

Державний вищий навчальний заклад  
“Українська академія банківської справи  
Національного банку України”  
Кафедра вищої математики та інформатики

**В. М. Долгіх, Т. І. Малютіна**

# **МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ**

Навчальний посібник щодо підготовки  
до поточного та підсумкового контролю

У 2 частинах

Частина 1

**Лінійна, векторна алгебра. Аналітична геометрія.  
Математичний аналіз**

Для студентів економічних спеціальностей  
вищих навчальних закладів

Суми  
ДВНЗ “УАБС НБУ”  
2011

УДК 512.64:514.124](075.8)  
Д64

Рекомендовано до видання вченою радою  
Державного вищого навчального закладу  
“Українська академія банківської справи  
Національного банку України”,  
протокол № 2 від 01.11.2011

**Рецензенти:**

*М. С. Головань*, кандидат педагогічних наук, доцент,  
ДВНЗ “Українська академія банківської справи НБУ”;

*А. М. Розуменко*, кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
Сумський національний аграрний університет

**Долгіх, В. М.**

Д64 Математика для економістів [Текст] : навчальний посібник щодо підготовки до поточного та підсумкового контролю. У 2 ч.

Ч. 1. Лінійна, векторна алгебра. Аналітична геометрія. Математичний аналіз / В. М. Долгіх, Т. І. Малютіна ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2011. – 53 с.

Навчальний посібник щодо підготовки до поточного та підсумкового контролю є складовою частиною комплексу навчальних посібників з курсу вищої математики для економістів. Перша частина посібника містить навчальну програму, методичні рекомендації щодо вивчення теоретичного матеріалу, контрольні питання для перевірки знань до кожної теми курсу, зразки варіантів модульних контрольних робіт і приклади їх виконання, питання до іспиту, зразок екзаменаційного білета та приклад відповіді на нього.

Призначений для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

**УДК 512.64:514.124](075.8)**

© Долгіх В. М., Малютіна Т. І., 2011  
© ДВНЗ “Українська академія банківської справи  
Національного банку України”, 2011

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
МЕТА І ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ .....	6
ПОРЯДОК ПОТОЧНОГО ТА ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ .....	8
НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ.....	12
ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ.....	17
ПІДГОТОВКА ДО 1-Ї МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ .....	18
1. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії .....	18
Зразок варіанта модульної контрольної роботи № 1 .....	23
Приклад виконання модульної контрольної роботи № 1 .....	23
ПІДГОТОВКА ДО 2-Ї МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ .....	30
2. Вступ до математичного аналізу.....	30
3. Диференціальне числення функції однієї змінної.....	32
4. Інтегральне числення функції однієї змінної .....	35
Зразок варіанта модульної контрольної роботи № 2 .....	37
Приклад виконання модульної контрольної роботи № 2 .....	37
ПІДГОТОВКА ДО ІСПИТУ .....	41
Методичні рекомендації щодо підготовки до іспиту .....	41
Питання до іспиту (І семестр) .....	43
Зразок екзаменаційного білета .....	46
Приклад відповіді на питання екзаменаційного білета .....	47
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ .....	52

## ВСТУП

Виявлення та розвиток здібностей молоді, залучення її до творчої праці – одне з основних завдань вищої школи.

Сучасний розвиток країни потребує перебудови вищої школи і визначає такі її основні напрями, як розвиток активності, самостійності і творчих здібностей майбутніх фахівців; забезпечення держави кваліфікованими, ініціативними кадрами, які матимуть ґрунтовну теоретичну та практичну підготовку за фахом, зможуть самостійно приймати рішення, пов'язані з майбутньою професійною діяльністю.

Без сучасних математичних методів неможливо вивчати закони суспільства та економіки. Підтвердженням цього є нагородження Нобелівською премією вчених, які застосовували математичні методи для вивчення економіки (Л. Канторович, Р. Солоу, Д. Хікс, Д. Неш, Р. Зельтен).

Якісна математична освіта необхідна не тільки тим, хто буде займатися науковими дослідженнями, але й керівникам підприємств, економістам. Математичний стиль мислення, вміння міркувати чітко, в логічній послідовності, необхідні інженерам, економістам, юристам, історикам, біологам, лікарям і ін. Тому вузівська математика відіграє винятково важливу роль у підготовці кадрів.

Ефективність і якість підготовки фахівців істотно залежать від навчально-методичної бази, яку використовують у навчальному процесі. Важливо використовувати навчальні програми і методи викладання, які задовольнятимуть потреби математичної підготовки фахівців відповідно до їхньої спеціальності й вимог сьогодення. З цією метою доцільно щорічно оновлювати навчальні програми відповідних курсів, враховуючи міжпредметні зв'язки, а також розробляти методики їхнього вивчення та застосування.

Мета навчання математиці полягає не лише в тому, щоб озброїти студентів знаннями, а й навчити їх самостійно та творчо мислити. Активізація і розвиток мислення є необхідною умовою успішного засвоєння студентами математичної теорії, вироблення умінь і навичок у розв'язанні як теоретичних, так і прикладних задач.

Успішному вивченню студентами дисципліни “Математика для економістів” сприяє належне розуміння ними “правил гри”, усвідомлення об'єкта знань, які необхідно опанувати під час навчання, та вимог до рівнів умінь і навичок, які необхідно набути.

Цей посібник є доповненням навчальних посібників [7–9; 13] і практикумів [10–12]. Мета даного видання – допомогти студентам самостійно підготуватися до модульних контрольних робіт та іспиту.

З урахуванням цього в посібнику подано:

- програму навчального курсу;
- методичні рекомендації щодо вивчення теоретичного матеріалу;
- методи контролю знань студентів, а також принципи оцінювання їхньої роботи протягом семестру та на іспиті;
- контрольні питання для перевірки знань до кожної теми;
- зразки завдань модульних контрольних робіт, екзаменаційних білетів і приклади їх виконання;
- перелік питань, які винесені на іспит;
- список рекомендованої літератури.

Посібник призначений для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

## МЕТА І ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Вища математика має винятково важливе значення для всього процесу навчання у вищому навчальному закладі і для майбутньої діяльності спеціаліста. Вона необхідна для засвоєння багатьох спеціальних дисциплін. Дослідження багатьох процесів у промисловій технології та економіці пов'язане з розробкою математичної моделі даного явища. Для успішного застосування математичних моделей у процесах економіки і плануванні майбутній спеціаліст повинен володіти певною математичною культурою.

Курс вищої математики в економічних вузах містить такі основні розділи:

- лінійна, векторна алгебра, аналітична геометрія;
- математичний аналіз;
- теорія ймовірностей і математична статистика.

Ці розділи служать основою для розвитку економіко-математичного моделювання, методів аналізу економічних процесів і прийняття рішень в управлінні економікою.

Згідно з навчальною програмою студенти економічних спеціальностей ДВНЗ “УАБС НБУ” вивчають дисципліну “Математика для економістів” на першому курсі.

Програма розрахована на 432 години: 76 годин лекційного курсу, 102 години практичних занять і 254 години самостійної роботи у першому та другому семестрах.

### **Мета дисципліни:**

- формування особистості студентів, розвиток їх інтелекту і здібностей до логічного і алгоритмічного мислення;
- навчання основним методичним підходам, необхідним для моделювання процесів і явищ, пошуку оптимальних рішень, методам обробки та аналізу результатів спостережень.

**Завдання дисципліни:** ознайомлення студентів з типовими методами та прийомами для розв'язання задач, які виникають при дослідженні прикладних проблем (при цьому акцент робиться на засвоєння формул, алгоритмів і прийомів розв'язання математичних задач).

У процесі засвоєння курсу студент повинен оволодіти навичками побудови математичних моделей, розв'язання математичних задач з доведенням розв'язку до числового та графічного результату, аналізу отриманих результатів.

У результаті вивчення дисципліни студенти повинні

**знати:**

- правила аналітичних перетворень, методи розв'язання математичних задач;
- основні формули, означення, теореми вищої математики;
- правила коректної постановки математичних задач і перевірки адекватності їх розв'язання;

**вміти:**

- розробляти математичні моделі, пов'язані з дослідженням прикладних задач;
- при розв'язанні задач вибирати та використовувати необхідні обчислювальні методи і засоби (ПК, таблиці, довідники);
- аналізувати отримані результати і виробляти практичні рекомендації;
- самостійно вивчати навчальну літературу з математики;

**мати уявлення:**

- про коректну постановку математичних задач і основні способи їх розв'язання;
- про основні класи задач, що розв'язуються в різних розділах математики;

**набути навичок:**

- розв'язання основних типів рівнянь;
- дослідження функцій та побудови їх графіків;
- знаходження границь функцій;
- диференціювання та інтегрування функцій;
- розв'язання прикладних задач.

## ПОРЯДОК ПОТОЧНОГО ТА ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ

**Завданням поточного контролю** є перевірка розуміння та засвоєння певного матеріалу, сформованих навичок, виконання індивідуальних завдань, умінь самостійно розв'язувати задачі, здатності осмислити зміст теми чи розділу.

**Завданням іспиту** є перевірка засвоєння студентом програмного матеріалу в цілому, осмислення логіки та взаємозв'язків між окремими розділами, здатності творчого використання накопичених знань для розв'язання задач та математичного моделювання.

У ДВНЗ “УАБС НБУ” розроблена і апробована протягом декількох останніх років система оцінювання знань, яка цілком відповідає принципам Болонської декларації. Вона передбачає рівномірне накопичення студентом знань протягом семестру та 100-бальну підсумкову оцінку. Завдання поточного контролю і завдання, що виносяться на іспит, оцінюються в діапазоні від 0 до 50 балів кожне.

### *Модульний контроль*

У процесі вивчення дисципліни “Математика для економістів” студенти виконують чотири модульні роботи (по дві в кожному семестрі):

1. Лінійна, векторна алгебра. Аналітична геометрія у просторі і на площині.
2. Границя функції. Похідна і диференціал. Інтегрування функції. Застосування визначеного інтеграла.
3. Функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння. Ряди та їх застосування до наближених обчислень.
4. Випадкові події. Випадкові величини. Статистика.

Контрольну роботу використовують як один із засобів визначення рівня теоретичних знань і практичних навичок, набутих студентами за певний проміжок часу.

Виконуючи контрольну роботу, студент повинен керуватися такими вказівками:

1. Завдання письмової роботи повинні мати ті номери, під якими вони стоять у білеті.
2. Відповіді на теоретичні питання і розв'язання всіх задач та пояснення до них повинні бути достатньо повними.
3. Всі обчислення повинні бути наведені повністю, рисунки та графіки – виконані акуратно, чітко, із зазначенням одиниць масштабу, координатних осей, позначення до задач повинні відповідати вказівкам на рисунках.
4. Помилкові записи не слід стирати і замазувати коректором, а закреслювати.



### **Поточний контроль знань студентів**

Під час поточного контролю знань оцінюються:

- системність та активність роботи на практичних заняттях і лекціях;
- якість виконання індивідуальних завдань для самостійного опрацювання;
- результати письмових модульних і контрольних робіт.

Під час контролю систематичності та активності роботи на практичних заняттях оцінці підлягають:

- рівень знань, продемонстрований в усних відповідях на практичних заняттях, активність при обговоренні питань (0–5 балів);
- наявність пропусків занять. За кожне пропущене без поважної причини заняття від загальної суми балів віднімається 1 бал.

Під час контролю виконання індивідуальних завдань оцінюються: кількість розв'язаних задач, самостійність і своєчасність виконання завдань. На виконання завдань з кожної теми відводиться 1 тиждень. Якщо завдання виконано протягом другого тижня, оцінка за нього ділиться навпіл. Після 2-го тижня оцінка за завдання – 0 балів.

Індивідуальне завдання необхідно здати до контрольної роботи з даної теми.

Самостійно виконані роботи перевіряються викладачем і підлягають захисту під час співбесіди зі студентом.

Розподіл індивідуальних завдань і кількості балів за одну задачу за модулями наведено у таблиці 1.

*Таблиця 1*

Модуль	Індивідуальні завдання	Кількість задач	Кількість балів за одну задачу	Максимальна кількість балів
1	[17, ІЗ 1.1–1.5]	20	0,5	10
2	[17, ІЗ 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 4.1, 5.1, 6.1, 7.1]	40	0,25	10
3	[17, ІЗ 8.1, 9.1, 9.2, 10.1, 10.2, 11.1]	30	1/3	10
4	[23, ІЗ 3.1–3.3]	11	Задачі 1–9 – 0,5 Задача 10 – 3,5 Задача 11 – 2	10

Письмові модульні та контрольні завдання оцінюються за десятибальною шкалою. Тривалість контрольної роботи – 90 хвилин.

Розподіл кількості балів за видами робіт при поточному модульному контролі знань наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Види робіт	Що входить до підрахунку балів	Діапазон балів (за 1 модуль)
Усні відповіді	Середня арифметична оцінка за усні відповіді за 5-бальною шкалою	0–5
Контрольні роботи	Середня арифметична оцінка за контрольні роботи за 10-бальною шкалою	0–10
Індивідуальні завдання	Сумарна кількість балів за виконання задач індивідуальних завдань (див. табл. 1)	0–10
<b>Усього</b>		<b>25</b>

Додатково оцінюється (якщо загальна кількість балів за поточну роботу не перевищує 50 балів):

- а) участь у наукових студентських конференціях, олімпіадах, підготовка наукових публікацій – не більше 10 балів (за рішенням кафедри);
- б) ведення конспекту лекцій (0–3 бали);
- в) написання рефератів (не більше 5 балів);
- г) відсутність пропусків занять без поважної причини (не більше 5 балів за семестр).

### ***Підсумковий контроль знань***

Підсумковий контроль знань студентів проводиться у формі письмового іспиту. Перелік питань, що охоплюють зміст програми з дисципліни “Математика для економістів”, критерії оцінювання екзаменаційних завдань визначаються кафедрою, включаються до робочої програми дисципліни і доводяться до відома студентів на початку семестру.

Результати іспиту оцінюються в діапазоні від 0 до 50 балів (включно). Екзаменаційний білет містить 6 завдань: 2 теоретичні питання (кожне з яких оцінюється п’ятьма балами) і 4 задачі (кожна з яких оцінюється десятьма балами).

Загальна підсумкова оцінка складається з суми балів за результатами поточного контролю знань (максимум 50 балів) і балів за виконання екзаменаційних завдань (максимум 50 балів) за умови, що за результатами іспиту студент набрав не менше 25 балів. Якщо на іспиті студент набрав менше 25 балів, то загальна підсумкова оцінка включає лише результати поточного контролю.

До відомості обліку поточної і підсумкової успішності заносяться результати поточного контролю та іспиту відповідно до бальної шкали, що використовується в академії, та трансформуються в оцінку за національною 5-бальною шкалою та оцінку за системою ECTS.

**Таблиця відповідності даних 100-бальної шкали оцінювання,  
національної (4-бальної) до шкали за системою ECTS**

<b>Оцінка за системою ECTS</b>	<b>Оцінка за бальною шкалою, що використовується в академії</b>	<b>Оцінка за національною шкалою</b>
A	90–100	5 (відмінно)
B	80–89	4 (дуже добре)
C	70–79	4 (добре)
D	60–69	3 (задовільно)
E	50–59	3 (достатньо)
FX	25–49	2 (незадовільно)
F	0–24	2 (неприйнятно)

# НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ

## I СЕМЕСТР

### Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Матриці. Дії над матрицями.

Визначники квадратної матриці, їх властивості, обчислення.

Обернена матриця. Ранг матриці. Теорема про базисний мінор.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь, методи їх розв'язку.

Однорідні системи.

Вектори. Лінійні операції над векторами. Лінійний векторний простір. Лінійно залежні й лінійно незалежні системи векторів. Базис і розмірність простору. Розклад вектора за базисними векторами. Координати вектора. Лінійні операції над векторами в координатній формі. Поділ відрізка в даному відношенні.

Скалярний добуток векторів. Векторний і мішаний добуток векторів, їх основні властивості, обчислення. Умови колінеарності та компланарності векторів.

Пряма лінія на площині.

Криві другого порядку, їх канонічні рівняння.

Система координат у просторі. Площина в просторі. Пряма лінія в просторі. Змішані задачі на пряму й площину у просторі.

### Вступ до математичного аналізу

Сталі й змінні величини. Функції, властивості функцій.

Числова послідовність. Границя послідовності. Основні теореми про границі послідовності.

Границя функції на нескінченності і в точці. Однобічні границі. Нескінченно малі та нескінченно великі функції, їх властивості. Порівняння нескінченно малих функцій. Основні теореми про границі.

Визначні границі. Невизначеності.

Неперервність функції в точці та на відрізку.

### Диференціальне числення функції однієї змінної

Поняття похідної. Правила диференціювання. Похідні елементарних функцій.

Похідна складної та оберненої функцій. Логарифмічне диференціювання. Похідна неявно заданої функції. Похідні вищих порядків.

Диференціал функції, інваріантність форми диференціала. Застосування диференціала для наближених обчислень. Диференціали вищих порядків.

Основні теореми диференціального числення (теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші). Правило Лопітала для розкриття невизначеностей.

## **Застосування похідної для дослідження функцій і побудови графіків**

Умови зростання й спадання функції. Локальні екстремуми функції, точки екстремуму. Необхідна й достатня умови існування екстремуму функції. Схема дослідження функції на екстремум.

Опуклість і вгнутість кривої. Точки перегину. Достатня ознака існування точки перегину. Асимптоти графіка функції.

Загальна схема дослідження функції та побудови її графіка.

## **Невизначений інтеграл**

Первісна. Невизначений інтеграл та його властивості. Таблиця основних інтегралів.

Метод безпосереднього інтегрування.

Методи підстановки й інтегрування частинами.

Інтегрування функцій, що містять квадратний тричлен. Інтегрування раціональних дробів.

Інтегрування тригонометричних функцій.

Інтегрування деяких ірраціональних функцій.

Приклади інтегралів, “що не беруться”.

## **Визначений інтеграл**

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла. Визначений інтеграл як границя інтегральної суми. Геометричний зміст визначеного інтеграла. Властивості визначеного інтеграла. Теорема про середнє значення визначеного інтеграла.

Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею. Похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею. Формула Ньютона – Лейбніца.

Заміна змінної й інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Геометричні застосування визначеного інтеграла.

## **Невластиві інтеграли**

Невластиві інтеграли 1-го, 2-го родів, їх збіжність. Теорема порівняння.

## **II СЕМЕСТР**

### **Функції багатьох змінних**

Поняття функції багатьох змінних. Границя, неперервність функції багатьох змінних. Частинні похідні.

Повний диференціал функції багатьох змінних і його застосування в наближених обчисленнях.

Диференціювання неявної й складеної функцій багатьох змінних.

Похідна за даним напрямом. Градієнт. Часткові похідні й диференціали вищих порядків.

Екстремум функції багатьох змінних. Найбільше й найменше значення функції, неперервної у замкненій обмеженій області.

Умовний екстремум.

### **Диференціальні рівняння**

Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Основні поняття й означення.

Диференціальні рівняння першого порядку: з відокремлюваними змінними, однорідні, лінійні, Бернуллі та методи їх розв'язання.

Розв'язання деяких диференціальних рівнянь другого порядку, що допускають зниження порядку.

Лінійні однорідні й неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального виду.

### **Числові та функціональні ряди**

Числові ряди. Поняття збіжності й розбіжності ряду. Сума ряду. Залишок ряду. Необхідна ознака збіжності ряду.

Ознаки збіжності рядів із додатними членами: інтегральна ознака Коші, ознаки порівняння, ознака Д'Аламбера, радикальна ознака Коші.

Знакозмінні ряди. Абсолютна й умовна збіжності. Знакопозаперечні ряди. Ознака Лейбніца.

Функціональні ряди. Область збіжності. Степеневі ряди. Радіус та інтервал збіжності. Властивості степеневих рядів.

Ряди Тейлора й Маклорена. Розвинення функцій у степеневі ряди. Застосування степеневих рядів для наближених обчислень.

### **Кратні інтеграли**

Задачі, що приводять до кратних інтегралів. Подвійний інтеграл і його обчислення. Деякі геометричні застосування подвійного інтеграла.

### **Основні поняття теорії ймовірностей**

Предмет курсу, його зміст. Роль і місце курсу як теоретичної бази ймовірнісно-статистичного моделювання.

Класифікація подій на неможливі, вірогідні та випадкові. Поняття елементарної та складної подій. Простір елементарних подій; операції над подіями.

Класичне означення ймовірності випадкової події та її властивості.

Елементи комбінаторики у теорії ймовірностей, аксіоми теорії ймовірностей та її наслідки.

Геометрична ймовірність, статистична ймовірність.

## **Теореми додавання та множення ймовірностей**

Поняття сумісних і несумісних випадкових подій. Теореми додавання ймовірностей.

Поняття залежності та незалежності випадкових подій. Умовна ймовірність та її властивості.

Теореми множення ймовірностей для залежних і незалежних випадкових подій. Використання формул множення ймовірностей для оцінки надійності деяких систем.

Формула повної ймовірності та формула Байєса.

## **Схема повторних незалежних випробувань Бернуллі**

Означення повторних незалежних випробувань. Формула Бернуллі для обчислення ймовірності та найімовірнішого числа.

Асимптотичні формули для формули Бернуллі (локальна та інтегральна теореми Муавра – Лапласа). Використання інтегральної теореми. Формула Пуассона для малої ймовірності випадкових подій.

Формула обчислення ймовірності відхилення відносної частоти від заданої ймовірності в незалежних випробуваннях.

## **Випадкові величини та їх числові характеристики**

Поняття випадкової величини. Дискретні та неперервні випадкові величини. Закон розподілу. Функція розподілу ймовірностей та її властивості. Ймовірність попадання випадкової величини в заданий проміжок.

Числові характеристики випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія та їх властивості, середнє квадратичне відхилення, мода та медіана; початкові та центральні моменти, асиметрія та ексцес.

## **Основні закони розподілу випадкових величин**

Біноміальний, пуассонівський, рівномірний і показниковий закони розподілу. Числові характеристики. Нормальний закон розподілу та його значення у теорії ймовірностей. Числові характеристики.

## **Системи двох випадкових величин**

Визначення двовимірної випадкової величини та закон її розподілу. Система двох дискретних випадкових величин, числові характеристики системи, кореляційний момент, коефіцієнт кореляції та його властивості.

Функція розподілу ймовірностей і щільність ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин, їх властивості.

Числові характеристики системи двох неперервних випадкових величин. Умовні закони розподілу та їх числові характеристики.

Визначення кореляційної залежності.

## **Закон великих чисел**

Нерівність Чебишова та її значення. Теорема Чебишова.

Теорема Бернуллі.

Центральна гранична теорема теорії ймовірностей (теорема Ляпунова) та її використання у математичній статистиці.

## **Елементи математичної статистики. Вибірковий метод**

Генеральна та вибірка сукупності. Статистичні розподіли вибірок. Емпірична функція розподілу та її властивості. Гістограма й полігон статистичних розподілів.

Числові характеристики: вибірка середня, дисперсія вибірки, середньоквадратичне відхилення, мода й медіана для дискретних та інтервальних статистичних розподілів вибірки, емпіричні початкові та центральні моменти, асиметрія та ексцес.

## **Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності.**

### **Статистичні гіпотези**

Означення статистичної оцінки. Точкові статистичні оцінки: зміщені та незміщені, ефективні та спроможні. Точкові незміщені статистичні оцінки. Виправлена дисперсія.

Інтервальні статистичні оцінки. Точність, надійність оцінки. Означення довірчого (надійного) інтервалу; побудова довірчих інтервалів для  $\bar{X}_G$  за відомого значення  $\sigma_G$  і невідомого  $\sigma_G$ .

Побудова довірчих інтервалів для  $\sigma_G$ . Оцінка точності вимірів.

Означення статистичної гіпотези. Нульова й альтернативна, проста та складена гіпотези. Помилки першого та другого роду.

Статистичний критерій, спостережене значення критерію. Критична область, область прийняття нульової гіпотези, критична точка.

Загальна методика побудови правосторонньої, лівосторонньої критичних областей. Перевірка правдивості статистичних гіпотез про рівність двох генеральних середніх і двох дисперсій, ознаки яких мають нормальні закони розподілу.

Перевірка правдивості нульової гіпотези про нормальний закон розподілу ознаки генеральної сукупності. Емпіричні та теоретичні частоти. Критерій узгодженості Пірсона.

## **Елементи теорії регресії та кореляції**

Функціональна, статистична і кореляційна залежності.

Рівняння парної регресії. Властивості статистичних оцінок параметрів парної функції регресії. Вибірковий коефіцієнт кореляції та його властивості.

Інтервал довіри для лінії регресії, коефіцієнт детермінації.

Нелінійна регресія.



## ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Як правило, невдачі із засвоєнням курсу математики обумовлені не відсутністю математичних здібностей, а відсутністю звички систематичної роботи і доведення до розуміння матеріалу, а не до запам'ятовування. Часто студент переходить до наступних частин курсу без засвоєння попередніх, не вникаючи в суть фундаментальних понять та ідей. Нерідко студенти користуються алгоритмами розв'язання задач без розуміння їх суті. Тільки в роздумах над нестандартними задачами, у самостійному подоланні труднощів, у вихованні звички систематично працювати може сформуватися сучасний фахівець.

Основною формою навчання є самостійна робота над матеріалом, яка складається з таких етапів:

- вивчення теоретичного матеріалу за підручниками та посібниками;
- відповіді на питання для самоперевірки;
- аналіз розв'язаних задач (вправ), наведених в посібниках;
- самостійне розв'язання задач;
- виконання індивідуальних домашніх завдань (ІЗ) за кожним розділом курсу;
- виконання контрольних робіт.

При вивченні матеріалу за підручниками або посібниками слід переходити до наступного питання тільки після засвоєння матеріалу попереднього питання. Корисним є стисле конспектування теоретичного матеріалу. Важливі формули в конспекті необхідно виділяти підкреслюванням або рамкою. Вивчення теоретичного матеріалу слід супроводжувати розв'язанням задач. При цьому потрібно обґрунтовувати кожен етап розв'язання, посилаючись на теоретичні положення курсу. Розв'язання кожного завдання потрібно доводити до відповіді. Завдання кожного типу необхідно розв'язувати для формування міцних навичок.

Перед вивченням наступної теми потрібно провести самоконтроль рівня знань, використовуючи питання для самоконтролю і тести [14; 15].

# ПІДГОТОВКА ДО 1-Ї МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Нижче наведено перелік розділів, які увійшли в першу модульну контрольну роботу, посилання на літературу для підготовки, список питань для самоперевірки, зразок варіанта модульної контрольної роботи і приклад її розв'язання.

## 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

### 1.1. МАТРИЦІ Й ВИЗНАЧНИКИ

*Література:* [2, розділ 2, п. 2.2, 2.3]; [3, розділ 1, п. 1.1, 1.2]; [4, розділ 1, глава 1]; [5, глава 4, § 1–4]; [7, розділ 1]; [10, розділ 1]; [13, розділ 1, п. 1.1]; [16, розділ 2, § 7]; [17, розділ 2, § 1–4]; [19, розділ 1, п. 1.1–1.3].

#### *Питання для самоперевірки*

1. Відомий визначник матриці  $A$ . Чому дорівнює визначник матриці  $A^T$ ?
2. Дано матриці  $A_{2 \times 4}$ ,  $B_{4 \times 4}$ . Чи існує визначник матриці  $AB$ ?
3. При якому  $\lambda$  буде виродженою матриця  $AB$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}?$$

4. Чи можна звести елементарними перетвореннями матрицю

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ до одиничної матриці?}$$

5. Ранг матриці п'ятого порядку дорівнює 3. Чи може її визначник дорівнювати 1?
6. Визначники матриць  $A$  і  $B$  дорівнюють відповідно 2 і 3. Чому дорівнює визначник матриці  $(A)^T$ ?
7. Чи правильне твердження, що у будь-якої матриці кількість лінійно незалежних рядків дорівнює кількості лінійно незалежних стовпців?

### 1.2. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

*Література:* [1, розділ 3]; [2, розділ 2, п. 2.4]; [3, розділ 1, п. 1.4]; [4, розділ 1, глава 2]; [5, глава 4, § 5–7]; [7, розділ 2]; [10, розділ 2]; [13, розділ 1, п. 1.2]; [16, розділ 2, § 7]; [17, розділ 2, § 5]; [19, розділ 1, п. 1.4].

### **Питання для самоперевірки**

1. В якому випадку систему лінійних рівнянь можна розв'язувати:
  - а) методом Крамера;
  - б) методом оберненої матриці?
2. Як при розв'язуванні методом Крамера системи  $n$  рівнянь із  $n$  невідомими можна довести:
  - а) несумісність системи;
  - б) існування єдиного розв'язку?
3. Чи може система  $n$  рівнянь із  $n$  невідомими мати:
  - а) рівно  $n$  розв'язків;
  - б) менш ніж  $n$  розв'язків;
  - в) більш ніж  $n$  розв'язків?
4. В якому випадку *неоднорідна* система  $n$  рівнянь із  $n$  невідомими:
  - а) має єдиний розв'язок;
  - б) має безліч розв'язків;
  - в) не має розв'язків?
5. В якому випадку *однорідна* система  $n$  рівнянь із  $n$  невідомими:
  - а) має єдиний розв'язок;
  - б) має безліч розв'язків;
  - в) не має розв'язків?
6. Чи може система трьох рівнянь із п'ятьма невідомими:
  - а) мати єдиний розв'язок;
  - б) не мати розв'язків?
7. Чим відрізняється алгоритм Жордана – Гаусса від алгоритму Гаусса?
8. Як при розв'язуванні системи лінійних рівнянь методом Гаусса можна визначити:
  - а) несумісність системи;
  - б) існування єдиного розв'язку?

### **1.3. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ**

*Література:* [1, розділ 2, п. 2.1–2.5]; [2, розділ 3, п. 3.2]; [3, розділ 2, п. 2.4]; [4, розділ 1, глава 3]; [5, глава 2]; [7, розділ 3]; [10, розділ 3]; [13, розділ 1, п. 1.3]; [16, розділ 1, § 3]; [17, розділ 3]; [19, розділ 2].

### **Питання для самоперевірки**

1. Чи може належати до базису нульовий вектор?
2. Зі скількох векторів складається базис:
  - а) на прямій;
  - б) на площині;
  - в) у просторі  $R^3$ ?
3. Чи є лінійно незалежними три вектори:
  - а) на площині;
  - б) у просторі  $R^3$ ?

4. Чи може проекція вектора на вісь бути від'ємною?
5. Чому дорівнюють скалярний і векторний добутки:
  - а) колінеарних векторів;
  - б) перпендикулярних векторів?
6. Як у  $R^3$  знайти вектор, перпендикулярний до двох заданих векторів?
7. Як визначити, правою чи лівою є трійка векторів?
8. Чому дорівнює мішаний добуток компланарних векторів?
9. На трьох векторах побудовані:
  - а) трикутна призма;
  - б) трикутна піраміда.
 Чому дорівнюють їх об'єми?
10. Сформулюйте означення лінійної залежності і лінійної незалежності трьох векторів у просторі  $R^3$  за допомогою їх мішаного добутку.
11. Як зміниться кут між ненульовими векторами в просторі  $E^n$ , якщо один із векторів помножити:
  - а) на додатне число;
  - б) на від'ємне число?
12. Знайдіть кут між головною діагоналлю куба та його гранню.
13. Доведіть, що проекції вершин куба на його головну діагональ ділять її на 3 рівні частини.
14. У  $R^3$  задані 3 некомпланарні вектори. Як знайти проекцію одного з векторів на площину, яку утворюють інші вектори?

#### **1.4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ**

*Література:* [1, розділ 4, п. 4.1, 4.2, 4.4]; [2, розділ 3, п. 3.3]; [3, розділ 2, п. 2.1–2.3]; [4, розділ 1, глава 4]; [5, глава 3, § 1]; [7, розділ 4]; [10, розділ 4]; [13, розділ 1, п. 1.4]; [16, розділ 2, § 5; розділ 3, § 8]; [17, розділ 4, § 1, 2, 6]; [19, розділ 3, п. 3.3, розділ 4, п. 4.1, 4.3].

##### **1.4.1. Пряма на площині**

###### *Питання для самоперевірки*

1. Запишіть такі рівняння прямих і поясніть зміст усіх величин у цих рівняннях:
  - векторне й канонічне рівняння прямої;
  - загальне рівняння прямої;
  - рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;
  - рівняння прямої, що проходить через задану точку із заданим кутовим коефіцієнтом;
  - рівняння прямої, що проходить через дві дані точки;
  - рівняння прямої у відрізках;
  - нормальне рівняння прямої.
2. Як знайти кут між двома прямими?

3. Сформулюйте умови паралельності й перпендикулярності 2 прямих.
4. Як обчислити відстань від точки до прямої?
5. Доведіть, що в прямокутному трикутнику сума катетів дорівнює сумі діаметрів вписаного та описаного колів.
6. Яку множину на площині описує нерівність  $Ax + By + D > 0$ ?

#### 1.4.2. Алгебраїчні лінії другого порядку на площині

1. Як можна визначити тип лінії, заданої загальним рівнянням другого порядку?
2. Яка лінія називається кривою другого порядку? Скільки типів кривих другого порядку існує? Як визначається тип кривої за ексцентриситетом?
3. Яка система координат називається канонічною?
4. Накресліть еліпси, задані рівняннями  $4x^2 + 9y^2 = 36$  і  $9x^2 + y^2 = 36$ . Знайдіть їх фокуси, ексцентриситети й директриси.
5. Накресліть гіперболи, задані рівняннями  $4x^2 - 9y^2 = 36$  і  $-4x^2 + 9y^2 = 36$ . Знайдіть їх фокуси, ексцентриситети, директриси й асимптоти.
6. Накресліть параболи  $y^2 = 4x$ ,  $y^2 = -4x$ ,  $x^2 = 4y$ ,  $x^2 = -4y$ . Знайдіть їх фокуси й директриси.
7. Яку множину на площині описує нерівність:
  - а)  $y^2 \geq 2px$  ( $p > 0$ );
  - б)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ;
  - в)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq 1$ ?

#### 1.5. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРИ

*Література:* [1, розділ 4, п. 4.3]; [2, розділ 3, п. 3.5, 3.6]; [3, розділ 2, п. 2.5]; [5, глава 3, § 1, 2]; [7, розділ 5]; [10, розділ 5]; [13, розділ 1, п. 1.5]; [16, розділ 2, § 6; розділ 3, § 9]; [17, розділ 4, § 3–5, 7]; [19, розділ 3, п. 3.1, 3.2; розділ 4, п. 4.2].

##### *Питання для самоперевірки*

1. Запишіть рівняння і поясніть зміст усіх величин у них:
  - векторне й загальне рівняння площини;
  - рівняння площини, що проходить через три задані точки;
  - рівняння площини у відрізках на осях.
2. Як знайти кут між двома площинами?
3. Сформулюйте умови паралельності й перпендикулярності 2 площин.
4. Як обчислити відстань від точки до площини?

5. Запишіть рівняння прямої у  $R^3$  і поясніть зміст усіх величин у цих рівняннях:
  - векторне рівняння прямої;
  - канонічні рівняння прямої;
  - параметричні рівняння прямої;
  - рівняння прямої, що проходить через дві задані точки;
  - рівняння прямої як лінії перетину 2 площин.
6. Як перейти від загальних рівнянь прямої у  $R^3$  до канонічних?
7. Як перейти від канонічних рівнянь прямої у  $R^3$  до параметричних?
8. Як знайти кут між двома прямими у просторі  $R^3$ ?
9. Сформулюйте умови паралельності й перпендикулярності 2 прямих у просторі  $R^3$ .
10. Як знайти відстань від точки до прямої у просторі  $R^3$ ?
11. Як знайти відстань між паралельними прямими у просторі  $R^3$ ?
12. Як знайти відстань між перехресними прямими у просторі  $R^3$ ?
13. Задані рівняння двох прямих у просторі  $R^3$ . За якої умови ці прямі перетинатимуться? Як знайти точку перетину двох прямих?
14. Як знайти кут між прямою й площиною?
15. Як знайти точку перетину прямої з площиною?
16. Як перевірити, чи належить пряма даній площині?
17. Запишіть умови паралельності й перпендикулярності прямої та площини.
18. Запишіть рівняння площини, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданої прямої.
19. Що являє собою рівняння  $2x + 3y = 6$ :
  - а) на площині  $xOy$ ;
  - б) у просторі  $R^3$ ?
 Зробіть креслення.
20. Задані загальні рівняння двох площин. За якої умови ці площини перетинатимуться?
21. Задані канонічні рівняння двох непаралельних прямих у просторі. Складіть канонічні рівняння прямої, перпендикулярної одночасно до двох даних прямих.
22. Задані канонічні рівняння двох прямих у просторі. За якої умови ці прямі перетинатимуться?
23. Складіть рівняння площини, що проходить через дану пряму перпендикулярно до даної площини.
24. Укажіть будь-які площини, які перетинають поверхню  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ :
  - а) по колу;
  - б) по параболі;
  - в) по парі паралельних прямих;
  - г) по парі прямих, що перетинаються.

**ЗРАЗОК ВАРІАНТА  
МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 1**

1. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

- а) за формулами Крамера;
  - б) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
  - в) методом Гаусса<sup>1</sup>.
- Зробіть перевірку одержаного розв'язку.

2. Дано піраміду з вершинами  $A_1(7,7,3)$ ,  $A_2(6,5,8)$ ,  $A_3(3,5,8)$ ,  $A_4(8,4,1)$ .

Знайдіть:

- а) об'єм піраміди;
- б) кут між ребрами  $A_1A_2$  і  $A_1A_3$ ;
- в) рівняння площини, що проходить через пряму  $A_1A_2$  і точку  $A_4$ ;
- г) рівняння висоти піраміди, опущеної з точки  $A_3$  на площину  $A_1A_2A_4$ .

3. Дані вершини трикутника  $A(1;2)$ ,  $B(2;-2)$ ,  $C(6;1)$ . Складіть рівняння сторони  $AB$ , висоти  $CH$ , медіани  $BM$ .

4. Складіть рівняння траєкторії точки  $M(x,y)$ , яка при своєму русі залишається втричі ближче до точки  $A(1;0)$ , ніж до прямої  $x=9$ .

**ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ  
МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 1**

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

---

<sup>1</sup> У білеті вказаний тільки один метод розв'язування системи.

- а) за формулами Крамера;
- б) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);
- в) методом Гаусса.

Зробити перевірку одержаного розв'язку.

► а) нехай  $\Delta$  – визначник матриці  $A$  системи,  $\Delta_j$  – визначник, отриманий з визначника  $\Delta$  заміною  $j$ -го стовпця стовпцем вільних членів. Тоді при  $\Delta \neq 0$  система має єдиний розв'язок, що визначається за формулами Крамера:  $x_j = \Delta_j / \Delta$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Обчислимо визначник матриці  $A$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 16 - 3 - (18 - 4 - 2) = -2 \neq 0 -$$

система має єдиний розв'язок.

Обчислимо визначники  $\Delta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -15 + 8 - 18 - (9 - 20 - 12) = -2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 40 + 3 - (36 + 4 - 5) = 2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 24 - 5 - (30 - 6 + 2) = -4.$$

Розв'язок системи знайдемо за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

*Перевірка*

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 5, \\ 1 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 6, \\ 2 \cdot 1 - (-1) - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 5, \\ 6 = 6, \\ 1 = 1; \end{cases}$$



б) розв'яжемо систему методом оберненої матриці. Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Систему запишемо у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B.$$

Якщо матриця  $A$  не вироджена ( $\det A \neq 0$ ), то вона має обернену матрицю  $A^{-1}$ , за допомогою якої розв'язок системи може бути поданий у вигляді:

$$X = A^{-1}B.$$

Обернену матрицю можна обчислити за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (\det(A) \neq 0),$$

де  $A_{ij} (i, j = \overline{1,3})$  – алгебраїчні доповнення елементів  $a_{ij}$  матриці  $A$ .

Визначник  $\det A = -2$ . Обчислимо алгебраїчні доповнення  $A_{ij}$ :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 8) = 9, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Знайдемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 9 & -7 & -1 \\ -7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо розв'язок системи:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 9 & -7 & -1 \\ -7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - 1 \cdot 6 - 1 \cdot 1 \\ 9 \cdot 5 - 7 \cdot 6 - 1 \cdot 1 \\ -7 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

в) розв'яжемо систему методом Гаусса. Перетворюємо розширену матрицю системи:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_2 - e_1 \\ e_3 - 2e_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_3 + 5e_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 - 3e_3 \\ e_2 - e_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 - 2e_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1. \blacksquare \\ x_3 = 2 \end{cases} \\ e_3 / (-2) &\end{aligned}$$

2. Дано піраміду з вершинами  $A_1(7,7,3)$ ,  $A_2(6,5,8)$ ,  $A_3(3,5,8)$ ,  $A_4(8,4,1)$ .

Знайти:

а) об'єм піраміди;

б) кут між ребрами  $A_1A_2$  і  $A_1A_3$ ;

в) рівняння площини, що проходить через пряму  $A_1A_2$  і точку  $A_4$ ;

г) рівняння висоти піраміди, опущеної з точки  $A_3$  на площину  $A_1A_2A_4$ ;

► а) об'єм трикутної піраміди, що побудована на векторах  $\overrightarrow{A_1A_2}$ ,  $\overrightarrow{A_1A_3}$ ,  $\overrightarrow{A_1A_4}$ , обчислюється за формулою:

$$V = \frac{1}{6} \left| \left( \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} \right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4} \right|.$$

Знайдемо вектори:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (6 - 7, 5 - 7, 8 - 3) = (-1, -2, 5),$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (3 - 7, 5 - 7, 8 - 3) = (-4, -2, 5),$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (8 - 7, 4 - 7, 1 - 3) = (1, -3, -2).$$

Обчислимо мішаний добуток:

$$(\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}) \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ -4 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 10 + 60 - (-10 - 16 + 15) = 57.$$

Об'єм трикутної піраміди:

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}) \cdot \overrightarrow{A_1A_4}| = \frac{57}{6} = 9,5 \text{ (од.}^3\text{)};$$

б) обчислимо косинус кута  $\varphi$  між векторами  $\overrightarrow{A_1A_2}$  і  $\overrightarrow{A_1A_3}$ :

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}}{|\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_3}|} = \frac{-1 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-2) + 5 \cdot 5}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 5^2}} = \frac{28}{15\sqrt{6}};$$

в) рівняння площини, що проходить через пряму  $A_1A_2$  і точку  $A_4$ , знайдемо як рівняння площини, що проходить через 3 задані точки:

$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_4(x_4, y_4, z_4)$ :

$$(\overrightarrow{A_1M} \times \overrightarrow{A_1A_2}) \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x-7 & y-7 & z-3 \\ -1 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (x-7) \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - (y-7) \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = \\ = 12(x-7) + 3(y-7) + 5(z-3) = 12x + 3y + 5z - 120 = 0.$$

Рівняння площини, що проходить через пряму  $A_1A_2$  і точку  $A_4$ :

$$12x + 3y + 5z - 120 = 0;$$

- г) рівняння висоти піраміди, опущеної з точки  $A_3$  на площину  $A_1A_2A_4$ , знайдемо як рівняння прямої, що проходить через точку  $A_3(3, 5, 8)$  паралельно вектору нормалі  $\vec{n} = (12, 3, 5)$  до площини  $A_1A_2A_4$ :

$$\frac{x-3}{12} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-8}{5}. \blacksquare$$

3. Дані вершини трикутника  $A(1; 2)$ ,  $B(2; -2)$ ,  $C(6; 1)$ . Скласти рівняння сторони  $AB$ , висоти  $CH$ , медіани  $BM$  (рис. 1).

► Рівняння сторони  $AB$  знайдемо за формулою:

$$AB: \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}, \quad \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{-2-2}, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-4}, \quad 4x + y - 6 = 0.$$

Висота  $CH$  проходить через точку  $C(6; 1)$ , перпендикулярно до прямої  $AB$  (паралельно вектору  $\vec{a}_{CH} = \vec{n}_{AB} = (4, 1) = (l, m)$ ). Її рівняння:

$$CH: \frac{x-x_C}{l} = \frac{y-y_C}{m}, \quad \frac{x-6}{4} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow x - 4y - 2 = 0.$$

Точка  $M$  поділяє сторону  $AC$  навпіл, тому її координати

$$x_M = (x_A + x_C)/2 = (1+6)/2 = 3,5; \quad y_M = (y_A + y_C)/2 = (2+1)/2 = 1,5.$$

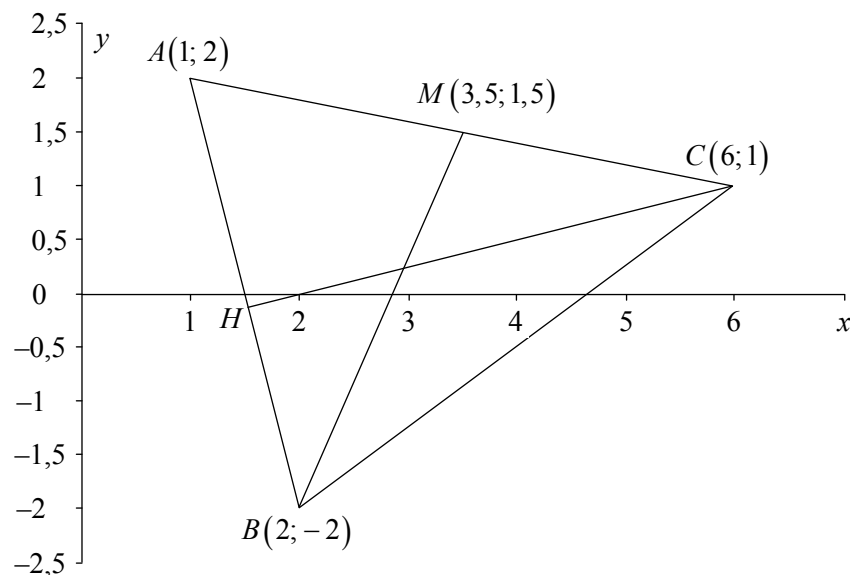


Рис. 1

Рівняння медіани  $BM$ :

$$\frac{x - x_B}{x_M - x_B} = \frac{y - y_B}{y_M - y_B}, \quad \frac{x - 2}{3,5 - 2} = \frac{y + 2}{1,5 + 2}, \quad 7x - 3y - 20 = 0. \blacksquare$$

4. Скласти рівняння траєкторії точки  $M(x; y)$ , яка при своєму русі залишається втричі ближче до точки  $A(1; 0)$ , ніж до прямої  $x = 9$ .

► Проведемо з точки  $M(x; y)$  перпендикуляр  $MK$  до прямої  $x = 9$  (рис. 2). Знайдемо відстані від точки  $M(x, y)$  до точок  $A(1; 0)$  і  $K(9; y)$ :

$$AM = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \quad KM = \sqrt{(x-9)^2 + (y-y)^2} = |x-9|.$$

За умовою:

$$\begin{aligned} 3AM = KM &\Rightarrow 3\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x-9|, \\ 9(x^2 - 2x + 1) + 9y^2 &= x^2 - 18x + 81 \Rightarrow 8x^2 + 9y^2 = 72 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1. \end{aligned}$$

У системі координат  $xOy$  отримали канонічне рівняння еліпса з півсями  $a = 3$ ,  $b = 2\sqrt{2}$  (рис. 2). ■

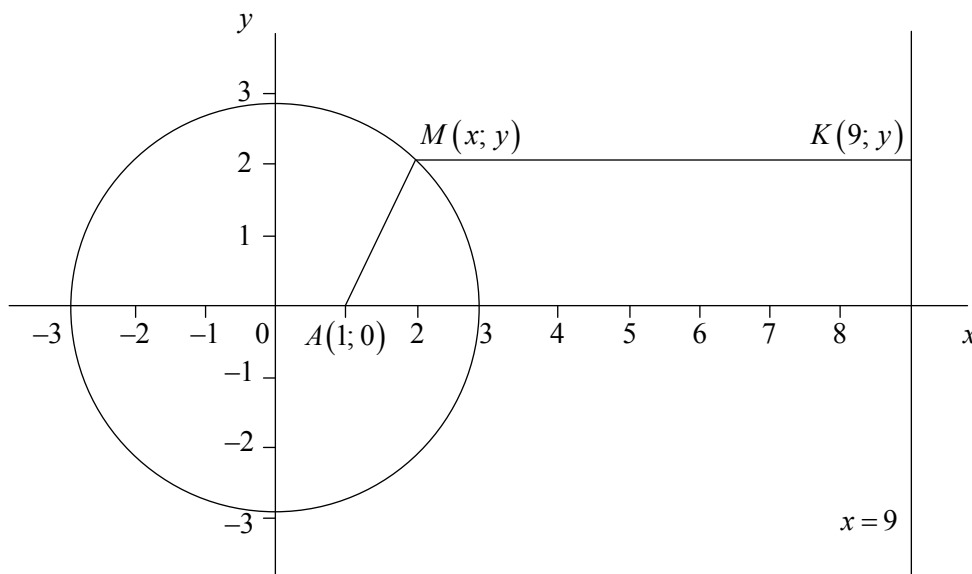


Рис. 2

# ПІДГОТОВКА ДО 2-Ї МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Нижче наведено перелік розділів, які увійшли у другу модульну контрольну роботу, посилання на літературу для підготовки, список питань для самоперевірки, зразок варіанта модульної контрольної роботи і приклад її розв'язання.

## 2. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

### 2.1. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

*Література:* [1, розділ 5]; [2, розділ 4, п. 4.1, 4.2]; [3, розділ 3, п. 3.3, 3.4]; [4, розділ 2, глава 6, п. 6.1–6.6]; [5, глава 6, § 4, 5]; [8, розділ 1, п. 1.1–1.3]; [11, розділ 1, п. 1.1–1.7]; [13, розділ 2, п. 2.1]; [16, розділ 4, § 11, 12]; [18, розділ 1; розділ 2, § 1–3]; [19, розділ 5].

#### *Питання для самоперевірки*

##### 2.1.1. Функція однієї змінної

1. Сформулюйте означення функції.
2. Сформулюйте означення області визначення функції.
3. Які існують способи задання функції?
4. Яка функція називається парною (непарною)? Які види симетрії вона має?
5. Яка функція називається періодичною? Наведіть приклади.
6. Яка функція називається монотонною?
7. Яка функція називається обмеженою зверху (знизу), обмеженою?
8. Яка функція називається складною?
9. Назвіть основні елементарні функції.

##### 2.1.2. Послідовності

1. Сформулюйте означення числової послідовності.
2. Яка послідовність називається обмеженою зверху (знизу), обмеженою?
3. Яка послідовність називається зростаючою, спадною, незростаючою, неспадною?
4. Сформулюйте означення границі послідовності.
5. Яка послідовність називається збіжною (розбіжною)?
6. Сформулюйте основні теореми про границі послідовностей.
7. Яка послідовність називається нескінченно малою (нескінченно великою)?
8. Нехай послідовність  $\{x_n\}$  збіжна, а послідовність  $\{y_n\}$  – розбіжна. Що можна сказати про збіжність послідовностей  $\{x_n + y_n\}$ ,  $\{x_n \cdot y_n\}$ ?

### 2.1.3. Границя функції

1. Сформулюйте означення границі функції при  $x \rightarrow x_0$  і  $x \rightarrow \infty$ .
2. Сформулюйте означення лівосторонньої та правосторонньої границі функції у точці  $x_0$ .
3. Сформулюйте основні теореми про границі функції.
4. Яка функція називається нескінченно малою? Наведіть її властивості.
5. Яка функція називається нескінченно великою? Наведіть її властивості.
6. Як зв'язані нескінченно малі та нескінченно великі функції?
7. Як порівняти дві нескінченно малі функції?
8. Запишіть першу та другу визначні границі.
9. Знайдіть границі ( $m, n$  – натуральні числа):

а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n} \right)$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$ ;

є)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - x \right)$ ;

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right)$ .

Доведіть, що при  $x \rightarrow 0$ :

а)  $2x - x^2 = O(x)$ ;

б)  $x \cdot \sin \sqrt{x} = O(x^{3/2})$ ;

в)  $\arcsin x \sim x$ ;

г)  $1 - \cos x \sim x^2/2$ ;

д)  $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim x/3$ ;

е)  $e^x - 1 \sim x$ ;

є)  $\ln(1+x) \sim x$ ;

ж)  $\operatorname{tg} x - \sin x \sim x^3/2$ .

### 2.2. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

*Література:* [1, розділ 5, п. 5.3]; [2, розділ 4, п. 4.3]; [3, розділ 3, п. 3.5]; [4, розділ 2, глава 6, п. 6.7, 6.8]; [5, глава 6, § 6]; [8, розділ 1, п. 1.9]; [11, розділ 1, п. 1.8]; [13, розділ 2, п. 2.2]; [16, розділ 4, § 13]; [18, розділ 2, § 4, 5]; [19, розділ 5].

#### *Питання для самоперевірки*

1. Сформулюйте декілька означень неперервності функції у точці.
2. Наведіть властивості неперервних у точці функцій.
3. Сформулюйте означення односторонньої неперервності функції у точці.

4. Сформулюйте означення точок розриву функції та наведіть їх класифікацію.
5. Сформулюйте означення неперервної на відрізку функції.
6. Наведіть основні властивості неперервних на відрізку функцій.
7. Як до визначити функцію  $f(x)$  при  $x = 0$ , щоб вона була неперервною, якщо:

а)  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$ ;

б)  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$ ;

в)  $f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$ ;

г)  $f(x) = (1+x)^{1/x}$ .

8. З'ясуйте характер точок розриву та побудуйте графіки функцій:

а)  $y = \frac{1+x}{1+x^3}$ ;

б)  $y = e^{x+\frac{1}{x}}$ ;

в)  $y = \frac{1}{\ln x}$ ;

г)  $y = \frac{1}{1 - e^{x/(x-1)}}$ .

### 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

#### 3.1. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

*Література:* [1, розділ 6, п. 6.1–6.5]; [2, розділ 5, п. 5.1–5.3]; [3, розділ 4, п. 4.1–4.2]; [4, розділ 3, глава 7]; [5, глава 7, § 1]; [8, розділ 2, п. 2.1–2.11]; [11, розділ 2, п. 2.1–2.11]; [13, розділ 3, п. 3.1]; [14]; [16, розділ 6, § 16–18]; [18, розділ 3, § 1–4, 8]; [19, розділ 6, п. 6.1–6.4].

#### *Питання для самоперевірки*

1. Сформулюйте означення похідної.
2. Сформулюйте геометричний, механічний та економічний зміст похідної
3. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції.
4. Наведіть правила диференціювання. Як обчислюється похідна складеної функції, похідна оберненої функції?
5. Запишіть таблицю похідних.
6. У чому полягає метод логарифмічного диференціювання? Коли він використовується?
7. Запишіть формулу похідної функції, що задана параметрично.
8. Що називається похідною  $n$ -го порядку?
9. Сформулюйте властивості похідних вищого порядку.
10. Що означає диференційовність функції?
11. Що називається диференціалом?
12. Який геометричний зміст має диференціал функції?



13. Чи може диференціал функції в даній точці бути сталою величиною?
14. Сформулюйте властивість інваріантності диференціала першого порядку.
15. Для яких функцій диференціал дорівнює приросту функції? Наведіть приклади.
16. Що називається диференціалом  $n$ -го порядку?
17. Сформулюйте властивості диференціалів вищого порядку.
18. Які точки називаються точками екстремуму?
19. Сформулюйте основні теореми диференціального числення (теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші).
20. Сформулюйте правило Лопіталя.
21. Знайдіть границі за правилом Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \cdot \ln \frac{2+x}{1+x} \right);$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos 2x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{2}{x} \right)^x.$$

22. Запишіть формули Тейлора, Маклорена.
23. Які існують форми залишкового члена у формулі Тейлора?
24. Запишіть формули Тейлора (Маклорена) для основних елементарних функцій.
25. Функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$ . Чи має вона похідну в кожній точці цього відрізка? Якщо так – доведіть, якщо ні – наведіть приклад.
26. Функція  $f(x)$  визначена та диференційовна на відрізку  $[a, b]$ . Чи є неперервною похідна  $f'(x)$  на  $[a, b]$ ? Якщо так – доведіть, якщо ні – наведіть приклад.
27. Знайдіть похідну  $n$ -го порядку  $y^{(n)}$ , якщо:
  - а)  $y = \ln(1+x)$ ;
  - б)  $y = x^2 \cdot e^x$ .
28. Виведіть формулу для похідної  $n$ -го порядку від добутку двох функцій (формулу Лейбніца).
29. Виведіть формули для похідної від добутку трьох і чотирьох функцій.
30. Побудуйте графік функції  $y = x^{2/3}$  і її похідної.
31. Чи можна в теоремі Ролля відмовитися від неперервності функції на кінцях відрізка  $[a, b]$  або від умови  $f(a) = f(b)$ ?

32. У декартовій системі координат задані параметричні рівняння кривої:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . Який напрям має вектор

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}?$$

### 3.2. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ І ПОБУДОВИ ГРАФІКІВ

*Література:* [1, розділ 6, п. 6.6, 6.7]; [2, розділ 5, п. 5.5–5.8]; [3, розділ 4, п. 4.3]; [5, глава 7, § 2]; [8, розділ 2, п. 2.12, 2.16]; [11, розділ 2, п. 2.12, 2.16]; [13, розділ 4, п. 4.1]; [14]; [16, розділ 6, § 20, 21]; [17, розділ 3, глава 8]; [18, розділ 3, § 5, 9, 11]; [19, розділ 6, п. 6.6–6.8].

#### *Питання для самоперевірки*

1. Яка функція називається зростаючою (спадною) на деякому проміжку?
2. При яких  $a$  функція  $y = a \cdot 3^x + (a - 2) \cdot 9^x + 3$  зростає на всій числовій осі?
3. Сформулюйте необхідну та достатню умови екстремуму.
4. Знайдіть проміжки монотонності та екстремуми функції:
  - а)  $y = x^{1/3}(1 - x)^{2/3}$ ;
  - б)  $y = x^3\sqrt{x - 1}$ ;
  - в)  $y = |x|e^{-|x-1|}$ .
5. Як знайти найбільше та найменше значення диференційовної функції на відрізку?
6. Знайдіть найменше та найбільше значення функцій:
  - а)  $y = |x^2 - 3x + 2|$  на відрізку  $[-10, 10]$ ;
  - б)  $y = x + \frac{1}{x}$  на відрізку  $\left[\frac{1}{100}, 100\right]$ .
7. Яка крива називається опуклою (вгнутою) в деякій точці, на деякому проміжку?
8. Яка точка називається точкою перегину?
9. Сформулюйте необхідну та достатню умови існування точок перегину.
10. Що називається асимптотою графіка функції?
11. Які види асимптот існують і як вони визначаються?
12. Які етапи входять до складу схеми дослідження функції?
13. Наведіть приклади застосування похідної в економіці.
14. Що називається еластичністю функції?

## 4. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

### 4.1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

*Література:* [1, розділ 8, п. 8.1, 8.2]; [3, розділ 6, п. 6.1]; [4, розділ 4, глава 10]; [5, глава 9]; [8, розділ 1]; [11, розділ 1]; [13, розділ 5, п. 5.1]; [15]; [16, розділ 7, § 22]; [18, розділ 4]; [20, розділ 8].

#### *Питання для самоперевірки*

1. Сформулюйте означення первісної й невизначеного інтеграла.
2. Сформулюйте основні властивості невизначеного інтеграла.
3. Запишіть таблицю інтегралів.
4. Як можна перевірити правильність результату інтегрування?
5. Запишіть формулу заміни змінної для невизначеного інтеграла.
6. Потрібно знайти  $\int \sqrt{4-x^2} dx$  для  $-2 \leq x \leq 2$ . Яка з наступних підстановок припустима для обчислення цього інтеграла:
  - а)  $x = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi/2$ ;
  - б)  $x = 2 \sin t, -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ ;
  - в)  $x = 2 \cos t, 0 \leq t \leq \pi/2$ ;
  - г)  $x = 2 \cos t, \pi \leq t \leq 2\pi$ ?
7. Запишіть формулу інтегрування частинами для невизначеного інтеграла.
8. Наведіть приклади інтегралів, для обчислення яких застосовується формула інтегрування частинами.
9. Який вигляд мають прості раціональні дроби 1–4 типів?
10. Як інтегруються дроби 1–3 типів?
11. Перелічіть послідовність дій при інтегруванні функцій, що містять квадратний тричлен.
12. Сформулюйте теорему про розклад многочлена на множники.
13. Сформулюйте теорему про розклад правильного раціонального дроби на прості дроби.
14. Запишіть універсальну тригонометричну підстановку.
15. Які підстановки використовуються для обчислення інтегралів:
  - а)  $\int \sin^m x \cos^{2n+1} x dx$ ;
  - б)  $\int \sin^{2m+1} x \cos^n x dx$ ;
  - в)  $\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$ ;
  - г)  $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ ?

## 4.2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

*Література:* [1, розділ 8, п. 8.2, 8.3]; [3, розділ 6, п. 6.2]; [5, глава 10, § 1–5]; [8, розділ 2, п. 2.1–2.7]; [11, розділ 2, п. 2.1–2.7]; [13, розділ 6, п. 6.1]; [15]; [16, розділ 7, § 23, 24]; [17, розділ 4, глава 11, п. 11.1–11.6]; [18, розділ 5, § 1–4]; [20, розділ 9].

### *Питання для самоперевірки*

1. Сформулюйте означення визначеного інтеграла, його геометричний та економічний зміст.
2. Наведіть властивості визначеного інтеграла.
3. Який геометричний зміст має визначений інтеграл зі змінною верхньою межею?
4. Чому дорівнює похідна інтеграла зі змінною верхньою межею?
5. Запишіть і доведіть формулу Ньютона – Лейбніца.
6. Запишіть формулу заміни змінної для визначеного інтеграла.
7. Запишіть формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла.
8. За якими формулами обчислюється площа плоскої фігури?
9. За якою формулою обчислюється об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі  $Ox$  ( $Oy$ )?
10. За якими формулами обчислюється довжина дуги плоскої кривої, що задана рівняннями у декартовій формі і параметрично?
11. Доведіть, що для неперервної на  $[-a, a]$  функції  $f(x)$  існують формули:

$$\text{а) } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \text{ якщо } f(x) \text{ – парна;}$$

$$\text{б) } \int_{-a}^a f(x) dx = 0, \text{ якщо } f(x) \text{ – непарна.}$$

12. Знайдіть середні значення функції  $f(x)$ :

$$\text{а) } f(x) = x^2 \text{ на } [0, 1];$$

$$\text{б) } f(x) = \sqrt{x} \text{ на } [0, 100].$$

## 4.3. НЕВЛАСТИВІ ІНТЕГРАЛИ

*Література:* [1, розділ 8, п. 8.5]; [3, розділ 6, п. 6.4]; [4, розділ 4, глава 11, п. 11.7]; [5, глава 10, § 2]; [8, розділ 2, п. 2.8]; [11, розділ 2, п. 2.8]; [13, розділ 7, п. 7.1]; [15]; [16, розділ 7, § 23]; [18, розділ 5, § 6]; [20, розділ 9, п. 9.2].

### Питання для самоперевірки

1. Які інтеграли називаються невластивими?
2. Сформулюйте ознаки порівняння для невластивих інтегралів.
3. Знайдіть середні значення на інтервалі  $(0, +\infty)$  для функцій:
  - а)  $f(x) = \arctg x$ ;
  - б)  $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(\sqrt{2}x)$ .

### ЗРАЗОК ВАРІАНТА МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 2

1. Знайдіть границі, не користуючись правилом Лопітала:
  - а)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 5x + 6}$ ;
  - б)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 + 7x^2 - 1}{3x^3 - x^2 + 5}$ ;
  - в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 5}{2x + 4} \right)^{3x-2}$ ;
  - г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x - \sin 3x}$ .
2. Знайдіть похідну  $y'$ :
  - а)  $y = \sqrt[5]{(3x + 4)^2} \arcsin 7x^2$ ;
  - б)  $y = (\sin 3x)^{\cos(5x+4)}$ .
3. Обчисліть інтеграл:  $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2 + 3 \cos 2x}} dx$ .
4. Обчисліть площу фігури, обмежену лініями  $y = -x^4$ ;  $y = x^2 - 2x$ .
5. Обчисліть невластиві інтеграли:
  - а)  $\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$ ;
  - б)  $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}}$ .

### ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 2

1. Знайдіть границі, не користуючись правилом Лопітала:
  - а)  $\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 5x + 6} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-4}{x+2} = 7$ ; ■
  - б)  $\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 + 7x^2 - 1}{3x^3 - x^2 + 5} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^4}}{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^4}} = \left( \frac{5}{-0} \right) = -\infty$ ; ■

в) ► застосуємо другу визначну границю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= (1^\infty) = e. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+4}\right)^{3x-2} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x-5}{2x+4} - 1\right)^{3x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-9}{2x+4}\right)^{3x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-9}{2x+4}\right)^{(2x+4)/(-9)}\right]^{\frac{-9(3x-2)}{2x+4}} = e^{-9 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-(2/x)}{2+(4/x)}} = e^{-27/2}; \blacksquare \end{aligned}$$

г) ► застосуємо першу визначну границю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \left(\frac{0}{0}\right) = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x - \sin 3x} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-2 \sin x \cos 2x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right) \left(\frac{1}{\cos 2x}\right) = -1. \blacksquare \end{aligned}$$

2. Знайдіть похідну  $y'$ :

а)  $y = \sqrt[5]{(3x+4)^2} \arcsin 7x^2$ ;      б)  $y = (\sin 3x)^{\cos(5x+4)}$ .

а) ►  $y = \sqrt[5]{(3x+4)^2} \arcsin 7x^2 = (3x+4)^{2/5} \cdot \arcsin 7x^2$ .

$$\begin{aligned} y' &= \left((3x+4)^{2/5}\right)' \cdot \arcsin 7x^2 + (3x+4)^{2/5} \cdot (\arcsin 7x^2)' = \\ &= \frac{2}{5}(3x+4)^{(2/5)-1} (3x+4)' \cdot \arcsin 7x^2 + (3x+4)^{2/5} \cdot \frac{(7x^2)'}{\sqrt{1-(7x^2)^2}} = \\ &= \frac{6}{5}(3x+4)^{-3/5} \cdot \arcsin 7x^2 + (3x+4)^{2/5} \cdot \frac{14x}{\sqrt{1-49x^4}}; \blacksquare \end{aligned}$$

б) ►  $y = (\sin 3x)^{\cos(5x+4)}$ . Застосуємо формулу логарифмічної похідної:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot [\ln |f(x)|]'. \\ y' &= y \cdot \left[\ln |(\sin 3x)^{\cos(5x+4)}|\right]' = y \cdot [\cos(5x+4) \cdot \ln |\sin 3x|]' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y \cdot \left[ (\cos(5x+4))' \cdot \ln|\sin 3x| + \cos(5x+4) \cdot (\ln|\sin 3x|)' \right] = \\
&= y \cdot \left[ -5 \sin(5x+4) \ln|\sin 3x| + \cos(5x+4) \frac{3 \cos 3x}{\sin 3x} \right] = \\
&= (\sin 3x)^{\cos(5x+4)} \left[ 3 \cos(5x+4) \operatorname{ctg} 3x - 5 \sin(5x+4) \ln|\sin 3x| \right]. \blacksquare
\end{aligned}$$

3. Обчисліть інтеграл:

$$\begin{aligned}
\blacktriangleright \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2+3 \cos 2x}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = 2 + 3 \cos 2x \\ dt = -6 \sin 2x dx \end{array} \right\} = -\frac{1}{6} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\
&= -\frac{1}{6} \int t^{-1/2} dt = -\frac{1}{3} \sqrt{t} + C = -\frac{1}{3} \sqrt{2+3 \cos 2x} + C. \blacksquare
\end{aligned}$$

4. Обчисліть площу фігури, обмежену лініями  $y = -x^4$ ;  $y = x^2 - 2x$  (рис. 3).

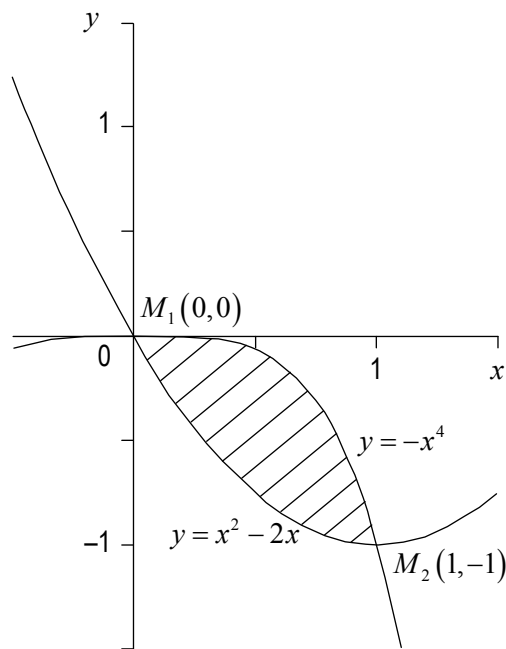


Рис. 3

► Знайдемо координати точок перетину кривих. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y = -x^4, \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x^4, \\ x^4 + x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x^4, \\ x(x^3 + x - 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = -1. \end{cases} \Rightarrow M_1(0, 0), M_2(1, -1).$$

Якщо фігура обмежена двома неперервними кривими  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  і прямими  $x = a$ ,  $x = b$ , причому  $f_2(x) \geq f_1(x)$  для всіх  $x \in [a, b]$ , то площа фігури визначається за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Застосовуючи цю формулу, одержимо:

$$S = \int_0^1 [-x^4 - x^2 + 2x] dx = \left( -\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{15} \text{ (од.}^2\text{)}. \blacksquare$$

5. Обчисліть невластиві інтеграли:

а)  $\int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 4}};$

б)  $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}}.$

а)  $\blacktriangleright \int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + 4 \quad x = 0, t = 0 \\ dt = 2xdx \quad x = a, t = a^2 + 4 \end{array} \right\} =$   
 $= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \int_{a^2+4}^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \sqrt{t} \Big|_{a^2+4}^0 = - \lim_{a \rightarrow -\infty} \sqrt{a^2 + 4} = -\infty.$

Отже, інтеграл розбігається.  $\blacksquare$

б)  $\blacktriangleright \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\sqrt{2}-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}-\varepsilon} =$   
 $= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \arcsin \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right) - \arcsin 0 \right] = \frac{\pi}{2}.$

Інтеграл збігається.  $\blacksquare$



## ПІДГОТОВКА ДО ІСПИТУ

Нижче наведено методичні рекомендації щодо підготовки до іспиту, перелік питань, які виносяться на іспит, зразок екзаменаційного білета і приклад відповіді на питання білета.

### МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ПІДГОТОВКИ ДО ІСПИТУ

Основна робота щодо вивчення дисципліни повинна бути виконана студентами до екзаменаційної сесії. Вивчаючи курс вищої математики, необхідно керуватися програмою. Не можна обмежуватися вивченням лише тих питань теорії, які безпосередньо винесені на іспит.

Студент повинен пам'ятати, що тільки при систематичній і наполегливій самостійній роботі можна досягти успіхів.

Важливе значення для ефективного вивчення курсу має система контролю знань, виявлення рівнів навченості студентів, оцінювання їхньої активності й наполегливості у досягненні навчальних цілей.

За програмою курсу передбачено складання іспиту в I та II семестрах.

Необхідною умовою допуску до іспиту (наприкінці семестру) є успішне виконання всіх передбачених програмою видів робіт у семестрі.

На іспиті перевіряється насамперед чітке засвоєння теоретичних і практичних питань програми, вміння застосовувати отримані знання до розв'язання практичних задач. Означення, теореми, правила повинні формулюватися точно; задачі повинні розв'язуватися без помилок і впевнено; екзаменаційна письмова робота повинна бути акуратною і чіткою. Тільки при виконанні цих умов знання можуть бути визнані такими, що відповідають вимогам програми курсу.

При підготовці до іспиту навчальний матеріал рекомендуємо повторювати за підручником і конспектом.

#### **Робота з підручником (конспектом лекцій)**

Вивчаючи матеріал за підручником (конспектом), слід переходити до наступного питання тільки після правильного розуміння попереднього.

Особливу увагу слід звернути на означення основних понять курсу. Студент повинен досконало розібрати приклади, які пояснюють дані означення, і скласти аналогічні приклади самостійно.

Необхідно пам'ятати, що кожна теорема складається з припущення і твердження. Всі припущення обов'язково повинні використовуватися при доведенні. Корисно складати схеми доведення складних теорем.

При вивченні теоретичного матеріалу корисно виписувати означення, формулювання теорем, формули, рівняння та ін. Досвід показує,

що багатьом студентам допомагає в роботі складання листа, який містить найважливіші формули курсу. Такий лист не тільки допомагає запам'ятати формули, але й може служити постійним довідником для студента.

### **Розв'язання задач**

Робота з підручником (конспектом) повинна супроводжуватися розв'язанням задач, для чого рекомендуємо завести спеціальний зошит.

При розв'язанні задач потрібно пояснювати кожний етап розв'язання, виходячи із теоретичних положень курсу. Якщо студент бачить декілька способів для розв'язання задачі, то він повинен порівняти їх і вибрати з них більш раціональний. Необхідно до початку обчислень скласти короткий план розв'язку задачі.

Розв'язання кожної задачі повинно доводитися до кінцевої відповіді, якої вимагає умова.

### **Самоперевірка**

Після вивчення певної теми за підручником і розв'язання достатньої кількості відповідних задач рекомендуємо студенту відтворити по пам'яті означення, виведення формул, формулювання і доведення теорем, перевіряючи себе кожний раз за підручником (конспектом). Питання для самоперевірки, наведені в даному посібнику, мають допомогти студенту в такому повторенні, закріпленні і перевірці якості засвоєння вивченого матеріалу. За необхідності треба ще раз уважно розібратися в матеріалі підручника (конспекту), порозв'язувати задачі.

Інколи недостатнє засвоєння того чи іншого питання виявляється тільки при вивченні наступного матеріалу. У цьому випадку потрібно повернутися назад і повторити недостатньо засвоєний розділ.

Важливим критерієм засвоєння теорії є вміння розв'язувати задачі з вивченого матеріалу. Однак слід застерегти студентів від дуже розповсюдженої помилки, яка полягає в тому, що успішне розв'язання задач сприймається ними як ознака засвоєння теорії. Часто правильне розв'язання задачі можна отримати в результаті використання механічно завчених формул, без розуміння суті питання. Можна сказати, що вміння розв'язувати задачі є необхідною, але недостатньою умовою якісного знання теорії.

Екзаменаційні білети складаються з питань і задач, що входять у загальний список (базу даних предмета). Усі типи завдань бази даних є у навчальному посібнику для самостійного вивчення дисципліни “Вища математика для економістів”, ч. 1 “Алгебра та математичний аналіз” [17], ч. 2 “Теорія ймовірностей та математична статистика” [23].

Кожний білет складається з шести завдань (2 теоретичні питання і 4 задачі), які охоплюють майже всі розділи курсу, вивчені в семестрі. Оскільки на іспит з математики відводиться лише три академічні години (135 хв.), то завдання білета складено так, щоб кожне з них підготовлений студент міг виконати в середньому за 20 хвилин.

### ПИТАННЯ ДО ІСПИТУ (І СЕМЕСТР)

1. Матриці. Види матриць. Дії над матрицями (додавання, віднімання, множення на число). Рівність матриць.
2. Добуток матриць. Запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь у матричному вигляді.
3. Визначник, мінор, алгебраїчне доповнення. Властивості визначників. Теорема про розкладання визначника за елементами рядка (стовпця). Обчислення визначників 2-го, 3-го і  $n$ -го порядків.
4. Ранг матриці. Елементарні перетворення матриці. Способи обчислення рангу.
5. Обернена матриця. Способи обчислення оберненої матриці. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці (матричним методом).
6. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою формул Крамера.
7. Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь ( $m$  рівнянь із  $n$  невідомими). Теорема Кронекера – Капеллі. Базисні і вільні невідомі.
8. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса.
9. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Жордана – Гаусса.
10. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Їхнє нетривіальне розв'язання.
11. Вектор, проекція вектора на вісь. Лінійні операції над векторами (геометрично й у координатній формі). Поділ відрізка в даному відношенні.
12. Лінійна залежність і незалежність векторів. Базис, розкладання вектора за базисом. Проекції і координати вектора.
13. Скалярний добуток векторів і його властивості. Модуль вектора, кут між векторами, напрямні косинуси вектора. Необхідна і достатня умови перпендикулярності двох векторів.
14. Векторний добуток векторів і його алгебраїчні та геометричні властивості.
15. Мішаний добуток векторів і його властивості. Обчислення об'ємів паралелепіпеда, призми, пірамід. Необхідна і достатня умови компланарності 3 векторів.

16. Пряма на площині. Рівняння прямої: векторне, загальне, з кутовим коефіцієнтом, у відрізках, що проходить через 2 задані точки.
17. Нормальне рівняння прямої на площині. Зведення загального рівняння прямої до нормального вигляду. Відстань від точки до прямої.
18. Кут між двома прямими. Умови паралельності й перпендикулярності прямих.
19. Еліпс. Канонічне рівняння еліпса. Ексцентриситет, фокуси. Основна властивість.
20. Гіпербола. Канонічне рівняння, ексцентриситет, фокуси, асимптоти, основна властивість.
21. Парабола. Канонічне рівняння, директриса. Основна властивість параболи.
22. Площина. Векторне і загальне рівняння площини.
23. Рівняння площини, що проходить через 3 задані точки, рівняння у відрізках.
24. Нормальне рівняння площини. Зведення загального рівняння площини до нормального вигляду. Відстань від точки до площини.
25. Кут між двома площинами. Умови паралельності й перпендикулярності площин.
26. Канонічні і параметричні рівняння прямої у просторі. Кут між прямими у просторі. Умови паралельності й перпендикулярності прямих.
27. Кут між прямою й площиною. Умови паралельності й перпендикулярності прямих і площин.
28. Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки в  $R^3$ . Рівняння прямої як лінії перетину 2 площин. Перехід до канонічних рівнянь прямої.
29. Функція однієї змінної, означення, способи задання. Основні елементарні функції і їхні графіки.
30. Деякі типи функцій: монотонно зростаючі (спадаючі), обмежені і необмежені, парні і непарні, періодичні.
31. Границя функції в точці і на нескінченності. Геометричний зміст. Одnobічні границі.
32. Нескінченно малі і нескінченно великі функції, зв'язок між ними, основні властивості.
33. Основні теореми про границі.
34. Порівняння нескінченно малих функцій. Еквівалентні нескінченно малі функції.
35. Перша визначна границя (довести). Друга визначна границя. Число  $e$ .
36. Неперервність функції у точці (означення). Одnobічна неперервність. Властивості неперервних у точці функцій.
37. Класифікація точок розриву функції.

38. Властивості неперервних на відрізку функцій.
39. Похідна функції, її геометричний і механічний зміст. Однобічні похідні. Необхідна умова існування похідної.
40. Основні правила обчислення похідних (похідна суми, різниці, добутку і частки). Похідна складеної функції.
41. Похідні елементарних функцій. Таблиця похідних.
42. Похідна оберненої функції. Похідні функцій  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctg x$ ,  $\operatorname{arccotg} x$ .
43. Логарифмічна похідна. Похідні функцій  $x^\alpha$ ,  $a^x$ ,  $u^v$ .
44. Похідні функцій, заданих неявно і параметрично.
45. Похідні вищих порядків.
46. Диференціал функції, його геометричний зміст. Диференціал суми, різниці, добутку і частки.
47. Похідні і диференціали вищих порядків функцій, заданих явно, неявно і параметрично.
48. Теорема Ферма, Ролля, Лагранжа і їхня геометрична інтерпретація.
49. Теорема Коші. Правило Лопіталя. Розкриття невизначеностей.
50. Локальний екстремум, монотонність. Дослідження за допомогою похідної 1-го порядку.
51. Найменше і найбільше значення функції, неперервної на відрізку.
52. Дослідження функції на опуклість, угнутість. Точки перегину.
53. Асимптоти графіка функції.
54. Первісна і невизначений інтеграл. Основні означення та властивості. Таблиця інтегралів.
55. Заміна змінної у невизначеному інтегралі.
56. Формула інтегрування частинами для невизначеного інтеграла.
57. Інтегрування функцій виду:

$$\text{а) } \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx;$$

$$\text{б) } \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

58. Інтегрування простих дробів I і II типів.
59. Інтегрування простого дроби III типу.
60. Розкладання дробово-раціональної функції на прості дроби.
61. Інтегрування ірраціональних функцій виду:

$$\int R \left[ x, (ax + b)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, (ax + b)^{\frac{m_k}{n_k}} \right] dx.$$

62. Застосування універсальної тригонометричної підстановки для обчислення інтегралів виду  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ .

63. Обчислення інтегралів виду  $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ .
64. Обчислення інтегралів виду  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ .
65. Обчислення інтегралів виду  $\int R(\sin x) \cos x dx, \int R(\cos x) \sin x dx$ .
66. Визначений інтеграл (означення). Теорема існування. Геометричний зміст визначеного інтеграла.
67. Властивості визначеного інтеграла.
68. Похідна визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею.
69. Формула Ньютона – Лейбніца.
70. Заміна змінної у визначеному інтегралі.
71. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
72. Площа плоскої фігури, рівняння межі якої задано в декартових координатах і параметрично.
73. Площа криволінійного сектора.
74. Довжина дуги кривої, заданої в декартових координатах. Диференціал дуги.
75. Довжина дуги кривої, заданої параметрично й у полярній системі координат. Диференціал дуги.
76. Обчислення об'єму тіла за відомими площами його поперечних перерізів. Об'єм тіла обертання.
77. Невластиві інтеграли з нескінченними межами. Збіжність  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ . Теореми порівняння.
78. Невластиві інтеграли від розривних функцій. Збіжність  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ . Теореми порівняння.

### ЗРАЗОК ЕКЗАМЕНАЦІЙНОГО БІЛЕТА

- Кут між двома прямими на площині. Умови паралельності й перпендикулярності прямих.
- Обчислення інтегралів виду  $\int R(\sin x) \cos x dx, \int R(\cos x) \sin x dx$ .
- Дві сторони квадрата лежать на прямих

$$5x - 12y - 65 = 0, \quad 5x - 12y + 26 = 0.$$

Обчислити його площу.

- Знайти границю  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{4x + 1} - 3}$ .

5. Дослідити на екстремум функцію  $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ .
6. Знайти  $\int x \cos^2 x dx$ .

### ПРИКЛАД ВІДПОВІДІ НА ПИТАННЯ ЕКЗАМЕНАЦІЙНОГО БІЛЕТА

1. Кут між двома прямими на площині. Умови паралельності й перпендикулярності прямих.

► Нехай прямі задані загальними рівняннями:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + D_1 &= 0; \\ A_2x + B_2y + D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Тоді відомі вектори нормалей до прямих:

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1), \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2).$$

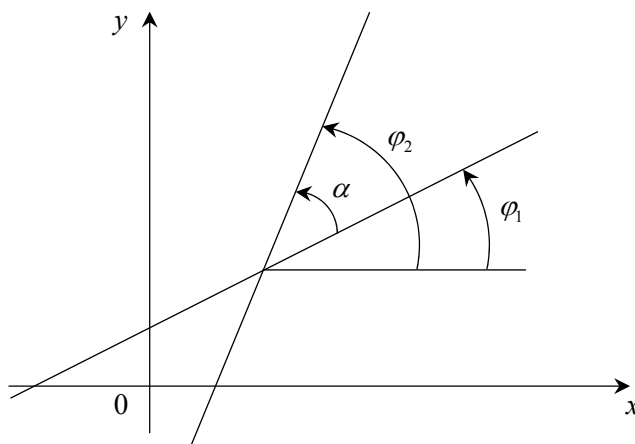
Косинус *гострого* кута  $\alpha$  між прямими дорівнює модулю косинуса кута між векторами нормалей до прямих:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Якщо прямі задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

$$y = k_1x + b_1; \quad y = k_2x + b_2, \quad (**)$$

то можна знайти тангенс кута  $\alpha$  між прямими (рис. 4):



**Рис. 4**

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (***)$$

Умови паралельності й перпендикулярності двох прямих.

Якщо прямі задані загальними рівняннями (\*), то умови паралельності отримаємо з умов колінеарності векторів нормалей до прямих:

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1) \parallel \vec{n}_2 = (A_2, B_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Умови паралельності прямих, що задані рівняннями (\*\*), знайдемо з умов рівності кутів нахилу прямих до осі  $Ox$ :

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2.$$

Умови перпендикулярності двох прямих, що задані загальними рівняннями (\*), отримаємо з умов перпендикулярності векторів нормалей до прямих:

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1) \perp \vec{n}_2 = (A_2, B_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0.$$

З формули (\*\*\*) отримаємо формулу для котангенса кута  $\alpha$  між прямими, що задані рівняннями (\*\*):

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}.$$

Якщо прямі взаємно перпендикулярні, то

$$\alpha = \pi/2 \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = 0 \Rightarrow 1 + k_1 k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = -1/k_1. \quad \blacksquare$$

2. Обчислення інтегралів виду  $\int R(\sin x) \cos x dx$ ,  $\int R(\cos x) \sin x dx$ .

► Дані інтеграли зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою таких підстановок:

$$\int R(\sin x) \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int R(t) dt,$$

$$\int R(\cos x) \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = -\int R(t) dt. \quad \blacksquare$$



3. Дві сторони квадрата лежать на прямих

$$5x - 12y - 65 = 0, \quad 5x - 12y + 26 = 0.$$

Обчислити його площу.

► Обидві прямі задані загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + D_1 = 0, \Rightarrow \vec{n}_1 = (A_1, B_1);$$

$$A_2x + B_2y + D_2 = 0, \Rightarrow \vec{n}_2 = (A_2, B_2).$$

Задані прямі є паралельними, оскільки пропорційні відповідні коефіцієнти при  $x$  та  $y$ :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow \frac{5}{5} = \frac{-12}{-12}.$$

Довжина сторони квадрата дорівнює відстані між цими паралельними прямими. Знайдемо точку  $M_1(x_1, y_1)$  на першій прямій і за формулою

$$|d| = \frac{|Ax_1 + By_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

обчислимо відстань від цієї точки до другої прямої.

Задамо одну з координат точки  $M_1$ , наприклад,  $y_1 = 0$ , а другу координату знайдемо із рівняння прямої:

$$\begin{cases} 5x_1 - 12y_1 - 65 = 0, \\ y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 13, \\ y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(13, 0).$$

Відстань від точки  $M_1(13, 0)$  до прямої  $5x - 12y + 26 = 0$ :

$$|d| = \frac{|Ax_1 + By_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5 \cdot 13 - 12 \cdot 0 + 26|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{91}{13} = 7.$$

Площа квадрата:  $S = d^2 = 49$  (од.<sup>2</sup>). ■

4. Знайти границю  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{4x+1} - 3}$ .

►  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{4x+1} - 3} = \left(\frac{0}{0}\right)$ . Помножимо чисельник і знаменник на вираз  $\sqrt{4x+1} + 3$ , спряжений до знаменника, і розкладемо чисельник на множники:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(\sqrt{4x+1})^2 - 3^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{4(x-2)} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+2x+4) = 3. \blacksquare \end{aligned}$$

5. Дослідити на екстремум функцію  $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ .

► Перетворимо функцію:

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2} = x + 4x^{-2}.$$

Область допустимих значень (ОДЗ) аргументу:  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

Знайдемо критичні точки першого роду (точки ОДЗ, у яких похідна першого порядку дорівнює нулю або не існує). Обчислимо першу похідну:

$$y' = 1 - 8x^{-3} = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 2^3}{x^3} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}.$$

Похідна дорівнює нулю при  $x = 2$  (стаціонарна точка) і не існує при  $x = 0 \notin \text{ОДЗ}$ .

Критична точка  $x = 2$  розбиває ОДЗ на 3 інтервали монотонності:  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; 2)$ ,  $(2; +\infty)$ . Для визначення знака похідної досить обчислити її у довільній точці інтервалу.

$$y'(-1) = 1 + 8 = 9 > 0, \quad y'(1) = 1 - 8 = -7 < 0, \quad y'(4) = 1 - 8/64 = 7/8 > 0.$$

На інтервалах  $(-\infty; 0), (2; +\infty)$  похідна додатна – функція монотонно зростає. На інтервалі  $(0, 2)$  похідна від’ємна – функція монотонно спадає.

При переході через критичну точку  $x = 2$  похідна змінює знак з “–” на “+”, тому у точці  $x = 2$  функція має локальний мінімум:

$$y_{\min} = y(2) = \frac{2^3 + 4}{2^2} = 3. \blacksquare$$

6. Знайти  $\int x \cos^2 x dx$ .

$$\blacktriangleright J = \int x \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int x(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left( \int x dx + \int x \cos 2x dx \right).$$

Перший інтеграл є табличним, а для обчислення другого інтеграла застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

$$\text{де } u = x, dv = \cos 2x dx \Rightarrow du = dx, v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

У результаті отримаємо:

$$J = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \right) = \frac{1}{4} \left( x^2 + x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C. \blacksquare$$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бугір, М. К. Математика для економістів [Текст] : посібник / М. К. Бугір. – К. : Академія, 2003. – 520 с.
2. Валеев, К. Г. Вища математика [Текст] : навч. посібник : у 2 ч. / К. Г. Валеев, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2001. – Ч. 1. – 546 с.
3. Валеев, К. Г. Математичний практикум [Текст] : навч. посібник / К. Г. Валеев, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2004. – 682 с.
4. Высшая математика для экономистов [Текст] / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.
5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд., испр. – М. : Высшая школа, 1997. – Ч. 1. – 304 с.
6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд., испр. – М. : Высшая школа, 1997. – Ч. 2. – 416 с.
7. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів. Ч. 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія [Текст] : навч. посібник : у 4 ч. / В. М. Долгіх ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2008. – 103 с.
8. Долгіх, В. М., Вища математика для економістів. Ч. 2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення [Текст] : навч. посібник : у 4 ч. / В. М. Долгіх, К. А. Дахер ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2008. – 76 с.
9. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів. Ч. 3. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди [Текст] : навч. посібник у 4 ч. / В. М. Долгіх, К. А. Дахер, Т. І. Малютіна ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2008. – 135 с.
10. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів. Ч. 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія [Текст] : практикум : у 4 ч. / В. М. Долгіх ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2009. – 124 с.
11. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів. Ч. 2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення [Текст] : практикум : у 4 ч. / В. М. Долгіх, К. А. Дахер ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2009. – 78 с.
12. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів. Ч. 3. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди [Текст] : практикум : у 4 ч. / В. М. Долгіх, К. А. Дахер, Т. І. Малютіна ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2009. – 129 с.

13. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів. Ч. 1. Алгебра та математичний аналіз [Текст] : навч. посібник для самостійного вивчення дисципліни : у 2 ч. / В. М. Долгіх, Т. І. Малютіна ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2009. – 97 с.
14. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів [Текст] : тести для контролю знань з диференціального числення функцій однієї змінної / В. М. Долгіх ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2010. – 20 с.
15. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів [Текст] : тести для контролю знань з інтегрального числення / В. М. Долгіх ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2010. – 22 с.
16. Дюженкова, Л. І. Вища математика. Приклади і задачі [Текст] : посібник / Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін. – К. : Академія, 2002. – 624 с.
17. Лиман, Ф. М. Вища математика [Текст] : навч. посібник / Ф. М. Лиман, В. Ф. Власенко, С. В. Петренко, О. В. Семеніхіна. – Суми : СумДПУ, 2003. – Ч. 2. – 392 с.
18. Лиман, Ф. М. Вища математика [Текст] : навч. посібник / Ф. М. Лиман, С. В. Петренко, О. О. Одинцова. – Суми : СумДПУ, 2002. – Ч. 1. – 224 с.
19. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст] : учеб. пособие : в 3 ч.; под общей редакцией А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 1. – 270 с.
20. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст] : учеб. пособие : в 3 ч. ; под общей редакцией А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 1991. – Ч. 2. – 352 с.

### **Додаткова література**

21. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов [Текст] / под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1978. – 470 с.
22. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії [Текст] / В. І. Діскант, Л. Р. Береза, О. П. Грижук, Л. М. Захаренко. – К. : Вища школа, 2001. – 303 с.
23. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст] / Д. В. Клетеник. – М. : Наука, 1972. – 240 с.
24. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике [Текст] / В. П. Минорский. – М. : Наука, 1987.
25. Тевяшов, А. Д. Высшая математика. Общий курс [Текст] : сборник задач и упражнений / А. Д. Тевяшов, А. Г. Литвин. – Харьков : ХТУРЭ, 1997. – 192 с.
26. Цубербиллер, О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии [Текст] / О. Н. Цубербиллер. – М. : Наука, 1970.

*Навчальне видання*

**Долгіх Володимир Миколайович**  
**Малютіна Таїсія Іванівна**

## **МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ**

Навчальний посібник щодо підготовки  
до поточного та підсумкового контролю

У 2 частинах

Частина 1

**Лінійна, векторна алгебра. Аналітична геометрія.**  
**Математичний аналіз**

Редагування *Г. М. Нужненко*

Технічне редагування *І. О. Кругляк*

Комп'ютерна верстка *В. А. Івакін*

Підписано до друку 30.12.2011. Формат 60x90/16. Гарнітура Times.  
Обл.-вид. арк. 2,04. Умов. друк. арк. 3,38. Зам. № 1109

Видавець і виготовлювач

Державний вищий навчальний заклад

“Українська академія банківської справи Національного банку України”  
вул. Петропавлівська, 57, м. Суми, 40000, Україна, тел. (542) 61-93-37

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників  
і розповсюджувачів видавничої продукції: серія ДК, № 3160 від 10.04.2008