.

Приклад 12.6. Необхідно протабулювати функції: $x \cdot e^x$, $\sin x$, $\dfrac{x-1}{x+1}$ в діапазоні зміни аргумента від 0 до 2 з кроком 0.2.

Розв'язок має вигляд, зображений на рис. 12.8.

Задання ранжованої змінної в діапазоні від 0 до 2 з кроком 2

$x := 0, 0.2 .. 2$

Результат виконання операції ранжування:

$x =$	$x \cdot e^{x} =$	$\sin(x) =$	$\frac{x-1}{x+1} =$
0	0	0	-1
0.2	0.244	0.199	-0.667
0.4	0.597	0.389	-0.429
0.6	1.093	0.565	-0.25
0.8	1.78	0.717	-0.111
1	2.718	0.841	0
1.2	3.984	0.932	0.091
1.4	5.677	0.985	0.167
1.6	7.925	1	0.231
1.8	10.889	0.974	0.286
2	14.778	0.909	0.333

Рисунок 12.8 – Розв'язок до прикладу 12.6

Другий спосіб використовується в тих випадках, коли крок таблиці змінний.

Технологія табулювання складається з виконання таких операцій:

1. Створюється вектор аргумента x табульованої функції. Вектор створюється в такій послідовності:
   - введення символа x вектору аргументів;
   - натиснення клавіші «:», на екрані з'явиться символ присвоєння;
   - виклик діалогового вікна ***Вставка Матрицы*** для встановлення розмірів вектора аргументів шляхом натискання клавіші з зображенням матриці на панелі інструментів ***Матрица***;
   - встановлення розмірів матриці;
   - введення числових аргументів табульованої функції.
2. Вводиться табульована функція з аргументом x .

3. Одержання розв’язку шляхом натиснення клавіші «=» (дорівнює). На екрані з’явиться відповідь у вигляді вектора значень табульованої функції.

Приклад було розглянуто вище.

Недоліками табуляції функцій є:

1. Неможливість табулювання одночасно декількох функцій.
2. Вектор розв’язку не містить аргументів, що ускладнює визначення значень функції при заданому значенні аргумента.

Для зручності визначення значень функцій при даних значеннях аргументів можна дублювати вектор аргументів та шляхом перетягування одержаних векторів розв’язків розташувати їх поруч.

2.4 Обчислення суми ряду чисел

Система MathCAD дозволяє додавати числа, що задані у вигляді вектора з постійним або змінним кроком. При цьому числа можуть бути задані у вигляді функцій.

Додавання здійснюється з використанням шаблону. Користувач заповнює маркери введення, що відмічені чорними прямокутниками, та одержує відповідь шляхом натиснення клавіші «=» (дорівнює).

На практиці часто доводиться додавати числа, що задані у вигляді вектора, елементами якого можуть бути числа з постійним чи змінним кроком, а також подані у вигляді функцій.

У MathCAD є декілька технологій додавання чисел.

Якщо числа задані *у вигляді вектора з постійним кроком*, то вектор чисел подається у вигляді ранжованої змінної.

У цьому випадку технологія додавання складається з таких операцій:

- створення вектора чисел з ім’ям ранжованої змінної;
- введення шаблону натисненням миші на кнопці панелі інструментів Калькулятор;

➢ введення в обидва маркери введення імені вектора (ранжованої змінної);
➢ одержання суми чисел шляхом натиснення на клавішу «=».

Приклад 12.7. Необхідно визначити, на скільки сума парних чисел у діапазоні від 1 до 10 більше суми непарних чисел у цьому ж діапазоні.

Розв'язання

У даному прикладі вектор парних чисел може бути пданий у вигляді

$x1 := 2, 4..10$ (2 – перший член ряду, 4 – другий, а 4-2=2 є крок ряду), а сума непарних чисел $x2 := 1, 3..10$. Різниця $\sum x1 - \sum x2$ і буде розв'язком задачі.

Результати розв'язку задачі за допомогою MathCAD наведені на рис. 12.9.

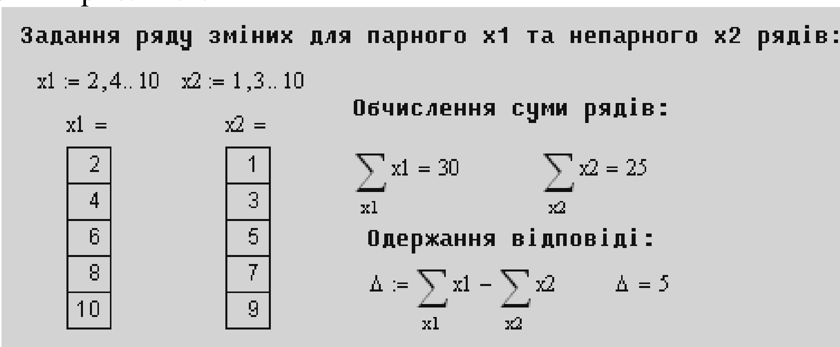


Рисунок 12.9 – Обчислення суми парного та непарного рядів

Якщо числа задані у вигляді вектора зі змінним кроком, то технологія додавання буде така:

1. Утворення вектора чисел.
2. Введення шаблону знаходження суми ряду.
3. Заповнення маркера введення символом імені вектора чисел.
4. Одержання розв'язку.

Розглянемо технологію на прикладі.

Приклад 12.8. Необхідно обчислити суми таких чисел:

1) 2; 7; 9; 11; 23; 27;
2) 1; sin(0.5); $e^{0.5}$; ln(2); 12;
3) $3 \cdot \ln(5)$; $\sin(1)+\cos(1)$; 7; $2 \cdot 0{,}75^2$; 18.

Розв'язання

Векторам чисел присвоюємо імена: $x1$, $x2$, $x3$.

Розв'язок цього прикладу в системі MathCAD зображений на рис. 12.10.

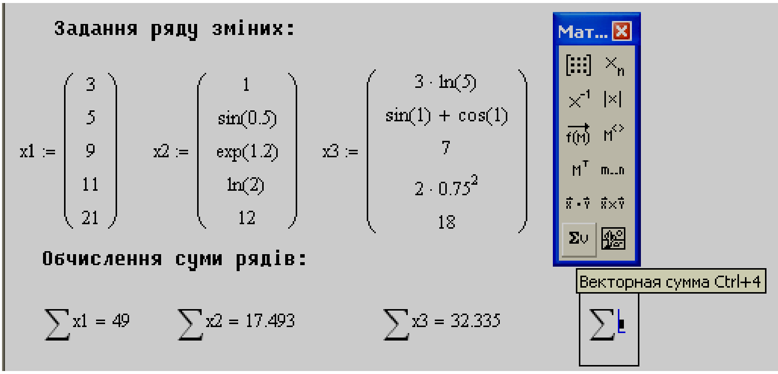


Рисунок 12.10 – Обчислення суми чисел з прикладу 12.8

MathCAD дозволяє обчислювати суму значень функції, що задана в аналітичному вигляді. В цьому випадку технологія складається з виконання таких операцій:

1. Виклик на екран операторного шаблону Калькулятор та вибір з нього відповідної суми для обчислення.
2. Введення в пусті маркери функції та діапазону значень аргумента сумування.
3. Натиснення кнопки символьних обчислень.
4. Одержання відповіді.

Розглянемо технологію додавання на прикладах.

Приклад 12.9. Необхідно знайти суми таких функцій:

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-x};\ \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{x^i}{i!};\ \sum_{n=1}^{100} n;\ \sum_{n=1}^{100} n!;\ \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n};\ \sum_{n=1}^{n} n;\ \sum_{n=1}^{n} n^2;\ \sum_{n=1}^{n} n^3;$$

Розв’язок задачі в системі MathCAD наведений на рис. 12.11

$$\sum_{n=1}^{100} n = 5.05 \times 10^3 \qquad \sum_{n=1}^{100} n! = 9.427 \times 10^{157} \qquad \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} = 5.187$$

$$\sum_{n=1}^{n} n \to \frac{1}{2}\cdot(n+1)^2 - \frac{1}{2}\cdot n - \frac{1}{2} \qquad \sum_{n=1}^{n} n^2 \to \frac{1}{3}\cdot(n+1)^3 - \frac{1}{2}\cdot(n+1)^2 + \frac{1}{6}\cdot n + \frac{1}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^3 \to \frac{1}{4}\cdot(n+1)^4 - \frac{1}{2}\cdot(n+1)^3 + \frac{1}{4}\cdot(n+1)^2$$

$$n1 := \infty$$

$$\sum_{n=0}^{n1} \exp(-n) \to \frac{1}{(\exp(1)-1)}\cdot\exp(1) = 1.582 \qquad \sum_{n=0}^{n1} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} \to \exp(-x)$$

Рисунок 12.11 – Значення суми чисел для прикладу 12.9

2.5 Обчислення добутку ряду чисел

Добуток чисел у MathCAD, так само як і додавання, здійснюється завдяки шаблонам. При цьому використовуються два вводи шаблонів – з двома та чотирма маркерами введення. Перший використовується для обчислення добутку двох чисел з сталим кроком, поданих у ранжованому вигляді.

Технологія обчислення в цьому випадку є такою:

- утворення вектора чисел зі сталим кроком типу ранжованої змінної: $x := x0,\ \ x0 + h\ ..\ xk$;
- введення шаблону добутку натисненням комбінації клавіш Shift+3 або натисненням миші по кнопці добутку на панелі ***Исчислений***;
- заповнення маркерів введення ім’ям ранжованої змінної;
- одержання відповіді.

При визначенні добутку чисел, що утворюють функцію при заданих значеннях аргумента, використовується шаблон добутку з чотирма маркерами.

У цьому випадку технологія буде така:

- введення відповідного шаблону;
- заповнення маркерів введення;
- одержання результату.

Технологію розглянемо на прикладі.

Приклад 12.10. Необхідно визначити добуток ряду таких чисел:

- x від 1 до 20 з кроком 0,2;
- $2.5;\ e^3;\ \ln(5);\ 3;\ \sin(0.5)$;
- e^x при x від 0 до 5;
- $x+\ln(x)+\sin(x)$ при x від 1 до 100;
- $1-\dfrac{1}{(2\cdot k+1)^2}$ при k від 1 до ∞;
- $n!$ при n від 1 до 10.

Розв’язок наведений на рис. 12.12.

$$x := 1, 1.2 .. 20 \qquad \prod_x x = 3.081\times 10^{89} \qquad \prod_{x=0}^{5} \exp(x) = 3.269\times 10^{6}$$

$$x1 := \begin{pmatrix} 2.5 \\ \exp(3) \\ \ln(5) \\ 3 \\ \sin(0.5) \end{pmatrix} \qquad \prod_{i=0}^{4} x1_i = 116.236 \qquad \prod_{n=1}^{10} n! = 6.659\times 10^{27}$$

$$n1 := \infty$$

$$\prod_{x=1}^{100} (x+\ln(x)+\sin(x)) = 3.385\times 10^{162} \qquad \prod_{k=1}^{n1}\left[1-\frac{1}{(2\cdot k+1)^2}\right] \rightarrow \frac{1}{4}\cdot\pi$$

Рисунок 12.12 – Обчислення добутку значень функції

2.6 Обчислення границь

Границі в MathCAD визначаються за допомогою функції lim. Шаблони викликаються клацанням мишки на кнопках панелі інструментів ***Исчисления*** чи за допомогою комбінації клавіш Ctrl+L, Ctrl+A, Ctrl+B.

Символ ∞ (нескінченість) при визначені границь вводиться за допомогою комбінації клавіш Ctrl+Z чи клацанням мишею по кнопці ∞ панелі інструментів ***Исчисление***.

Технологія обчислення границь складається з таких кроків:

- введення знака lim;
- заповнення маркерів шаблону lim;
- одержання відповіді.

Технологію розглянемо за допомогою прикладу.

Приклад 12.11. Необхідно знайти границі значень таких функцій:

1) $\frac{\lim}{x \to 0}[\frac{\sin(x)}{x}]$; 2) $\frac{\lim}{x \to \infty}[\frac{e^x}{1-e^x}]$;

3) $\frac{\lim}{x \to 0}[(1+x)^{1/x}]$; 4) $\frac{\lim}{x \to 0}[(\frac{a^x+b^x}{2})^{1/x}]$.

Розв’язок зображений на рис. 2.8.

Рисунок 12.13 – Границі функцій для прикладу 12.11

2.7 Розкладання функції в степеневий ряд

Розкладення функції $y = f(x)$ за степеневим рядом у MathCAD здійснюється за формулою Тейлора, яка має вигляд:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\cdot\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2\cdot\frac{f''(a)}{2!} +$$

$$+ \ldots + (x-a)^n\cdot\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \ldots .$$

У формулі a – це значення аргумента x, навколо якого і відбувається розкладення функції в ряд.

У MathCAD розкладання функції в степеневий ряд здійснюється за допомогою функцій меню ***Символика→Переменная→Расширить до рядов***

Технологія реалізації процедури:

- введення математичного виразу;
- виділення змінної подвійним клацанням миші;
- звертання за командою ***Символика→Переменная→Расширить до рядов,*** після чого на екрані з'явиться вікно (рис. 12.14), в якому можна встановити кількість членів ряду;
- одержання результату натисненням кнопки ***Ок*** у вікні з рис. 12.14.

Рисунок 12.14 – Вікно встановлення розмірності степеневого ряду

При розкладанні в ряд за степенями не завжди можна одержати розв'язок. Розв'язок не можна одержати в таких випадках:

1. Функція $f(x)$ не має n похідних;
2. Ряд Тейлора є розбіжним.
3. Функція чи її похідні не можуть бути обчислені при визначених значеннях a.

Наприклад, функція $f(x) = x \cdot \ln(x)$ не може бути розкладена в ряд навколо точки $x = 0$, оскільки $\ln(0)$ не існує.

При обчисленні функцій за допомогою степеневого ряду виникають помилки, пов'язані з тим, що нескінчений ряд представляється рядом з кінченим числом членів. Тому необхідно знати скільки членів ряду необхідно бути, щоб похибка не перевищувала заданого значення.

Технологію розглянемо на прикладі.

Приклад 12.12. Розкласти за степенями такі функції:

$$\cos(x),\ \cosh(x),\ a\cos(x).$$

Розв'язок проілюстровано на рис. 12.15.

$\cos(x)$

$$1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + O\left(x^6\right)$$

$\cosh(x)$

$$1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + O\left(x^6\right)$$

$\operatorname{acos}(x)$

$$\frac{1}{2} \cdot \pi - 1 \cdot x - \frac{1}{6} \cdot x^3 - \frac{3}{40} \cdot x^5 + O\left(x^6\right)$$

Рисунок 12.15 – Розкладання в ряд функцій для прикладу 12.12

2.8 Обчислення інтегралів

Операція інтегрування в інженерній діяльності на практиці зустрічається досить часто. При цьому доводиться обчислювати інтеграли невизначені, визначені, кратні та невласні.

Система MathCAD успішно виконує задачу інтегрування.

Розглянемо обчислення різних видів інтегралів.

Технологія обчислення невизначеного інтеграла виконується при виборі відповідного шаблону з панелі інструментів ***Исчислений*** або за допомогою команди меню ***Символика→Переменная→Интегрировать.***

Визначення невизначеного інтеграла розглянемо на прикладі:

Приклад 12.13. Обчислити невизначені інтеграли.

При обчислені невизначеного інтеграла за допомогою шаблону необхідно вибрати шаблон $\int d$, під знаком інтегралу в шаблоні набрати потрібний вираз, вказати зміну за якою буде здійснюватися операція інтегрування: $\int F(x)dx$. Для одержання відповіді необхідно з панелі ***Символика*** вибрати знак «→» та поставити його після інтеграла і натиснути мишкою в будь-якому пустому місці документа: $\int F(x)dx \rightarrow$ (рис. 12.16).

Розрахунок невизначених інтегралів:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(a+b\cdot x)^3}}\,dx \rightarrow -2\cdot\frac{(a+b\cdot x)}{\left[b\cdot\left[(a+b\cdot x)^3\right]^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right]}$$

$$\int \left(\ln(x)+x\cdot e^{-x}\right)dx \rightarrow x\cdot\ln(x)-x-x\cdot\exp(-x)-\exp(-x)$$

Рисунок 12.16 – Обчислення невизначеного інтеграла

Система MathCAD дозволяє обчислювати визначені інтеграли в аналітичному та числовому вигляді.

Технологія обчислень визначеного інтеграла:

- виведення на екран шаблону визначеного інтеграла за допомогою панелі ***Исчисления***;
- введення в пусті маркери підінтегральної функції;
- виконання команди обчислення інтеграла.

Обчислення можливе за допомогою трьох таких способів виклику команд обчислення інтегралів: клавіша «=» (дорівнює), комбінація клавіш «Shift»+«F9» та виклику знаку символьних обчислень «→» шляхом натиснення комбінації клавіш «Ctrl»+«.».

Розглянемо на прикладі обчислення визначеного інтеграла

Приклад 12.14. Обчислити визначені інтеграли

Розв’язок показаний на рис. 12.17.

Розрахунок визначених інтегралів:

$$\int_0^{10} x\cdot e^{-2\cdot x}\,dx \rightarrow \frac{-21}{4}\cdot\exp(-20)+\frac{1}{4}=0.25$$

$$r := \infty$$

$$\int_0^{r} e^{-x^2}\,dx = 0.886 \qquad \int_0^{r} e^{-x^2}\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\pi^{\left(\frac{1}{2}\right)}=0.886$$

Рисунок 12.17 – Розрахунок визначених інтегралів

Обчислення кратних інтегралів у системі MathCAD можно здійснювати двома шляхами.

Перший полягає в обчисленні n-кратного інтеграла, використовуючи результати попереднього розв'язку.

Наприклад, нехай необхідно обчислити подвійний інтеграл $\iint x dx dx$. Обчислюємо спочатку інтеграл $\int x dx = x^2/2$. Тепер обчислимо інтеграл $\int (x^2/2) dx = x^3/6$ Відповідь одержана двократним обчисленням інтеграла.

Інший спосіб обчислення n-кратного інтеграла полягає в обчисленні без проміжних значень.

Технологія цього способу полягає в виконанні таких дій:

1. Викликати визначений чи не визначений інтеграл стільки разів, якої кратності інтеграл необхідно обчислити
2. Заповнити маркери підінтегральних функцій та їх границь.
3. Відповідь одержуємо натисненням клавіші «→» для невизначеного інтеграла та клавіші «=» визначеного.

Розглянемо приклад.

Приклад. 12.15. Приклади обчислення кратних інтегралів, зображений на рис. 12.18.

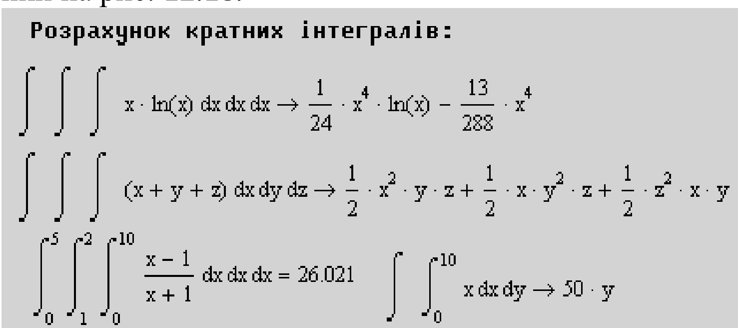


Рисунок 12.18 – Розрахунок кратних інтегралів

3 Символьні обчислення в MathCAD

Спрощення символьних виразів у MathCAD здійснюється за допомогою таких команд з меню ***Символика*** (рис. 12.19):

- Вычислить (Evaluate);
- Упростить (Simplify);
- Разложить (Expand);
- Разложить на множители (Factor);
- Привести подобные (Collect);
- Коэффициенты полинома (Polynomial Coefficients).

Технологія спрощення символьних виразів виключно проста та однакова для всіх команд. Вона складається з виконання таких дій:

1. Введення виразу, який потребує спрощення.
2. Виділення виразу.
3. Виконання відповідної команди з меню ***Символика***.

Якщо необхідна операція з урахуванням окремої змінної спробуваного виразу, то зміна виділяється подвійним клацанням мишею.

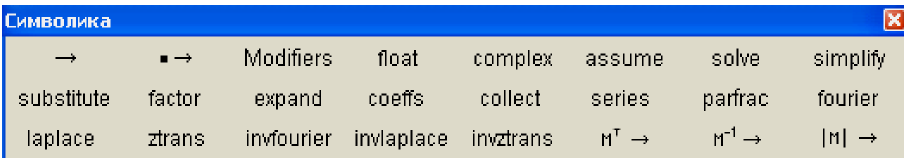


*Рисунок 12.19 – Панель інструментів **Символика***

Розглянемо деякі з команд більш детально.

Команда ***Упростить*** (Simplify) спрощує виділений математичний вираз шляхом його перетворення за допомогою операцій приведення дробів до спільного знаменника, приведення подібних членів, використання тригонометричних формул та інше. За допомогою цієї команди виконуються більшість символьних операцій (обчислення похідних, інтегралів, сум та добутку рядів чисел). Ця операція виконується за допомогою меню ***Символика→Упростить*** та кнопки панелі ***Символика*** simplify. Приклади показані на рис. 12.20.

Спростити вираз:

$$(\sin(x) + \cos(x))^2 \cdot \sin(x) \text{ simplify } \rightarrow \sin(x) + 2 \cdot \cos(x) - 2 \cdot \cos(x)^3$$

$$(a + 5 \cdot a + b) \cdot 4 - (a + b)^2 \text{ simplify } \rightarrow 24 \cdot a + 4 \cdot b - a^2 - 2 \cdot a \cdot b - b^2$$

Рисунок 12.20 – Спрощення виразів

Але ця команда чітко не визначена. Її дії іноді при спрощенні виразу навіть ускладнюються.

Команда ***Разложить*** (Expand) розкриває дужки математичних виразів, підносить математичні вирази до степеня, виконує перетворення тригонометричних виразів. Команда виконується за допомогою вибору кнопки expand, to з панелі інструментів ***Символика***. Приклад наведений на рис. 12.21.

Розкласти вираз:

$$(x - a)^5 \text{ expand,to } \rightarrow x^5 - 5 \cdot x^4 \cdot a + 10 \cdot x^3 \cdot a^2 - 10 \cdot x^2 \cdot a^3 + 5 \cdot x \cdot a^4 - a^5$$

$$(x + 4)^4 \text{ expand,to } \rightarrow x^4 + 16 \cdot x^3 + 96 \cdot x^2 + 256 \cdot x + 256$$

$$(x - 1) \cdot (x + 1) \text{ expand,to } \rightarrow x^2 - 1$$

$$\cos(5 \cdot x) \text{ expand,to } \rightarrow 16 \cdot \cos(x)^5 - 20 \cdot \cos(x)^3 + 5 \cdot \cos(x)$$

Рисунок 12.21 – Розкладення виразу

Команда ***Разложить на множители*** (Factor) виконує операції виносу за дужки, розкладення на множники, приведення до спільного знаменника.

Ця команда виконується за допомогою пунктів меню ***Символика→Фактор*** чи вибору команди $F(x), factor \rightarrow$ з панелі ***Символика***. Приклад показаний на рис. 12.22.

Розкласти вираз на множники:

$$\left(x^5 - 1\right) \text{ factor } \rightarrow (x - 1) \cdot \left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)$$

$$\left(x^3 + y^3\right) \text{ factor } \rightarrow (x + y) \cdot \left(x^2 - x \cdot y + y^2\right)$$

Рисунок 12.22 – Приклади розкладання виразів на множники

Команда ***Привести подобные*** (Collect) виконує символьні операції та подає результат у поліноміальному вигляді відносно змінних. При цьому аналітичний вид може бути функцією чи виразом. Вибір змінної здійснюється користувачем шляхом подвійного натискання мишки.

Ця команда виконується за допомогою вибору пункту меню collect: $F(x)\, collect, x \rightarrow$ з панелі ***Символика***. Приклад наведений на рис. 12.23.

Привести подібні:

$$x + 2\cdot x - 3\cdot y + 4\cdot y + x\cdot y - 2\cdot x^2\cdot y - 3\cdot x\cdot y^2 \text{ collect}, x \rightarrow -2\cdot x^2\cdot y + \left(3 + y - 3\cdot y^2\right)\cdot x + y$$

$$x + 2\cdot x - 3\cdot y + 4\cdot y + x\cdot y - 2\cdot x^2\cdot y - 3\cdot x\cdot y^2 \text{ collect}, y \rightarrow -3\cdot x\cdot y^2 + \left(1 + x - 2\cdot x^2\right)\cdot y + 3\cdot x$$

Рисунок 12.23 – Приклади приведення подібних членів

Команда ***Коэффициенты полинома*** (Polynomial Coefficients) видає коефіцієнти полінома, подані у вигляді вектора. Ця команда корисна у тому разі, коли вираз складний та для визначення коефіцієнтів полінома необхідно виконувати багато допоміжних операцій. Команду можна активізувати за допомогою панелі ***Символика*** та кнопки coeffs: $F(x) coeffs, x \rightarrow$, де $F(x)$ – поліном, коефіцієнти якого потрібно знайти, а x – змінна, за якою шукаються коефіцієнти полінома. Приклад зображений на рис. 12.24.

Пошук коефіцієнтів полінома:

$$\blacksquare \text{ coeffs}, \blacksquare \rightarrow$$

$$(x + a)\cdot(x - b) \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -a\cdot b \\ -b + a \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (x - a)^2\cdot(2\cdot x - 1) \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -a^2 \\ 2\cdot a + 2\cdot a^2 \\ -1 - 4\cdot a \\ 2 \end{pmatrix}$$

Рисунок 12.24 – Пошук коефіцієнтів полінома

4 Матричні та векторні операції в MathCAD

4.1 Технологія створення вектора та матриць

Технологія створення векторів та матриць в MathCAD складається з виконання таких дій:

1. Введення імені вектора чи матриці та знака присвоєння.
2. Встановлення розмірів вектора чи матриці.
3. Введення елементів вектора чи матриці в пусті маркери.

Встановлення розмірів вектора чи матриці можна за допомогою комбінації клавіш Ctrl+M чи на панелі ***Матрицы и векторы*** вибрати команду ***Матрица или Вектор*** та викликати вікно вставка матриці (рис. 12.25).

У полі Rows задається необхідна кількість стовпців матриці чи вектора, а в полі Columns – необхідна кількість рядків.

Після заповнення необхідно натиснути клавішу ***Ок***.

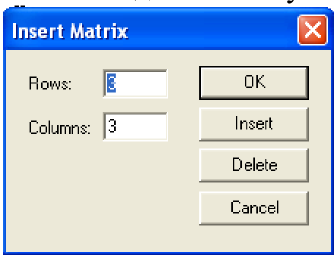


Рисунок 12.25 – Введення розмірів матриці чи вектора

Елементами векторів та матриць можуть бути:

- дійсні та комплексні числа;
- функції з числовими значеннями аргументів;
- сукупність чисел, функцій, арифметичних операторів та їх обчислення.

4.2 Операції над матрицями

Над матрицями в MathCAD можна виконувати такі дії:

a) додавання до елементів матриці числа: $M + z$;
b) віднімання від елементів матриці числа: $M - z$;
c) множення елементів матриці на число: $M * z$;
d) ділення елементів матриці на число: M / z;

e) додавання матриць: $M1+M2$;
f) віднімання матриць: $M1-M2$;
g) множення матриць: $M1*M2$;
h) множення елементів матриць: $M1\overrightarrow{*}M2$;
i) піднесення матриці до степеня: $M1^n$.

MathCAD має велику кількість вбудованих функцій та операторів, що дозволяють обчислювати характеристики функцій, виконувати різноманітні її перетворення, утворювати нові матриці, повертати елементи, рядки та стовпці матриць.

Проілюструємо операції над матрицями на прикладі.

Приклад 12.16. Здійснити операції над матрицями M_1 та M_2. Операції над матрицями проілюстровані на рис. 12.26.

Робота з матрицями.

$$M1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad M2 := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M1 + 3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad M1 - 3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad M1 \cdot 3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 9 & 3 & 6 \\ 12 & 15 & 9 \end{pmatrix} \quad \frac{M1}{3} = \begin{pmatrix} 0.333 & 0.667 & 1.667 \\ 1 & 0.333 & 0.667 \\ 1.333 & 1.667 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M1 + M2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \\ 8 & 10 & 6 \end{pmatrix} \quad M1 - M2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M1 \cdot M2 = \begin{pmatrix} 28 & 30 & 23 \\ 17 & 20 & 20 \\ 35 & 32 & 35 \end{pmatrix} \quad M1^2 = \begin{pmatrix} 27 & 29 & 24 \\ 14 & 17 & 23 \\ 31 & 28 & 39 \end{pmatrix}$$

Рисунок 12.26 – Операції над матрицями

Матричні оператори:

1. Зворотна матриця: M^{-1}.
2. Обчислення визначника: $|M|$.
3. Транспонування матриці: M^T.
4. Векторизація матриці: $\vec{M}$.
5. Виділення n-го стовпця матриці: $M^{\langle n \rangle}$.
6. Виділення елемента матриці: $M_{m,n}$.
7. Виділення комплесно-спряженої матриці: $\overline{M}$.

Проілюструємо операції над матрицями на прикладі.

Приклад 12.17. Здійснити матричні операції над матрицями M_1 та M_2. Матричні операції проілюстровані на рис. 12.27.

Робота з матрицями.

$$i := \sqrt{-1}$$

$$M1 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad M2 := \begin{pmatrix} 2+3\cdot i & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1-4\cdot i \\ 5+i & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$M1^{-1} = \begin{pmatrix} 0.333 & -0.133 & 0.067 \\ -0.667 & -0.533 & 1.267 \\ 0.333 & 0.467 & -0.733 \end{pmatrix} \qquad |M1| = -15 \qquad M1^{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M1^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad M2^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1-4i \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{M1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M1_{(1,1)} = 4$$

Рисунок 12.27 – Матричні операції

Функції повернення характеристик матриці:

1. Повернення числа стовпців матриці: $cols(M)$.
2. Повернення числа рядків матриці: $rows(M)$.
3. Повернення рангу матриці: $rank(M)$.
4. Повернення суми діагональних елементів матриці: $tr(M)$.
5. Повернення середнього значення масиву елементів: $mean(M)$.
6. Повернення медіани масиву елементів: $median(M)$.

Проілюструємо функції повернення характеристик матриці на прикладі.

Приклад 12.18. Обчислити функції повернення характеристик матриці M. Функції повернення характеристик матриці проілюстровані на рис. 12.28.

Функції повернення характеристик матриці:

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$cols(M) = 4$ $rows(M) = 4$ $rank(M) = 2$

$mean(M) = 4$ $median(M) = 4$ $tr(M) = 12$

Рисунок 12.28 – Функції повернення характеристик матриці

Матричні функції:

1. Об'єднання двох матриць з однаковим числом рядків в одну: $augment(M1, M2)$.
2. Об'єднання двох матриць з однаковим числом стовпців в одну: $stack(M1, M2)$.
3. Створення одиничної квадратної матриці ($n \times n$): $identity(n)$.
4. Повернення матриці дійсних чисел: $\mathrm{Re}(M)$.
5. Повернення матриці уявних чисел: $\mathrm{Im}(M)$.

Розглянемо деякі приклади:

Приклад 12.19. Обчислити матричні функції. Матричні функції проілюстровані на рис. 12.29.

Матричні функції:

$$M1 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad M2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad M3 := \begin{pmatrix} 2+3\cdot i & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1-4\cdot i \\ 5+i & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$stack(M1, M2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad augment(M1, M2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$identity(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Re}(M3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Im}(M3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок 12.29 – Приклад використання матричних функції

4.3 Операції над векторами

Введення вектора відбувається так само, як і введення матриці.

Розглянемо операції над векторами:

1. Транспонування вектора: V^T.
2. Сортування вектора: $sort(V)$.
3. Зворотне сортування вектора: $reverse(V)$.
4. Векторизація: $\vec{V}$.
5. Норма вектора: $|V|$.
6. Визначення числа елементів вектора: $length(V)$.
7. Виділення n-го елемента: V_n.
8. Повернення номера останнього елемента вектора: $last(V)$.
9. Повернення елемента вектора, максимального за значенням: $\max(V)$.
10. Повернення елемента вектора, мінімального за значенням: $\min(V)$.
11. Повернення дійсної частини елемента вектора: $\mathrm{Re}(V)$.

Повернення уявної частини елемента вектора: $\mathrm{Im}(V)$.

Висновок

Отже, математичний пакет MathCAD має дуже зручний та наглядний апарат для проведення різноманітних елементарних, спеціальних, символічних та матричних і векторних обчислень.

Лекція № 13

РОЗВ'ЯЗОК МАТЕМАТИЧНИХ РІВНЯНЬ У MATHCAD

Мета лекції: Ознайомитися з основними принципами роботи математичного пакета MathCAD.

Питання лекції:

1 Розв'язання алгебраїчних рівнянь у MathCAD.
2 Розв'язання системи рівнянь у MathCAD.
3 Розв'язання диференційних рівнянь у MathCAD.
4 Розв'язання системи диференційних рівнянь у MathCAD.

1 Розв'язок алгебраїчних рівнянь у MathCAD

1.1 Загальні положення

Аналіз аналітичних та чисельних методів розв'язку алгебраїчних та трансцендентних рівнянь показує, що не існує єдиного алгоритму визначення коренів рівняння. Тільки їх сукупність дозволить знайти корені рівнянь і то не завжди.

Комп'ютерні технології розв'язку рівнянь вимагають чіткої постановки задачі. Недостатньо сформувати задачу так: необхідно визначити корені рівняння $2^x - 3.8 \cdot x + 1 = 0$. Таке формування задачі не коректне, оскільки не відомо, які корені нас цікавлять – дійсні чи комплексні, скільки коренів міститься в цьому рівнянні та, які з них необхідно знайти в якій області значень аргументів вони знаходяться, з якою точністю необхідно одержати розв'язок.

Правильною в даному випадку буде така постановка задачі: необхідно знайти дійсні корені рівняння $2^x - 3.8 \cdot x + 1 = 0$, що знаходяться в області ізоляції $0{,}1 \le x_1 \le 1$ та $3 \le x_2 \le 5$. Розв'язок одержати з точністю не менше чотирьох значущих цифр після коми.

Комп'ютерні технології розв'язку алгебраїчних та транциндентних рівнянь представляють собою виконання таких дій:

1. Визначення області ізоляції кожного з дійсних коренів рівняння.
2. Вибір вбудованої функції розв'язку рівняння.
3. Розв'язок рівняння.
4. Перевірка правильності одержаного розв'язку.

Система MathCAD має декілька вбудованих функцій для пошуку розв'язку рівнянь та систем рівнянь. Серед них є наступні три функції:

- root;
- find;
- polyroots.

1.2 Розв'язок рівнянь за допомогою функції root

Функція root здійснює розв'язок алгебраїчних та трансцендентних рівнянь, визначаючи дійсні корені рівняння.

Вона має вигляд: root(f(x),x),

де f(x) – рівняння, що розв'язується, тобто f(x)=0; x – аргумент функції f(x).

Ця функція подається в одній із таких форм запису:

$x := x0$	$x := x0$	$x := x0$
$root(f(x), x) =$	$z = root(f(x), x)$	$\varphi(x) := f(x)$
	$z =$	$z := root(\varphi(x), x)$
		$z =$

Наведемо приклади використання функції root.

Приклад 13.1. Необхідно визначити корені рівняння $2^x - 4 \cdot x = 0$, якщо відомо, що рівняння має два корені та такі області ізоляції: $0 < x_1 < 1$, $3 < x_2 < 5$

Розв'язок зображений на рис. 13.1.

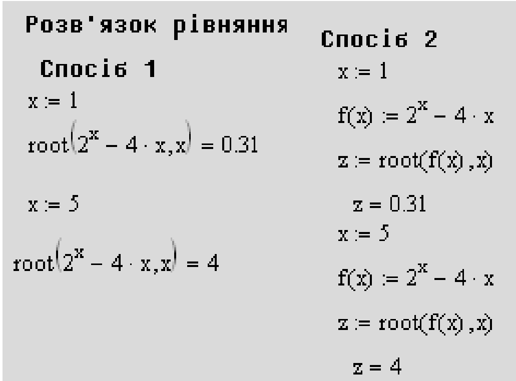


Рисунок 13.1 – Розв'язок рівняння за допомогою функції root

Функція root використовується для визначення тільки дійсних коренів, а для визначення комплексних коренів вона не застосовується.

1.3 Визначення коренів полінома

Визначення коренів полінома здійснюється за допомогою функції polyroots, яка має вигляд:

Polyroots(V), V – вектор коефіцієнтів полінома, починаючи з молодшого степеня.

Ця функція знаходить всі дійсні та комплексні корені.

Технологія використання цієї функції така:

1. Введення вектора коефіцієнтів полінома за допомогою панелі ***Матрица***.
2. Введення функції polyroots;
3. Одержання результату шляхом натискання на клавішу дорівнює.

Якщо який-небудь член у поліномі відсутній, то на відповідній позиції вектора повинен стояти нуль.

Розглянемо технологію визначення коренів полінома на прикладах.

Приклад 13.2. Нехай необхідно знайти корені поліномів:

1) $y = x^4 + 3 \cdot x^3 - 7 \cdot x + 3.5 = 0$;   2) $x^5 - 1$;

3) $x^5 + 2 \cdot i \cdot x^4 + (1 - 3 \cdot i) \cdot x^2 - 1 = 0$.

Розв’язок буде мати вигляд, зображений на рис. 13.2.

Розв'язок рівняння 1

$$V1 := \begin{pmatrix} 3.5 \\ -7 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{polyroots}(V1) = \begin{pmatrix} -2.257 - 1.089i \\ -2.257 + 1.089i \\ 0.629 \\ 0.886 \end{pmatrix}$$

$$i := \sqrt{-1}$$

Розв'язок рівняння 2

$$V2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{polyroots}(V2) = \begin{pmatrix} -0.809 - 0.588i \\ -0.809 + 0.588i \\ 0.309 - 0.951i \\ 0.309 + 0.951i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок рівняння 3

$$V3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 - 3 \cdot i \\ 0 \\ 2 \cdot i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{polyroots}(V3) = \begin{pmatrix} -1.13 + 0.218i \\ -0.431 - 0.371i \\ 0.133 - 2.499i \\ 0.433 + 0.411i \\ 0.994 + 0.241i \end{pmatrix}$$

Рисунок 13.2 – Розв’язок рівнянь до прикладу 13.2

1.4 Визначення коренів рівняння за допомогою функції Find

Функція **Find** призначена для розв’язку систем рівнянь методом ітерацій. Як частковий випадок функція може розв’язувати систему з одного рівняння, тобто визначати його корені.

У цьому випадку блок розв’язку рівняння поєднує такі процедури:

- завдання початкового наближення кореня з області його ізоляції;
- введення слова Given, яке вказує на те, що далі йде рівняння, корені якого необхідно визначити;
- введення рівняння, знак рівності необхідно набрати за допомогою комбінації клавіш «Ctrl»+«=»;
- введення функції Find(x), де x – шукана змінна;
- одержання відповіді шляхом натиснення на клавішу «=».

Технологію розв’язку розглянемо на прикладах:

Приклад 13.3. Необхідно розв’язати рівняння $3^x - 8 \cdot x + 1$, якщо відомо, що рівняння має два корені, область ізоляції яких має значення: $0 < x_1 < 1$, $2 < x_2 < 3$.

Розв’язок рівняння наведений на рис. 13.3.

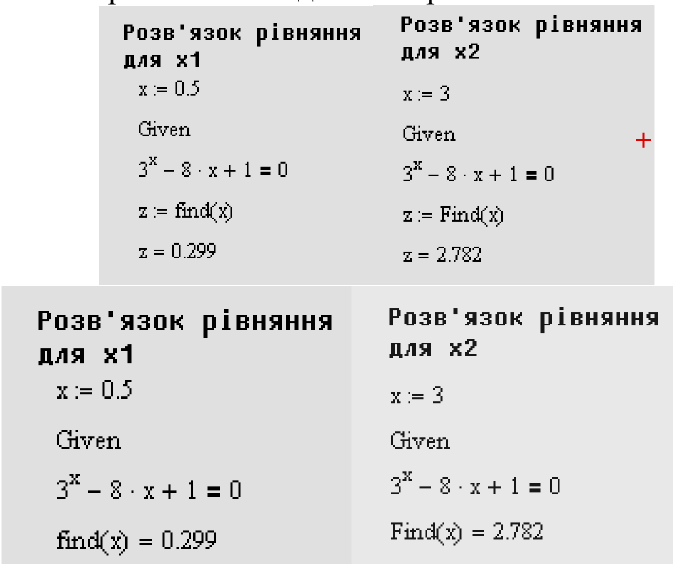


Рисунок 13.3 – Розв’язок рівняння за допомогою функції Find

1.5 Розв’язок рівнянь у символьному вигляді

Технологія розв’язку рівнянь у символьному вигляді складається з таких операцій:

1. Введення рівняння $f(x) = 0$, при цьому $= 0$ можна опустити.
2. Виділення шуканої невідомої подвійним клацанням мишки.
3. Звертання до пункту головного меню ***Символика→Переменные→Разрешить***.
4. Одержання відповіді.

Розглянемо приклади.

Приклад 13.4. Необхідно розв’язати символьні рівняння.

$x^3 - a = 0$, $e^{-2\cdot x} - 2\cdot a = 0$, $\sin(a\cdot x) + \cos(a\cdot x) = 0$

Розв’язок рівнянь, зображений на рис. 13.4.

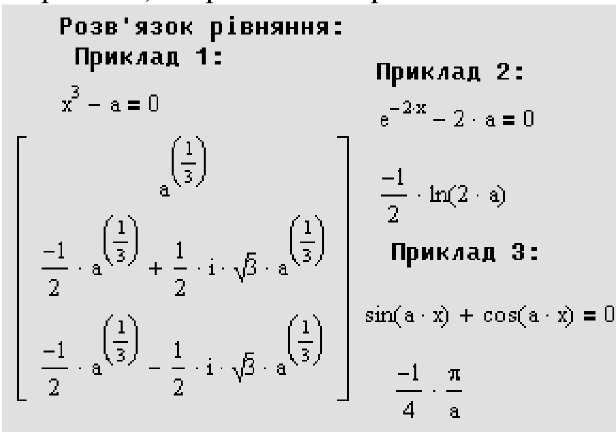


Рисунок 13.4 – Розв’язок символьних рівнянь для прикладу 13.4.

При розв’язку рівнянь аналітичним методом MathCAD видає не повну інформацію про всі корені рівняння, так як і в прикладах 2 та 3 з рис. 13.4.

Отже необхідно перевіряти правильність одержаних результатів.

Перевірка правильності одержаних результатів здійснюється таким чином:

1. Підстановка кореня в рівняння та обчислення значень рівняння, які повинні дорівнювати нулю при всіх значеннях кореня.
2. Обчислення коренів декількома методами.

2 Розв’язок систем рівнянь у MathCad

2.1 Загальні положення

У системі MathCad системи рівнянь розв’язуються за допомогою функцій:

- lsolve;
- Find;
- Minerr.

Функція lsolve дозволяє розв’язувати системи алгебраїчних рівнянь матричним методом.

Функція Find дозволяє розв’язувати системи лінійних та нелінійних рівнянь методом ітерацій.

Функція Minerr так самояк і функція Find розв’язує лінійні та нелінійні алгебраїчні рівняння. Відмінність полягає в тому, що функція може вида ти розв’язок, не досягнувши потрібної точності ітерацій. Це дозволяє одержати наближений розв’язок у випадку, коли функція Find не видає розв’язок. Але слід пам’ятати, що при використанні функції Minerr необхідно перевіряти правильність одержаних результатів.

Функції lsolve та Find дозволяють одержати розв’язок символьним методом.

2.2 Функція lsolve

Функція lsolve має вигляд: $lsolve(M,V)$, де M – матриця коефіцієнтів системи лінійних рівнянь; V – вектор правих частин системи рівнянь.

Технологія розв’язку системи рівнянь така:

- позначення матриці коефіцієнтів системи лінійних рівнянь;
- утворення вектора правих частин системи рівнянь;
- введення функції lsolve;
- одержання розв’язку шляхом натиснення на клавішу дорівнює.

Розв’язок матричним методом можна одержати, не використовуючи функцію lsolve. Для цього досить ввести вираз $M^{-1} \cdot V$.

Розв’язок системи рівнянь завдяки функції lsolve та за допомогою матричного представлення можна одержати, використовуючи символьні обчислення. Для цього служить знак «→», що утворюється натисканням комбінації клавіш «Ctrl»+«.». Розв’язок одержуємо при натисканні клавіші Enter.

Технологію метода розглянемо на прикладах.

Приклад 13.5. Нехай необхідно розв’язати таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2 \cdot x - 3 \cdot y + z = 1.5, \\ -x + 1.5 \cdot y + 3 \cdot z = -3, \\ 7 \cdot x + 5 \cdot y - 1.6 \cdot z = 7. \end{cases}$$

Розв’язок рівняння зображений на рис. 13.5.

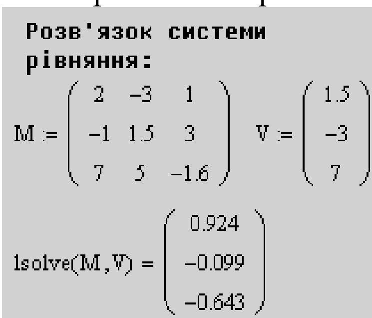


Рисунок 13.5 – Розв’язок системи рівнянь за допомогою функції lsolve для прикладу 13.5

Приклад 13.6. Розв’язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} x + y + a \cdot z = 1, \\ b \cdot x + y + 3 \cdot z = 2, \\ c \cdot x + 5 \cdot y + z = 3. \end{cases}$$

Розв’язок наведений на рис. 13.6.

Розв'язок системи рівняння:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ b & 1 & 3 \\ c & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{lsolve}(M,V) \rightarrow \begin{bmatrix} 7 \cdot \dfrac{(-1+a)}{(-14-b+3\cdot c+5\cdot b\cdot a-c\cdot a)} \\ \dfrac{(-b+3\cdot b\cdot a-7-2\cdot c\cdot a+3\cdot c)}{(-14-b+3\cdot c+5\cdot b\cdot a-c\cdot a)} \\ \dfrac{(-7+2\cdot b+c)}{(-14-b+3\cdot c+5\cdot b\cdot a-c\cdot a)} \end{bmatrix}$$

Рисунок 13.6 – Розв'язок системи рівнянь для прикладу 13.6

2.2 Функція Find

Функція Find дозволяє розв'язувати системи лінійних та нелінійних рівнянь методом ітерацій.

Вона має вигляд: $Find(x, y, z,....)$, де x, y, z – шукані невідомі.

Технологія розв'язку систем рівнянь є такою:

- завдання початкових наближень для всіх невідомих: $x := x0$, $y := y0$, $z := z0$, ….;
- введення слова Given, яке вказує на те, що далі буде система рівнянь;
- введення системи рівнянь;
- введення функції $Find(x, y, z,....)$;
- одержання результату.

.Технологію методу розглянемо на прикладах.

Приклад 13.7 Необхідно розв'язати систему з прикладу 13.5, якщо початкові наближення наступні: $x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ z_0 = -0.5$.

Розв'язок наведений на рис. 13.7

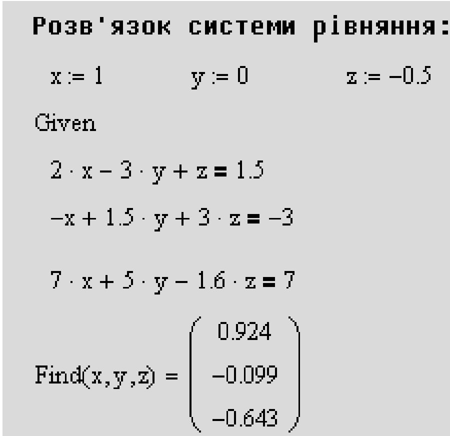


Рисунок 13.7 – Розв’язок для прикладу 13.7

Приклад 13.8. Розв’язати систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z = -19, \\ x^2 + y^2 + 2 \cdot z^2 = 63, \\ \dfrac{x}{2 \cdot y} + \dfrac{y}{2 \cdot x} = \dfrac{13}{12}. \end{cases}$$

Відомо, що початковими наближеннями можуть бути: $x_0 = -2,\ \ y_0 = -1.5,\ \ z_0 = 3.$

Розв’язок наведений на рис. 2.4.

Розв'язок нелінійної системи рівняння:

$x := -2 \qquad y := -1.5 \qquad z := 3$

Given

$x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z = -19$

$x^2 + y^2 + 2 \cdot z^2 = 63$

$\frac{x}{2 \cdot y} + \frac{y}{2 \cdot x} = \frac{13}{12}$

$\mathrm{Find}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Рисунок 13.8

2.3 Функція Minerr

Функція Minerr має таку саму технологію застосування для розв’язку, як і функція Find і має таку форму запису: $Minerr(x, y, z, ...)$, де x, y, z – шукані невідомі.

Технологію застосування цієї функції розглянемо на прикладі.

Приклад 13.9 Для рівняння з прикладу 13.8 знайти розв’язок з використанням функції Minerr.

Розв’язок проілюстрований на рис. 13.9.

Розв'язок нелінійної системи рівняння:

$x := -2 \qquad y := -1.5 \qquad z := 3$

Given

$x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z = -19$

$x^2 + y^2 + 2 \cdot z^2 = 63$

$\frac{x}{2 \cdot y} + \frac{y}{2 \cdot x} = \frac{13}{12}$

$\mathrm{Minerr}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Рисунок 13.9

3 Розв'язок диференційних рівнянь у MathCAD

3.1 Загальні положення

Система MathCAD дозволяє розв'язувати диференційні рівняння двома різними методами:

- за допомогою вбудованих функцій;
- за допомогою чисельних методів.

При цьому розв'язком є розв'язок у табличній чи графічній формах.

3.2 Постановка задачі

Задане диференційне рівняння n-го порядку та початкові умови його розв'язку. Рівняння може бути лінійним та нелінійним. Необхідно визначити функцію $y = \varphi(x)$ та всі її похідні, що задовольняють рівнянню та початковим умовам. Розв'язок необхідно одержати у вигляді таблиць та графіків функції та похідних.

З метою одержання високої точності розв'язку рівняння виконаємо методом Рунне-Кута такого порядку, який забезпечується системою MathCAD.

Для розв'язку лінійного чи нелінійного диференційного рівняння n-го порядку в MathCAD є вбудована функція odesolve, яка має вигляд: $odesolve(x, b, n)$, де x – аргумент шуканої функції; b – кінець інтервалу інтегрування; n – число кроків інтегрування зі сталим кроком.

Технологія розв'язку диференційного рівняння має вид:

1. Введення слова Given, що вказує на те, що далі буде диференційне рівняння та його початкові умови.
2. Введення диференційного рівняння у вільному вигляді:

   $$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 2\cdot x\cdot\frac{dy(x)}{dx} + 1.2\cdot y(x) = x\cdot e^{-x}$$ або

   $$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 2\cdot x\cdot\frac{dy(x)}{dx} + 1.2\cdot y(x) - x\cdot e^{-x} = 0$$ або

$$y''(x) + 2 \cdot x \cdot y'(x) + 1.2 \cdot y(x) = x \cdot e^{-x}.$$

3. Введення початкових умов: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.
4. Введення вбудованої функції $odesolve(x, b, n)$ з присвоєнням їй унікального імені та з чисельними значеннями b та n.
5. Одержання розв'язку, при натисненні на клавішу дорівнює.

Розв'язок буде обчислений та знаходитися в пам'яті комп'ютера. Тепер його можна вивести на екран у вигляді таблиці. Для цього необхідно:

1. Присвоїти змінній x значення, які відповідають бажаному діапазону зміни функції $y(x)$.
2. Ввести ім'я, що присвоєне функції $odesolve$.
3. Натиснути клавішу дорівнює для одержання відповіді у вигляді таблиці.

Дана функція є у версіях MathCAD 2001 та вище.

3.3 Функція rkfixed

Ця функція призначена для розв'язку диференційних рівнянь та систем диференційних рівнянь. Вона має синтаксис:

$$rkfixed(y, x1, x2, n, D)$$

де y – вектор початкових умов; $x1$, $x2$ – інтервал значень аргумента шуканої функції; n – кількість кроків розв'язку рівняння; F – вектор правих частин системи диференційних рівнянь, кожне з яких розв'язане відносно похідної.

Технологію розв'язку розглянемо на прикладах.

Приклад 13.10. Необхідно розв'язати диференційне рівняння першого порядку:
$y' + 3 \cdot y = 0$ з початковою умовою $y(0) = 4$.

Розв'язок рівняння в системі MathCAD проілюстрований на рис. 13.10.

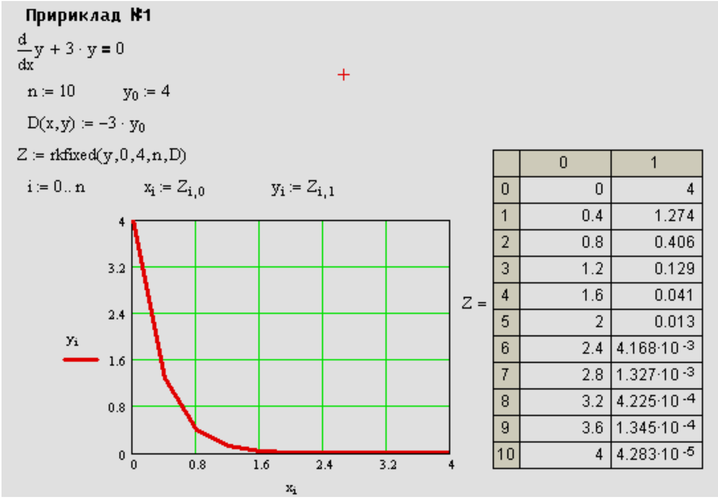


Рисунок 13.10 – Розв'язок для прикладу 13.10

Приклад 13.11 Розв'язати диференційне рівняння першого порядку: $y' = \dfrac{y}{x} + x^2$ з початковою умовою $y(0) = 1$.

Розв'язок рівняння в системі MathCAD проілюстрований на рис. 13.11.

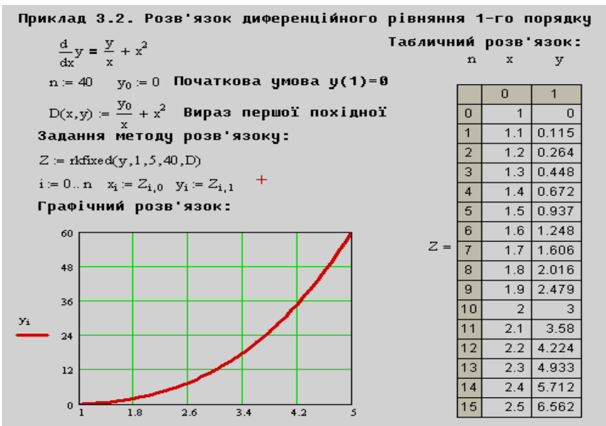


Рисунок 13.11 – Розв'язок для прикладу 13.11

Розглянемо розв'язок диференційних рівнянь другого порядку.

Приклад 13.12 Необхідно розв’язати диференційне рівняння другого порядку:

$y'' - 2 \cdot y' + 2 \cdot y = e^{x} + x \cdot \cos(x)$ з початковими умовами $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розв’язання

Для розв’язку цього диференційного рівняння в системі MathCAD його необхідно представити у вигляді двох диференційних рівнянь першого порядку. Введемо заміну в рівняння: $y' = y_1$, тоді $y'' = y_1'$, а $y = y_0$. Таким чином одержимо такі диференційні рівняння з початкового рівнянь, заданого в умові:

$y_0' = y_1$ и $y_1' - 2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_0 = e^{x} + x \cdot \cos(x)$.

Виразимо з другого рівняння похідну

$y_1' = 2 \cdot y_1 - 2 \cdot y_0 + e^{x} + x \cdot \cos(x)$.

Розв’язок рівняння в системі MathCAD проілюстрований на рис. 13.12

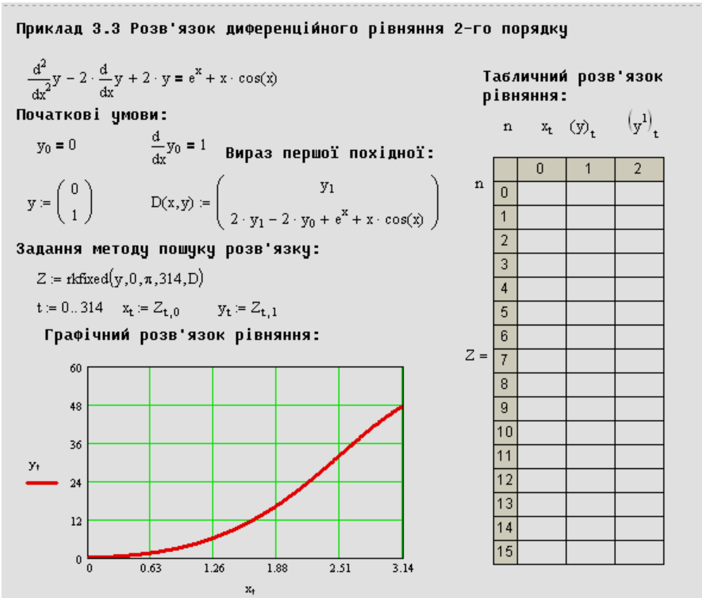


Рисунок 13.12 – Приклад розв’язку диференційного рівняння другого порядку

Розглянемо на прикладі розв'язок нелінійного диференційного рівняння.

Приклад 13.13 Розв'язати нелінійне диференційне рівняння: $y' + y^2 \cdot x = 0$ з початковою умовою $y(0) = 1$.

Розв'язок рівняння в системі MathCAD проілюстрований на рис. 13.13

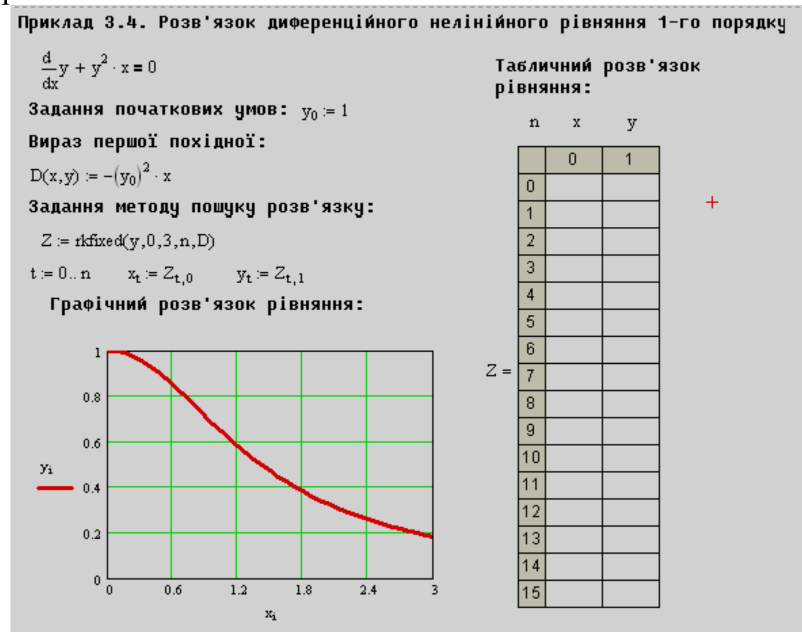


Рисунок 13.13 – Розв'язок диференційного нелінійного рівняння 1-го порядку

4 Розв'язок систем диференційних рівнянь у MathCAD

4.1 Загальна методика

Розв'язок систем диференційних рівнянь у MathCAD можливий за допомогою таких вбудованих функцій: ***rkfixed, Bulstoer, Rkadapt, rkadapt.***

Головна ідея методики розв'язку систем диференційних рівнянь полягає в тому, що систему рівнянь n-го порядку шляхом заміни подають у вигляді системи диференційних рівнянь першого порядку.

4.2 Функція rkfixed

Функція ***rkfixed*** має вигляд:

$$rkfixed(y, x1, x2, n, F)$$

Синтаксис цієї функції був розглянутий вище.

Ця функцій базується на матриці розв’язку системи диференційних рівнянь методом Рунне-Кути зі сталим шагом.

Технологія розв’язку системи диференційних рівнянь за допомогою цієї функції така:

1. Присвоєння чисельних значень всім символьним змінним, якщо такі є.
2. Введення вектора початкових умов з присвоєнням йому імені.
3. Введення вектора правих частин системи диференційних рівнянь першого порядку.
4. Введення функції $rkfixed(y, x1, x2, n, F)$ з присвоєнням їй імені з чисельним значенням змінних $x1, x2, n$.
5. Одержання розв’язку шляхом натиснення на клавішу Enter.

Розв’язок знайдений та знаходиться в пам’яті комп’ютера. Тепер його можна вивести на екран у вигляді графіка або таблиці. Для цього необхідно виконати такі дії:

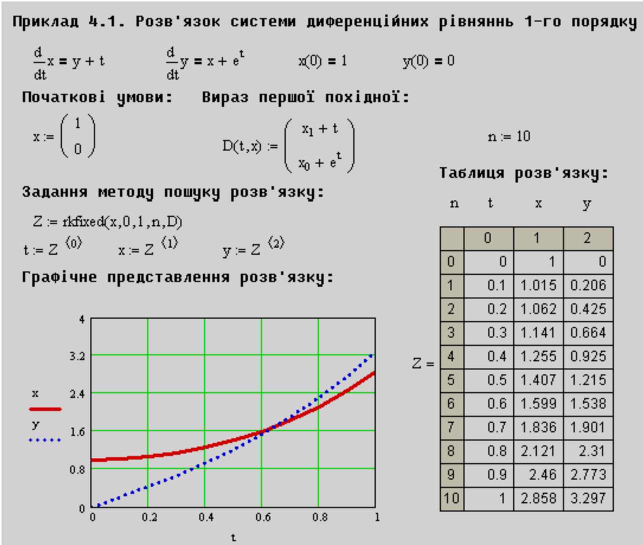
1. Присвоїти змінній n значення, що відповідають числу точок розв’язку диференційного рівняння в інтервалі від $x1$ до $x2$.
2. Ввести ім’я, що було присвоєно функції $rkfixed(y, x1, x2, n, F)$.
3. Натиснути клавішу дорівнює для одержання відповіді у вигляді таблиці.

Наведемо приклад використання даної функції.

Приклад 13.14. Розв'язати систему диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^{t}, \end{cases}$$ з початковими умовами $x(0) = 1$ та $y(0) = 0$.

Розв'язок рівняння в системі MathCAD проілюстрований на рис. 13.14



	0	1	2
0	0	1	0
1	0.1	1.015	0.206
2	0.2	1.062	0.425
3	0.3	1.141	0.664
4	0.4	1.255	0.925
5	0.5	1.407	1.215
6	0.6	1.599	1.538
7	0.7	1.836	1.901
8	0.8	2.121	2.31
9	0.9	2.46	2.773
10	1	2.858	3.297

Рисунок 13.14 – Розв'язок системи диференційних рівнянь 1-го порядку для прикладу 13.14

Приклад 13.15 Розв'язати систему диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x^{2} - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3 \cdot x - x^{2} - y, \end{cases}$$ з початковими умовами $x(0) = 0$ та $y(0) = 1$.

Розв'язок рівняння в системі MathCAD проілюстрований на рис. 13.15

Приклад 4.2. Розв'язок системи диференційних рівняннь 1-го порядку

$$\frac{d}{dt}x = y - x^2 - x \qquad \frac{d}{dt}y = 3 \cdot x - x^2 - y$$

Початкові умови: **Вираз першої похідної:**

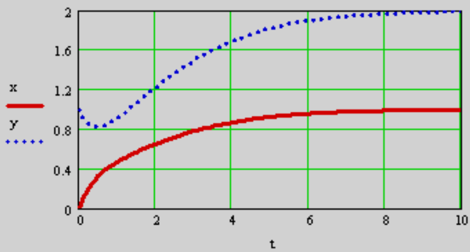
$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad n := 100 \qquad D(t,y) := \begin{bmatrix} y_1 - (y_0)^2 - y_0 \\ 3 \cdot y_0 - (y_0)^2 - y_1 \end{bmatrix}$$

Задання методу пошуку розв'язку:

$$Z := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 10, n, D)$$

$$t := Z^{\langle 0 \rangle} \qquad x := Z^{\langle 1 \rangle} \qquad y := Z^{\langle 2 \rangle}$$

Графічне представлення розв'язку:



Таблиця розв'язку:

Z =

n	t (0)	x (1)	y (2)
0	0	0	1
1	0.1	0.091	0.918
2	0.2	0.165	0.866
3	0.3	0.226	0.836
4	0.4	0.278	0.823
5	0.5	0.321	0.822
6	0.6	0.358	0.83
7	0.7	0.39	0.844
8	0.8	0.418	0.864
9	0.9	0.444	0.887
10	1	0.468	0.913
11	1.1	0.49	0.941
12	1.2	0.51	0.971
13	1.3	0.53	1.001
14	1.4	0.548	1.032
15	1.5	0.566	1.063

Рисунок 13.15 – Розв'язок системи диференційних рівнянь 1-го порядку для прикладу 13.15

Розглянемо приклади розв'язку систем рівнянь більш високого порядку.

Розглянемо на прикладі системи двох рівнянь другого порядку.

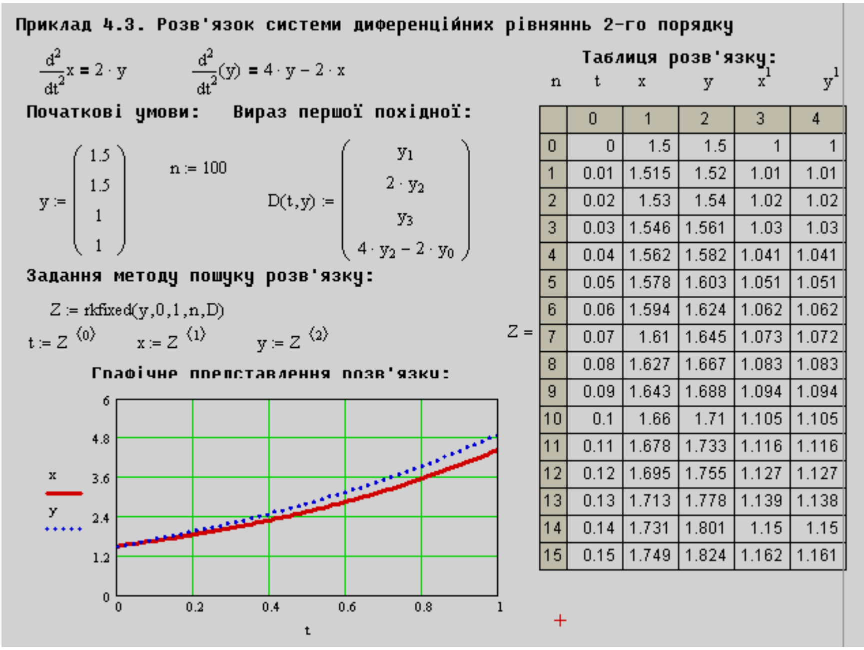
Приклад 13.16. Розв'язати систему рівнянь другого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}u = 2 \cdot v, \\ \dfrac{d^2}{dt^2}v = 4 \cdot v - 2 \cdot y, \end{cases}$$

з початковими умовами: $u(0) = 1.5$, $u'(0) = 1.5$, $v(0) = 1$, $v'(0) = 1$.

Необхідно нашу систему двох диференційних рівнянь 2-го порядку звести до системи чотирьох диференційних рівнянь 1-го порядку. Та розв'язати її, вище зазначеним методом.

Розв’язок рівняння в системі MathCAD проілюстрований на рис. 13.16.



	0	1	2	3	4
0	0	1.5	1.5	1	1
1	0.01	1.515	1.52	1.01	1.01
2	0.02	1.53	1.54	1.02	1.02
3	0.03	1.546	1.561	1.03	1.03
4	0.04	1.562	1.582	1.041	1.041
5	0.05	1.578	1.603	1.051	1.051
6	0.06	1.594	1.624	1.062	1.062
7	0.07	1.61	1.645	1.073	1.072
8	0.08	1.627	1.667	1.083	1.083
9	0.09	1.643	1.688	1.094	1.094
10	0.1	1.66	1.71	1.105	1.105
11	0.11	1.678	1.733	1.116	1.116
12	0.12	1.695	1.755	1.127	1.127
13	0.13	1.713	1.778	1.139	1.138
14	0.14	1.731	1.801	1.15	1.15
15	0.15	1.749	1.824	1.162	1.161

Рисунок 13.16 – Розв’язок системи диференційних рівнянь 2-го порядку

4.3 Функція Bulstore

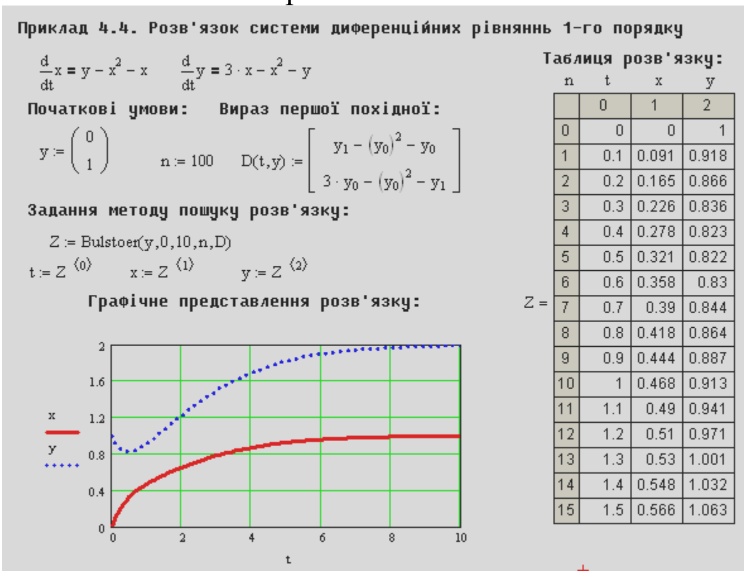
Функція **Bulstore** має вигляд:

$$Bulstoer(y, x1, x2, n, D)$$

Аргументи функції мають те саме значення, що і для функції ***rkfixed.*** Систему диференційних рівнянь вона розв’язує чисельним методом Булірша-Штера. Її рекомендують застосовувати у випадку, якщо розв’язок диференційних рівнянь мають вигляд гладких функцій.

Приклад 13.17 Розв’язати систему диференційних рівнянь першого порядку з прикладу 13.14, використовуючи функцію Bulstore.

Розв’язок рівняння в системі MathCAD проілюстрований на рис. 13.17.



n	t	x	y
	0	1	2
0	0	0	1
1	0.1	0.091	0.918
2	0.2	0.165	0.866
3	0.3	0.226	0.836
4	0.4	0.278	0.823
5	0.5	0.321	0.822
6	0.6	0.358	0.83
7	0.7	0.39	0.844
8	0.8	0.418	0.864
9	0.9	0.444	0.887
10	1	0.468	0.913
11	1.1	0.49	0.941
12	1.2	0.51	0.971
13	1.3	0.53	1.001
14	1.4	0.548	1.032
15	1.5	0.566	1.063

Рисунок 13.17 – Розв’язок системи диференційних рівнянь 1-го порядку за допомогою функції Bulstore

Під час порівнянь результатів, одержаних у прикладах 13.15. та 13.16. видно, що результати однакові.

4.4 Функція Rkadapt

Функція **Rkadapt** має вигляд:

$$Rkadapt(y, x1, x2, n, D).$$

Змінні функції мають той самий зміст, що і в функції rkfixed. Відмінність полягає в тому, що її розв’язком є матриця розв’язку системи диференційних рівнянь методом Рунне-Кути зі змінним кроком. Технологія розв’язку диференційних рівнянь залишається незмінною.

4.5 Функція rkadapt

Функція **rkadapt** має вигляд:

$$rkadapt(y, x1, x2, \Delta, n, D, k, s),$$

де y – вектор початкових умов, $x1, x2$ – інтервал значень аргумента шуканої величини; Δ – похибка розв'язку задачі; n — число кроків в інтервалі від $x1$ до $x2$; D – вектор правих частин диференційних рівнянь першого порядку; k – максимальна кількість проміжних точок розв'язку, s – мінімально дозволений інтервал між точками розв'язку.

Функція видає розв'язок системи диференційних рівнянь зі змінним кроком. З опису її аргументів видно, що функція дозволяє користувачу задати точність обчислень, також потребує завдання параметрів проміжних обчислень. При цьому технологія розв'язку не відрізняється від попередніх.

Система MathCAD дозволяє розв'язувати спеціальні види диференційних рівнянь, так як жорсткі системи, системи Пуассона та Лапласа та деякі інші. З ними можна ознайомитися самостійно за літературними джерелами.

Висновок

Отже, математичний пакет MathCAD має дуже зручний та наглядний апарат для обчислення рівнянь, систем рівнянь, диференційних рівнянь та систем диференційних рівнянь.

Лекція № 14

ПОБУДОВА ГРАФІКІВ У MATHCAD

Мета лекції: Ознайомитися з основними принципами роботи у математичного пакета MathCAD.

Питання лекції:
1 Склад ***Панели графиков*** у MathCAD.
2 Двомірна графіка у MathCAD.
3 Трьохмірні графіки у MathCAD.
4 Інтерполяція даних у MathCAD.

1 Склад Панели графиков

1.1 Застосування графіків

Візуалізація демонстрації результатів можливе виявлення їх відношення з навколишніми даними та проведення наступного більш детального аналізу.

Відомі три способи представлення функцій: у вигляді формули, таблиці та графіки.

У практичних задачах часто виникає необхідність візуалізації функцій у таких ситуаціях:

1. Загальний огляд точок графічної залежності. MathCad має властивість відображати графіки функцій за допомогою технології швидкої побудови, що важливе для експрес-аналізу результатів.
2. Дослідження графіка: точки перетину функції з віссю абсцис дають інформацію про корені відповідного рівняння. Допоміжні засоби тросування дозволяють без розрахунків зчитувати числові результати.

3. Аналіз вхідних табличних даних: невелика кількість опорних точок графіка при цьому з’єднуються послідовно лінійними відрізками.
4. Знаходження за табличними даними необхідної формули. Використання формули в практиці обробки даних характеризується відновленням великої кількості проміжних точок з побудовою відповідного апроксимуючого графіка.
5. Оцінка степені наближення та встановлення діапазону припустимої заміни однієї складно обчислювальної функції на іншу більш просту.
6. З графіка при проведенні додаткових міркувань можна одержати якісну та кількісну оцінку похибки обчислень за відомими похибками аргументів.

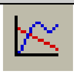
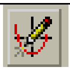
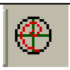
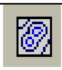
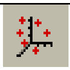
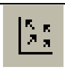
1.2 Склад Панели Графиков

Завдання графіка у вибраній позиції документа починається з вибору за допомогою меню ***Вставить→График*** чи за допомогою панелі інструментів ***Графики*** (рис.14.1).

Рисунок 14.1 – Панель ***Графики***

Призначення кнопок панелі інструментів *Графики* подані в таблиці 14.1.

*Таблиця 14.1 – Призначення панелі інструментів **Графики***

Кнопка	Назва	Виконувана дія
	График	Використовується для побудови двомірних графіків
	Масштаб	Використовують для збільшення або зменшення масштабів
	Слежение	Використовується для пошуку координат графіків
	Полярный график	Використовується для побудови полярних графіків
	Поверхностный график	Використовується для побудови поверхневих графіків
	Контурный график	Використовується для побудови контурних графіків
	Трехмерный гра-фик преграды	Використовується для побудови графіка у вигляді діаграми
	Трехмерный гра-фик разноса	Використовується для побудови трьохмірного графіка у вигляді рознесення
	Векторный график	Використовується для побудови трьохмірного графіка

2 Двомірна графіка в MathCad

2.1. Побудова графіка в Декартовій системі

При ініціалізації цієї піктограми на екрані з'являється заготовка графіка у вигляді прямокутника з полем графіка (рис. 14.2).

У виділеному нижньому затушованому квадратику заготовки графіка необхідно помістити значення аргумента (наприклад, x), а у лівому затушованому квадратику – функцію, яка повинна бути зображена.

Функція може бути задана аналітичним виразом, наприклад: $\sin(x)+2\cdot\cos(x)$

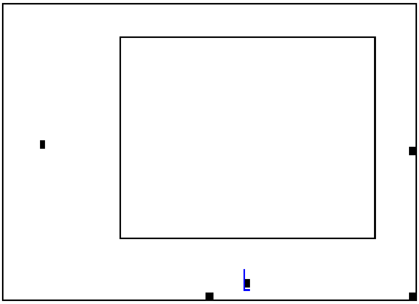


Рисунок 14.2 – Заготовка графіка

або в такому вигляді: $f(x)$ чи $df(x)/dx$.

При цьому загальний вигляд функції конкретизується перед графіком, наприклад:

$$f(x):=\sin(x)+2\cdot\cos(x)$$

Приклади побудови графіків функцій та їх похідних наведено на рис. 14.3.

Засоби математичного пакета дозволяють задавати область зміни аргумента x. Також визначаються верхня та нижня межа значень графіка. Побудова графіка здійснюється автоматично. При наявності розривів функції побудова графіків здійснюється як звичайно, а точки розриву з'єднуються умовними лініями.

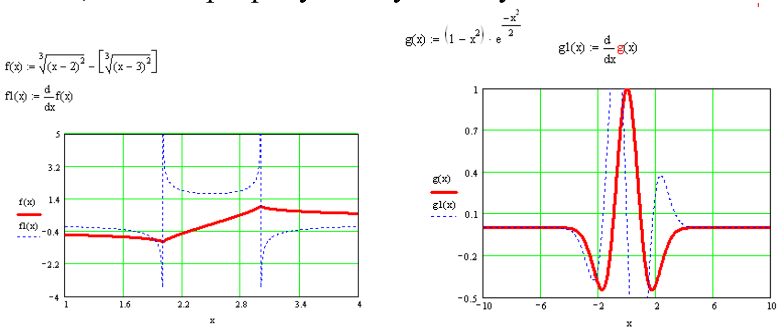


Рисунок 14.3 – Побудова функцій та їх похідних

Для побудови двох графіків на одній шкалі необхідно після зазначення першого графіка у лівому затушованому квадратику поставити кому і тоді курсор опуститься під графік, де можна буде задати другий графік. Таким чином, можна побудувати більше ніж два графіки. Але треба пам'ятати, що при побудові декількох графіків на одній шкалі всі вони повинні залежати від однієї змінної, що відкладається нижньому затушованому квадратику.

2.2 Редагування графіків

Форматування графіка здійснюється за допомогою подвійного клацання мишкою по побудованому графіку і з'явиться вікно форматування графіка (рис. 14.2).

Вкладка X-Y Axes з вікна Formatting (рис. 14.4) призначена для налаштування вигляду шкали. Налаштовувати можна обидві осі графіків, відповідно обравши одне з налаштувань: X-Axis або Y-Axis.

За допомогою поля Log Scale можна налаштувати логарифмічну шкалу. Поле Grid Lines налаштовує відображення сітки на графіку. Поле Numbered служить для налаштувань зображення чисел градації шкали. Поле Autoscale використовується для автоматичного налаштування шкали при побудові графіка функції.

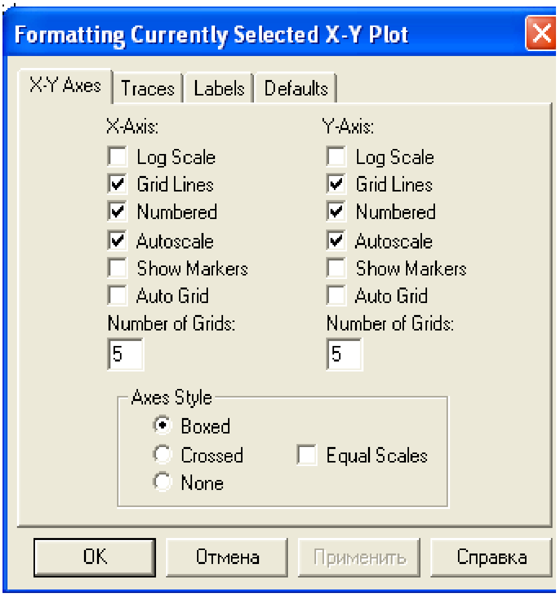


Рисунок 14.4 – Вікно форматування сітки

Поле Show markers служить для налаштування відображення маркерів. Поле Auto Grid служить для автоматичного налаштування сітки. Поле Number of Gird активне тоді, коли попереднє поле вимкнене (в ньому не стоїть прапорець) і служить для налаштування відображення ліній сітки на графіку.

Поля з налаштування Axes Style служать для налаштування стилю відображення сітки. За замовчуванням стоїть прапорець у полі Boxed, який означає, що цифри на графіку відображені за краями графіка. При ввімкненні прапорця в полі Crossed відображення градуювання шкали х починається з нуля.

Вкладка Traces (рис. 14.5) призначена для налаштування вигляду графіка.

Поле Legend Label призначене для вибору графіка. Поле Symbol служить для відображення символів графіка. Поле Line служить для вибору символів відображення ліній графіка (суцільна – solid, точкова – dot, штрихова – dash, штрих-пунктирна – dado. Поле Color призначене для вибору кольору відображення графіка лінії. Поле Type служить для вибору типу лінії (суціль-на, з областями, штрихова). Поле Weight служить для вибору товщини відображення графіка.

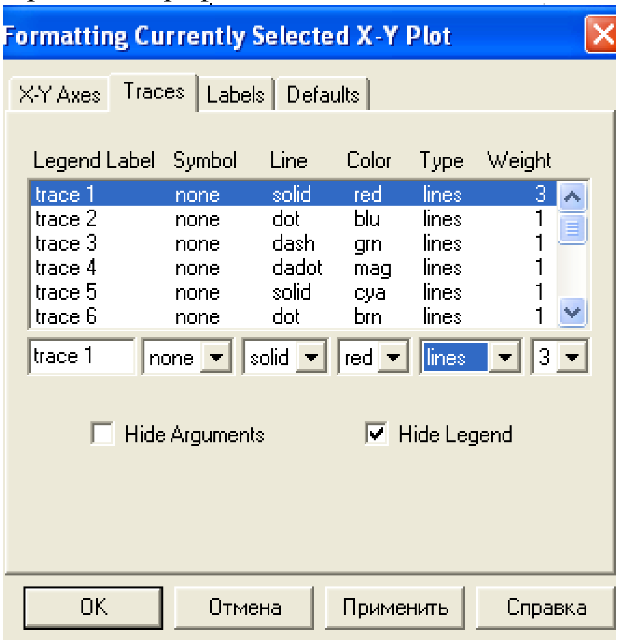


Рисунок 14.5 – Вікно форматування графіка

Вкладка Labels (рис. 14.6) призначена для завдання заголо-вку графіка та його осей.

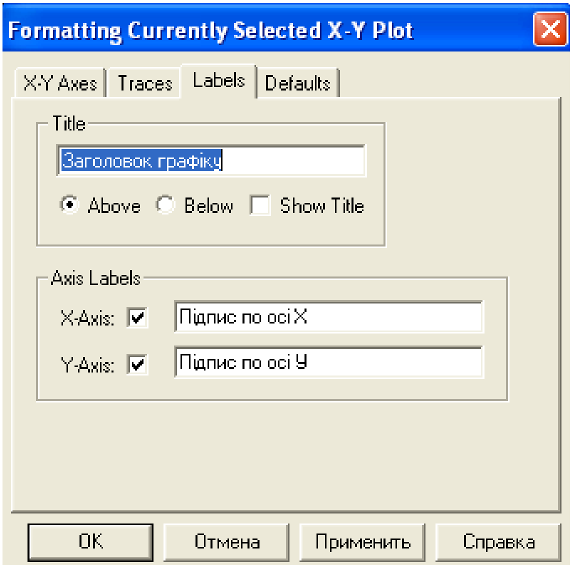


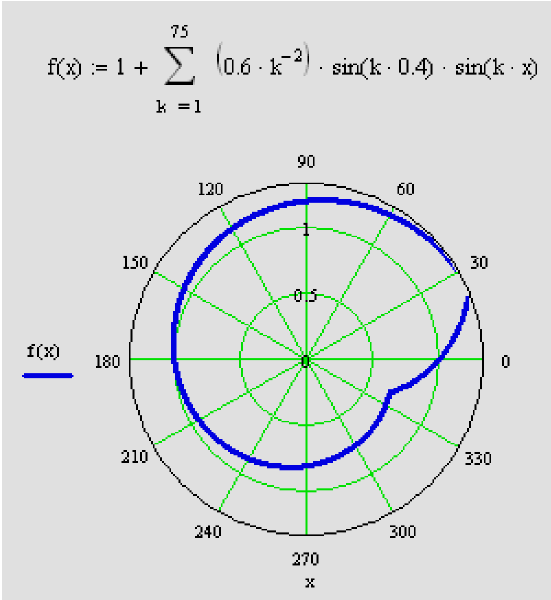
Рисунок 14.6 – Вікно налаштування підписів графіка

2.3 Побудова плоского графіка в полярній системі координат

Система MathCAD дозволяє будувати графіки в полярній системі координат. Для цього служить кнопка ***Полярный график*** з панелі ***Графиков***.

При ініціалізації цієї кнопки піктограми на екрані виводиться заготовка графіка у вигляді прямокутника з колом, на якому знаходяться два затушованих прямокутники: один – внизу, другий – зліва від кола.

Приклад побудови графіка функції в полярній системі координат зображений на рис. 14.7.



Рисуноук 14.7 – Побудова графіка в полярній системі координат

2.4 Операції над графіками

Ділянки плоских графіків можуть бути збільшені до потрібного розміру. Для цього служить кнопка ***Масштаб*** з панелі інструментів ***Графики***. Ініціалізація цієї кнопки здійснюється після виділення на графіку деякої ділянки (виділена ділянка показана пунктиром, рис. 14.8).

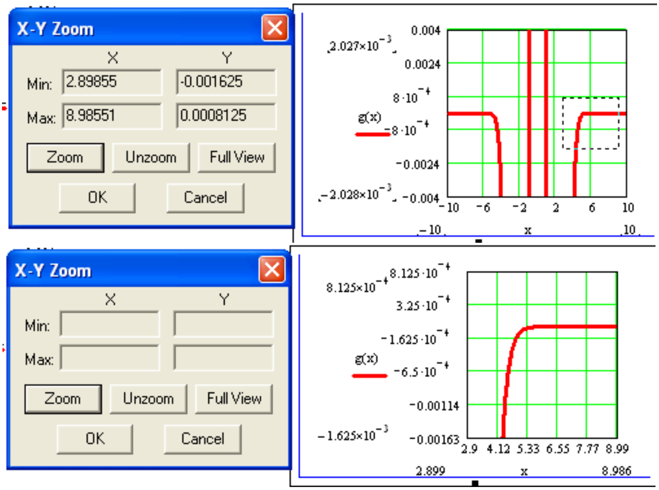


Рисунок 14.8 – Операція масштабування графіків

Для визначення координат точок графіка (трасування) служить кнопка ***Слежение*** з панелі інструментів ***Графики***.

Визначення координат називається трасуванням (визначенням точок) кривої. При ініціалізації кнопки ***Слежение*** на екрані виводиться меню, зображене на рис. 14.9.

Трасування графіка здійснюється двома лініями, координати перетину яких показуються у вікні X –Y Trace. Ці координати можна скопіювати Copy X, Copy Y в буфер обміну, а потім перенести в потрібне місце MathCAD-документа.

Шляхом трасування можна визначити максимум (мінімум) кривої.

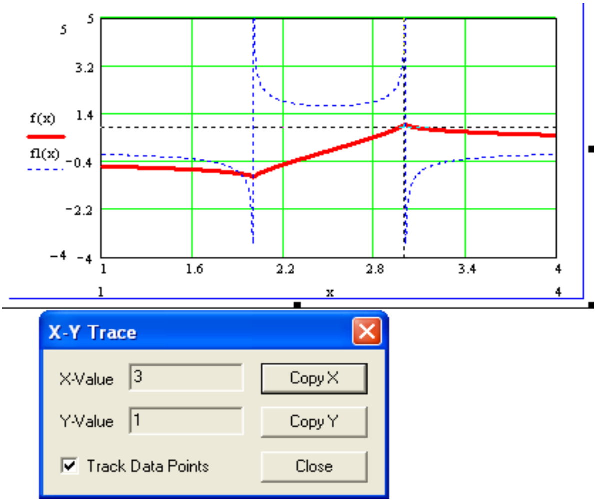


Рисунок 14.9 – Трасування кривої графіка

3 Трьохмірна графіка в MathCAD

3.1 Загальний вид панелі *Математика*

Для побудови поверхні в панелі графіків є кнопка ***Поверхностный график*** з панелі ***Графики***.

При ініціалізації цієї кнопки на екран виводиться заготовка об'ємного графіка поверхні, що має вигляд прямокутника, в лівому нижньому куті якого знаходиться чорний квадратик. На його місце треба помістити ім'я матриці чи вектор, які потім будуть зображені у вигляді об'ємного графіка.

Для побудови графіка функції двох змінних перед його заготовкою задається додаткова інформація:

- визначається функція, наприклад:

$$F(x,y):=1+(\cos(x)-10\cdot\sin(y)^2)\cdot\exp(-[(x-1)^2+5\cdot y^2]/2)$$

- вводиться індексація вузлів сітки:

$$i:=0..10 \qquad j:=0..7\,;$$

- формуються вектори значень аргументів, що відповідають вузлам сітки:

$$x_i := i \cdot 0.2 - 1 \qquad y_j := j \cdot 0.1;$$

- обчислюється матриця значень функції, аргументи яких відповідають вузлам сітки:

$$U_{i,j} := F(x_i, y_i).$$

Ця інформація розміщується перед полем графіка. Побудований відповідно до заданої матриці графік функції двох змінних має вигляд просторової сітки. Графік побудований на рис. 14.10.

Цей графік можна редагувати за допомогою подвійного клацання мишкою по графіку, після чого з’явиться вікно, зображене на рис. 14.11.

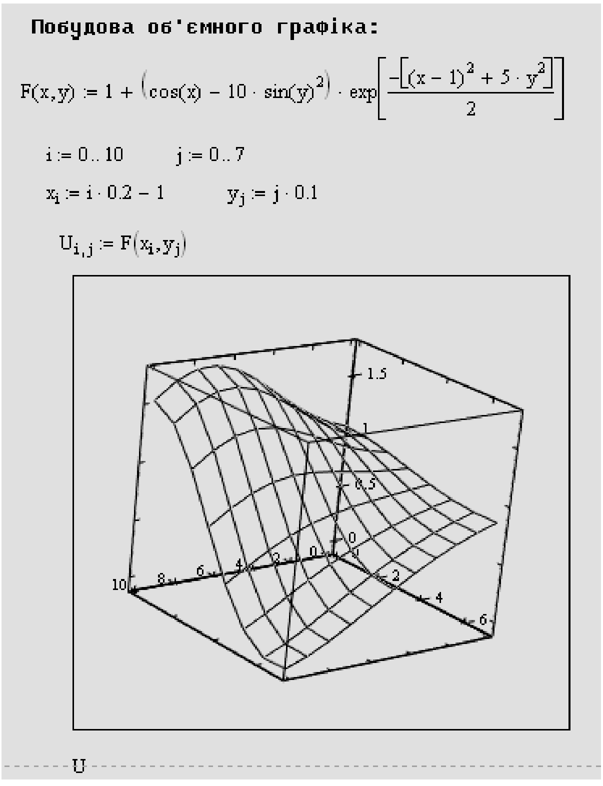


Рисунок 14.10 – Об’ємний графік

Тут як і в плоскому графіку можна налаштовувати вигляд координатної сітки, вид графіка, його форму та кольорове оформлення.

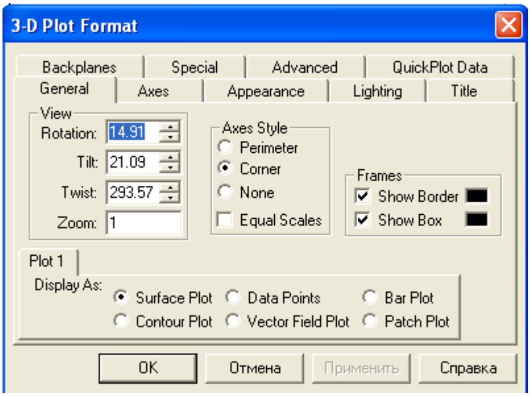


Рисунок 14.11 – Вікно форматування графіка

3.2 Точкова діаграма

Графічне зображення матриці (рис. 14.12) можна подати у вигляді точкової діаграми. Координати точок відповідають значенням матриці у вузлах сітки.

Засоби математичного пакета дозволяють в широкому діапазоні змінювати вигляд і формат графіка – здійснювати нахил графіка, поворот його на необхідний кут, нумерувати осі, задавати вигляд сітки та інше.

На полі графіка вказуються необхідні параметри координат, зображуються координатні осі, координатні площини та граничні лінії, змінюються координати вузлів сітки та відповідна їм кількість ліній на графіку поверхні.

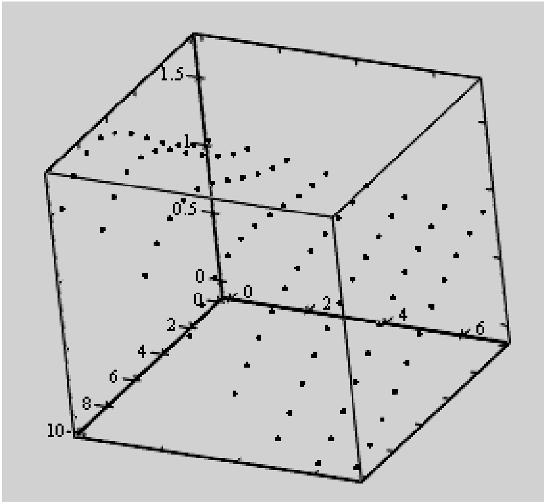


Рисунок 14.12 – Об'ємна точкова діаграма

3.3 Стовпчаста діаграма

Елементи вектора чи матриці також можна зобразити у вигляді стовпчастої діаграми. Для цього на панелі ***Графиков*** є кнопка ***Трьохмерный график диаграммы.***

Висота стовпчиків діаграми відповідає значенню вектора чи матриці у вузлі сітки. Зображення матриці чи вектора у вигляді стовпчастої діаграми подається в аксонометрії (рис. 14.13).

Для побудови графіка у вигляді стовпчастої діаграми задається раніше вказана додаткова інформація про сітку, на якій визначена функція двох змінних або значення матриці.

Стовпчаста діаграма дає зручну візуальну інтерпретацію функції двох змінних або елементів вектора чи матриці.

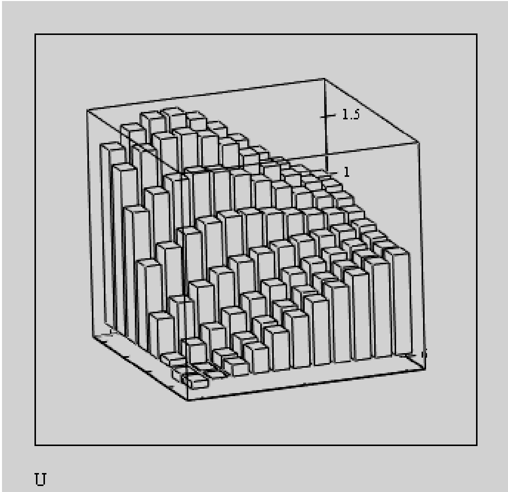


Рисунок 14.13 – Стовпчаста діаграма

3.4 Графік з контурами

Засоби математичного пакета MathCAD дають можливість дослідження багатьох властивостей функції кількох змінних, заданих аналітичним виразом. Можуть бути виконані перерізи поверхонь паралельними площинами. Для цього служить різновид об'ємного графіка у вигляді ізоліній (ліній рівного значення функції). Побудова цього графіка здійснюється за допомогою команди меню тривимірного графіка або за допомогою кнопки ***Контурный график*** з панелі ***Графики***.

Графік ізоліній (рис. 14.14) дозволяє виконати аналіз функції двох змінних, зокрема аналіз на екстремум, наявність нулів, полюсів та інше. Приклад побудови ізоліній наведено на рис. 14.14.

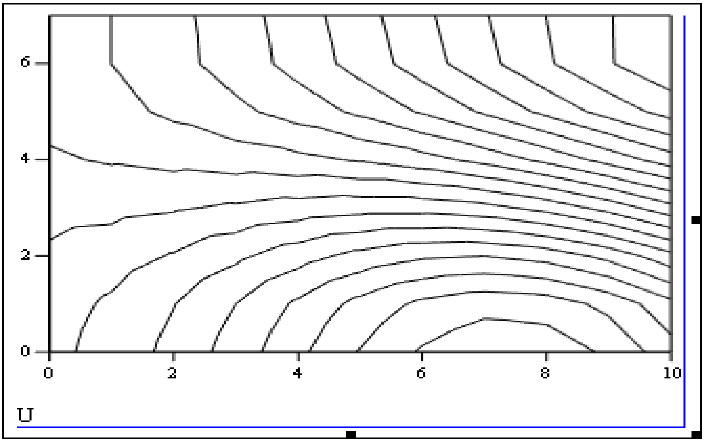


Рисунок 14.14 – Графік ізоліній

3.5 Векторні графіки

Засобами математичних пакетів можна побудувати векторне поле функції двох змінних. Для цього на панелі ***Графиков*** є кнопка ***Векторный график***.

Векторне поле визначається спеціальною векторною функцією, яка повинна бути задана перед графіком.

Наприклад, розглянемо функцію двох змінних (потенціал):

$$z := 0 \quad \varphi(x, y) := \ln(1 + x + y + z) + (x^2 + y^2 + z^2)^2 .$$

Дана функція утворює скалярне поле, яке характеризується вектором-градієнтом. Вектор-градієнт визначається такою векторною функцією:

$$grad(x, y) := \begin{bmatrix} (1 + x + y + z)^{-1} + 4 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot x \\ (1 + x + y + z)^{-1} + 4 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot y \end{bmatrix}.$$

Проекції вектора градієнта даного скалярного поля:

$$f1(x, y) := grad(x, y)_0 ,$$

$$f2(x, y) := grad(x, y)_1 .$$

Здійснимо індексацію вузлів сітки та формування векторів значень аргументів:

$$i := 0...20 \qquad j := 0...20$$

$$x_i := 0.05 \cdot i \qquad y_i := 0.05 \cdot j$$

Обчислення матриць-компонент вектора-градієнта:

$$M_{i,j} := f1(x_i, y_j) \quad N_{i,j} := f2(x_i, y_j)\,.$$

Приклад векторного поля зображений на рис. 14.15.

$z := 0 \qquad \phi(x,y) := \ln(1 + x + y + z)^{-1} + 4 \cdot \left(x^2 + y^2 + x^2\right)^2$

$$grad(x,y) := \begin{bmatrix} (1 + x + y + z)^{-1} + 4 \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot x \\ (1 + x + y + z)^{-1} + 4 \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot y \end{bmatrix}$$

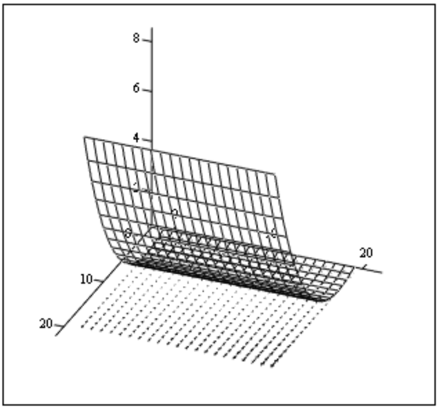
$f1(x,y) := grad(x,y)_0$

$f2(x,y) := grad(x,y)_1$

$i := 0..20 \qquad j := 0..20$

$x_i := 0.05 \cdot i \qquad y_j := 0.05 \cdot j$

$M_{i,j} := f1(x_i, y_j) \qquad N_{i,j} := f2(x_i, y_i)$



M, N

Рисунок 14.15 – Графік зображення векторного поля

4 Інтерполяція даних у MathCAD

4.1 Обробка експериментальних даних

При обробці експериментальних даних виникає задача апроксимації результатів експерименту аналітичною залежністю $y = f(x)$, яку можна використовувати в подальших розрахунках.

Існує три можливості апроксимації даних експерименту:

1. Апроксимуюча функція $f(x)$ повина проходити через всі досліджувані точки. Такий спосіб апроксимації називається інтерполяцією.
2. Вибрати апроксимуючу функцію таким чином, щоб вона згладжувала, усереднювала досліджувальні дані. Такий спосіб апроксимації називається регресією або зглажуваням.
3. Підібрати апроксимуючу функцію, відкидаючи систематичну похибку, так звані завади, що накладаються на експериментальні дані. Такий спосіб називається згладжуванням з фільтрацією даних.

4.2 Лінійна інтерполяція

Вбудовані функції MathCAD дозволяють при інтерполяції проводити через експериментальні точки криві різної степені гладкості.

При лінійній інтерполяції апроксимуюча функція поєднує досліджувальні точки відрізками прямих ліній. Для лінійної інтерполяції використовується вбудована функція linterp.

Синтаксис функції: $l\operatorname{int}erp(x, y, t)$, де x – вектор досліджу вальних значень аргумента; y – вектор досліджувальних значень функції; t – значення аргумента, при якому обчислюються інтерполюючі значення функції. Іноді необхідно задати одне інтерполююче значення функції, але частіше визначається ряд значень функції, тоді t – вектор значень, а результат розрахунків – масив інтерполюючих значень. Частіше t – просто змінна (аргумент інтерполюючої функції), тоді результат розрахунків – функція, яку можливо подальше інтегрувати, диференціювати та інше.

Приклад 14.1. У таблиці 14.2 наведені дані залежності температури кипіння нітробензолу від тиску. Необхідно знайти температури кипіння нітробензолу від тиску при значенні тиску Р = 30; 50; 70; 300; 500 мм. рт. ст. , відсутніх у таблиці.

Таблиця 14.2 – Залежність температури кипіння нітробензолу від тиску

Р, мм. рт. ст.	10	20	40	60	100	200	400	760
t, °С	84.6	99.3	115.4	125.8	139.9	161.2	185.8	210.6

Для розв’язку даної задачі необхідно побудувати графік залежності тиску від температури та з нього знайти значення температури кипіння при потрібних значеннях тиску. Тут необхідно для побудови графіка скористатися лінійною інтерполяцією.

Розв’язок задачі та приклад лінійної інтерполяції зображені на рис. 14.16.

Масив експерементальних даних:

$$P := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \\ 60 \\ 100 \\ 200 \\ 400 \\ 760 \end{pmatrix} \qquad t := \begin{pmatrix} 84.6 \\ 99.3 \\ 115.4 \\ 125.8 \\ 139.9 \\ 161.2 \\ 185.8 \\ 210.6 \end{pmatrix} \qquad t1 := \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 70 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Вибір методу інтерполювання даних:

$$\mathrm{linterp}(P, t, t1) = \begin{pmatrix} 107.35 \\ 120.6 \\ 129.325 \\ 173.5 \\ 192.689 \end{pmatrix} \qquad Y(t) := \mathrm{linterp}(P, t, t1)$$

Побудова графіку інтерполювання даних:

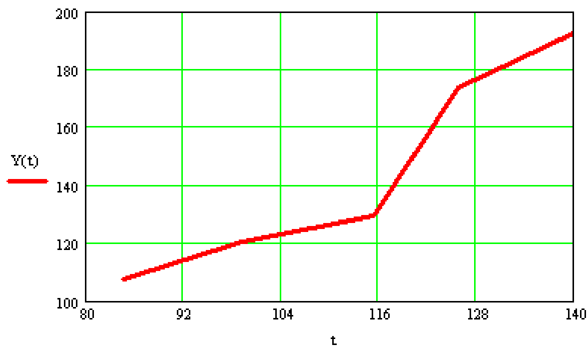


Рисунок 14.16

4.3 Сплайн-інтерполяція

Висока точність інтерполяції може бути досягнута шляхом інтерполяції функції $y = f(x)$ множиною поліномів невисокого порядку. Такі поліноми називаються сплайнами. Сплайни можуть бути другого, третього та четвертого порядку. В системі MathCAD реалізована інтерполяція кубічними сплайнами за допомогою функції:

$\operatorname{int} erp(V_S, V_X, V_Y, x)$, де V_X, V_Y – вектори значення аргумента і функції; $V_S := cspline(V_X, V_Y)$, де x – значення аргумента.

Функція **interp** може бути подана в такому вигляді:

$\operatorname{int} erp(cspline(V_X, V_Y), V_X, V_Y, x)$

Технологію сплайн-інтерполяції покажемо на прикладі.

Приклад 14.2. Необхідно розв’язати задачу сплайн-інтерполяції для даних з прикладу 4.1 та порівняти результати інтерполяції, одержані класичним методом, що потребують розв’язку системи рівнянь, та методом-сплайн інтерполяції.

Розв’язок наведений на рис. 14.17.

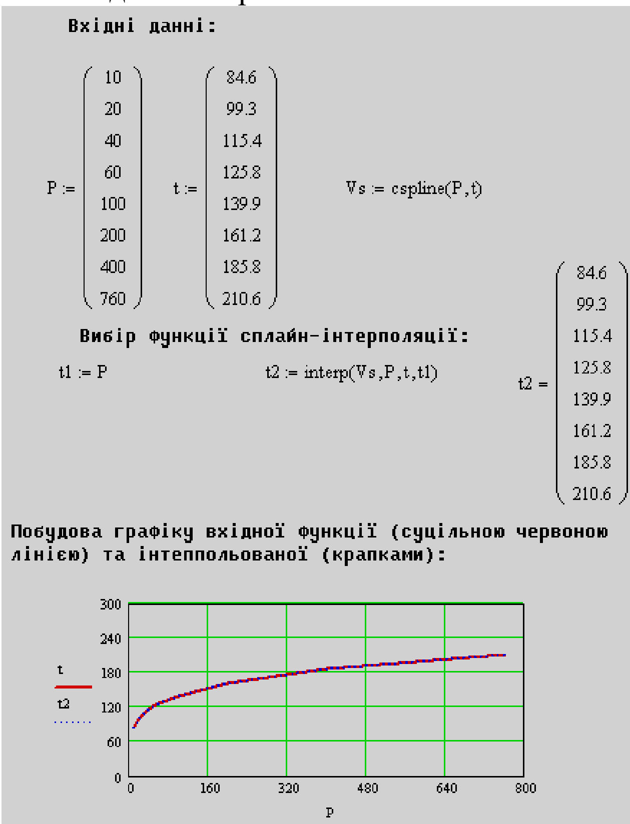


Рисунок 14.17 – Розв’язок до прикладу 4.2

З графіка видно, що дані сплайн-інтерполяції повністю збігаються з початковими даними.

Але не слід надто радіти одержаним результатам. По-перше, математична модель вивчаємого об'єкта нами не одержана, оскільки результатами сплайн- інтерполяції в MathCAD є таблиці. По-друге, якщо початкові дані одержані з помилками, то сплайн-інтерполяція видасть розв'язок з тими самими помилками.

4.4 Апроксимація

Апроксимація – це інтерполяція, наближена в вузлах, що дозволяє згладити неточності початкових даних, і таким чином, підвищити достовірність одержаної моделі.

Система MathCAD має ряд вбудованих функцій, що дозволяють розв'язати задачу апроксимації. Такими функціями є такі функції:

- сукупність функцій slope та intercept, що дозволяє розв'язати задачі лінійної апроксимації;
- interp – поліноміальна апроксимація;
- linfit – апроксимація лінійною комбінацією функцій;
- genfit – апроксимація нелінійними функціями.

Розглянемо технологію розв'язку задач апроксимації за допомогою перелічених функцій та наведемо приклади.

4.4.1 Лінійна апроксимація

Функції slope та intercept розв'язують задачі лінійної апроксимації, визначають коефіцієнти a та b функції $y = a + b \cdot x$, що подана у вигляді таблиці.

Розв'язок має такий вигляд:

$b := slope(Vx, Vy)$,

$a := \text{intercept}(Vx, Vy)$,

де Vx, Vy – вектори аргумента та функції відповідно.

Приклад 14.3 У результаті дослідження були одержані дані, які наведені у таблиці 14.3.

Таблиця 14.3 – Дані дослідження

X	1	2	3	4	5	6
Y	0,29	0,44	0,55	0,62	0,67	0,7

Необхідно розв’язати задачу лінійної апроксимації, використовуючи функції MathCAD slope та intercept.

Вибір виду функції інтерполяції.

Переконаємося, що функція інтерполяції є лінійною. Скористаємося графоаналітичним методом. На рис. 14.18. наведена залежність $y = f(x)$, що побудована за даними таблиці 14.3.

З графіка видно, що функція $y = f(x)$ нелінійна і задача сформульована так, що необхідні додаткові дії, щоб привести її до лінійного вигляду.

Порівняємо одержаний графік з графіками типових функцій і побачимо, що функцією інтерполяції може бути дробово-лінійна $y = x/(a + b\cdot x)$ або степенна $y = a\cdot x^d$. Вони обидві можуть бути лінеаризовані та представлені у вигляді таких лінійних функцій:

$Y_1 = a + b\cdot x$; $Y_2 = c + dX$, де $Y_1 = x/y$; $Y_2 = \ln y$; $X = \ln x$; $c = \ln a$

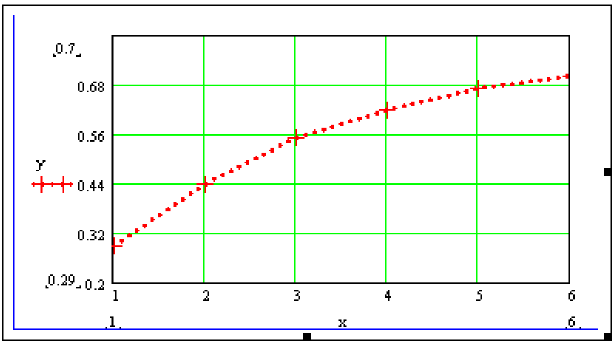


Рисунок 14.18 – Графік функції для прикладу 4.3

Значення лінеаризованих аргументів і функцій наведені в таблиці 14.4.

Таблиця 14.4 – Таблиця лініаризованих дробово-лінійної та степеневої функцій

x	1	2	3	4	5	6
y	0.29	0.44	0.55	0.62	0.67	0.7
X	0	0.69	1.1	1.39	1.61	1.79
Y_1	3.45	4.55	5.45	6.45	7.46	8.57
Y_2	-1.24	-0.82	-0.6	-0.48	-0.4	-0.36

Тепер можна розв’язати задачу лінійної апроксимації за допомогою функцій slope та intercept.

Випадок 1. Дробово-лінійна функція $y = \dfrac{x}{a + b \cdot x}$.

У цьому випадку лінеаризована функція має вигляд $Y_1 = a + b \cdot x$. Тоді розв’язок буде мати вигляд, що зображений на рис. 14.19.

Початкові умови:

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad Y1 := \begin{pmatrix} 3.45 \\ 4.55 \\ 5.45 \\ 6.45 \\ 7.46 \\ 8.57 \end{pmatrix}$$

Розв'язок задачі лінійної інтерполяції:

b := slope(x,Y1)   b = 1.009

a := intercept(x,Y1)   a = 2.455

Рисунок 14.19 – Розв’язок для дробово-лінійної функції інтерполяції

Таким чином, коефіцієнтами дробово-лінійної функції будуть:
$a = 2.45$; $b = 1.009$, а функція інтерполяції буде мати вигляд:

$$y = \frac{x}{2.5 + x}$$

Випадок 2. Степенна функція $y = a \cdot x^d$

У цьому випадку лінеаризована функція має вигляд: $Y_2 = c + dX$. Тоді розв'язок буде мати вигляд, що поданий на рис. 14.20. Але так як $c = \ln a$, то $a = e^c = e^{-1.197} = 0.302$.

Таким чином, коефіцієнтами степенної функції $y = a \cdot x^d$ будуть $a = 0.3$; $d = 0.5$, а функція буде мати вигляд $y = 0.3 \cdot x^{0.5}$ чи $y = 0.3 \cdot \sqrt{x}$.

Початкові умови:

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.693 \\ 1.099 \\ 1.386 \\ 1.609 \\ 1.792 \end{pmatrix} \qquad Y2 := \begin{pmatrix} -1.24 \\ -0.82 \\ -0.6 \\ -0.48 \\ -0.4 \\ -0.36 \end{pmatrix}$$

Розв'язок задачі лінійної інтерполяції:

c := intercept(x,Y2)   c = −1.197

d := slope(x,Y2)   d = 0.499

Рисунок 14.20 – Розв'язок для степенної функції

Результати табулювання функцій наведені в таблиці 14.5.

Таблиця 14.4 – Значення результатів лінійної апроксимації

x	1	2	3	4	5	6
y	0.29	0.44	0.55	0.62	0.67	0.7
φ_1	0.286	0.444	0.545	0.615	0.667	0.706
φ_2	0.3	0.424	0.52	0.6	0.671	0.735

У таблиці введені такі позначення:

- x, y – вхідні значення аргумента та функції;
- φ_1 – значення дробово-лінійної апроксимації;
- φ_2 – значення степенної функції апроксимації.

Таким чином, видно, що найбільш кращою є дробово-лінійна функція. Похибки обох функцій малі, тому немає потреби їх розраховувати.

4.4.2 Поліноміальна апроксимація

Апроксимація поліномами в MathCAD здійснюється за допомогою функції interp, яка має вигляд:

interp (Vs, Vx, Vy, x),

де Vx, Vy – вектори аргумента x та функції y(x); Vs – функція, яка обчислюється функціями loess чи regress; x – аргумент обчислюваної функції інтерполяції.

Функція loess має вигляд: loess (Vx, Vy, span). де span – параметр, що вибирає значення x для інтерполяції поліномом другого степеня у вказаному діапазоні. За замовчуванням span=0,75.

Функція regress має вигляд: regress(Vx, Vy, n), де n – степінь полінома, рекомендується використовувати $n \le 4$.

Приклад14.4 Дані дослідження наведені в таблиці 14.6.

Таблиця 14.5 – Дані дослідження

x	0.5	2	3.5	5	6.5	8	9.5
y	0	3	15	36	66	105	153

Необхідно розв’язати задачу поліноміальної апроксимації.

Вибір степеня полінома.

Обчислимо табличні різниці, що подані у таблиці 14.7.

Таблиця 14.7 – Табличні різниці

y	0	3	15	36	66	105	153
$\Delta^{(1)}$	3 12 21 30 39 48						
$\Delta^{(2)}$	9 9 9 9 9 9						

Оскільки другі табличні різності сталі, то інтерполяційний поліном буде другого порядку (n=2): $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2$. Розв’язок має вигляд, наведений на рис. 14.21.

Початкові умови:

$$Vx := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 3.5 \\ 5 \\ 6.5 \\ 8 \\ 9.5 \end{pmatrix} \qquad Vy := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 15 \\ 36 \\ 66 \\ 105 \\ 153 \end{pmatrix} \qquad x := 1..8$$

Розв'язок:

$Vs := \mathrm{regress}(Vx, Vy, 2)$

$\mathrm{interp}(Vs, Vx, Vy, x)$

Рисунок 14.21 – Розв’язок до прикладу 14.5

Після виклику функції interp натисканням на клавішу «=» (дорівнює) маємо відповідь у вигляді вектора (рис. 14.22).

interp(Vs,Vx,Vy,x)

$2.176\cdot10^{-14}$
3
10
21
36
55
78
105

Рисунок 14.22

Відгуком функції interp не є поліном чи хоча б його коефіцієнти. В цьому суттєвий недолік функції. Вона не дозволяє одержати математичну модель об’єкта, результати дослідження якого були наведені у прикладі 14.4.

Висновок

Отже, математичний пакет MathCAD має дуже зручний та наглядний апарат для графічного представлення даних та проведення операцій апроксимації та інтерполяції даних.

Лекція № 15

ПРОГРАМУВАННЯ В MATHCAD

Мета лекції: Ознайомитися з основними принципами роботи математичного пакета MathCAD.

Питання лекції:

1 Створення програми у MathCAD.
2 Оператор умови та локальне присвоєння.
3 Розробка програми у MathCAD.
4 Оператори циклу.

1 Створення програм у MathCAD

1.1 Панель інструментів Programing

Для програмування у документі MathCAD є спеціальна панель інструментів **Programming** (Програмування), яку можна викликати на екран натисканням кнопки **Programming Toolbar** на панелі Math (*Математика*), як вказано на рис. 15.1. Більшість кнопок цієї панелі виконано у вигляді текстового представлення операторів програмування, тому їх зміст легко зрозуміти. Покажемо послідовно основні складові частини мови програмування MathCAD та розглянемо приклади їх використання.

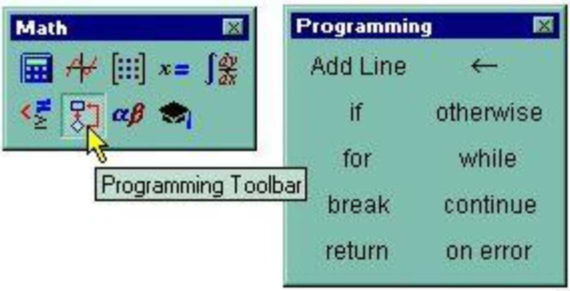


Рисунок 15.1 – Панель інструментів ***Programming***

Основними інструментами роботи у MathCAD є математичні вирази, змінні та функції. Досить часто записати формулу, що використовує ту або іншу внутрішню логіку (наприклад, повернення різних значень залежно від умов), в один рядок не вдається. Призначення програмних модулів як раз і полягає у визначенні виразів, змінних та функцій в декілька рядків, часто із застосуванням специфічних програмних операторів. Порівняємо визначення функції f(x) із прикладу 15.1 із визначенням f(x) за допомогою модуля у прикладі 15.1.

Приклад 15.1 Функція умови, що визначена за допомогою програми

```
f(x) := | "negative"   if x < 0
        | "positive"   if x > 0
        | "zero"  otherwise
f(1) = "positive"
f(-1) = "negative"
f(0) = "zero"
```

Не дивлячись на принципову еквівалентність визначення функцій та змінних через вбудовані функції MathCAD чи програмні модулі, програмування має ряд суттєвих переваг, які у ряді випадків роблять документ більш простим: можливість використання циклів та операторів умови; простота створення функцій та змінних, що потребують декілька простих кроків (як в прикладі 15.1).

Можливість створення функцій, що містить закритий для іншого документа код, враховуючи переваги використання локальних змінних та обробку помилок. Як видно із прикладу 15.1, програмний модуль позначується в MathCAD вертикальною рискою, праворуч від якої послідовно записуються оператори мови програмування.

1.2 Створення програми (Add Line)

Щоб створити програмний модуль, наприклад такий, що поданий у прикладі 1.1:

1. Ввести частину виразу, який буде знаходитися ліворуч від знаку присвоєння та сам знак присвоєння. В нашому прикладі це ім'я функції f(x).

2. При необхідності викликати на екран панель інструментів **Programming** (*Программирование*) (рис. 15.1).

3. Натиснути на цій панелі кнопку **Add Line** (*Добавить линию*).

4. Якщо приблизно відомо, скільки рядків буде містити програма, можно створити потрібну кількість ліній повторним натисканням кнопки **Add Line** (*Добавить линию*) відповідне число раз (на рис. 1.2 показаний результат трикратного натискання).

5. У місце заповнювача, що з'явився потрібно ввести потрібний вираз, використовуючи програмні оператори. У прикладі 1.1 у кожний місцезаповнювач вводиться рядок, наприклад, "positive" (рис. 15.3), потім натискається кнопка **If** (Если) на панелі **Programming** (*Программирование*) та вводиться вираз x>0 у місцезаповнювач, що утворився (рис. 15.4).

Після того як програмний модуль повністю визначений, та не один місцезаповнювач не залишився порожнім, функція може використовуватися звичайним чином, як в чисельних, так і в символьних розрахунках.

З клавіатури не потрібно вводити імена програмних операторів. Для їх встановлення можно застосовувати лише комбінацію клавіш, які наведені в тексті підказки, що випливає (рис. 15.2 та рис. 15.3).

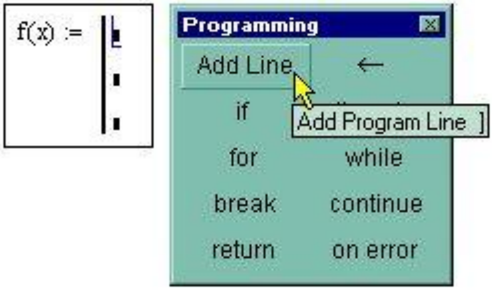


Рисунок 15.2 – Початок створення програмного модуля

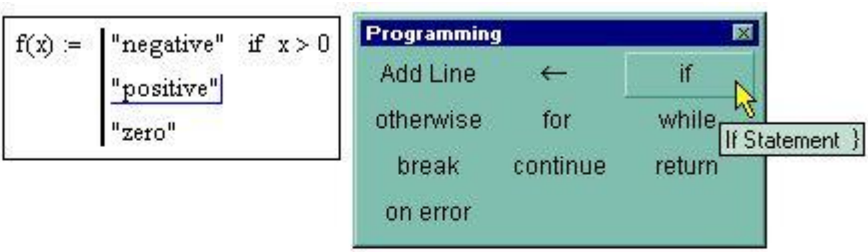


Рисунок 15.3 – Встановлення програмного оператора

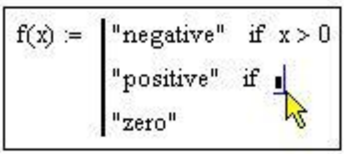


Рисунок 15.4 – Встановлення умови у програму

2 Оператор умови та локальне присвоєння

2.1 Локальне присвоєння *(→)*

Мова програмування MathCAD не була б ефективною, якщо б не дозволяла створювати всередині програмних модулів локальні змінні, які "не видно" ззовні, з інших частин документа. Присвоєння в межах програм, на відміну від документів MathCAD, здійснюється за допомогою оператора **Local Definition** (*Локальное присваивание*), який встановлюється натисканням кнопки з зображенням стрілки «→» на панелі **Programming** (*Программирование*).

Оператор присвоювання «:=», оператор виводу «=» у межах програм не застосовуються.

Локальне присвоювання подане у прикладі 2.1. Змінна z існує тільки всередині програми, що виділена вертикальною лінією. З інших місць документа одержати її значення неможливо.

Приклад 2.1. Локальне присвоювання у програмі

```
f(x) := | z ← 4
        | z + x

f(1) = 5
```

2.2 Оператори умови *(if, otherwise)*

Дія оператора умови if складається із двох частин. Спочатку перевіряється логічний вираз (умова) праворуч від нього. Якщо вона виконується, виконується вираз зліва від оператора if. Якщо хибно - нічого не відбувається, а виконання програми відбувається переходом до її наступного рядка. Встановити умовний оператор у програму можна таким чином :

1. Якщо необхідно ввести ліву частину виразу та оператор присвоєння.

2. Створити новий рядок програми, натиснувши на панелі **Programming** (*Программирование*) кнопку **Add Line** (*Добавить строку*).

3. Натиснути кнопку оператора умови if (рис. 15.5).

4. Праворуч від оператора if ввести умову. Необхідно користуватися логічними операторами, вводячи їх з панелі **Boolean** (*Булевы операторы*).

5. Вираз, який повинен виконуватися, якщо умова виявляється виконаною, потрібно ввести ліворуч від оператора if.

6. Якщо в програмі передбачені додаткові умови, додати в програму ще один рядок натисканням кнопки **Add Line** та ввести їх таким самим чином, використовуючи оператор if чи otherwise.

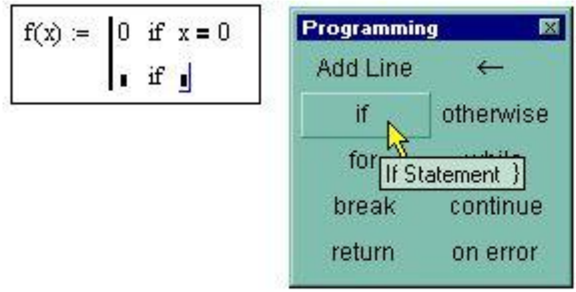


Рисунок 15.5 – Встановлення оператора умови

Оператор otherwise використовується разом з однією або декількома операторами умовами *if* та вказує на вираз, який буде виконуватися, якщо не одна з умов не виявиться правильною.

3 Розробка програми у MathCAD

3.1 Редагування створених програм

Внести зміни в створений програмний модуль можна в будь-який момент за допомогою кнопки **Add Line** (*Добавить линию*). Для цього потрібно попередньо помістити на потрібне місце всередині програмного модуля лінії введення. Наприклад, розташування лінії введення на рядку, що показаний на рис. 3.1, приведе до появи нової лінії з місцезаповнювачем перед цим рядком. Якщо перемістити вертикальну лінію введення із початку рядка (як на рис. 15.6) в її кінець, то нова лінія з’явиться після рядка. Якщо виділити не весь рядок, а лише деяку його частину (рис. 15.8), то це вплине на положення в програмі нового рядка (результат натискання кнопки **Add Line** вказаний на рис. 15.8).

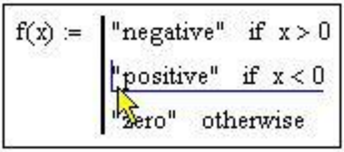


Рисунок 15.6 – Встановлення нового рядка в існуючу програму

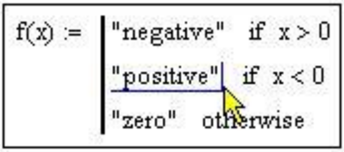


Рисунок 15.7 – Положення лінії введення впливає на положення нової лінії

Нова вертикальна лінія з двома лініями виділяє фрагмент програми, який відноситься до умови x>o, що знаходиться в його заголовку (рис. 15.8). Приклад можливого подальшого програмування вказаний у прикладі 3.1.

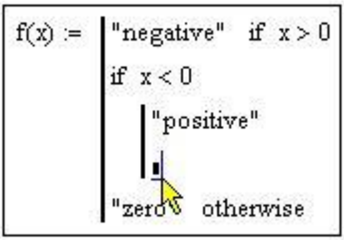


Рисунок 15.8 – Результат вставки нової лінії у програму

Приклад 15.2 Приклад удосконалення програми

```
f(x) := | "negative"   if x < 0
        | if x > 0
        |    | "positive"
        |    | "big positive"   if x > 1000
        | "zero"   otherwise
f(1) = "positive"
f(10^5) = "big positive"
```

У режимі виконання програми, а це відбувається при будь-якій спробі обчислити f(x), виконується послідовно кожний рядок. Наприклад, у передостанньому рядку прикладу 15.2 обчислюється f(x). Розглянемо роботу кожного рядка цього прикладу:

1. Оскільки x=1, то умова x<0 не виконується, та в першому рядку нічого не відбувається.

2. Умова другого рядка x>0 виконана, тому виконуються обидва наступні рядки, об'єднані короткою вертикальною рискою у загальний фрагмент.

3. Функції f(x) присвоюється значення f(x)="positive".

4. Умова x>1000 не виконується, тому значення "big positive" не присвоюється f (x), вона так і залишається рівною рядку "positive".

5. Останній рядок не виконується, оскільки одна із умов (x>0) виявилася істиною, та оператор otherwise (тобто "*иначе*") не потрібен. Таким чином, основний принцип створення програмних модулів полягає в правильному розташуванню рядків. Орієнтуватися в їх дії досить легко, оскільки фрагменти програми одного рівня згруповані в програмі за допомогою вертикальних ліній.

3.2 Повернення значення *(return)*

Якщо для визначення змінної чи функції використовується програма модуль, то його рядки виконуються послідовно при розрахунках в документі цієї змінної чи функції. Відповідно, згідно з етапами виконання програми розрахований результат змінюється. Як кінцевий результат видається останнє присвоєне значення. Щоб підкреслити повернення програмним модулем визначеного значення, можна взяти за правило робити це у останньому рядку програмного модуля (приклад 15.3).

Приклад 15.3 Повернення значення

```
f(x) := | y ← x²
        | z ← y + 1
        | z
f(2) = 5
```

Разом з тим, можна припинити виконання програми в будь-якій її точці (наприклад, за допомогою умовного оператора) та видати деяке значення, використавши оператор return. У цьому випадку при виконанні вказаної умови (приклад 3.3) значення, введене у місцезаповнювач після return, повертається у якості результату. Встановлюється в програму оператор return за допомогою кнопки з панелі **Programming** (*Программирование*).

Приклад 15.4 Використання оператора **return**

```
f(x) := | z ← x²
        | return "zero"  if x = 0
        | return "i"  if x = i
        | z
f(-1) = 1
f(2) = 4
f(0) = "zero"
f(i) = "i"
```

4 Оператори циклу

У мові програмування MathCAD є два оператори цикла: for та while. Перший з них дає можливість організувати цикл за деякою змінною, примушуючи її пробігати деякий діапазон значень. Другий утворює цикл із виходом з нього за деякою логічною умовою. Щоб встановити в програмний модуль оператор цикла потрібно:

1. Створити в програмному модулі нову лінію.

2. Вставити один із операторів цикла for чи while натисканням кнопки на панелі **Programming** (*Программирование*).

3. Якщо обраний оператор for (рис. 15.9), то необхідно вставити у відповідний місцезаповнювач ім'я змінної та діапазон її значень, а якщо while - то логічний вираз, при порушенні якого повинен здійснюватися вихід із цикла.

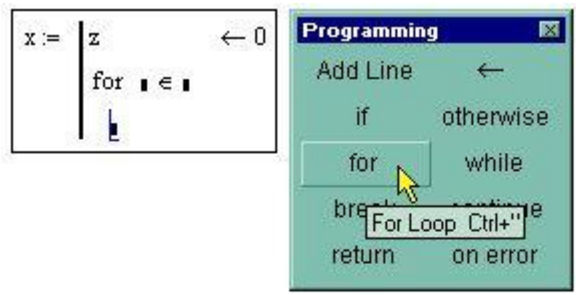


Рисунок 15.9 – Вставка оператора цикла

4. У нижньому місці заповнювача потрібно ввести тіло цикла, тобто вирази, які повинні виконуватися циклічно.

5. За необхідністю доповнити програму іншими рядками та ввести в них потрібні вирази.

Іноді необхідно достроково завершити цикл, тобто не за умовою в його заголовку, а в деякому рядку в тілі цикла. Для цього призначений оператор break.

Висновок

Отже, математичний пакет MathCAD має дуже зручний та наглядний апарат для програмування різноманітних розрахунків, що реалізуються завдяки панелі інструментів ***Программирование***.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Макаров Е. Г. Инжинерные расчеты в Mathcad 14. – СПб.: Питер, 2007. – 592с.
2. Струтинськiй В. Б. Математичне моделювання процесів та систем механіки: підручник. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 612с.
3. Дьяконов В.П. Mathcad 8/2000. Специальный справочник. – СПб.:Питер, 2000. – 590с.
4. Ивановский Р. И. Компьютерные технологии в науке. Практика применения систем MatCAD 7.0 Pro, MatCAD 8.0 Pro, MatCAD 2000 Pro: учеб. пособие. – СПб.: Из-во СПбГТУ.
5. Половко А. М., Ганичев И. В. Mathcad для студента. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 336с.
6. Морозов Б. И., Рыкин О. Р. Информационные технологии. Исследовательские расчеты в среде Маткад 2001: учебн. пособие. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003.
7. Дьяконов В. П., Абраменкова И. В. Mathcad 7.0. – М.: Нолидж, 1998г.
8. Плис А. И., Сливина Н. А. MATHCAD 2000: математический практикум для экономистов и инженеров. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 655с.
9. Очков В. Ф. MatCAD 7.0 Pro для студентов и инженеров. – М.: Компьютер Пресс, 1998. – 380с.

Навчальне видання

ІНФОРМАТИКА
Конспект лекцій
У чотирьох частинах
Частина 4 «Обробка інженерної інформації за допомогою математичного пакета MathCAD»
для студентів спеціальності 6.090220 «Обладнання хімічних виробництв та підприємств будівельних матеріалів»
усіх форм навчання

Відповідальний за випуск Г. М. Худолей
Редактор Н. М. Мажуга
Комп’ютерне верстання А. В. Булашенка

Підп. до друку 29.04.2010, поз.
Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. . Обл.-вид. арк. . Тираж 50 пр. Зам №
Собівартість видання грн к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут

ІНФОРМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
У чотирьох частинах

Частина 4
«Обробка інженерної інформації за допомогою математичного пакета MathCAD»

Суми
Видавництво СумДУ
2010

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут

До друку та в світ
дозволяю на підставі
«Єдиних правил», п.2.6.14
Заступник першого проректора –
начальник організаційно-методичного
управління   В.Б. Юскаєв

ІНФОРМАТИКА
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

У чотирьох частинах
Частина 4 «Обробка інженерної інформації за допомогою математичного пакета MathCAD»
з дисципліни «Інформатика»
для студентів спеціальності 6.090220 «Обладнання хімічних виробництв та підприємств будівельних матеріалів»
усіх форм навчання

Усі цитати, цифровий
та практичний матеріал,
бібліографічні
відомості перевірені,
написання одиниць
відповідає стандартам

Укладач   А.В. Булашенко

Відповідальний за випуск   Г.М. Худолей

Директор Шосткинського інституту   В.Л. Акуленко

Суми
Видавництво СумДУ
2010