Державний вищий навчальний заклад
“Українська академія банківської справи
Національного банку України”
Кафедра вищої математики та інформатики

Т. І. Малютіна, В. М. Долгіх

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Навчальний посібник щодо підготовки
до поточного та підсумкового контролю

У 2 частинах

Частина 2
**Математичний аналіз. Диференціальні рівняння.
Теорія ймовірностей і математична статистика**

Для студентів економічних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Суми
ДВНЗ “УАБС НБУ”
2011

УДК 519.86(075.8)
М15

Рекомендовано до видання методичною радою Державного вищого навчального закладу "Українська академія банківської справи Національного банку України", протокол № 2 від 01.11.2011.
Розглянуто та схвалено на засіданні кафедри вищої математики та інформатики, № 2 від 18.10.2011.

Рецензенти:
М. С. Головань, кандидат педагогічних наук, доцент,
ДВНЗ "Українська академія банківської справи НБУ";

А. М. Розуменко, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Сумський національний аграрний університет

Малютіна, Т. І.

М15 Математика для економістів [Текст] : навчальний посібник щодо підготовки до поточного та підсумкового контролю. У 2 ч.

Ч. 2. Математичний аналіз. Диференціальні рівняння. Теорія ймовірностей та математична статистика / Т. І. Малютіна, В. М. Долгіх ; Державний вищий навчальний заклад "Українська академія банківської справи Національного банку України". – Суми : ДВНЗ "УАБС НБУ", 2011. – 67 с.

Навчальний посібник щодо підготовки до поточного та підсумкового контролю є складовою частиною комплексу навчальних посібників з курсу вищої математики для економістів. Друга частина посібника містить навчальну програму, методичні рекомендації щодо вивчення теоретичного матеріалу, контрольні питання для перевірки знань до кожної теми курсу, зразки варіантів модульних контрольних робіт і приклади їх виконання, питання до іспиту, зразок екзаменаційного білета та приклад відповіді на нього.

Призначений для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 519.86(075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП

Виявлення та розвиток здібностей молоді, залучення її до творчої праці – одне з основних завдань вищої школи.

Сучасний розвиток країни потребує перебудови вищої школи і визначає такі її основні напрями, як розвиток активності, самостійності і творчих здібностей майбутніх фахівців; забезпечення держави кваліфікованими, ініціативними кадрами, які матимуть ґрунтовну теоретичну та практичну підготовку за фахом, зможуть самостійно приймати рішення, пов'язані з майбутньою професійною діяльністю.

Без сучасних математичних методів неможливо вивчати закони суспільства та економіки. Підтвердженням цього є нагородження Нобелівською премією вчених, які застосовували математичні методи для вивчення економіки (Л. Канторович, Р. Солоу, Д. Хікс, Д. Неш, Р. Зельтен).

Якісна математична освіта необхідна не тільки тим, хто буде займатися науковими дослідженнями, але й керівникам підприємств, економістам. Математичний стиль мислення, вміння міркувати точно, в логічній послідовності, необхідні інженерам, економістам, юристам, історикам, біологам, лікарям і ін. Тому вузівська математика відіграє винятково важливу роль у підготовці кадрів.

Ефективність і якість підготовки фахівців істотно залежать від навчально-методичної бази, яку використовують у навчальному процесі. Важливо використовувати навчальні програми і методи викладання, які задовольнятимуть потреби математичної підготовки фахівців відповідно до їхньої спеціальності й вимог сьогодення. З цією метою доцільно щорічно оновлювати навчальні програми відповідних курсів, враховуючи міжпредметні зв'язки, а також розробляти методики їхнього вивчення та застосування.

Мета навчання математиці полягає не лише в тому, щоб озброїти студентів знаннями, а й навчити їх самостійно та творчо мислити. Активізація і розвиток мислення є необхідною умовою успішного засвоєння студентами математичної теорії, вироблення умінь та навичок у розв'язанні як теоретичних, так і прикладних задач.

Успішному вивченню студентами дисципліни "Математика для економістів" сприяє належне розуміння ними "правил гри", усвідомлення об'єкта знань, які необхідно опанувати під час навчання, та вимог до рівнів умінь і навичок, які необхідно набути.

Цей посібник є доповненням навчальних посібників [7–9; 13] і практикумів [10–12]. Мета даного видання – допомогти студентам самостійно підготуватися до модульних контрольних робіт та іспиту. З урахуванням цього у посібнику подано:

- програму навчального курсу;
- методичні рекомендації щодо вивчення теоретичного матеріалу;
- методи контролю знань студентів, а також принципи оцінювання їхньої роботи протягом семестру та на іспиті;
- контрольні питання для перевірки знань до кожної теми;
- зразки завдань модульних контрольних робіт, екзаменаційних білетів і приклади їх виконання;
- перелік питань, які винесені на іспит;
- додатки та список рекомендованої літератури.

Посібник призначений для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

МЕТА І ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Вища математика має винятково важливе значення для всього процесу навчання у вищому навчальному закладі і для майбутньої діяльності спеціаліста. Вона необхідна для засвоєння багатьох спеціальних дисциплін. Дослідження багатьох процесів у промисловій технології та економіці пов'язане з розробкою математичної моделі даного явища. Для успішного застосування математичних моделей у процесах економіки і плануванні майбутній спеціаліст повинен володіти певною математичною культурою.

Курс вищої математики в економічних вузах містить такі основні розділи:

- лінійна, векторна алгебра, аналітична геометрія;
- математичний аналіз;
- теорія ймовірностей і математична статистика.

Ці розділи служать основою для розвитку економіко-математичного моделювання, методів аналізу економічних процесів і прийняття рішень в управлінні економікою.

Згідно з навчальною програмою студенти економічних спеціальностей ДВНЗ "УАБС НБУ" вивчають дисципліну "Математика для економістів" на першому курсі.

Програма розрахована на 432 години: 76 годин лекційного курсу, 102 години практичних занять і 254 години самостійної роботи у першому та другому семестрах.

Мета дисципліни:

- формування особистості студентів, розвиток їх інтелекту і здібностей до логічного і алгоритмічного мислення;
- навчання основним методичним підходам, необхідним для моделювання процесів і явищ, пошуку оптимальних рішень, методам обробки та аналізу результатів спостережень.

Завдання дисципліни: ознайомлення студентів з типовими методами та прийомами для розв'язання задач, які виникають при дослідженні прикладних проблем (при цьому акцент робиться на засвоєння формул, алгоритмів і прийомів розв'язання математичних задач).

У процесі засвоєння курсу студент повинен оволодіти навичками побудови математичних моделей, розв'язання математичних задач з доведенням розв'язку до числового та графічного результату, аналізу отриманих результатів.

У результаті вивчення дисципліни студенти повинні

знати:

- правила аналітичних перетворень, методи розв'язання математичних задач;
- основні формули, означення, теореми вищої математики;
- правила коректної постановки математичних задач і перевірки адекватності їх розв'язання;

вміти:

- розробляти математичні моделі, пов'язані з дослідженням прикладних задач;
- при розв'язанні задач вибирати та використовувати необхідні обчислювальні методи і засоби (ПК, таблиці, довідники);
- аналізувати отримані результати і виробляти практичні рекомендації;
- самостійно вивчати навчальну літературу з математики;

мати уявлення:

- про коректну постановку математичних задач і основні способи їх розв'язання;
- про основні класи задач, що розв'язуються в різних розділах математики;

набути навичок:

- розв'язання основних типів рівнянь;
- дослідження функцій та побудови їх графіків;
- знаходження границь функцій;
- диференціювання та інтегрування функцій;
- розв'язання прикладних задач.

ПОРЯДОК ПОТОЧНОГО І ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ

Завданням поточного контролю є перевірка розуміння та засвоєння певного матеріалу, сформованих навичок, виконання індивідуальних завдань, умінь самостійно розв'язувати задачі, здатності осмислити зміст теми чи розділу.

Завданням іспиту є перевірка засвоєння студентом програмного матеріалу в цілому, осмислення логіки та взаємозв'язків між окремими розділами, здатності творчого використання накопичених знань для розв'язання задач та математичного моделювання.

У ДВНЗ "УАБС НБУ" розроблена і апробована протягом декількох останніх років система оцінювання знань, яка цілком відповідає принципам Болонської декларації. Вона передбачає рівномірне накопичення студентом знань протягом семестру та 100-бальну підсумкову оцінку. Завдання поточного контролю і завдання, що виносяться на іспит, оцінюються в діапазоні від 0 до 50 балів кожне.

Модульний контроль

У процесі вивчення дисципліни "Математика для економістів" студенти виконують чотири модульні роботи (по дві в кожному семестрі):

1. Лінійна, векторна алгебра. Аналітична геометрія у просторі і на площині.
2. Границя функції. Похідна і диференціал. Інтегрування функції. Застосування визначеного інтеграла.
3. Функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння. Ряди та їх застосування до наближених обчислень.
4. Випадкові події. Випадкові величини. Статистика.

Контрольну роботу використовують як один із засобів визначення рівня теоретичних знань і практичних навичок, набутих студентами за певний проміжок часу.

Виконуючи контрольну роботу, студент повинен керуватися такими вказівками:

Завдання письмової роботи повинні мати ті номери, під якими вони стоять у білеті.

Відповіді на теоретичні питання і розв'язання всіх задач та пояснення до них повинні бути достатньо повними.

Всі обчислення повинні бути наведені повністю, рисунки та графіки – виконані акуратно, чітко, із зазначенням одиниць масштабу, координатних осей, позначення до задач повинні відповідати вказівкам на рисунках.

Помилкові записи не слід стирати і замазувати коректором, а закреслювати.

Поточний контроль знань студентів

Під час поточного контролю знань оцінюються:

- системність та активність роботи на практичних заняттях і лекціях;
- якість виконання індивідуальних завдань для самостійного опрацювання;
- результати письмових модульних і контрольних робіт.

Під час контролю систематичності та активності роботи на практичних заняттях оцінці підлягають:

а) рівень знань, продемонстрований в усних відповідях на практичних заняттях, активність при обговоренні питань (0–5 балів);

б) наявність пропусків занять. За кожне пропущене без поважної причини заняття від загальної суми балів віднімається 1 бал.

Під час контролю виконання індивідуальних завдань оцінюються: кількість розв’язаних задач, самостійність і своєчасність виконання завдань. На виконання завдань з кожної теми відводиться 1 тиждень. Якщо завдання виконане протягом другого тижня, оцінка за нього ділиться навпіл. Після 2-го тижня оцінка за завдання – 0 балів.

Індивідуальне завдання потрібно здати до контрольної роботи з даної теми.

Самостійно виконані роботи перевіряються викладачем і підлягають захисту під час співбесіди зі студентом.

Розподіл індивідуальних завдань і кількості балів за одну задачу за модулями наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Модуль	Індивідуальні завдання	Кількість задач	Кількість балів за одну задачу	Максимальна кількість балів
1	[17, І3 1.1–1.5]	20	0,5	10
2	[17, І3 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 4.1, 5.1, 6.1, 7.1]	40	0,25	10
3	[17, І3 8.1, 9.1, 9.2, 10.1, 10.2, 11.1]	30	1/3	10
4	[23, І3 3.1–3.3]	11	Задачі 1–9 – 0,5 Задача 10 – 3,5 Задача 11 – 2	10

Письмові модульні та контрольні завдання оцінюються за десятибальною шкалою. Тривалість контрольної роботи – 90 хвилин.

Розподіл кількості балів за видами робіт під час поточного модульного контролю знань наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Види робіт	Що входить до підрахунку балів	Діапазон балів (за 1 модуль)
Усні відповіді	Середня арифметична оцінка за усні відповіді за 5-бальною шкалою	0–5
Контрольні роботи	Середня арифметична оцінка за контрольні роботи за 10-бальною шкалою	0–10
Індивідуальні завдання	Сумарна кількість балів за виконання задач індивідуальних завдань (див. табл. 1)	0–10
Усього		**25**

Додатково оцінюється (якщо загальна кількість балів за поточну роботу не перевищує 50 балів):

а) участь у наукових студентських конференціях, олімпіадах, підготовка наукових публікацій – не більше 10 балів (за рішенням кафедри);
б) ведення конспекту лекцій (0–3 бали);
в) написання рефератів (не більше 5 балів);
г) відсутність пропусків занять без поважної причини (не більше 5 балів за семестр).

Підсумковий контроль знань

Підсумковий контроль знань студентів проводиться у формі письмового іспиту. Перелік питань, що охоплюють зміст програми з дисципліни “Математика для економістів”, критерії оцінювання екзаменаційних завдань визначаються кафедрою, входять до робочої програми дисципліни і доводяться до відома студентів на початку семестру.

Результати іспиту оцінюються в діапазоні від 0 до 50 балів (включно). Екзаменаційний білет містить 6 завдань: 2 теоретичні питання (кожне з яких оцінюється п’ятьма балами) і 4 задачі (кожна з яких оцінюється десятьма балами).

Загальна підсумкова оцінка складається з суми балів за результатами поточного контролю знань (максимум 50 балів) та балів за виконання екзаменаційних завдань (максимум 50 балів) за умови, що за результатами іспиту студент набрав не менше 25 балів. Якщо на іспиті студент набрав менше 25 балів, то загальна підсумкова оцінка включає лише результати поточного контролю.

До відомості обліку поточної і підсумкової успішності заносяться результати поточного контролю та іспиту відповідно до бальної шкали, що використовується в академії, та трансформуються в оцінку за національною 5-бальною шкалою та оцінку за системою ECTS.

Таблиця відповідності даних 100-бальної шкали оцінювання, національної (4-бальної) до шкали за системою ECTS

Оцінка за системою ECTS	Оцінка за бальною шкалою, що використовується в академії	Оцінка за національною шкалою
A	90–100	5 (відмінно)
B	80–89	4 (дуже добре)
C	70–79	4 (добре)
D	60–69	3 (задовільно)
E	50–59	3 (достатньо)
FX	25–49	2 (незадовільно)
F	0–24	2 (неприйнятно)

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ

І СЕМЕСТР

Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Матриці. Дії над матрицями.

Визначники квадратної матриці, їх властивості, обчислення.

Обернена матриця. Ранг матриці. Теорема про базисний мінор.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь, методи їх розв'язку.

Однорідні системи.

Вектори. Лінійні операції над векторами. Лінійний векторний простір. Лінійно залежні й лінійно незалежні системи векторів. Базис і розмірність простору. Розклад вектора за базисними векторами. Координати вектора. Лінійні операції над векторами в координатній формі. Поділ відрізка в даному відношенні.

Скалярний добуток векторів. Векторний і мішаний добутки векторів, їх основні властивості, обчислення. Умови колінеарності та компланарності векторів.

Пряма лінія на площині.

Криві другого порядку, їх канонічні рівняння.

Система координат у просторі. Площина в просторі. Пряма лінія в просторі. Змішані задачі на пряму й площину у просторі.

Вступ до математичного аналізу

Сталі й змінні величини. Функція, властивості функцій.

Числова послідовність. Границя послідовності. Основні теореми про границі послідовності.

Границя функції на нескінченності і в точці. Однобічні границі. Нескінченно малі та нескінченно великі функції, їх властивості. Порівняння нескінченно малих функцій. Основні теореми про границі.

Визначні границі. Невизначеності.

Неперервність функції в точці та на відрізку.

Диференціальне числення функції однієї змінної

Поняття похідної. Правила диференціювання. Похідні елементарних функцій.

Похідна складної та оберненої функцій. Логарифмічне диференціювання. Похідна неявно заданої функції. Похідні вищих порядків.

Диференціал функції, інваріантність форми диференціала. Застосування диференціала для наближених обчислень. Диференціали вищих порядків.

Основні теореми диференціального числення (теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші). Правило Лопіталя для розкриття невизначеностей.

Застосування похідної для дослідження функцій і побудови графіків

Умови зростання й спадання функції. Локальні екстремуми функції, точки екстремуму. Необхідна й достатня умови існування екстремуму функції. Схема дослідження функції на екстремум.

Опуклість і вгнутість кривої. Точки перегину. Достатня ознака існування точки перегину. Асимптоти графіка функції.

Загальна схема дослідження функції та побудови її графіка.

Невизначений інтеграл

Первісна. Невизначений інтеграл і його властивості. Таблиця основних інтегралів.

Метод безпосереднього інтегрування.

Методи підстановки й інтегрування частинами.

Інтегрування функцій, що містять квадратний тричлен. Інтегрування раціональних дробів.

Інтегрування тригонометричних функцій.

Інтегрування деяких ірраціональних функцій.

Приклади інтегралів, "що не беруться".

Визначений інтеграл

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла. Визначений інтеграл як границя інтегральної суми. Геометричний зміст визначеного інтеграла. Властивості визначеного інтеграла. Теорема про середнє значення визначеного інтеграла.

Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею. Похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею. Формула Ньютона – Лейбніца.

Заміна змінної й інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Геометричні застосування визначеного інтеграла.

Невластиві інтеграли

Невластиві інтеграли 1-го, 2-го родів, їх збіжність. Теореми порівняння.

II СЕМЕСТР

Функції багатьох змінних

Поняття функції багатьох змінних. Границя, неперервність функції багатьох змінних. Частинні похідні.

Повний диференціал функції багатьох змінних і його застосування в наближених обчисленнях.

Диференціювання неявної й складеної функцій багатьох змінних.

Похідна за даним напрямом. Градієнт. Часткові похідні й диференціали вищих порядків.

Екстремум функції багатьох змінних. Найбільше й найменше значення функції, неперервної у замкненій обмеженій області.

Умовний екстремум.

Диференціальні рівняння

Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Основні поняття й означення.

Диференціальні рівняння першого порядку: з відокремлюваними змінними, однорідні, лінійні, Бернуллі та методи їх розв'язання.

Розв'язання деяких диференціальних рівнянь другого порядку, що допускають зниження порядку.

Лінійні однорідні й неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального виду.

Числові та функціональні ряди

Числові ряди. Поняття збіжності й розбіжності ряду. Сума ряду. Залишок ряду. Необхідна ознака збіжності ряду.

Ознаки збіжності рядів із додатними членами: інтегральна ознака Коші, ознаки порівняння, ознака Д'Аламбера, радикальна ознака Коші.

Знакозмінні ряди. Абсолютна й умовна збіжності. Знакопочережні ряди. Ознака Лейбніца.

Функціональні ряди. Область збіжності. Степеневі ряди. Радіус та інтервал збіжності. Властивості степеневих рядів.

Ряди Тейлора й Маклорена. Розвинення функцій у степеневі ряди. Застосування степеневих рядів для наближених обчислень.

Кратні інтеграли

Задачі, що приводять до кратних інтегралів. Подвійний інтеграл і його обчислення. Деякі геометричні застосування подвійного інтеграла.

Основні поняття теорії ймовірностей

Предмет курсу, його зміст. Роль і місце курсу як теоретичної бази ймовірнісно-статистичного моделювання.

Класифікація подій на неможливі, вірогідні та випадкові. Поняття елементарної та складеної події. Простір елементарних подій; операції над подіями.

Класичне означення ймовірності випадкової події та її властивості.

Елементи комбінаторики у теорії ймовірностей, аксіоми теорії ймовірностей та її наслідки.

Геометрична ймовірність, статистична ймовірність.

Теореми додавання та множення ймовірностей

Поняття сумісних і несумісних випадкових подій. Теореми додавання ймовірностей.

Поняття залежності та незалежності випадкових подій. Умовна ймовірність та її властивості.

Теореми множення ймовірностей для залежних і незалежних випадкових подій. Використання формул множення ймовірностей для оцінки надійності деяких систем.

Формула повної ймовірності та формула Байєса.

Схема повторних незалежних випробувань Бернуллі

Означення повторних незалежних випробувань. Формула Бернуллі для обчислення ймовірності та найімовірнішого числа.

Асимптотичні формули для формули Бернуллі (локальна та інтегральна теореми Муавра – Лапласа). Використання інтегральної теореми. Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій.

Формула обчислення ймовірності відхилення відносної частоти від заданої ймовірності в незалежних випробуваннях.

Випадкові величини та їх числові характеристики

Поняття випадкової величини. Дискретні та неперервні випадкові величини. Закон розподілу. Функція розподілу ймовірностей та її властивості. Ймовірність попадання випадкової величини в заданий проміжок.

Числові характеристики випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія та їх властивості, середнє квадратичне відхилення, мода та медіана; початкові та центральні моменти, асиметрія та ексцес.

Основні закони розподілу випадкових величин

Біноміальний, пуассонівський, рівномірний і показниковий закони розподілу. Числові характеристики. Нормальний закон розподілу та його значення у теорії ймовірностей. Числові характеристики.

Системи двох випадкових величин

Визначення двовимірної випадкової величини та закон її розподілу. Система двох дискретних випадкових величин, числові характеристики системи, кореляційний момент, коефіцієнт кореляції та його властивості.

Функція розподілу ймовірностей і щільність ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин, їх властивості.

Числові характеристики системи двох неперервних випадкових величин. Умовні закони розподілу та їх числові характеристики.

Визначення кореляційної залежності.

Закон великих чисел

Нерівність Чебишова та її значення. Теорема Чебишова.

Теорема Бернуллі.

Центральна гранична теорема теорії ймовірностей (теорема Ляпунова) та її використання у математичній статистиці.

Елементи математичної статистики. Вибірковий метод

Генеральна та вибіркова сукупності. Статистичні розподіли вибірок. Емпірична функція розподілу та її властивості. Гістограма й полігон статистичних розподілів.

Числові характеристики: вибіркова середня, дисперсія вибірки, середньоквадратичне відхилення, мода й медіана для дискретних та інтервальних статистичних розподілів вибірки, емпіричні початкові та центральні моменти, асиметрія та ексцес.

Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності. Статистичні гіпотези

Означення статистичної оцінки. Точкові статистичні оцінки: зміщені та незміщені, ефективні та спроможні. Точкові незміщені статистичні оцінки. Виправлена дисперсія.

Інтервальні статистичні оцінки. Точність, надійність оцінки. Означення довірчого (надійного) інтервалу; побудова довірчих інтервалів для $\overline{X}_Г$ при відомому значенні $\sigma_Г$ і невідомому $\sigma_Г$.

Побудова довірчих інтервалів для $\sigma_Г$. Оцінка точності вимірів.

Означення статистичної гіпотези. Нульова й альтернативна, проста та складена гіпотези. Помилки першого та другого роду.

Статистичний критерій, спостережене значення критерію. Критична область, область прийняття нульової гіпотези, критична точка.

Загальна методика побудови правосторонньої, лівосторонньої критичних областей. Перевірка правдивості статистичних гіпотез про рівність двох генеральних середніх і двох дисперсій, ознаки яких мають нормальні закони розподілу.

Перевірка правдивості нульової гіпотези про нормальний закон розподілу ознаки генеральної сукупності. Емпіричні та теоретичні частоти. Критерій узгодженості Пірсона.

Елементи теорії регресії та кореляції

Функціональна, статистична і кореляційна залежності.

Рівняння парної регресії. Властивості статистичних оцінок параметрів парної функції регресії. Вибірковий коефіцієнт кореляції та його властивості.

Інтервал довіри для лінії регресії, коефіцієнт детермінації.

Нелінійна регресія.

ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Як правило, невдачі з засвоєнням курсу математики обумовлені не відсутністю математичних здібностей, а відсутністю навичок систематичної роботи і доведення до розуміння матеріалу, а не до запам'ятовування. Часто студент переходить до наступних частин курсу без засвоєння попередніх, не вникаючи в суть фундаментальних понять та ідей. Нерідко студенти користуються алгоритмами розв'язання задач без розуміння їх суті. Тільки в роздумах над нестандартними задачами, у самостійному подоланні труднощів, у вихованні звички систематично працювати може сформуватися сучасний фахівець.

Основною формою навчання є самостійна робота над матеріалом, яка складається з таких етапів:

- вивчення теоретичного матеріалу за підручниками та посібниками;
- відповіді на питання для самоперевірки;
- аналіз розв'язаних задач (вправ), наведених у посібниках;
- самостійне розв'язання задач;
- виконання індивідуальних домашніх завдань (ІЗ) за кожним розділом курсу;
- виконання контрольних робіт.

При вивченні матеріалу за підручниками або посібниками слід переходити до наступного питання тільки після засвоєння матеріалу попереднього питання. Корисним є стисле конспектування теоретичного матеріалу. Важливі формули в конспекті необхідно виділяти підкреслюванням або рамкою. Вивчення теоретичного матеріалу слід супроводжувати розв'язанням задач. При розв'язанні задач потрібно обгрунтовувати кожен етап розв'язання, посилаючись на теоретичні положення курсу. Розв'язання кожного завдання потрібно доводити до відповіді. Завдання кожного типу необхідно розв'язувати для набуття міцних навичок.

Перед вивченням наступної теми потрібно провести самоконтроль рівня знань, використовуючи питання для самоконтролю і тести [26].

ПІДГОТОВКА ДО 3-Ї МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Нижче наведено перелік розділів, які увійшли у третю модульну контрольну роботу, посилання на літературу для підготовки, список питань для самоперевірки, зразок варіанта модульної контрольної роботи і приклад її розв'язання.

5. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Література: [3, розділ 7]; [5, розділ 5]; [6, розділ 6, глава 15, 15.1–15.7]; [11, глава 8]; [13, розділ 3]; [15, розділ 3]; [17, розділ 8]; [18, розділ 6, § 16–18, 20]; [22, розділ 6, § 1–8]; [29, розділ 10].

Питання для самоперевірки

1. Що називається функцією двох змінних, її областю визначення?
2. Як визначаються поняття границі та неперервності функції двох змінних?
3. Сформулюйте означення часткових похідних функції двох змінних.
4. Як визначаються часткові похідні функції багатьох змінних?
5. Що називається похідною за напрямом, градієнтом функції в точці?
6. Дано функцію $z = \ln\dfrac{x+y}{x-y}$, точку $M\left(2,1\right)$ і вектор $\vec{l} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.

   Знайдіть:

   а) $grad\, z\,|_M$;

   б) $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_M$.
7. Що називається повним приростом, повним диференціалом функції двох змінних? У чому полягає правило застосування повного диференціала для обчислення наближеного значення функції, близького до відомого?
8. Виведіть формулу диференціювання неявно заданої функції.
9. Сформулюйте означення часткових похідних вищих порядків. Сформулюйте теорему про рівність мішаних частинних похідних функції двох змінних.
10. Що називається максимумом (мінімумом) функції двох змінних? Сформулюйте необхідні і достатні умови екстремуму функції двох змінних.
11. Як визначається екстремум функції двох змінних?
12. Як знайти найбільше і найменше значення функції двох змінних у замкненій області?

13. Що називається умовним екстремумом функції двох змінних? Сформулюйте метод знаходження умовних екстремумів функції двох змінних.
14. Прибуток підприємця на одиницю продукції z залежить від обсягів ресурсів x та y $\left(x,\, y \geq 0\right)$. Знайдіть:
    а) при яких обсягах ресурсів x та y прибуток буде найбільшим;
    б) найменше значення прибутку, якщо підприємець обмежений у ресурсах $2y \leq x+16$ і технологічно $0 \leq x \leq 20,\ \ y \geq 1$;
    в) найбільше значення прибутку, якщо $x+y=8$ (методом множників Лагранжа).

6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

6.1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Література: [3, розділ 10, п. 10.1–10.5]; [5, розділ 7, п. 7.1–7.2]; [6, розділ 4, глава 12, п. 12.1–12.6]; [12, глава 4, § 1]; [14, розділ 3, п. 3.1]; [16, розділ 3, п. 3.1]; [17, розділ 9, п. 9.1]; [18, розділ 8, § 25]; [22, розділ 8, § 1–4]; [29, розділ 11, п. 11.1–11.3].

Питання для самоперевірки

1. Яке рівняння називається диференціальним?
2. Що називається порядком диференціального рівняння?
3. Що називається розв’язком диференціального рівняння, загальним та частинним розв’язком?
4. Сформулюйте задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку.
5. Сформулюйте теорему Коші існування та єдиності розв’язку диференціального рівняння першого порядку.
6. Чим відрізняються рівняння з відокремлюваними та відокремленими змінними?
7. Які диференціальні рівняння належать до однорідних?
8. Яка підстановка застосовується при розв’язанні однорідних рівнянь першого порядку?
9. Які диференціальні рівняння називаються лінійними?
10. Яка підстановка використовується при розв’язанні лінійних рівнянь першого порядку?
11. Яке рівняння називається рівнянням Бернуллі?
12. Яка підстановка використовується при розв’язанні рівнянь Бернуллі?

6.2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ТА ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Література: [3, розділ 10, п. 10.6]; [5, розділ 7, п. 7.3, 7.4]; [6, розділ 4, глава 12, п. 12.7, 12.8]; [12, глава 4, § 2, 3, 5]; [14, розділ 3, п. 3.2, 3.3]; [16, розділ 3, п. 3.2, 3.3]; [17, розділ 9, п. 9.2]; [18, розділ 8, § 26]; [22, розділ 8, § 5–7]; [29, розділ 11, п. 11.5–11.7].

Питання для самоперевірки

1. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням другого порядку?
2. Сформулюйте теорему про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння другого порядку.
3. Які диференціальні рівняння другого порядку допускають зниження порядку? Сформулюйте спосіб розв'язання таких рівнянь.
4. Яке рівняння називається лінійним диференціальним рівнянням другого порядку?
5. Запишіть структуру загального розв'язку лінійного однорідного (неоднорідного) рівняння другого порядку.
6. Запишіть вигляд загального розв'язку однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо корені його характеристичного рівняння:
   а) дійсні і різні;
   б) кратні;
   в) комплексні.
7. Вкажіть алгоритм розв'язання лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
8. Який вигляд має частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо його права частина є:
   а) $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$;
   б) $f(x) = P_n(x)$;
   в) $f(x) = Ae^{\alpha x}$;
   г) $f(x) = e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right)$?
9. У чому полягає метод варіації довільних сталих? Який вигляд має система рівнянь для визначення невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$?
10. Вкажіть спосіб розв'язання лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.
11. Яка система звичайних диференціальних рівнянь називається канонічною?

12. Чим відрізняється нормальна система звичайних диференціальних рівнянь від канонічної?
13. Сформулюйте задачу і теорему Коші для нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь.
14. Як розв'язується нормальна система звичайних диференціальних рівнянь?
15. Запишіть систему лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
16. Вкажіть метод розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
17. Яке рівняння називається різницевим неоднорідним (однорідним) рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами?
18. Сформулюйте означення загального (частинного) розв'язку різницевого рівняння.
19. Запишіть структуру загального розв'язку неоднорідного різницевого рівняння.
20. Як розв'язується різницеве рівняння:
    а) першого порядку;
    б) другого порядку?

7. ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

7.1. Числові ряди

Література: [3, розділ 9, п. 9.1]; [5, розділ 8, п. 8.1–8.3]; [6, розділ 5, глава 13, п. 13.1–13.5]; [12, глава 3, § 1]; [14, розділ 4, п. 4.1–4.3]; [16, розділ 4, п. 4.1–4.3]; [17, розділ 10, п. 10.1]; [18, розділ 5, § 14]; [22, розділ 9, § 1–3]; [30, розділ 12, п. 12.1].

Питання для самоперевірки

1. Що називається числовим рядом?
2. Що називається сумою збіжного числового ряду?
3. Дайте означення збіжного і розбіжного рядів.
4. Сформулюйте і доведіть необхідну умову збіжності ряду.
5. Сформулюйте ознаки збіжності числових рядів (Д'Аламбера, радикальну та інтегральну ознаки Коші). Як формулюються ознаки порівняння знакододатних рядів?
6. Доведіть ознаку Д'Аламбера збіжності знакододатних рядів.
7. Доведіть радикальну ознаку Коші збіжності знакододатних рядів.
8. Доведіть інтегральну ознаку Коші збіжності знакододатних рядів.
9. Які ряди називаються знакопочережними?
10. Як формулюється ознака Лейбніца? Доведіть її.
11. Які ряди називаються абсолютно і умовно збіжними?
12. Сформулюйте властивості абсолютно збіжних рядів.

7.2. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Література: [3, розділ 9, п. 9.2–9.4]; [5, розділ 8, п. 8.4–8.7]; [6, розділ 5, глава 14]; [12, глава 3, § 2–6]; [14, розділ 4, п. 4.4, 4.5]; [16, розділ 4, п. 4.4, 4.5]; [17, розділ 10, п. 10.2]; [18, розділ 5, § 15]; [22, розділ 9, § 4–7]; [30, розділ 12, п. 12.2–12.4].

Питання для самоперевірки

1. Який ряд називається функціональним?
2. Що називається областю збіжності функціонального ряду?
3. Який функціональний ряд називається рівномірно збіжним?
4. Сформулюйте ознаку Вейєрштрасса абсолютної і рівномірної збіжностей ряду.
5. Перелічіть властивості рівномірно збіжних рядів.
6. Який ряд називається степеневим?
7. Сформулюйте теорему Абеля про збіжність степеневих рядів.
8. Який вигляд має інтервал збіжності степеневого ряду? Запишіть формули для визначення радіуса збіжності степеневого ряду.
9. Вкажіть умови розвинення функції в ряд Тейлора.
10. Перелічіть властивості степеневих рядів.
11. Наведіть приклади застосування степеневих рядів.

8. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Література: [5, розділ 6, п. 6.5–8.3]; [12, глава 3, § 1]; [14, розділ 2, п. 2.10]; [16, розділ 2, п. 2.10]; [17, розділ 11]; [18, розділ 7, § 23]; [6, розділ 6, глава 15, п. 15.9]; [22, розділ 7, § 1–3]; [30, розділ 13, п. 13.1, 13.3].

Питання для самоперевірки

1. Що називається подвійним інтегралом від функції двох змінних по області D? Розкрийте його геометричний зміст.
2. Сформулюйте теорему існування подвійного інтеграла.
3. Сформулюйте основні властивості подвійного інтеграла.
4. Яка область називається правильною в напрямку осі Oy (Ox)?
5. Якими формулами зв'язані подвійний і повторні інтеграли?
6. Як визначаються межі повторного інтеграла та як він обчислюється?
7. Як обчислюється площа плоскої фігури за допомогою подвійного інтеграла?

ЗРАЗОК ВАРІАНТА МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 3

1. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

2. Розв’язати диференціальні рівняння:
   а) $xy' - y = x\cos x$;
   б) $y'' + 9y = e^x \cos 3x$.

3. Дослідити на збіжність ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{n}\dfrac{3^n x^n}{(3n+1)^2\sqrt{5^n}}$ та дослідити його збіжність на кінцях інтервалу.

5. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$ з точністю до 0,001.

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 3

1. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

► Щоб дослідити дану двічі диференційовану функцію $z = f(x, y)$ на екстремум, необхідно:

а) знайти часткові похідні першого порядку $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, прирівняти їх до нуля і розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Кожна пара дійсних коренів цієї системи визначає одну стаціонарну точку досліджуваної функції. Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – одна з цих точок;

б) знайти часткові похідні другого порядку: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ і обчислити їх значення в стаціонарній точці.

Введемо позначення: $A=\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{M_0}$; $B=\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right]_{M_0}$; $C=\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_{M_0}$.

Складемо й обчислимо визначник другого порядку:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2.$$

- якщо $\Delta>0$, то функція $z=f(x,y)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$ має максимум при $A<0$ та мінімум при $A>0$;
- якщо $\Delta<0$, то в точці $M_0(x_0,y_0)$ нема екстремуму;
- якщо $\Delta=0$, то питання про екстремум потребує додаткового дослідження.

Знаходимо стаціонарні точки заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y-2;\ \frac{\partial z}{\partial y}=x+2y-1.$$

Розв'язуємо систему $\begin{cases} 2x+y-2=0; \\ x+2y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=0. \end{cases}$

Отже, дана функція має лише одну стаціонарну точку $M_0(1,0)$.

Знаходимо часткові похідні другого порядку і обчислюємо їх значення в знайденій стаціонарній точці:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2.$$

Часткові похідні другого порядку не містять *x*, вони постійні в будь-якій точці, зокрема в точці $M_0(1,0)$.

Маємо: $A=2$, $B=1$, $C=2$;

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3>0.$$

Оскільки $\Delta>0$ і $A>0$, то в точці $M_0(1,0)$ дана функція має мінімум.

$$z_{\min}=z(1,0)=-1. \ \blacksquare$$

2. Розв'язати диференціальні рівняння:
   а) $xy' - y = x\cos x$;
   б) $y'' + 9y = e^x \cos 3x$.

а) ► Дане рівняння є лінійним. Виконаємо підстановку: $y = u \cdot v$, де u і v – деякі функції аргументу x. Якщо $y = uv$, то $y' = u'v + uv'$, і дане рівняння набуде вигляду:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x\cos x \Rightarrow v\left(u' - \frac{u}{x}\right) + uv' = x\cos x. \qquad (*)$$

Виберемо функцію u так, щоб виконувалося рівняння

$$u' - \frac{u}{x} = 0. \qquad (а)$$

При такому виборі функції u рівняння (*) набуде вигляду:

$$uv' = x\cos x. \qquad (б)$$

Розв'яжемо рівняння (а) (знаходимо частинний розв'язок, який відповідає значенню довільного сталого $C = 0$).

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x} \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{du}{u} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow u = x.$$

Підставивши $u = x$ в рівняння (б), отримаємо:

$$x \cdot v' = x\cos x \Rightarrow v' = \cos x \Rightarrow dv = \cos x dx \Rightarrow \int dv = \int \cos x dx \Rightarrow v = \sin x + C.$$

Тоді $y = uv = x(\sin x + C)$ – загальний розв'язок заданого рівняння. ■

б) $y'' + 9y = e^x \cos 3x$.

► Із характеристичного рівняння $k^2 + 9 = 0$ знаходимо $k_{1,2} = \pm 3i$, отже, загальний розв'язок однорідного рівняння має такий вигляд:

$$Y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = e^x \left[A\cos 3x + B\sin 3x\right].$$

Знайдемо

$$\bar{y}' = e^x\left[(A+3B)\cdot\cos 3x + (B-3A)\cdot\sin 3x\right],$$
$$\bar{y}'' = e^x\left[(-8A+6B)\cdot\cos 3x - (8B+6A)\cdot\sin 3x\right].$$

Підставивши $\bar{y}$, $\bar{y}''$ в дане рівняння і скоротивши обидві його частини на e^x, отримаємо

$$(A+6B)\cdot\cos 3x + (B-6A)\cdot\sin 3x \equiv \cos 3x + 0\sin 3x.$$

Прирівнявши коефіцієнти при $\cos 3x$ і $\sin 3x$, отримаємо систему, з якої знайдемо A і B:

$$A+6B=1,\ \ B-6A=0;\ \ A=1/37,\ \ B=6/37.$$

Отже,

$$\bar{y} = \frac{e^x}{37}(\cos 3x + 6\sin 3x),$$
$$y = Y + \bar{y} = C_1\cdot\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{e^x}{37}(\cos 3x + 6\sin 3x).$$

Після перетворень отримаємо загальний розв’язок:

$$y = Y + \bar{y} = \left(C_1 + \frac{e^x}{37}\right)\cos 3x + \left(C_2 + \frac{6e^x}{37}\right)\sin x.\ \blacksquare$$

3. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n$.

► Дослідимо даний ряд на збіжність за радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1.$$

Отже, ряд збіжний. ■

4. Знайти інтервал збіжності ряду $\sum_{n=1}^{n}\frac{3^n x^n}{(3n+1)^2\sqrt{5^n}}$ та дослідити його збіжність на кінцях інтервалу.

► Для даного ряду:

$$u_n(x)=\frac{3^n x^n}{(3n+1)^2\sqrt{5^n}};\ u_{n+1}(x)=\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(3n+4)^2\sqrt{5^{n+1}}}.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд буде збігатися абсолютно для тих значень x, для яких

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}|x|^{n+1}(3n+1)^2\sqrt{5^n}}{(3n+4)^2\sqrt{5^{n+1}}3n|x|^n}=$$

$$=3\frac{|x|}{\sqrt{5}}\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^2}{(3n+4)^2}=\frac{3|x|}{\sqrt{5}}<1\ \Rightarrow\ |x|<\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Отже, радіус збіжності ряду $R=\sqrt{5}/3$, а інтервал збіжності $(-\sqrt{5}/3,\ \sqrt{5}/3)$.

Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу.

При $x=\sqrt{5}/3$ отримаємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(3n+1)^2}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2}=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{13^2}+\dots\ .$$

Дослідимо даний ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші. Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(3x+1)^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{(3x+1)^2}=-\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3x+1}\right)\Bigg|_1^b=-\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3b+1}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{12}.$$

Оскільки невласний інтеграл збігається, то збігається і досліджуваний ряд.

При $x=-\sqrt{5}/3$ даний ряд набуває вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(3n+1)^2}\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)^2}=-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{10^2}+\frac{1}{13^2}-\dots\ .$$

Останній ряд є знакопочережним. Дослідимо його на абсолютну збіжність. Складемо ряд із абсолютних величин членів даного знакопочережного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(3n+1)^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2}.$$

Цей ряд співпадає з рядом, досліджуваним у попередньому пункті, тому даний знакопочережний ряд збігається абсолютно.

Таким чином, даний ряд абсолютно збігається на відрізку $-\frac{\sqrt{5}}{3}\le x\le\frac{\sqrt{5}}{3}$. ■

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ з точністю до 0,001.

► Представимо підінтегральну функцію у вигляді степеневого ряду. Використовуючи відоме розвинення в степеневий ряд функції $\ln(1+x)$, маємо:

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+...\right)=$$

$$=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^{n-1}}{n}+... \;.$$

$$\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_0^{0,1}x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n^2}\Bigg|_0^{0,1}=$$

$$=0,1-\frac{0,1^2}{4}+\frac{0,1^3}{9}-...=0,1-0,0025+0,0001-....$$

Отримали знакопочережний ряд, який задовольняє умови теореми Лейбніца. Оскільки в цьому ряду третій член за абсолютною величиною менше 0,001, то обмежимося тільки першими двома членами. Таким чином,

$$\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx\approx 0,1-0,0025\approx 0,098. \;■$$

ПІДГОТОВКА ДО 4-Ї МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Нижче наведено перелік розділів, які увійшли в четверту модульну контрольну роботу, посилання на літературу для підготовки, список питань для самоперевірки, зразок варіанта модульної контрольної роботи і приклад її розв'язання.

9. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

9.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ФОРМУЛИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Література: [4, розділ 1, п. 1.1–1.7]; [7, гл. 1, § 1, 2, 3]; [8, гл. 1, § 1–2; задачі 4, 11, 17, 41]; [9, гл. 1, § 1–8]; [23, розділ I, п. 1.1]; [24, розділ I, п. 1.1.1–1.1.7]; [25, розділ I, п. 1.1–1.2, приклади 1.1–1.9]; [26, розділ 1–3]; [33, розділ I, § 1–3]; [31, розділ 1, § 1, 2, 3, 4].

Питання для самоперевірки

1. Що є предметом теорії ймовірностей?
2. Що називається подією?
3. Сформулюйте означення подій:
   а) вірогідної;
   б) неможливої;
   в) випадкової.
   Наведіть приклади.
4. Які експерименти (випробування) називають стохастичними?
5. Яка подія називається елементарною?
6. Сформулюйте означення простору елементарних подій.
7. Які події називають рівносильними?
8. Що розуміють під:
   а) сумою двох подій;
   б) добутком двох подій;
   в) різницею двох подій?
9. Які випадкові події називаються:
   а) несумісними;
   б) сумісними;
   в) протилежними;
   г) попарно несумісними?
   Наведіть приклади.
10. Сформулюйте означення повної групи подій.
11. Сформулюйте означення та запишіть формулу для числа P_n усіх перестановок із n елементів без повторень.

12. Сформулюйте означення та запишіть формулу A_n^m усіх розміщень із n елементів по m елементів без повторень.
13. Сформулюйте означення та запишіть формулу для числа C_n^m усіх комбінацій із n елементів по m елементів без повторень.
14. Сформулюйте означення відносної частоти $W(A)$ події A. Які властивості відносної частоти ви знаєте?
15. Сформулюйте означення статистичної ймовірності $P(A)$ події A.
16. Сформулюйте класичне означення ймовірностей події. Вкажіть можливі границі ймовірності.
17. Сформулюйте означення геометричної ймовірності $P(A)$ події A.

9.2. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Література: [4, розділ 1, п. 1.8–1.10]; [8, гл. 2, § 1–2; задачі 46, 49, 64, 86]; [9, гл. 2, § 1–3; гл. 3, § 1–5; гл. 4, § 1]; [23, розділ I, п. 1.2]; [24, розділ I, п. 1.2]; [25, розділ I, п. 1.3, приклади 1.10–1.12]; [26, розділ 4]; [33, розділ I, § 9–13].

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей для:
   а) двох несумісних подій;
   б) двох сумісних подій.
2. Чому дорівнює ймовірність суми попарно несумісних подій $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$?
3. Сформулюйте означення умовної ймовірності випадкової події.
4. Які дві випадкові події називаються:
   а) незалежними;
   б) попарно незалежними у сукупності?
5. Сформулюйте теорему множення ймовірностей для:
   а) залежних подій;
   б) незалежних подій.

9.3. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ ТА ФОРМУЛИ БАЙЄСА

Література: [8, гл. 2, § 3, 4; задачі 89, 97, 105, 108]; [9, гл. 4, § 2, 3]; [21, гл. 2, § 21; приклад 2.1]; [23, розділ I, п. 1.3]; [24, розділ I, п. 1.2.6]; [25, розділ I, п. 1.4, приклад 1.13]; [26, розділ 5]; [33, розділ II, § 14, 15];

Питання для самоперевірки

1. Запишіть формулу повної ймовірності.
2. Запишіть формулу Байєса. Для чого служить ця формула?

9.4. СХЕМА ПОВТОРНИХ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПРОБУВАНЬ БЕРНУЛЛІ

Література: [8, гл. 3, § 1–4; задачі 110, 119, 120, 125, 129, 135, 142]; [9, гл. 5, § 1–4]; [23, розділ I, п. 1.4]; [24, розділ I, п. 1.3, 1.3.1–1.3.6]; [25, розділ I, 1.5, приклад 1.14–1.19]; [26, розділ 6]; [33, розділ III, § 16–22].

Питання для самоперевірки

1. Які випробовування (експерименти) називаються незалежними?
2. Коли серія із n випробувань (експериментів) підпорядкована схемі Бернуллі?
3. Запишіть формулу Бернуллі.
4. Сформулюйте локальну теорему Муавра – Лапласа. В яких випадках вона застосовується?
5. Запишіть функцію Гаусса. Перелічіть властивості функції Гаусса.
6. Сформулюйте інтегральну теорему Муавра – Лапласа. В яких випадках вона застосовується?
7. Запишіть функцію Лапласа. Наведіть властивості функції Лапласа.
8. Запишіть формулу для обчислення ймовірності відхилення відносної частоти від заданої ймовірності появи події в незалежних випробуваннях.
9. Запишіть асимптотичну формулу Пуассона. За яких умов вона застосовується?
10. Що таке найімовірніше число настання події при повторних випробуваннях? Як обчислюється це число?

10. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

10.1. ОДНОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. СПОСОБИ ЗАДАННЯ

Література: [8, гл. 4, § 1, задачі 164, 166; гл. 6, § 1, 2, задачі: 260, 267]; [9, гл. 6, § 1, 2, 3; гл. 10, § 1, 2, 3; гл. 11, § 1–5]; [20, розділ II, § 7, 8]; [24, розділ II, п. 2.1], [25, розділ II, п. 2.1, приклади 4, 8, 9]; [26, розділ 7, 8].

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення випадкової величини.
2. Яка випадкова величина називається:
   а) дискретною;
   б) неперервною?
   Наведіть приклади.
3. Сформулюйте означення функції розподілу. Наведіть властивості функції розподілу.

4. Що називається законом розподілу дискретної випадкової величини?
5. Сформулюйте означення інтегральної функції розподілу і вкажіть її властивості.
6. Як, знаючи інтегральну функцію, знайти ймовірність того, що випадкова величина набуде значення з заданого інтервалу?
7. У чому полягає відмінність графіків інтегральної функції неперервної і дискретної випадкових величин?
8. Сформулюйте означення щільності розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини і вкажіть її властивості.
9. Як знайти інтегральну функцію за відомою диференціальною функцією?
10. Як, знаючи диференціальну функцію, знайти ймовірність того, що неперервна випадкова величина набуде значення з даного інтервалу?

10.2. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН І ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Література: [8, гл. 4, § 3, 4, задачі 210, 218, 230, 275, 280, 285, 295; гл. 6, § 3]; [9, гл. 7, § 1–5; гл. 8, § 2–7, § 10]; [24, розділ II, п. 2.2.1–2.2.5]; [25, розділ II, п. 2.2, приклади 1, 2, 3, 13]; [26, розділ 10–11].

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення математичного сподівання $M(X)$ випадкової величини та розкрийте його імовірнісний зміст.
2. Наведіть властивості математичного сподівання.
3. За якою формулою обчислюється математичне сподівання:
   а) дискретної;
   б) неперервної випадкової величини?
4. Що називається відхиленням випадкової величини від її математичного сподівання?
5. Сформулюйте означення дисперсії $D(X)$ випадкової величини та середнього квадратичного відхилення $\sigma(X)$. Які властивості випадкової величини характеризують $D(X)$ і $\sigma(X)$?
6. Перелічіть властивості дисперсії.
7. За якими формулами обчислюється дисперсія:
   а) дискретної;
   б) неперервної випадкової величини?
8. Сформулюйте означення:
   а) початкового моменту k-го порядку;
   б) центрального моменту k-го порядку дискретної і неперервної випадкової величини. Який існує зв’язок між центральними і початковими моментами?

9. Сформулюйте означення асиметрії та ексцесу.
10. Сформулюйте означення моди і медіани:
    а) дискретної;
    б) неперервної випадкової величини.

10.3. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ДИСКРЕТНИХ І НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. НОРМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ

Література: [8, гл. 4, § 1; гл. 6, § 3–6, задачі 328, 331, 334]; [9, гл. 11, § 6; гл. 12, § 2–9; гл. 13, § 1,2,3]; [23, розділ II, п. 2.3]; [24, розділ II, п. 2.3.5–2.3.8]; [25, розділ II, п. 2.3]; [26, розділ 9].

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення біноміального розподілу дискретної випадкової величини.
2. Запишіть закон розподілу Пуассона дискретної випадкової величини.
3. Який розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини називається рівномірним?
4. Який вигляд має функція розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини?
5. Якими формулами виражаються числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ рівномірно розподіленої випадкової величини X, значення якої зосереджені в інтервалі (α, β)?
6. Запишіть щільність і функцію розподілу показникового розподілу неперервної випадкової величини X.
7. Як знайти $M(X)$ і $D(X)$ показникового закону, знаючи параметр λ?
8. За якою формулою обчислюється ймовірність попадання значень показниково розподіленої неперервної величини X в інтервал (α, β)?
9. Запишіть диференціальну функцію нормального розподілу. Якими параметрами визначається нормальний розподіл, який їх імовірнісний зміст?
10. Накресліть криву нормального розподілу. Як змінюється крива при зміні $M(X)$ і $\sigma(X)$?
11. Запишіть формулу для обчислення ймовірності попадання значень нормально розподіленої випадкової величини в інтервал (α, β).
12. У чому полягає правило “трьох сигм”?

10.4. НЕРІВНІСТЬ ЧЕБИШОВА. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ

Література: [4, розділ 5, п. 5.1–5.4]; [8, гл. 5, § 1–2, задачі 241, 243, 245, 247]; [9,гл. 9, § 1–6]; [23, розділ II, п. 2.4]; [24, розділ II, 2.4.1.–2.4.5]; [25, розділ II, п. 2.4.1–2.4.2]; [26, розділ 12]; [33, розділ V, § 34–35].

Питання для самоперевірки

1. У чому полягає суть закону великих чисел?
2. Сформулюйте і доведіть нерівність Чебишова.
3. Які умови повинні задовольняти випадкові величини, щоб до них можна було застосувати теорему Чебишова?
4. Сформулюйте і доведіть теорему Чебишова.
5. Сформулюйте теорему Бернуллі і доведіть її.
6. Що стверджує центральна гранична теорема Ляпунова?

10.5. ДВОВИМІРНА ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА

Література: [8, гл. 8, § 1–4, задачі 408, 421]; [9, гл. 14, § 1–4; § 13; § 15; § 17]; [23, розділ II, п. 2.5]; [24, розділ II, п. 2.5.1–2.5.2, 2.5.6–2.5.8, приклади 2.21, 2.25, 2.28, 2.30]; [25, розділ II, п. 2.5.1–2.5.2, 2.5.4–2.5.6]; [26, розділ 13, 14].

Питання для самоперевірки

1. Що називається двовимірною випадковою величиною (X, Y)?
2. Що називається законом розподілу ймовірностей двовимірної дискретної випадкової величини? Як знайти закони розподілу компонент?
3. Що називається функцією розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини?
4. Запишіть властивості функції розподілу двовимірної випадкової величини.
5. Запишіть формулу для обчислення ймовірності попадання значень неперервної випадкової величини (X, Y) у прямокутник $D = \{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$.
6. Дайте означення щільності розподілу $f(x, y)$ ймовірностей неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y).
7. Запишіть властивості щільності розподілу неперервної двовимірної випадкової величини.
8. Запишіть формулу для обчислення ймовірності попадання значень (x, y) двовимірної випадкової величини (X,Y) в задану область через щільність її розподілу $f(x, y)$.
9. Як знайти щільності розподілу ймовірностей складових двовимірної випадкової величини?
10. Дайте означення умовного розподілу складової X двовимірної дискретної випадкової величини (X,Y) при фіксованому значенні $Y = y_j$.
11. Дайте означення умовного розподілу складової Y двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) при фіксованому значенні $X = x_i$.

11. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

11.1. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ. ВИБІРКОВИЙ МЕТОД

Література: [8, гл. 9, § 1–3, задачі 439, 441, 443, 446, гл. 10, § 1, задачі 450, 453, 457; § 4, задачі 508, 510, 512]; [23, розділ III, п. 3.1]; [24, розділ III, п. 3.1–3.6]; [25, розділ III, п. 3.1–3.6, приклади 3.1–3.3].

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення вибірки.
2. Яка вибірка є репрезентативною?
3. Що називається дискретним статистичним розподілом вибірки?
4. Що називається інтервальним статистичним розподілом вибірки?
5. Що називається полігоном частот (відносних частот)?
6. Що називається гістограмою частот (відносних частот)?
7. Що називається емпіричною функцією розподілу?
8. Які властивості має емпірична функція розподілу $F^*(x)$?
9. Що називається кумулятою? Як побудувати кумуляту?
10. Сформулюйте означення вибіркового середнього, вибіркової дисперсії.
11. Що називається розмахом вибірки, коефіцієнтом варіації?
12. Сформулюйте означення початкового емпіричного моменту k-го порядку, центрального емпіричного моменту k-го порядку.
13. Сформулюйте означення моди, медіани. Як знайти моду й медіану для дискретного (інтервального) ряду?
14. Сформулюйте означення вибіркової асиметрії та вибіркового ексцесу.

11.2. СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ ГЕНЕРАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ. СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ

Література: [4, розділ 6, п. 6.4–6.12]; [8, гл. 10, § 1–4; гл. 13, § 1, 16, задачі 504, 505, 516, 517, 562–565, 635, 639]; [9, гл. 16, § 1–4, 8–10, 13–18; гл. 19, § 1–6, 8, 10, 22, 23]; [24, розділ III, п. 3.1–3.8]; [25, розділ III, п. 3.7, 3.8, приклади 3.4–3.8, 3.10, 3.13, 3.17].

Питання для самоперевірки

1. Що називається статистичною оцінкою θ^* невідомого параметра розподілу θ випадкової величини X?
2. Яка статистична оцінка називається незміщеною, ефективною, слушною (або змістовною, або консистентною)?
3. Що приймають за точкову оцінку математичного сподівання?
4. Що приймають за точкову оцінку дисперсії?

5. Що називається виправленою дисперсією s^2?
6. У чому полягає метод моментів статистичного оцінювання параметрів розподілу?
7. Як знайти методом максимальної правдоподібності оцінку параметрів нормального розподілу?
8. Що називається надійністю статистичної точкової оцінки θ^* параметра θ?
9. Сформулюйте означення інтервалу довіри.
10. Опишіть розподіли: χ^2-розподіл, розподіл Стьюдента, F-розподіл.
11. Запишіть інтервали довіри для оцінки математичного сподівання нормального розподілу:
    а) при відомому σ;
    б) при невідомому σ.
12. Запишіть інтервали довіри для оцінки середнього квадратичного відхилення нормального розподілу.
13. Сформулюйте означення статистичної гіпотези. Наведіть приклади основної і конкуруючої, простої і складеної гіпотез.
14. Що називають помилкою першого (другого) роду?
15. Що називають рівнем значущості?
16. Сформулюйте означення статистичного критерію, емпіричного значення критерію.
17. Сформулюйте означення критичної області, області прийняття гіпотези і критичних точок.
18. Як знаходять критичну область?
19. Що називають критерієм згоди?
20. Для чого служить критерій Пірсона?
21. Запишіть критерій перевірки гіпотези про рівність математичних сподівань:
    а) при відомих дисперсіях;
    б) при невідомих рівних дисперсіях.
22. Запишіть критерій перевірки гіпотези про рівність дисперсій при відомих математичних сподіваннях.

11.3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ РЕГРЕСІЇ І КОРЕЛЯЦІЇ

Література: [4, розділ 6, п. 6.14–6.20]; [8, гл. 12, § 1, задача 535]; [9, гл. 18, § 7–9, 13]; [23, розділ ІІІ, п. 3.2]; [24, розділ ІІІ, п. 3.9.1–3.9.2].

Питання для самоперевірки

1. У чому полягає відмінність між функціональною і статистичними залежностями випадкових величин?
2. Опишіть форму кореляційної таблиці.
3. Сформулюйте дві основні задачі кореляційного аналізу.

4. Що називається вибірковим коефіцієнтом кореляції? Що він характеризує?
5. Що слід сказати про дві випадкові величини, якщо коефіцієнт кореляції дорівнює нулю (одиниці)?
6. Що називається коефіцієнтом детермінації?
7. Яке рівняння називається вибірковим рівнянням регресії Y на $X\left(X \text{ на } Y\right)$?
8. Який основний метод отримання точкових оцінок для параметрів рівняння регресії, у чому він полягає?
9. Що називають коефіцієнтом регресії?
10. Якими рівняннями може виражатися зв'язок між випадковими величинами в нелінійних регресійних моделях?
11. За допомогою якого методу можна дістати статистичні оцінки параметрів нелінійних регресійних моделей?
12. Як перевірити гіпотезу про значущість коефіцієнта кореляції?

ЗРАЗОК ВАРІАНТА МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 4

1. У магазині є 70 % електроламп заводу A і 30 % – заводу B. Продукція заводу A містить 90 % стандартних електроламп, заводу B – 96 %. Знайдіть ймовірність того, що електролампа, куплена в цьому магазині, яка виявилася стандартною, виготовлена заводом A.
2. Ймовірність того, що протягом року мале підприємство збанкрутує, дорівнює 1/3. Знайдіть ймовірність того, що з п'яти малих підприємств на кінець року залишиться:
   а) два підприємства;
   б) не більше ніж два;
   в) принаймні одне.
3. Випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ a\left(x-3\right)^2, & 3<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$$

   а) знайдіть коефіцієнт a;
   б) обчисліть математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.
4. Ціну акцій підприємств деякої галузі моделюють за допомогою нормального закону з математичним сподіванням 15 грн. і середнім

квадратичним відхиленням 0,2 грн. Знайдіть ймовірність того, що ціна акції:

а) не вища 15,3грн.;

б) не нижча 15,4грн.;

в) є в проміжку від 14,9 до 15,3 грн.

З використанням правила “трьох сигм” обчисліть межі, в яких буде ціна акції.

5. З 200 робітників банку 20 з середньою заробітною платою 600 дол. і середнім квадратичним відхиленням 100 дол. Якщо заробітна плата розподілена за нормальним законом, знайдіть з надійністю $\gamma = 0,95$ середню заробітну плату в банку.

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 4

1. У магазині є 70 % електроламп заводу *A* і 30 % – заводу *B*. Продукція заводу *A* містить 90 % стандартних електроламп, заводу *B* – 96 %. Знайдіть ймовірність того, що електролампа, куплена в цьому магазині, яка виявилася стандартною, виготовлена заводом *A*.

► Нехай подія *A* – в магазині куплена стандартна електролампа. Введемо дві гіпотези:

H_1 – куплена в магазині електролампа виготовлена на заводі *A*;

H_2 – куплена в магазині електролампа виготовлена на заводі *B*.

Очевидно, що події H_1 і H_2 несумісні й утворюють повну групу подій, а їх ймовірності становлять $P(H_1)= 0,7$; $P(H_2)= 0,3$. Відповідні умовні ймовірності події *A* становлять: $P_{H_1}(A)=0,9$; $P_{H_2}(A)=0,96$. Ймовірність того, що куплена в магазині стандартна електролампа виготовлена заводом *A*, обчислимо за формулою Байєса:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)};$$

$$P_A(H_1)=\frac{0,7\cdot 0,9}{0,7\cdot 0,9+0,3\cdot 0,96}=\frac{0,63}{0,63+2,88}=\frac{0,63}{3,51}=0,179. \ ■$$

2. Ймовірність того, що протягом року мале підприємство збанкрутує, дорівнює 1/3. Знайдіть ймовірність того, що з п’яти малих підприємств на кінець року залишиться:

а) два підприємства;

б) не більше ніж два;

в) принаймні одне.

► а) якщо подія A – навмання вибране мале підприємство не збанкрутує протягом року, то її ймовірність $P(A)=2/3$, а ймовірність того, що мале підприємство збанкрутує:

$$q=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Ймовірність того, що подія A з'явиться два рази у п'яти незалежних повторних випробуваннях, обчислимо за формулою Бернуллі:

$$P_5(2)=C_5^2p^2q^3=\frac{5!}{3!\,2!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=10\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{27}=\frac{40}{243}=0{,}1646;$$

б) нехай подія B полягає в тому, що на кінець року залишаться не більше ніж два малих підприємства з п'яти. Дану подію можна представити як суму трьох попарно несумісних подій B_0, B_1, B_2, де подія $B_i\,(i=0,1,2)$ полягає в тому, що i малих підприємств не збанкрутують протягом року. Тому

$$P(B)=P(B_0)+P(B_1)+P(B_2)$$

або

$$P(B)=P_5(m\le 2)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2).$$

Ймовірність подій B_0, B_1, B_2 визначимо за формулою Бернуллі:

$$P(B_0)=P_5(0)=C_5^0p^0q^5=\frac{5!}{0!\,5!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}=0{,}0041;$$

$$P(B_1)=P_5(1)=C_5^1p^1q^4=\frac{5!}{1!\,4!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{81}=\frac{10}{243}=0{,}0412;$$

$$P(B_2)=P_5(2)=0{,}1646 \text{ (див. пункт а).}$$

Таким чином,

$$P_5(m\le 2)=0{,}0041+0{,}0412+0{,}1646=0{,}2099;$$

в) нехай C – подія, яка полягає в тому, що на кінець року залишиться принаймні одне мале підприємство з п'яти.

$$P(C) = P_5(m \geq 1) = P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = 1 - P_5(0) =$$
$$= 1 - C_5^0 p^0 q^5 = 1 - \frac{5!}{5!\,0!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 1 - \frac{1}{243} = \frac{242}{243} = 0{,}9959. \ ■$$

3. Випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ a(x-3)^2, & 3 < x \leq 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

а) знайдіть коефіцієнт a;
б) обчисліть математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

► а) значення параметра a обчислюємо з умови, що:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow a\int_{3}^{5}(x-3)^2 dx =$$
$$= a\frac{(x-3)^3}{3}\Bigg|_3^5 = \frac{a}{3}\left((5-3)^3 - (3-3)^3\right) = \frac{8a}{3} = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{8}.$$

Отже, цільність $f(x)$ має такий вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ \frac{3}{8}(x-3)^2, & 3 \leq x < 5; \\ 0, & x \geq 5. \end{cases}$$

б) математичне сподівання $M(X)$ неперервної випадкової величини обчислюємо за формулою:

$$M(X) = \int_a^b x\, f(x)dx.$$

Оскільки значення випадкової величини X зосереджені в інтервалі (3; 5), то

$$M\left(X\right)=\int_3^5 \frac{3}{8}\left(x-3\right)^2 xdx=\frac{3}{8}\int_3^5\left(x^3-6x^2+9x\right)dx=$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}\right)\Bigg|_3^5=\frac{3}{8}\left(\frac{625}{4}-250+\frac{225}{2}-\frac{81}{4}+54-\frac{81}{2}\right)=\frac{3}{8}\cdot 12=4{,}5.$$

Дисперсію $D\left(X\right)$ неперервної випадкової величини обчислюємо за формулою:

$$D\left(X\right)=\int_a^b x^2 f\left(x\right)dx-\left[M\left(X\right)\right]^2.$$

$$D\left(X\right)=\int_3^5 x^2\cdot\frac{3}{8}\left(x-3\right)^2 dx-\left(4{,}5\right)^2=\frac{3}{8}\int_3^5\left(x^4-6x^3+9x^2\right)dx-\left(4{,}5\right)^2=$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{6x^4}{4}+\frac{9x^3}{3}\right)\Bigg|_3^5-\left(4{,}5\right)^2=\frac{3}{8}\left(\frac{5^5}{5}-\frac{3\cdot 5^4}{2}+3\cdot 5^3-\frac{3^5}{5}+\frac{6\cdot 3^4}{4}-3\cdot 3^3\right)-\left(4{,}5\right)^2=$$

$$=\frac{3}{8}\left(625-\frac{1875}{2}+375-\frac{243}{5}+\frac{243}{2}-81\right)-\left(4{,}5\right)^2=20{,}4-20{,}25=0{,}15.$$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma\left(X\right)=\sqrt{D\left(X\right)}=\sqrt{0{,}15}\approx 0{,}387.$ ■

4. Ціну акцій підприємств деякої галузі моделюють за допомогою нормального закону з математичним сподіванням 15 грн. і середнім квадратичним відхиленням 0,2 грн. Знайдіть ймовірність того, що ціна акції:
   а) не вища 15,3грн.;
   б) не нижча 15,4грн.;
   в) є в проміжку від 14,9 до 15,3 грн.

   З використанням правила “трьох сигм” обчисліть межі, в яких буде ціна акції.

► Нехай випадкова величина X – ціна акції, яка має нормальний закон розподілу з математичним сподіванням $a=15$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma=0{,}2$.

Використаємо формулу ймовірності попадання значень нормально розподіленої випадкової величини в заданий інтервал:

$$p(\alpha \le x \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функція Лапласа;

a і σ – параметри нормального розподілу.

а) $$P(X \le 15{,}3) = P(0 \le X \le 15{,}3) =$$

$$\Phi\left(\frac{15{,}3 - 15}{0{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 15}{0{,}2}\right) = \Phi\left(\frac{0{,}3}{0{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{-15}{0{,}2}\right) =$$

$$= \Phi(1{,}5) + \Phi(75) = 0{,}4332 + 0{,}5 = 0{,}9332;$$

б) $$P(X \ge 15{,}4) = P(15{,}4 \le X < \infty) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\infty - 15}{0{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{15{,}4 - 15}{0{,}2}\right) = \Phi(\infty) - \Phi(2) = 0{,}5 - 0{,}4772 = 0{,}0228;$$

в) $$P(14{,}9 \le X \le 15{,}3) = \Phi\left(\frac{15{,}3 - 15}{0{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{14{,}9 - 15}{0{,}2}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{0{,}3}{0{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{-0{,}1}{0{,}2}\right) = \Phi(1{,}5) + \Phi(0{,}5) = 0{,}4332 + 0{,}1915 = 0{,}6247.$$

Використаємо правило “трьох сигм”, за яким подія $|X - M(X)| < 3\sigma$ майже достовірна. У даному випадку $M(X) = a = 15;$ $\sigma = 0{,}2,$ тоді маємо:

$$|X - 15| < 3 \cdot 0{,}2 \Leftrightarrow -0{,}6 < X - 15 < 0{,}6 \Leftrightarrow 14{,}4 < X < 15{,}6.$$

Отже, практично можна гарантувати, що середня ціна на акції коливається в межах від 14,4 до 15,6 грн. ■

5. З 200 робітників банку 20 з середньою заробітною платою 600 дол. і середнім квадратичним відхиленням 100 дол. Якщо заробітна плата розподілена за нормальним законом, знайдіть з надійністю $\gamma = 0{,}95$ середню заробітну плату в банку.

► Якщо випадкова величина X (ознака генеральної сукупності) нормально розподілена і її середньоквадратичне відхилення σ відоме, то з надійністю γ її математичне сподівання $M(X) = a$ задовольняє нерівність

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\gamma < a < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\gamma, \ \Phi(t) = \frac{\gamma}{2},$$

де $\Phi(t)$ – інтегральна функція Лапласа;

величина t_γ є розв'язком рівняння $\Phi(t) = \gamma/2$ і визначається за таблицею додатка Б.

За умовою задачі: обсяг вибірки $n = 20$, вибіркове середнє випадкової величини $X : \bar{x} = 600$.

За таблицею додатка Б і даною надійністю $\gamma = 0{,}95$ знаходимо $t_\gamma = 1{,}96$. Далі маємо:

$$600 - \frac{100}{\sqrt{20}} \cdot 1{,}96 < a < 600 + \frac{100}{\sqrt{20}} \cdot 1{,}96;$$

$$600 - \frac{100}{4{,}5} \cdot 1{,}96 < a < 600 + \frac{100}{4{,}5} \cdot 1{,}96;$$

$$600 - 43{,}55 < a < 600 + 43{,}55, \ 556{,}45 < a < 643{,}55.$$

Отже, з надійністю $\gamma = 0{,}95$ інтервал довіри для невідомого параметра a (556,45; 643,55). ■

ПІДГОТОВКА ДО ІСПИТУ

Нижче наведено методичні рекомендації щодо підготовки до іспиту, перелік питань, які виносяться на іспит, зразок екзаменаційного білета і приклад відповіді на питання білета.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ПІДГОТОВКИ ДО ІСПИТУ

Основна робота щодо вивчення дисципліни повинна бути виконана студентами до екзаменаційної сесії. Вивчаючи курс вищої математики, необхідно керуватися програмою. Не можна обмежуватися вивченням лише тих питань теорії, які безпосередньо винесені на іспит.

Студент повинен пам’ятати, що тільки при систематичній і наполегливій самостійній роботі можна досягти успіхів.

Важливе значення для ефективного вивчення курсу має система контролю знань, виявлення рівнів навченості студентів, оцінювання їхньої активності й наполегливості у досягненні навчальних цілей.

За програмою курсу передбачено складання іспиту в першому та другому семестрах.

Необхідною умовою допуску до іспиту (наприкінці семестру) є успішне виконання всіх передбачених програмою видів робіт у семестрі.

На іспиті виясняється насамперед чітке засвоєння теоретичних і практичних питань програми, вміння застосовувати отримані знання до розв’язання практичних задач. Означення, теореми, правила повинні формулюватися точно і з розумінням; задачі повинні розв’язуватися без помилок і впевнено; екзаменаційна письмова робота повинна бути акуратною і чіткою. Тільки при виконанні цих умов знання можуть бути визнані такими, що задовольняють вимоги програми курсу.

При підготовці до іспиту навчальний матеріал рекомендуємо повторювати за підручником і конспектом.

Робота з підручником (конспектом лекцій)

Вивчаючи матеріал за підручником (конспектом), слід переходити до наступного питання тільки після правильного розуміння попереднього.

Особливу увагу слід звернути на означення основних понять курсу. Студент повинен досконало розібрати приклади, які пояснюють дані означення, і вміти складати аналогічні приклади самостійно.

Необхідно пам’ятати, що кожна теорема складається з припущення і твердження. Всі припущення обов’язково повинні використовуватися в доведенні. Корисно складати схеми доведення складних теорем.

При вивченні теоретичного матеріалу необхідно виписувати означення, формулювання теорем, формули, рівняння та ін. Досвід показує, що багатьом студентам допомагає в роботі складання листа, який містить найважливіші формули курсу. Такий лист не тільки допомагає запам'ятати формули, але й може служити постійним довідником для студента.

Розв'язання задач

Робота з підручником (конспектом) повинна супроводжуватися розв'язанням задач, для чого рекомендуємо завести спеціальний зошит.

При розв'язанні задач потрібно пояснювати кожний етап розв'язання, виходячи із теоретичних положень курсу. Якщо студент бачить декілька способів для розв'язання задачі, то він повинен порівняти їх і вибрати з них найбільш раціональний. Корисно до початку обчислень скласти короткий план розв'язку задачі.

Розв'язання кожної задачі повинно доводитися до кінцевої відповіді, якої вимагає умова.

Самоперевірка

Після вивчення певної теми за підручником і розв'язання достатньої кількості відповідних задач студенту рекомендуємо відтворити по пам'яті визначення, виведення формул, формулювання і доведення теорем, перевіряючи себе кожний раз за підручником (конспектом). Питання для самоперевірки, наведені в даному посібнику, повинні допомогти студенту в такому повторенні, закріпленні і перевірці якості засвоєння вивченого матеріалу. У разі необхідності треба ще раз уважно розібратися в матеріалі підручника (конспекту), порозв'язувати задачі.

Інколи недостатнє засвоєння того чи іншого питання виясняється тільки при вивченні наступного матеріалу. У цьому випадку потрібно повернутися назад і повторити недостатньо засвоєний розділ.

Важливим критерієм засвоєння теорії є вміння розв'язувати задачі на пройдений матеріал. Однак слід застерегти студентів від дуже розповсюдженої помилки, яка полягає в тому, що успішне розв'язання задач сприймається ними як ознака засвоєння теорії. Часто правильне розв'язання задачі можна отримати в результаті використання механічно завчених формул, без розуміння суті питання. Можна сказати, що вміння розв'язувати задачі є необхідною, але недостатньою умовою якісного знання теорії.

Екзаменаційні білети складаються з питань і задач, що входять у загальний список (базу даних предмета). Усі типи завдань бази даних є у навчальному посібнику для самостійного вивчення дисципліни "Вища математика для економістів", ч. 1 [17] "Алгебра та математичний аналіз", ч. 2 "Теорія ймовірностей та математична статистика" [23].

Кожний білет складається з шести завдань (2 теоретичні питання і 4 задачі), які охоплюють майже всі розділи курсу, вивчені в семестрі. Оскільки на іспит з математики відводиться лише три академічні години (135 хв.), то завдання білета складено так, щоб кожне завдання підготовлений студент міг виконати в середньому за 20 хвилин.

ПИТАННЯ ДО ІСПИТУ (II СЕМЕСТР)

1. Означення функції декількох незалежних змінних. Геометричне зображення функції двох змінних.
2. Границя і неперервність функції 2 змінних.
3. Частинні прирости та частинні похідні функції декількох незалежних змінних.
4. Повний приріст. Повний диференціал функції 2 незалежних змінних, застосування в наближених обчисленнях.
5. Часткові похідні вищих порядків.
6. Похідна за напрямком. Градієнт функції декількох змінних.
7. Екстремум функції двох змінних. Необхідні і достатні умови екстремуму.
8. Умовний екстремум функції двох змінних. Метод множників Лагранжа.
9. Найбільше і найменше значення функції 2 змінних у замкненій області.
10. Диференціальні рівняння. Основні поняття і означення. Задача Коші.
11. Диференціальні рівняння 1-го порядку з відокремленими змінними.
12. Однорідні диференціальні рівняння 1-го порядку.
13. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку.
14. Диференціальне рівняння Бернуллі.
15. Диференціальні рівняння 2-го порядку. Інтегрування найпростіших типів рівнянь 2-го порядку, які допускають зниження порядку $y''=f(x)$; $y''=f(x,y')$; $y''=f(y,y')$.
16. Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку. Означення і загальні властивості.
17. Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.
18. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку. Метод варіації довільних сталих.
19. Метод невизначених коефіцієнтів для знаходження частинного розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами і правою частиною виду:
    а) $f(x)=P_n(x)e^{ax}$;
    б) $f(x)=e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx\right)$.

20. Числові ряди. Сума ряду. Збіжні і розбіжні ряди. Властивості збіжних рядів.
21. Необхідна ознака збіжності ряду. Гармонічний ряд.
22. Ознаки порівняння рядів. Приклади.
23. Ознака Д'Аламбера збіжності ряду.
24. Радикальна ознака Коші збіжності ряду.
25. Інтегральна ознака Коші збіжності ряду.
26. Знакопочережні ряди. Теорема Лейбніца.
27. Знакозмінні ряди. Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду.
28. Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжність.
29. Степеневі ряди. Інтервал збіжності.
30. Ряди Тейлора і Маклорена.
31. Розвинення в ряд Маклорена функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x), (1+x)^\alpha$.
32. Наближене обчислення інтегралів за допомогою рядів.
33. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів.
34. Обчислення значень функцій за допомогою степеневих рядів.

Теорія ймовірностей і математична статистика

35. Основні поняття комбінаторики. Перестановки. Розміщення і комбінації з n елементів по m.
36. Випадкові події. Алгебра подій (сума, різниця, добуток).
37. Сумісні, несумісні події. Повна група подій. Протилежні події.
38. Класичне означення ймовірності. Властивості ймовірностей.
39. Статистичне означення ймовірності. Стійкість відносних частот.
40. Геометричне означення ймовірності.
41. Теорема про ймовірність суми скінченного числа несумісних подій.
42. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій.
43. Залежні і незалежні події. Умовна ймовірність. Теореми множення для залежних і незалежних подій.
44. Ймовірність появи хоча б однієї події з декількох незалежних подій.
45. Формула повної ймовірності.
46. Ймовірність гіпотез. Формули Байєса.
47. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі.
48. Найімовірніша кількість появ події у незалежних випробуваннях.
49. Локальна теорема Муавра – Лапласа.
50. Асимптотична формула Пуассона.
51. Інтегральна теорема Муавра – Лапласа.
52. Ймовірність відхилення відносної частоти події в серії з n незалежних випробувань від ймовірності події в одному випробуванні.

53. Дискретна випадкова величина. Способи її задання. Закон розподілу.
54. Неперервна випадкова величина. Функція розподілу ймовірностей та її властивості. Ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал.
55. Щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини та її властивості. Ймовірність попадання в заданий інтервал.
56. Математичне сподівання одновимірної випадкової величини та його властивості.
57. Дисперсія одновимірної випадкової величини. Обчислення дисперсії. Властивості дисперсії. Середнє квадратичне відхилення випадкової величини.
58. Медіана і мода розподілу.
59. Початкові і центральні моменти розподілу. Коефіцієнти асиметрії й ексцесу.
60. Біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини та його числові характеристики.
61. Розподіл Пуассона та його числові характеристики.
62. Рівномірний закон розподілу та його числові характеристики.
63. Показниковий розподіл і його числові характеристики.
64. Нормальний закон розподілу неперервної випадкової величини та його числові характеристики. Крива Гаусса.
65. Ймовірність попадання в заданий інтервал нормально розподіленої випадкової величини. Ймовірність її відхилення від математичного сподівання. Правило “трьох сигм”.
66. Закон великих чисел. Збіжність послідовності випадкових величин за ймовірністю. Лема і нерівність Чебишова.
67. Закон великих чисел Чебишова і стійкість середнього арифметичного незалежних випадкових величин.
68. Закон великих чисел Бернуллі і стійкість відносних частот.
69. Поняття про центральну граничну теорему Ляпунова.
70. Дискретні двовимірні випадкові величини, закон розподілу ймовірностей, основні властивості. Закони розподілу компонент.
71. Неперервні двовимірні випадкові величини. Функція розподілу та її властивості.
72. Щільність сумісного розподілу ймовірностей неперервної двовимірної випадкової величини та її основні властивості. Ймовірність попадання випадкової точки в задану область.
73. Щільності розподілу ймовірностей складових двовимірної випадкової величини (безумовні щільності).
74. Умовні закони розподілу складових двовимірної випадкової величини (дискретної і неперервної).

75. Умовне математичне сподівання дискретної і неперервної двовимірних випадкових величин.
76. Залежні і незалежні випадкові величини. Необхідна і достатня умова незалежності випадкових величин.
77. Числові характеристики двовимірної випадкової величини. Початкові і центральні моменти. Кореляційний момент і коефіцієнт кореляції. Теорема про кореляційний момент для незалежних випадкових величин.
78. Функція дискретної випадкової величини. Закон розподілу функції, числові характеристики.
79. Визначення щільності розподілу функції неперервної випадкової величини по щільності розподілу аргументу.
80. Лінійна регресія. Прямі лінії середньоквадратичної регресії. Залишкова дисперсія.
81. Розподіли "хі-квадрат", Стьюдента, Фішера – Снедекора.
82. Завдання математичної статистики. Генеральна та вибіркова сукупності. Вибірка. Способи відбору.
83. Статистичний розподіл вибірки, дискретний варіаційний ряд, полігон частот і відносних частот.
84. Статистичний розподіл вибірки, інтервальний варіаційний ряд, полігон частот і відносних частот.
85. Емпірична функція розподілу. Кумулятивна крива.
86. Емпірична щільність розподілу. Гістограма відносних частот.
87. Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності. Незміщені, ефективні і спроможні оцінки.
88. Статистична оцінка математичного сподівання. Генеральна і вибіркова середні. Властивості вибіркової середньої.
89. Статистична оцінка дисперсії. Вибіркова дисперсія. Зміщення вибіркової дисперсії. Виправлена дисперсія.
90. Метод моментів статистичного оцінювання параметрів розподілу.
91. Метод максимуму правдоподібності статистичного оцінювання параметрів розподілу (для дискретних і неперервних випадкових величин).
92. Деякі властивості вибірки з нормальної сукупності. Розподіли u_i, U, T_i, T, χ^2.
93. Точкові та інтервальні оцінки параметрів розподілу. Точність оцінки, надійність, інтервал довіри.
94. Інтервальні оцінки математичного сподівання нормального розподілу при відомому σ.
95. Інтервальні оцінки математичного сподівання нормального розподілу при невідомому σ.

96. Інтервали довіри для середнього квадратичного відхилення нормального розподілу.
97. Типи статистичних гіпотез. Нульова і конкуруюча гіпотези. Помилки 1-го і 2-го роду. Рівень значущості.
98. Статистичний критерій перевірки нульової гіпотези. Критична область, область прийняття гіпотези. Критичні точки. Пошук правосторонньої, лівосторонньої і двосторонньої критичних областей.
99. Порівняння дисперсій двох нормальних генеральних сукупностей: $H_1 : D[x] > D[y]$.
100. Порівняння дисперсій двох нормальних генеральних сукупностей: $H_1 : D[x] \neq D[y]$.
101. Порівняння середніх двох нормальних генеральних сукупностей, дисперсії яких відомі.
102. Порівняння середніх двох нормальних генеральних сукупностей, дисперсії яких невідомі та однакові.
103. Перевірка гіпотези про статистичну значущість коефіцієнта кореляції.
104. Перевірка гіпотез про закони розподілу. Критерій згоди Пірсона.
105. Функціональна, статистична й кореляційна залежності. Рівняння парної регресії. Незалежність і некорельованість випадкових величин. Вибірковий коефіцієнт кореляції.
106. Вибіркове рівняння лінійної регресії. Метод найменших квадратів. Залишкова дисперсія.

ЗРАЗОК ЕКЗАМЕНАЦІЙНОГО БІЛЕТА

1. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.
2. Ймовірність попадання в заданий інтервал нормально розподіленої випадкової величини.
3. Дано функцію $z = \sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$. Показати, що вона задовольняє рівняння:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}z.$$

4. Користуючись ознакою Д'Аламбера, дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n \cdot n!}{n^n}.$$

5. Підприємство має акції двох компаній. Ймовірність отримання дивідендів за акціями тільки однієї з двох компаній дорівнює 0,38.

Ймовірність того, що підприємство отримає дивіденди за акціями першої компанії, 0,8. Знайдіть ймовірність того, що воно отримає дивіденди за акціями другої компанії.

6. Статистичне управління, провівши спостереження за кількістю працівників у філіях ощадного банку деякого регіону, одержало такі дані: 8, 7, 6, 9, 10, 9, 11, 8, 9, 10, 8, 9, 6, 9, 8, 10, 7, 10, 12, 7.

   Потрібно:

   1) записати дискретний статистичний розподіл вибірки, побудувати полігон відносних частот та емпіричну функцію розподілу;
   2) обчислити числові характеристики вибірки: вибіркове середнє, вибіркову дисперсію, вибіркове середнє квадратичне відхилення, розмах і коефіцієнт варіації.

ПРИКЛАД ВІДПОВІДІ НА ПИТАННЯ ЕКЗАМЕНАЦІЙНОГО БІЛЕТА

1. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

► Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо воно містить шукану функцію y і її похідну y' в першому степені і не містить добутку yy'. Загальний вигляд такого рівняння:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x). \tag{1}$$

Для його розв'язання замінимо шукану функцію y добутком двох інших функцій:

$$y=u(x)\cdot v(x). \tag{2}$$

Диференціюючи (2), отримаємо:

$$\frac{dy}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}. \tag{3}$$

Підставимо (2) і (3) в (1), дістанемо:

$$v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}+P(x)\cdot u\cdot v=Q(x)$$

або

$$v\left[\frac{du}{dx}+P(x)\cdot u\right]+u\frac{dv}{dx}=Q(x). \tag{4}$$

Оскільки шукана функція $y(x)$ подана у вигляді добутку двох невідомих функцій, то одну із них можна вибрати довільно. Виберемо функцію $u(x)$ так, щоб вираз у квадратних дужках дорівнював нулю. Для цього треба знайти хоча б один частинний розв'язок рівняння

$$\frac{du}{dx}+P(x)\cdot u=0, \tag{5}$$

є рівнянням з відокремлюваними змінними. При такому виборі функції u рівняння (4) набуде вигляду:

$$u\cdot\frac{dv}{dx}=Q(x). \tag{6}$$

Розв'язуємо рівняння (5) і знаходимо функцію $u(x)$.

$$\frac{du}{dx}=-P(x)\cdot u;\ \frac{du}{u}=-P(x)dx;\ \ln u=-\int P(x)dx.$$

Звідси

$$u=e^{-\int P(x)dx}. \tag{7}$$

При розв'язанні (5) знаходимо той частинний розв'язок, який відповідає значенню довільного сталого $C = 0$.

Підставимо (7) у (6), отримаємо:

$$e^{-\int P(x)\,dx}\cdot\frac{dv}{dx}=Q(x);\ dv=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;\ v=\int Q(x)e^{\int P(xdx)}+C. \tag{8}$$

Підставимо (7) і (8) у (2), отримаємо загальний розв'язок рівняння (1):

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C\right].\ \blacksquare$$

2. Ймовірність попадання в заданий інтервал нормально розподіленої випадкової величини.

► Нехай неперервна випадкова величина X задана законом розподілу $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Потрібно знайти $P(\alpha<x<\beta)$.

Відомо, що

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{x-a}{\sigma} = t & x = \alpha, \quad t = \dfrac{\alpha - a}{\sigma} \\ x = \sigma\, t + a & \\ dx = \sigma\, dt & x = \beta, \quad t = \dfrac{\beta - a}{\sigma} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^{0} e^{\frac{-t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{\frac{-t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{\frac{-t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{(\alpha-a)/\sigma} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

тобто

$$p(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{9}$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функція Лапласа;

a і σ – параметри нормального розподілу. ■

3. Дано функцію $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$. Показати, що вона задовольняє рівняння:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} z.$$

► Знаходимо часткові похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \frac{y}{x} + \sqrt{x} \cdot \cos \frac{y}{x} \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \frac{y}{x} - \frac{\sqrt{x}\, y}{x^2} \cdot \cos \frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x} \left(\sin \frac{y}{x}\right)'_y = \sqrt{x} \cdot \cos \frac{y}{x} \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{\sqrt{x}}{x} \cos \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{y}{x}.$$

Підставляємо $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ в дане рівняння:

$$x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \frac{y}{x} - \frac{x\sqrt{x} \cdot y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{\sqrt{x}} \cos \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x}}{2} \sin \frac{y}{x} = \frac{1}{2} z \Rightarrow \frac{1}{2} z = \frac{1}{2} z.$$

Отримана тотожність показує, що функція дійсно задовольняє задане рівняння. ■

4. Користуючись ознакою Д'Аламбера, дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{n}\cdot n!}{n^{n}}.$$

► Тут $u_n=\dfrac{7^n\cdot n!}{n^n}$, $u_{n+1}=\dfrac{7^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$, тому

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{7^n\cdot 7\cdot n!\cdot(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)\cdot 7^n\cdot n!}=7\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Отже, за ознакою Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}7\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=7\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{7}{e}>1,$$

оскільки e = 2,71…, а тому ряд розбігається. ■

5. Підприємство має акції двох компаній. Ймовірність отримання дивідендів за акціями тільки однієї з двох компаній дорівнює 0,38. Ймовірність того, що підприємство отримає дивіденди за акціями першої компанії, 0,8. Знайдіть ймовірність того, що воно отримає дивіденди за акціями другої компанії.

► Введемо позначення подій: подія A_1 – підприємство отримає дивіденди за акціями першої компанії; подія A_2 – підприємство отримає дивіденди за акціями другої компанії; подія B_1 – з'явилася тільки подія A_1; B_2 – з'явилася тільки подія A_2.

Поява події B_1 рівносильна появі події $A_1\overline{A_2}$ (з'явилася перша подія і не з'явилася друга), тобто $B_1=A_1\overline{A_2}$.

Поява події B_2 рівносильна появі події $\overline{A_1}A_2$ (з'явилася друга подія і не з'явилася перша), тобто $B_2=\overline{A_1}A_2$.

Таким чином, щоб знайти ймовірність появи тільки однієї з подій A_1 і A_2, достатньо знайти ймовірність появи однієї, будь-якої з подій B_1 і B_2. Події B_1 і B_2 несумісні, тому використаємо теорему додавання $P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2)$.

Події A_1 і A_2 незалежні, отже, незалежні події A_1 і $\overline{A_2}$, а також $\overline{A_1}$ і A_2, тому за теоремою множення:

$$P(B_1)=P\left(A_1\overline{A_2}\right)=P\left(A_1\right)P\left(\overline{A_2}\right);\ P(B_2)=P\left(A_2\overline{A_1}\right)=P\left(A_2\right)P\left(\overline{A_1}\right).$$

Отже, $P\left(B_1+B_2\right)=P(B_1)+P(B_2)=P\left(A_1\right)P\left(\overline{A_2}\right)+P\left(A_2\right)P\left(\overline{A_1}\right)$.

За умовою задачі:

$$P\left(B_1+B_2\right)=0{,}38;\ P\left(A_1\right)=0{,}8\Rightarrow P\left(\overline{A_1}\right)=1-0{,}8=0{,}2.$$

Позначимо $P\left(A_2\right)=p$, тоді $P\left(\overline{A_2}\right)=1-p$.

Маємо

$$0{,}38=0{,}8\left(1-p\right)+0{,}2p=0{,}8-0{,}8p+0{,}2p=0{,}8-0{,}6p\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0{,}6p=0{,}42,\ \ p=0{,}7.$$

Отже, ймовірність того, що підприємство отримає дивіденди за акціями другої компанії, дорівнює 0,7. ■

6. Статистичне управління, провівши спостереження за кількістю працівників у філіях ощадного банку деякого регіону, одержало такі дані: 8, 7, 6, 9, 10, 9, 11, 8, 9, 10, 8, 9, 6, 9, 8, 10, 7, 10, 12, 7.

   Потрібно:
   1) записати дискретний статистичний розподіл вибірки, побудувати полігон відносних частот та емпіричну функцію розподілу;
   2) обчислити числові характеристики вибірки: вибіркове середнє, вибіркову дисперсію, вибіркове середнє квадратичне відхилення, розмах і коефіцієнт варіації.

► У цьому прикладі величина X – відсоткове відношення прибутку до обсягу виробництва одного підприємства.

   Обсяг вибірки:

1) записуємо варіаційний ряд варіант, визначаємо частоти та відносні частоти варіант і результати заносимо в таблицю:

x_i	6	7	8	9	10	11	12
n_i	2	3	4	5	4	1	1
$w_i=\frac{n_i}{n}$	2/20	3/20	4/20	5/20	4/20	1/20	1/20

Будуємо полігон частот як ламану, відрізки якої з’єднують точки $\left(x_i,n_i\right)$ на координатній площині (рис. 1).

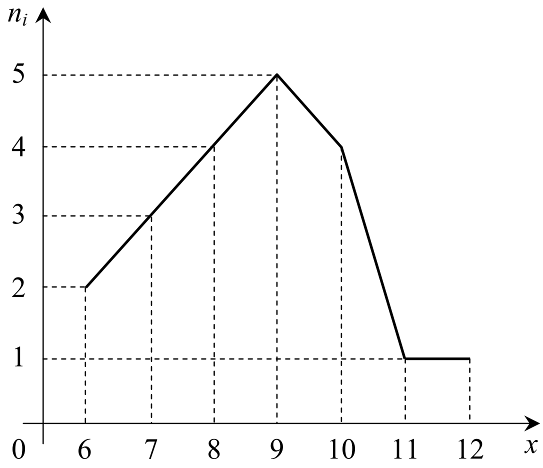

Рис. 1. Полігон частот

Емпірична функція розподілу має такий вигляд:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 6; \\ 2/20, & 6 < x \le 7; \\ 5/20, & 7 < x \le 8; \\ 9/20, & 8 < x \le 9; \\ 14/20, & 9 < x \le 10; \\ 18/20, & 10 < x \le 11; \\ 19/20, & 11 < x \le 12; \\ 1, & x > 12. \end{cases}$$

Далі отримуємо графічне зображення емпіричної функції розподілу (рис. 2).

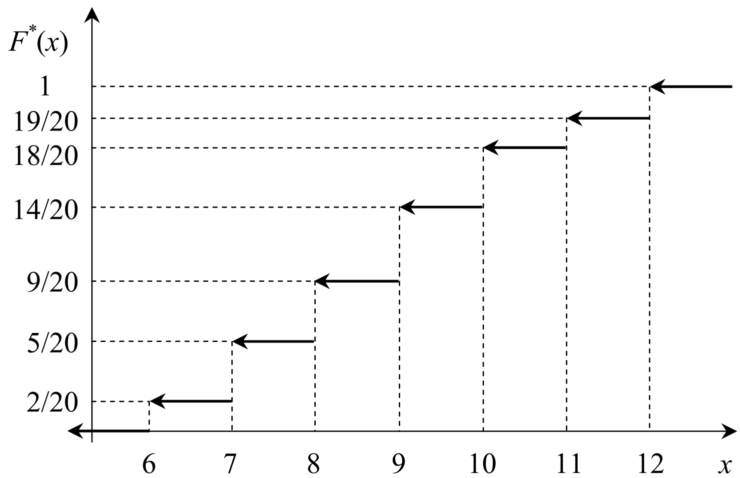

Рис. 2. Графік функції розподілу

2) обчислимо числові характеристики вибірки:
   а) вибіркове середнє обчислюємо за формулою:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_i n_i x_i = \frac{1}{20}\left(2\cdot 6 + 3\cdot 7 + 4\cdot 8 + 5\cdot 9 + 4\cdot 10 + 1\cdot 11 + 1\cdot 12\right) =$$

$$= \frac{1}{20}\cdot 173 = 8{,}65;$$

   б) вибіркову дисперсію обчислюємо за формулою

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum n_i\left(x_i - \overline{x}\right) = \frac{1}{20}\Big[2\left(-2{,}65\right)^2 + 3\left(-1{,}65\right)^2 + 4\left(-0{,}65\right)^2 +$$

$$+5\cdot 0{,}35^2 + 4\cdot 1{,}35^2 + 1\cdot 2{,}35^2 + 1\cdot 3{,}35^2\Big] = \frac{1}{20}\cdot 48{,}55 = 2{,}4275$$

або за формулою:

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum n_i x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{1}{20}\left(2\cdot 6^2 + 3\cdot 7^2 + 4\cdot 8^2 + 5\cdot 9^2 + 4\cdot 10^2 + 1\cdot 11^2 + 1\cdot 12^2\right) -$$

$$-8{,}65^2 = \frac{1}{20}\cdot 1\,545 - 74{,}8225 = 2{,}4275;$$

   в) вибіркове середнє квадратичне відхилення обчислюємо за формулою:

$$\overline{\sigma}\left(x\right) = \sqrt{\overline{D}\left(x\right)} = \sqrt{2{,}4275} = 1{,}558;$$

   г) розмах варіації R (різниця між найбільшим і найменшим значенням варіант) становить R = 12 – 6 = 6; коефіцієнт варіації

$$V = \frac{\overline{\sigma}}{\overline{x}}\cdot 100\ \% = 18\ \%.\ \blacksquare$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Агапов, Г. И. Задачник по теории вероятностей [Текст] : учеб. пособие / Г. И. Агапов. – М. : Высш. шк., 1986. – 80 с.
2. Боровков, А. А. Теория вероятностей [Текст] : учебное пособие / А. А. Боровков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1986. – 432 с.
3. Бугір, М. К. Математика для економістів [Текст] : посібник / М. К. Бугір. – К. : Академія, 2003. – 520 с.
4. Бугір, М. К. Посібник з теорії ймовірності та математичної статистики [Текст] / М. К. Бугір ; МОН України. – Тернопіль : Підручники і посібники, 1998. – 176 с. – ISBN 966-562-175-0.
5. Валєєв, К. Г. Математичний практикум [Текст] : навч. посібник / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2004. – 682 с.
6. Высшая математика для экономистов [Текст] / под ред. Н. Ш. Кремера. М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.
7. Гихман, И. И. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. – К. : Вища школа, 1979. – 408 с.
8. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1998. – 400 с. – ISBN 5-06-003465-8.
9. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 6-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1998. – 479 с. – ISBN 5-06-003464-X.
10. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей [Текст] : учебник / Б. В. Гнеденко. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 320 с.
11. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учеб. пособие для втузов : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд., испр. – М. : Высшая школа, 1997. – Ч. 1. – 304 с.
12. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учеб. пособие для втузов : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд., испр. – М. : Высшая школа, 1997. – Ч. 2. – 416 с.
13. Долгіх, В. М., Вища математика для економістів. Ч. 2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення [Текст] : навч. посібник : у 4 ч. / В. М. Долгіх, К. А. Дахер ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2008. – 76 с.
14. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів. Ч. 3. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди [Текст] : навч. посібник : у 4 ч. / В. М. Долгіх, К. А. Дахер, Т. І. Малютіна ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2008. – 135 с.

15. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів. Ч. 2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення [Текст] : практикум : у 4 ч. / В. М. Долгіх, К. А. Дахер ; Державний вищий навчальний заклад "Українська академія банківської справи Національного банку України". – Суми : ДВНЗ "УАБС НБУ", 2009. – 78 с.
16. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів. Ч. 3. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди [Текст] : практикум : у 4 ч. / В. М. Долгіх, К. А. Дахер, Т. І. Малютіна ; Державний вищий навчальний заклад "Українська академія банківської справи Національного банку України". – Суми : ДВНЗ "УАБС НБУ", 2009. – 129 с.
17. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів. Ч. 1. Алгебра та математичний аналіз [Текст] : навч. посібник для самостійного вивчення дисципліни : у 2 ч. / В. М. Долгіх, Т. І. Малютіна ; Державний вищий навчальний заклад "Українська академія банківської справи Національного банку України". – Суми : ДВНЗ "УАБС НБУ", 2009. – 97 с.
18. Дюженкова, Л. І. Вища математика. Приклади і задачі [Текст] : посібник / Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін. – К. : Академія, 2002. – 624 с.
19. Жлуктенко, В. І. Теорія ймовірностей і елементи математичної статистики [Текст] : навч. посібник / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. – К. : УМКВО, 1991. – 251 с. – ISBN 966-574-265-5.
20. Іванюта, І. Д. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики [Текст] : навч. посібник / І. Д. Іванюта, В. І. Рибалка, І. А. Рудоміно-Дусятська ; МОН України. – К. : Слово, 2003. – 272 с. – ISBN 966-8407-01-6.
21. Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие / В. А. Колемаев, О. В. Староверов, В. Б. Турундаевский ; под ред. В. А. Колемаева. – М. : Высш. шк., 1991. – 400 с. – ISBN 5-06-001545-9.
22. Лиман, Ф. М. Вища математика [Текст] : навч. посібник / Ф. М. Лиман, В. Ф. Власенко, С. В. Петренко, О. В. Семеніхіна. Суми : СумДПУ, 2003. – Ч. 2. – 392 с.
23. Малютіна, Т. І. Вища математика для економістів Ч. 2. Теорія ймовірностей і математична статистика [Текст] : навч. посібник для самостійного вивчення дисципліни : у 2 ч. / Т. І. Малютіна, В. М. Долгіх ; Державний вищий навчальний заклад "Українська академія банківської справи Національного банку України". – Суми : ДВНЗ "УАБС НБУ", 2009. – 66 с.
24. Малютіна, Т. І. Вища математика для економістів. Ч. 4. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст] : навчальний посібник : у 4 ч. / Т. І. Малютіна, К. А. Дахер ; Державний вищий навчальний заклад "Українська академія банківської справи Національного банку України". – Суми : ДВНЗ "УАБС НБУ", 2008. – 181 с.
25. Малютіна, Т. І. Вища математика для економістів. Ч. 4. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст] : практикум : у 4 ч. / Т. І. Малютіна, К. А. Дахер ; Державний вищий навчальний заклад "Українська академія банківської справи Національного банку України". – Суми : ДВНЗ "УАБС НБУ", 2009. – 159 с.

26. Малютіна, Т. І. Математика для економістів [Текст] : тести для контролю знань з теорії ймовірностей / Т. І. Малютіна ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2011. – 63 с.
27. Пугачев, В. С. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие / В. С. Пугачев. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 496 с. – ISBN 5-9221-0254-0.
28. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] / под ред. И. В. Свешникова. – М. : Наука, 1970. – 656 с.
29. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст] : учеб. пособие : в 3 ч. / под общей редакцией А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 1991. – Ч. 2. – 352 с.
30. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст] : учеб. пособие : в 3 ч. / под общей редакцией А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 1991. – Ч. 3. – 288 с.
31. Скороход, А. В. Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів [Текст] / А. В. Скороход. – Київ : Вища шк., 1975. – 296 с.
32. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей [Текст] / В. П. Чистяков. – М. : Наука, 1978. – 224 с.
33. Шефтель, З. Г. Теорія ймовірностей [Текст] / З. Г. Шефтель ; МОН України. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Вища шк., 1994. – 192 с. – ISBN 5-11-004277-3.

Додаток А

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^5}{2}}$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3443	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1787	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1551	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0291	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0040	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток Б

Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17367	17724	10082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	3365	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42307	42647	42786	42922	23056	43189
1,5	43319	43443	43574	43699	43872	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46107	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47493	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48464	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49306	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	19846	49851	49856	49861
3,0	0,49865		3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977		3,6	49981	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968									
4,5	499997									
5,0	49999997									

Додаток В

Таблиця значень χ^2 *залежно від* k *і* α

Число степенів свободи, k	**Рівень значущості** α								
	0,95	**0,90**	**0,50**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,025**	**0,01**
1	0,004	0,016	0,455	1,074	1,642	2071	3,84	5,0	6,6
2	0,103	0,211	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,4	9,2
3	0,352	0,584	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,4	11,3
4	0,711	1,064	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,1	13,3
5	1,145	0,61	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	12,8	15,1
6	1,635	2,20	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	14,4	16,8
7	2,17	2,83	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,0	18,5
8	2,73	3,49	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	17,5	20,1
9	3,32	4,17	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,0	21,7
10	3,94	4,86	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	20,5	23,3
11	4,58	5,58	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	21,9	24,7
12	5,23	6,30	00,34	14,01	15,81	18,55	21,0	23,3	26,2
13	5,89	7,04	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	2407	27,7
14	6,57	7,79	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,1	29,1
15	7,26	8,55	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	27,5	30,6
16	7,96	9,31	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	28,8	32,0
17	8,67	10,08	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	30,2	33,4
18	9,39	10,86	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	31,5	34,8
19	10,11	11,65	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	32,9	36,2
20	10,85	12,44	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	34,2	37,6
21	11,59	13,24	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	35,5	38,9
22	12,34	14,04	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	36,8	40,3
23	13,09	14,85	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	38,1	41,6
24	13,85	15,66	23,3	27,0	29,6	33,2	36,4	39,4	43,0
25	14,61	16,47	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	40,6	44,3
26	15,38	17,29	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	41,9	45,6
27	16,15	18,11	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	43,2	47,0
28	16,93	18,94	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	44,5	48,3
29	17,71	19,77	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	45,7	49,6
30	18,49	20,60	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	47,0	50,9

Додаток Г

Таблиця значень $t_y = t(k, \gamma)$ (розподіл Стьюдента)

Число степенів свободи, k	$\gamma = 1 - \alpha$					
	0,9	**0,95**	**0,98**	**0,99**	**0,998**	**0,999**
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,74	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	20,2	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

Додаток Д

Критичні точки розподілу F Фішера – Снедекора

Рівень значущості α = 0,01

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4 052	4 999	5 403	5 625	5 764	5 889	5 928	5 981	6 022	6 056	6 082	6 106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,40	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	15,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	120,6	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Рівень значущості α = 0,05

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	1937	19,38	19,37	19,40	19,41
3	10,12	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,47	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,20	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Додаток Е

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n / γ	**0,95**	**0,99**	**0,999**	n / γ	**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Додаток Ж

Значення $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k	λ								
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3176	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003
k	λ								
	1,0	**2,0**	**3,0**	**4,0**	**5,0**	**6,0**	**7,0**	**8,0**	**9,0**
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0921	0,0573	0,0337
5	0,0031	0,361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18							0,0002	0,0009	0,0029
19							0,0001	0,0004	0,0014
20								0,0002	0,0006
21								0,0001	0,0003
22									0,0001

Навчальне видання

Малютіна Таїсія Іванівна
Долгіх Володимир Миколайович

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Навчальний посібник щодо підготовки
до поточного та підсумкового контролю

У 2 частинах

Частина 2
**Математичний аналіз. Диференціальні рівняння.
Теорія ймовірностей і математична статистика**

Редагування *Г. М. Нужненко*

Технічне редагування *І. О. Кругляк*

Комп'ютерна верстка *В. А. Івакін*

Підписано до друку 30.12.2011. Формат 60х90/16. Гарнітура Times.
Обл.-вид. арк. 2,61. Умов. друк. арк. 4,25. Зам. № 1110

Видавець і виготовлювач
Державний вищий навчальний заклад
"Українська академія банківської справи Національного банку України"
вул. Петропавлівська, 57, м. Суми, 40000, Україна, тел. (542) 61-93-37

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції: серія ДК, № 3160 від 10.04.2008