Державний вищий навчальний заклад
“Українська академія банківської справи
Національного банку України”
Кафедра вищої математики та інформатики

С. В. Коломієць

ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник

У 2 частинах

Частина II

Для студентів економічних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Суми
ДВНЗ “УАБС НБУ”
2013

УДК 519.21
К61

Рекомендовано до видання науково-методичною радою Державного вищого навчального закладу “Українська академія банківської справи Національного банку України”, протокол № 1 від 06.09.2011.

Розглянуто та схвалено на засіданні кафедри вищої математики та інформатики, протокол № 8 від 24.05.2011.

Рецензенти:
В. М. Долгіх, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
ДВНЗ “Українська академія банківської справи НБУ”;

Н. І. Одарченко, кандидат педагогічних наук, доцент,
Сумський державний університет

Коломієць С. В.
К61 Теорія випадкових процесів [Текст] : навчальний посібник : у 2 ч. / С. В. Коломієць ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2013. – Ч. II. – 103 с.

Навчальний посібник містить теоретичні відомості з теорії марковських випадкових процесів з неперервним часом, теорії масового обслуговування, основні відомості про стаціонарні випадкові процеси, приклади розв’язування задач, питання для самоперевірки.

Призначений для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 519.21

ЗМІСТ

ВСТУП

Застосування математичних моделей і методів в економіці набуває останнім часом все більшого значення для успішної підприємницької діяльності, розробки оптимальної стратегії у великому та малому бізнесі, в ефективному управлінні фінансовими ресурсами тощо. Використання математичних методів в економічних дослідженнях дозволяє не тільки виконувати різні економічні обчислення, а насамперед застосовувати математику для вивчення, аналізу та прогнозування економічних тенденцій і закономірностей.

Реальні економічні процеси відбуваються під впливом великої кількості випадкових чинників, розвиваються та змінюються протягом часу, тобто мають випадковий характер. У зв'язку з цим стохастичні (ймовірнісні) моделі є найбільш адекватними моделями стосовно об'єкта-оригіналу. Стохастичне моделювання базується на використанні теорії випадкових процесів. Серед випадкових процесів, що використовуються як прообрази тих, які відбуваються в економіці, у соціальній та технічній сферах, найбільшого застосування набули марковські, пуассонівські, гіллясті випадкові процеси, які становлять основу ймовірнісних моделей.

Поняття випадкового процесу було введене в XX столітті й пов'язане з іменами А. М. Колмогорова (1903–1987), О. Я. Хінчина (1894–1959), Є. Є. Слуцького (1880–1948), Н. Вінера (1894–1965). Зараз поняття *випадкового процесу* є одним із основних понять не лише в теорії ймовірностей, але й у природознавстві, інженерній справі, економіці, організації виробництва, теорії зв'язку тощо. *Теорія випадкових процесів* – основний математичний апарат, який використовується для вивчення стохастичних систем, зокрема стохастичних диференціальних та різницевих систем, які моделюють більшість видів господарської діяльності людини.

Посібник у двох частинах написано відповідно до програми з теорії випадкових процесів для студентів спеціальності "Економічна кібернетика". Матеріал другої частини посібника є базовим для подальшого вивчення теорії випадкових процесів та засвоєння інструментарію, що використовується при стохастичному моделюванні економічних систем. Автор під час складання посібника мав на меті забезпечити ґрунтовне засвоєння теоретичного курсу з теорії випадкових процесів, сприяти розвитку навичок застосування методів теорії випадкових функцій.

Друга частина посібника складається з чотирьох розділів. У першому розділі дано означення потоку подій, наведені властивості потоків, окремі види потоків, зокрема пуассонівський найпростіший потік, потік Пальма та потік Ерланга.

У другому розділі вивчаються дискретні марковські процеси з неперервним часом: дано означення марковського процесу, наведені правила побудови системи диференціальних рівнянь Колмогорова, досліджується стаціонарний режим вказаного процесу.

Третій розділ присвячений однорідним процесам розмноження та вимирання.

У четвертому розділі надається стисла інформація про системи масового обслуговування, розглядаються окремі моделі систем масового обслуговування.

Усі розділи мають однакову структуру. Насамперед викладено основний теоретичний матеріал (означення, твердження, теореми тощо), пропонуються приклади розв'язання задач. Наприкінці теми наведені питання для самоперевірки засвоєння матеріалу.

Рекомендована література допоможе читачеві поглибити та поширити власну поінформованість з питань, що його зацікавили.

Поєднання в посібнику належної повноти, обґрунтованості, доступності подання матеріалу дає можливість рекомендувати це видання студентам вищих навчальних закладів економічного профілю, які виявляють інтерес до застосування теорії випадкових процесів.

1 ПОТОКИ ПОДІЙ.
ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ

1.1 Потоки подій

Одним із важливих понять теорії випадкових процесів є поняття *потоку подій*, яке є корисним в економічній практиці.

Означення. Потоком подій називається послідовність подій, які відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу.

Наприклад, потік покупців, потік клієнтів деякого банку, потік викликів, які поступають до оператора мобільного зв'язку, потік автомашин тощо.

Потік подій можна зобразити у вигляді послідовності випадкових точок $t_1,\ t_2,\ \ldots, t_n,\ \ldots$ на осі Ot (рис. 1.1). Випадкові інтервали часу між цими точками визначаються за формулами: $T_1 = t_2 - t_1,\ \ T_2 = t_3 - t_2, \ldots,$ $T_n = t_{n+1} - t_n$.

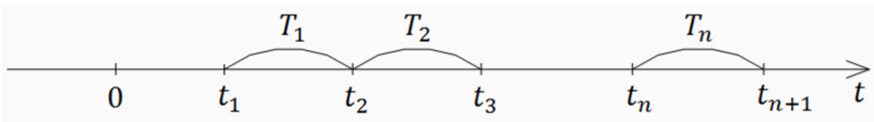

Рисунок 1.1

Зауважимо, що термін "подія" в понятті "потік подій" відрізняється від терміна "випадкова подія", який використовується в теорії ймовірностей. Мова йде про те, що розглядаються не ймовірності окремих подій, що утворюють потік подій, а визначаються ймовірності інших подій, наприклад: "за проміжок Δt з'явиться принаймні одна з вказаних подій", "проміжок часу між двома сусідніми подіями не менше t".

Означення. Потік подій називається регулярним, якщо події в ньому настають одна за одною через рівні проміжки часу, тобто інтервали між подіями однакові і дорівнюють невипадковій величині τ (рис. 1.2).

Рисунок 1.2

Зауважимо, що регулярний потік подій достатньо рідко зустрічається на практиці, але становить певний інтерес як граничний випадок для інших потоків.

Серед властивостей, які мають потоки подій, виділяють властивості *стаціонарності, відсутності післядії, ординарності.*

Означення. Потік називається ординарним, якщо за нескінченно малий проміжок часу може з'явитися не більше однієї події.

Фактично ординарність означає, що події у потоці з'являються по одній, а не парами та групами. Зокрема потік поїздів – ординарний, а потік вагонів – неординарний. Таким чином, *ординарність потоку* означає, що ймовірність появи на проміжку $\Delta\tau$ двох або більше подій дуже мала порівняно з появою на проміжку $\Delta\tau$ рівно однієї події.

Розглянемо ординарний потік. Нехай випадкова величина $X(t,\ \Delta t)$– число подій, що з'явилися на проміжку $(t;\ t+\Delta t)$, закон розподілу якої має вигляд

$X(t,\ \Delta t)$	0	1	…
$p(t,\ \Delta t)$	$p_0(t,\ \Delta t)$	$p_1(t,\ \Delta t)$	…

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини $X(t,\ \Delta t)$:

$$M\left[X(t,\ \Delta t)\right]=0\cdot p_0(t,\ \Delta t)+1\cdot p_1(t,\ \Delta t)+a\cdot p_{>1}(t,\ \Delta t)$$

де a – яка завгодно велика величина, що задовольняє умову $\lim\limits_{\Delta t\to 0} a\neq\infty.$

Враховуючи, що потік подій ординарний, тобто $p_{>1}(t,\Delta t)\to 0$ при $\Delta t\to 0,$ знайдемо границю відношення $\dfrac{M\left[X(t,\ \Delta t)\right]}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M\left[X(t,\ \Delta t)\right]}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{1\cdot p_1(t,\ \Delta t)}{\Delta t}+\frac{a\cdot p_{>1}(t,\ \Delta t)}{\Delta t}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_1(t,\ \Delta t)}{\Delta t}.$$

Якщо ця границя існує, то вона називається *інтенсивністю* ординарного потоку подій у момент t:

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M\left[X(t,\ \Delta t)\right]}{\Delta t}.$$

Таким чином, *інтенсивністю потоку* $\lambda(t)$ називається середнє число подій, які відбуваються за одиницю часу.

Інтенсивність потоку подій $\lambda(t)$ – невід'ємна функція часу, яка має розмірність $\left[\frac{1}{t}\right]$. Інтенсивність потоку може бути як змінною, так і сталою.

Середнє число подій, що відбуваються на інтервалі $(t;\ t+\Delta t)$, визначається за формулою:

$$M\left[X(t,\ \Delta t)\right] = \int_{t}^{t+\Delta t} \lambda(t)dt.$$

Якщо інтенсивність потоку стала, то $M\left[X(t,\ \Delta t)\right] = \int_{t}^{t+\Delta t} \lambda dt = \lambda \cdot \Delta t.$

Означення. Потік подій називається потоком без післядії, якщо ймовірність появи деякої кількості подій за довільний проміжок часу не залежить від того, яка кількість подій відбулася до початку цього проміжку.

Таким чином, для будь-яких проміжків часу Δt_1 і Δt_2, що не перетинаються, число подій, що потрапили на один з них, не залежить від того, скільки подій потрапило на інший (рис. 1.3).

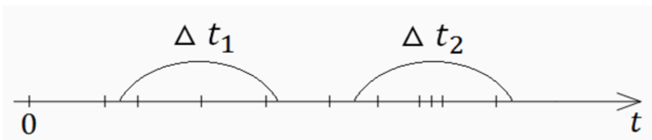

Рисунок 1.3

Відсутність післядії в потоці вказує на те, що для будь-якого моменту часу t_0 ймовірність появи подій потоку у майбутньому (при $t > t_0$) не залежить від того, яке число подій потоку відбулося в минулому (при $t < t_0$). Зауважимо, що регулярний потік не є потоком без післядії, оскільки властивість післядії породжується в ньому його регулярністю.

Якщо *потік подій без післядії є ординарним потоком* зі сталою інтенсивністю λ, то випадкова величина $X(t,\ \Delta t)$ – число подій, що з'являться на проміжку $(t;\ t+\Delta t)$, має розподіл Пуассона з параметром $a=\lambda\cdot\Delta t$:

$$P\left(X\left(t,\ \Delta t\right)=k\right)=\frac{a^k}{k\,!}\cdot e^{-a}. \qquad (1.1)$$

Якщо інтенсивність потоку $\lambda(t)$ не є сталою, то випадкова величина $X(t,\ \Delta t)$ також має розподіл Пуассона, але параметр a залежить не лише від проміжку Δt, але й від того, де цей проміжок знаходиться, тобто

$$a=a(t,\Delta t)=\int_t^{t+\Delta t}\lambda(t)\,dt.$$

Тоді

$$P\left(X\left(t,\ \Delta t\right)=k\right)=\frac{a\left(t,\ \Delta t\right)^k}{k\,!}\cdot e^{-a(t,\ \Delta t)}. \qquad (1.2)$$

Означення. Потік подій називається стаціонарним, якщо його ймовірнісні характеристики не змінюються з часом.

Зокрема *для стаціонарного потоку* ймовірність того, що за проміжок часу Δt відбудеться те чи інше число подій, залежить лише від довжини цього проміжку і не залежить від того, де міститься Δt щодо початку відліку часу. Звідси випливає, що інтенсивність $\lambda(t)$ стаціонарного потоку є сталою: $\lambda(t)=\lambda=\text{const}$.

Означення. Потік подій, що має властивості *відсутності післядії* та *ординарності*, називається *пуассонівським потоком*.

1.2 Найпростіший потік подій

Означення. Найпростішим називається потік, який має властивості стаціонарності, відсутності післядії та ординарності.

Таким чином, найпростіший потік є частинним випадком пуассонівського потоку (стаціонарний пуассонівський потік).

Якщо потік подій найпростіший, то ймовірність того, що за проміжок часу t відбудеться рівно k подій, визначається за формулою Пуассона:

$$P_t(k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \qquad (1.3)$$

де λ – інтенсивність потоку.

Слід зазначити, що формула Пуассона відображає всі властивості найпростішого потоку (стаціонарність, відсутність післядії, ординарність), а отже, є його математичною моделлю.

Дійсно, з формули (1.3) маємо, що ймовірність появи k подій за проміжок часу t, при заданій інтенсивності λ, є лише функцією k і t, що відображає властивість *стаціонарності* найпростішого потоку.

Формула (1.3) не використовує інформацію про появу подій до початку проміжку часу t, що відображає властивість *відсутності післядії*.

Використовуючи формулу (1.3), знайдемо ймовірність появи більше однієї події:

$$P_t\left(k>1\right)=1-\left[P_t\left(0\right)+P_t(1)\right]=1-\left[e^{-\lambda t}+\lambda te^{-\lambda t}\right].$$

Використовуючи розвинення функції $e^{-\lambda t}$ в ряд Маклорена

$$e^{-\lambda t}=1-\lambda t+\frac{\left(\lambda t\right)^2}{2!}-\frac{\left(\lambda t\right)^3}{3!}+\ldots,$$

отримаємо

$$P_t\left(k>1\right)=\frac{\left(\lambda t\right)^2}{2!}+\ldots.$$

Порівнюючи $P_t(1)$ та $P_t(k>1)$ при малих значеннях t, робимо висновок, що ймовірність появи більше однієї події значно менша за ймовірність появи однієї події, що відображає властивість *ординарності* найпростішого потоку.

Таким чином, формула Пуассона відображає всі властивості найпростішого потоку, отже, формула Пуассона – математична модель найпростішого потоку.

Приклад 1.1. Середня кількість викликів таксі, які надходять до диспетчерського пункту за одну хвилину, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за 2 хвилини надійде: 4 виклики; менше як 4 виклики; не менше як 4 виклики.

Розв'язання

Потік викликів є найпростішим, тому для розв'язування задачі застосуємо формулу (1.3), де $\lambda=3$, $t=2$, $k=4$.

1. Ймовірність того, що за 2 хвилини надійде 4 виклики, обчислюється за формулою:

$$P_2\left(4\right)=\frac{\left(3\cdot 2\right)^4}{4!}e^{-6}=\frac{1\,296\cdot 0,0025}{24}=0,135.$$

2. Ймовірність того, що за 2 хвилини надійде менше як 4 виклики, обчислюємо, використовуючи теорему додавання несумісних подій:

$$P_2(k<4)=P_2(0)+P_2(1)+P_2(2)+P_2(3)=\frac{6^0}{0!}\cdot e^{-6}+\frac{6^1}{1!}\cdot e^{-6}+\frac{6^2}{2!}\cdot e^{-6}+\frac{6^3}{3!}\cdot e^{-6}=$$
$$=e^{-6}\cdot(1+6+18+36)=0{,}0025\cdot 61=0{,}1525.$$

3. Оскільки події "надійде не менше 4 викликів" та "надійде менше 4 викликів" є протилежними, маємо:

$$P_2(k\geq 4)=1-P_2(k<4)=1-0{,}1525=0{,}8475.$$

Слід зазначити, що інтервали часу між послідовними подіями найпростішого потоку незалежні між собою та розподілені однаково за *показниковим законом*: $f(t)=\lambda\cdot e^{-\lambda t},\ t>0.$

Приклад 1.2. Потік автомашин, що рухаються вздовж шосе у заданому напрямку, – найпростіший потік подій з інтенсивністю λ. Людина виходить на шосе, щоб зупинити перший автомобіль, який рухається у вказаному напрямку. Знайти закон розподілу часу очікування T; визначити математичне сподівання m_t та середнє квадратичне відхилення σ_t.

Розв'язання

Оскільки найпростіший потік має властивість відсутності післядії, то "майбутнє" не залежить від "минулого", зокрема від того, скільки хвилин тому пройшов останній автомобіль. Закон розподілу часу очікування T такий самий, як і закон розподілу проміжку часу між послідовною появою автомобілів, тобто показниковий розподіл з параметром λ: $f(t)=\lambda\cdot e^{-\lambda t},\ t>0.$

З урахуванням числових характеристик показникового розподілу маємо: $m_t=\frac{1}{\lambda},\ D_t=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma_t=\sqrt{D_t}=\frac{1}{\lambda}.$

1.3 Потік Пальма

Означення. Ординарний потік подій називається потоком Пальма (або потоком з обмеженою післядією), якщо інтервали часу $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ між послідовними подіями є незалежними, однаково розподіленими випадковими величинами.

Оскільки випадкові величини $T_1,\ T_2,\ \ldots, T_n,\ \ldots$ однаково розподілені, то потік Пальма завжди стаціонарний.

Найпростіший потік (стаціонарний пуассонівський потік) є потоком Пальма, оскільки інтервали часу між послідовними подіями в ньому незалежні між собою та розподілені однаково за показниковим законом:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t},\ t > 0.$$

Нестаціонарний пуассонівський потік не є потоком Пальма. Дійсно, в нестаціонарному потоці закон розподілу проміжку між послідовними подіями залежить від того, де цей проміжок починається. Оскільки для сусідніх проміжків часу T_k і T_{k+1} початок проміжку T_{k+1} співпадає з кінцем проміжку T_k, то довжини цих проміжків є залежними, а отже, нестаціонарний пуассонівський потік не є потоком Пальма.

Розглянемо задачу. Нехай на осі Ot задано потік Пальма, у якого інтервали часу між сусідніми подіями є незалежними неперервними випадковими величинами $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$, розподіленими однаково зі щільністю $f(t)$. Випадкова точка t^* потрапляє на деякий інтервал T^* між подіями потоку (рис. 1.4). Необхідно знайти щільність розподілу інтервалу T^*, його математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

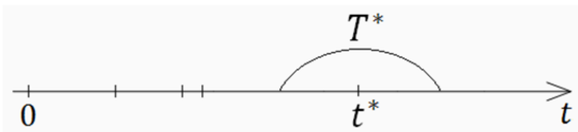

Рисунок 1.4

Розв'язання

Зауважимо, що попадання випадкової точки t^* на інтервал T^* змінює його закон розподілу. Знайдемо щільність розподілу $f^*(t)$ інтервалу T^*. Для цього спочатку знайдемо елемент ймовірності $f^*(t)dt$:

$$f^*(t)dt \approx P\big(T^* \in (t;\ t+dt)\big).$$

Ця ймовірність наближено дорівнює відношенню суми довжин всіх інтервалів між подіями, довжина яких міститься в елементарному проміжку $(t;\ t+dt)$, до довжини τ достатньо великого інтервалу осі Ot.

Припустимо, що на інтервалі τ міститься n інтервалів між подіями. Математичне сподівання числа інтервалів, довжина яких належить проміжку $(t;\ t+dt)$, дорівнює $nf(t)dt$, а середня сумарна довжина всіх таких інтервалів наближено дорівнює $t \cdot nf(t)dt.$ Середня загальна довжина всіх інтервалів на проміжку τ дорівнює $n \cdot m_t,$ де $m_t = M(T) = \int_0^\infty t \cdot f(t)\,dt.$

Таким чином, маємо

$$f^*(t)dt \approx \frac{n \cdot t \cdot f(t)dt}{n \cdot m_t} = \frac{tf(t)}{m_t}dt.$$

Точну рівність отримаємо, якщо $\tau \to \infty, n \to \infty.$

Отже, закон розподілу випадкової величини T^* має вигляд

$$f^*(t) = \frac{tf(t)}{m_t}, \ t > 0. \tag{1.4}$$

Знайдемо числові характеристики випадкової величини T^*:

$$M(T^*) = \int_0^\infty t \cdot f^*(t)dt = \int_0^\infty \frac{t^2 f(t)}{m_t}dt = \frac{M(T^2)}{m_t} = m_t + \frac{D_t}{m_t} \tag{1.5}$$

де D_t – дисперсія випадкової величини T.

Оскільки математичне сподівання невід'ємної випадкової величини T завжди більше за 0, а $D_t \geq 0,$ маємо

$$M(T^*) \geq M(T) = m_t. \tag{1.6}$$

Тобто факт попадання випадкової точки t^* на інтервал T^* збільшує його середню довжину, порівнюючи з апріорною (до отримання відомості про те, що точка t^* потрапила на інтервал).

Нерівність (1.6) перетвориться у рівність тільки тоді, коли $D_t = 0,$ тобто, коли T – невипадкова величина, а потік – регулярний.

Знайдемо дисперсію випадкової величини T^*:

$$D(T^*) = M\left(\left(T^*\right)^2\right) - M^2(T^*) = \int_0^\infty \frac{t^3 f(t)}{m_t}dt - \left(m_t + \frac{D_t}{m_t}\right)^2 =$$

$$= \frac{\alpha_3(T)}{m_t} - \left(m_t + \frac{D_t}{m_t}\right)^2$$

де $\alpha_3(T)$ – початковий момент третього порядку випадкової величини T.

Таким чином,

$$D\left(T^*\right)=\frac{\alpha_3\left(T\right)}{m_t}-\frac{M^2\left(T^2\right)}{m_t^2}. \tag{1.7}$$

Розглянемо задачу. Нехай на осі Ot задано потік Пальма, відома щільність розподілу $f\left(t\right)$ інтервалу T між сусідніми подіями. Випадкова точка t^* потрапляє на деякий інтервал T^*, який вона поділяє на два інтервали: Q – від найближчої попередньої події до t^* і R – від t^* до найближчої наступної події (рис. 1.5). Необхідно знайти розподіл проміжків Q і R.

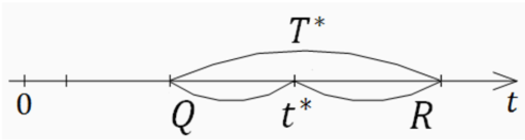

Рисунок 1.5

Розв'язання

Припустимо, що випадкова величина T^* набула деякого значення з елементарного проміжку $\left(t;t+dt\right)$. Ймовірність цієї гіпотези наближено дорівнює елементу ймовірності:

$$P\left(T^*\in\left(t;\,t+dt\right)\right)\approx f^*\left(t\right)dt.$$

Знайдемо умовний розподіл проміжку Q за цієї умови. Позначимо умовну щільність розподілу випадкової величини Q при цій гіпотезі через $f_q\left(q/t\right)$.

Оскільки точка t^* потрапляє на вісь Ot випадково, то при цій гіпотезі вона буде мати рівномірний розподіл на проміжку $\left(0;t\right)$:

$$f_q\left(q/t\right)=\frac{1}{t},\ 0<q<t,\ t>0.$$

За інтегральною формулою повної ймовірності маємо

$$f_q\left(q\right)=\int_0^\infty f_q\left(q/t\right)\cdot f^*\left(t\right)dt.$$

Оскільки $f_q\left(q/t\right)$ відмінна від 0 лише при $q<t$, тоді

$$f_q\left(q\right)=\int_q^\infty\frac{f^*\left(t\right)}{t}dt,\ q>0.$$

Оскільки за формулою (1.4) $f^*(t) = \dfrac{tf(t)}{m_t}$, отримаємо

$$f_q(q) = \int_q^\infty \frac{tf(t)}{tm_t}dt = \frac{1}{m_t}\int_q^\infty f(t)dt. \qquad (1.8)$$

Зазначимо, що інтеграл у формулі (1.8) визначає ймовірність події $T > q$. Оскільки випадкова величина T має функцію розподілу $F(t)$, тоді $P(T > q) = 1 - F(q)$, звідки щільність розподілу випадкової величини Q дорівнює:

$$f_q(q) = \frac{1 - F(q)}{m_t}.$$

Враховуючи, що вигляд щільності розподілу не залежить від позначення аргументу, маємо:

$$f_q(t) = \frac{1 - F(t)}{m_t}. \qquad (1.9)$$

Аналогічно щільність розподілу випадкової величини R має вигляд

$$f_r(t) = \frac{1 - F(t)}{m_t}. \qquad (1.10)$$

Знайдемо математичні сподівання та дисперсії випадкових величин Q і R, а також їх коваріацію.

Враховуючи, що $T^* = Q + R$, отримаємо $M(T^*) = M(Q) + M(R)$. Оскільки випадкові величини Q і R однаково розподілені, тоді $M(Q) = M(R)$, звідси

$$M(Q) = M(R) = \frac{M(T^*)}{2} = \frac{M(T^2)}{2m_t}. \qquad (1.11)$$

Можна показати, що

$$D(Q) = D(R) = \frac{\alpha_3(T)}{3m_t} - \frac{1}{4}\frac{\left(M(T^2)\right)^2}{m_t^2} \qquad (1.12)$$

де $\alpha_3(T)$ – початковий момент третього порядку випадкової величини T.

Для знаходження коваріації випадкових величин Q і R використовують формулу:

$$K_{qr} = \frac{\alpha_3(T)}{6m_t} - \frac{\left(M\left(T^2\right)\right)^2}{4m_t^2}. \tag{1.13}$$

Доведення формул (1.12), (1.13), а також інформація про умовні закони розподілу складових системи випадкових величин $(Q;R)$ містяться в [5, с. 61–63].

Приклад 1.2. Пасажир виходить на автобусну зупинку в деякий момент часу, не пов'язаний з розкладом руху автобусів. Потік автобусів – потік Пальма з інтервалами, які мають рівномірний розподіл у межах від 5 до 10 хвилин. Знайти: 1) щільність розподілу того інтервалу між автобусами, на який потрапив пасажир; 2) щільність розподілу часу очікування H автобуса; 3) середній час очікування автобуса.

Розв'язання

Як відомо, якщо неперервна випадкова величина X рівномірно розподілена на інтервалі $(a;b)$, тоді

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & x \ge b \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{a+b}{2},\ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12},\ \sigma(X) = \frac{b-a}{3\sqrt{2}}.$$

Згідно з умовою задачі $t \in (5;10)$, отже,

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \le 5 \\ \dfrac{1}{5}, & 5 < t < 10, \\ 0, & t \ge 10 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 5 \\ \dfrac{x-5}{5}, & 5 < t < 10, \\ 1, & t \ge 10 \end{cases} \quad m_t = \frac{5+10}{2} = 7{,}5.$$

1. Щільність розподілу інтервалу між автобусами, на який потрапив пасажир, згідно з формулою (1.4), має вигляд: $f^*(t)=\dfrac{tf(t)}{m_t}$, $t>0$, тоді

$$f^*(t)=\frac{t}{37{,}5}$$

де $t\in(5;10)$.

2. Щільність розподілу випадкової величини R – часу очікування, згідно з формулою (1.10), має вигляд

$$f_r(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \dfrac{1}{7{,}5}, & 0<t<5, \\ \dfrac{10-t}{37{,}5}, & 5<t<10 \\ 0, & t>10 \end{cases}.$$

3. Середній час очікування

$$m_r=\int_0^5\frac{t}{7{,}5}dt+\int_5^{10}t\cdot\frac{10-t}{37{,}5}dt\approx 6{,}11\,[\text{хвилин}].$$

Ще раз підкреслимо, що найпростіший (стаціонарний пуассонівський) потік, інтервали часу між послідовними подіями якого однаково розподілені за показниковим законом: $f(t)=\lambda\cdot e^{-\lambda t}$, $t>0$, є випадком потоку Пальма. Використовуючи формули (1.9) та (1.10), можна показати, що випадкові величини Q і R також розподілені за показниковим законом:

$$f_q(t)=\lambda\cdot e^{-\lambda t},\ t>0,\ f_r(t)=\lambda\cdot e^{-\lambda t},\ t>0.$$

Це справді так, оскільки відсутність післядії у найпростішому потоці дозволяє стверджувати, що розподіл часу, який залишився до найближчої події потоку, такий самий, що й розподіл часу між подіями потоку; наявність події в початку відліку проміжку жодним чином не впливає на довжину, що залишилася.

Відсутність післядії дозволяє стверджувати, що випадкові величини Q і R для найпростішого потоку незалежні. Дійсно, в найпростішому потоці будь-яка докладна інформація про поведінку системи в минулому (до моменту часу t_0) не містить жодних відомостей про те, як повинен відбуватися процес у майбутньому (після t_0). Це головна причина того, що інженерні задачі, які пов'язані з випадковими процесами, легко розв'язуються в тому випадку, коли зміна станів фізичної системи S, в якій розглядається випадковий процес, відбувається під впливом найпростіших потоків подій. Складніше розв'язуються задачі дослідження випадкових процесів у тому випадку, коли потоки подій є нестаціонарними пуассонівськими (зі змінною інтенсивністю $\lambda(t)$), але важлива властивість – відсутність післядії – при цьому зберігається. Це дозволяє, досліджуючи процес у майбутньому (при $t > t_0$), враховувати лише стан системи в момент часу t_0 (теперішній) і не враховувати перебіг процесу в минулому (при $t < t_0$).

Потоки Пальма мають широке застосування в теорії надійності, *теорії масового обслуговування* – галузі прикладної математики, де використовуються методи теорії випадкових процесів.

Теорія масового обслуговування – це розділ прикладної математики, що вивчає процеси з опрацюванням часто повторюваних однорідних подій, які з'являються в системах виробництва, обслуговування та управління. Прикладом згаданих подій є заявки на підприємствах побутового обслуговування, в банківських установах, в аудиторських фірмах, передача та опрацювання інформації, операції на автоматизованих лініях виробництва тощо. ***Задачею теорії масового*** обслуговування є встановлення та вивчення залежностей між характером потоку заявок, кількістю каналів обслуговування, продуктивністю окремого каналу та ефективним обслуговуванням із метою відшукання найкращих способів управління процесами обслуговування.

Потоки Пальма зустрічаються у вигляді вихідних потоків систем масового обслуговування. Якщо на будь-яку систему поступає потік заявок, то система поділяє його на два потоки: *потік обслужених та необслужених заявок*.

Потік необслужених заявок часто поступає на деяку іншу систему масового обслуговування. Основною в теорії вихідних потоків є ***теорема Пальма.***

Нехай на деяку систему масового обслуговування поступає потік заявок типу Пальма, причому заявка, яка надійшла, коли всі канали були зайняті, отримує відмову (не обслуговується). Якщо час обслуговування має показниковий розподіл, то потік необслужених заявок також є потоком типу Пальма.

Зокрема, якщо вхідний потік заявок є найпростішим, то потік необслужених заявок, не будучи найпростішим, буде мати обмежену післядію.

Прикладом потоків з обмеженою післядією є *потоки Ерланга*, що утворюються “просіюванням” найпростішого потоку.

1.4 Потоки Ерланга

Розглянемо найпростіший потік з інтенсивністю λ. Якщо в цьому потоці зберігати кожну другу подію, а проміжну – відкидати, то отримаємо *потік Ерланга 2-го порядку* (рис. 1.6).

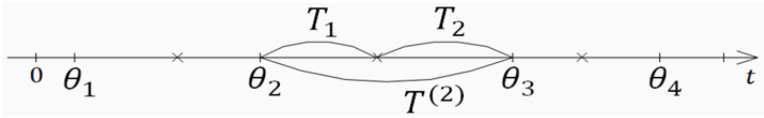

Рисунок 1.6

На рис. 1.6 події, які утворюють потік Ерланга 2-го порядку, позначено точками $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4,\ \ldots$. Цей потік є потоком Пальма. Оскільки незалежними є проміжки в найпростішому потоці, то незалежними будуть і величини $T_1, T_2,\ \ldots,$ які отримані в результаті додавання проміжків найпростішого потоку по два.

Зрозуміло, що інтервал $T^{(2)}$ між двома подіями в потоці Ерланга 2-го порядку – це сума двох незалежних випадкових величин, розподілених за показниковим законом з параметром λ, що дорівнює інтенсивності початкового найпростішого потоку: $T^{(2)} = T_1 + T_2$.

Якщо в найпростішому потоці з інтенсивністю λ залишати кожну третю подію, а дві проміжні – відкидати, то отримаємо *потік Ерланга 3-го порядку* (рис. 1.7).

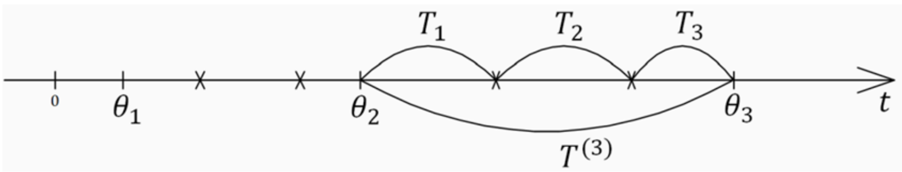

Рисунок 1.7

Випадкова величина $T^{(3)}$ – інтервал між послідовними подіями в потоці Ерланга 3-го порядку – це сума трьох незалежних випадкових величин, кожна з яких розподілена за показниковим законом із параметром λ: $T^{(3)} = T_1 + T_2 + T_3$.

Означення. Потоком Ерланга k-го порядку називається потік подій, що утворюється внаслідок “просіювання” найпростішого потоку, коли кожна k-та точка потоку (подія) зберігається, а всі проміжні точки (події) відкидаються.

Випадкова величина $T^{(k)}$ – інтервал між послідовними подіями в потоці Ерланга k-го порядку – це сума k незалежних випадкових величин T_i, кожна з яких розподілена за показниковим законом з параметром λ:

$$T^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} T_i.$$

Зауважимо, що найпростіший потік є потоком Ерланга 1-го порядку.

Знайдемо *закон розподілу* проміжку часу T^k між сусідніми подіями в потоці Ерланга k-го порядку. Нехай $f_k(t)$ – щільність розподілу величини T^k; $f_k(t)dt$ – ймовірність того, що величина T^k набуде значення з інтервалу $(t; t+dt)$ (рис. 1.8).

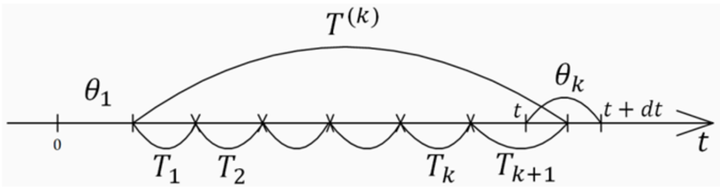

Рисунок 1.8

Це означає, що остання точка проміжку $T^{(k)}$ повинна потрапити на елементарний проміжок $(t; t+dt)$, а попередні $k-1$ точок найпростішого потоку – на проміжок $(0; t)$. Ймовірність першої події дорівнює λdt, ймовірність другої події – $P_t(k-1) = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}$, тоді

$$f_k(t)dt = \lambda \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} dt,$$

звідси маємо

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}, \ t > 0. \qquad (1.14)$$

Закон розподілу випадкової величини $T^{(k)}$ зі щільністю (1.14) називається *законом Ерланга* k-го *порядку*.

При $k=1$ маємо показниковий закон розподілу: $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$, $t > 0$.

Означення. Потоком Ерланга k-го порядку називається потік Пальма, у якого інтервали між подіями розподілені за законом Ерланга k-го порядку ($k = 2, 3, \ldots$)..

Враховуючи, що випадкова величина $T^{(k)}$ – це сума k незалежних випадкових величин T_i, кожна з яких розподілена за показниковим законом з параметром λ, і використовуючи властивості математичного сподівання та дисперсії, отримаємо

$$M\left[T^{(k)}\right] = M\left[\sum_{i=1}^{k} T_i\right] = \sum_{i=1}^{k} M\left[T_i\right] = k \cdot M\left[T_i\right] = k \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{\lambda}$$

де $M\left[T_i\right] = \dfrac{1}{\lambda}$ – математичне сподівання проміжку між послідовними подіями найпростішого потоку.

Аналогічно

$$D\left[T^{(k)}\right] = D\left[\sum_{i=1}^{k} T_i\right] = \sum_{i=1}^{k} D\left[T_i\right] = k \cdot D\left[T_i\right] = k \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{k}{\lambda^2}$$

де $D\left[T_i\right] = \dfrac{1}{\lambda^2}$ – дисперсія проміжку між послідовними подіями найпростішого потоку.

Тоді

$$\sigma\left[T^{(k)}\right] = \sqrt{D\left[T^{(k)}\right]} = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}.$$

Таким чином,

$$M\left[T^{(k)}\right] = \frac{k}{\lambda},\ D\left[T^{(k)}\right] = \frac{k}{\lambda^2},\ \sigma\left[T_i\right] = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}. \tag{1.15}$$

Аналіз формул (1.15) показує, що при збільшенні порядку потоку Ерланга збільшується математичне сподівання і дисперсія проміжку між двома послідовними подіями потоку.

Якщо одночасно з “проріджуванням” найпростішого потоку змінити масштаб по осі Ot (діленням на k), то отримаємо *нормований* потік Ерланга k-го порядку, інтенсивність якого не залежить від k.

Інтервал часу $\tilde{T}^{(k)}$ між послідовними подіями в нормованому потоці Ерланга k-го порядку має щільність

$$\tilde{f}_k(t) = \frac{k\lambda\left(k\lambda t\right)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-k\lambda t}, \; t > 0. \tag{1.16}$$

Оскільки

$$\tilde{T}^{(k)} = \frac{T^{(k)}}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} T_i, \tag{1.17}$$

тоді, використовуючи формули (1.15), маємо

$$M\left[\tilde{T}^{(k)}\right] = \frac{M\left[T^{(k)}\right]}{k} = \frac{1}{k}\cdot\frac{k}{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

$$D\left[\tilde{T}^{(k)}\right] = \frac{D\left[T^{(k)}\right]}{k^2} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{k}{\lambda^2} = \frac{1}{k\lambda^2},$$

$$\sigma\left[T^{(k)}\right] = \sqrt{D\left[T^{(k)}\right]} = \frac{1}{\lambda\sqrt{k}}. \tag{1.18}$$

Інтенсивність $\tilde{\lambda}^{(k)}$ нормованого потоку Ерланга k-го порядку не залежить від k і при будь-якому значенні k дорівнює інтенсивності початкового найпростішого потоку:

$$\tilde{\lambda}^{(k)} = \frac{1}{M\left[\tilde{T}^{(k)}\right]} = \lambda.$$

Проаналізуємо, як змінюється розподіл інтервалу часу $\tilde{T}^{(k)}$ між послідовними подіями нормованого потоку Ерланга k-го порядку при збільшенні k.

По-перше, зі збільшенням k цей розподіл наближається до нормального. Дійсно, згідно з (1.17), $\tilde{T}^{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} T_i$, де T_i – незалежні випадкові величини, розподілені за показниковим законом з параметром λ. Отже, при достатньо великому k сума $\sum_{i=1}^{k} T_i$ буде мати розподіл, близький до нормального (згідно з центральною граничною теоремою для однаково розподілених випадкових величин). Параметри нормального закону розподілу a і σ в цьому випадку визначаються як:

$$a = M\left[\tilde{T}^{(k)}\right] = \frac{1}{\lambda},\ \sigma = \sigma\left[T^{(k)}\right] = \sqrt{D\left[T^{(k)}\right]} = \frac{1}{\lambda\sqrt{k}}. \qquad (1.19)$$

Отже, математичне сподівання не змінюється при збільшенні k, а середнє квадратичне відхилення зменшується обернено пропорційно $\sqrt{k}$. Як зазначено в [5, с. 76], досвід розрахунків показує, що при збільшенні k (порядку 10–20) з достатньою точністю можна вважати закон розподілу інтервалу між послідовними подіями в нормованому потоці Ерланга нормальним з параметрами $a = \frac{1}{\lambda}, \sigma = \frac{1}{\lambda\sqrt{k}}$.

По-друге, разом з "нормалізацією" закону розподілу інтервалу при зростанні k його середнє квадратичне відхилення σ прямує до 0, тобто інтервал стає все менш випадковим, наближаючись до свого математичного сподівання $\frac{1}{\lambda}$, а сам потік наближається до регулярного потоку з інтервалом між подіями, що дорівнює $\frac{1}{\lambda}$.

Таким чином, за допомогою нормованого потоку Ерланга можна змоделювати потоки Пальма. При $k=1$ маємо найпростіший потік (відсутність післядії), при збільшенні k $\left(k = 10-20\right)$ маємо потік Пальма, у якого інтервали між подіями розподілені за нормальним законом. При достатньо великих k $\left(k \to \infty\right)$ маємо регулярний потік, у якому існує функціональна залежність між подіями в потоці.

Більше інформації про потоки Ерланга, нормовані потоки Ерланга міститься в [5, с. 70–76].

Означення. Гамма-потоком з параметрами λ і k називається потік Пальма, у якого інтервали між подіями мають гамма-розподіл з параметрами $\lambda > 0$ і $k > 0$:

$$f_k\left(t\right) = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)},\ t > 0 \qquad (1.20)$$

де $\Gamma(k) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{k-1} dt$ – гамма-функція.

Зауважимо, що при цілому додатному k гамма-розподіл є розподілом Ерланга k-го порядку.

1.5 Граничні теореми теорії потоків

Як відомо з теорії ймовірностей, *центральна гранична теорема* найбільш важлива із всіх граничних теорем (через свою значущість вона і була названа "центральною", так її вперше назвав Д. Пойа). Різні форми центральної граничної теореми відрізняються між собою умовами, які накладаються на розподіли, що власне утворюють суму випадкових доданків. Цю теорему можна схематично сформулювати так:

Які б не були розподіли випадкових величин X_i, при деяких досить загальних умовах, сума $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ має закон розподілу, близький до нормального з параметрами $a = \sum_{i=1}^{n} M\left(X_i\right)$, $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2\left(X_i\right)$.

Центральна гранична теорема та її узагальнення пояснюють, чому в природі нормальний розподіл зустрічається так часто, особливо у зв'язку з величинами, які складені з багатьох ("майже") однаково розподілених ("майже") незалежних випадкових компонент.

При розв'язуванні задач у теорії випадкових процесів використовують припущення про те, що потоки подій, які визначають випадкові процеси, є пуассонівськими. Пояснюється це тим, що пуассонівський потік є граничним для різних потоків. Зокрема сумарний потік великої кількості потоків різної структури, при виконанні певних умов, є пуассонівським. Аналогічно, якщо "проріджувати" випадково довільний потік Пальма, то отриманий потік наближається до пуассонівського.

Гранична теорема для сумарного потоку визначає умови, при яких сума незалежних, ординарних, стаціонарних потоків подій збігається до пуассонівського стаціонарного (найпростішого) потоку. При цьому вимоги, яким повинні відповідати потоки, аналогічні вимогам до випадкових величин у центральній граничній теоремі: потоки повинні "майже" однаково впливати на сумарний потік, тобто серед потоків, що утворюють суму, не повинно бути потоків зі значно великою або значно малою інтенсивністю.

При збільшенні числа потоків збіжність сумарного потоку до пуассонівського здійснюється досить швидко. Як зазначається в [5, с. 80], в інженерній практиці сума 5–7 незалежних потоків, інтенсивності яких мають однаковий порядок, вважається потоком Пуассона.

Означення. Сумою двох потоків Π_1 і Π_2 називається потік $\Pi^{(2)}$, у якому моменти появи подій складаються з моментів появи подій у потоках Π_1 і Π_2 (рис. 1.9).

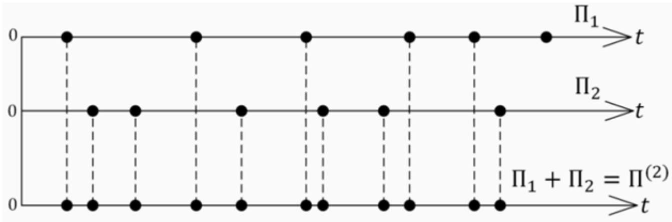

Рисунок 1.9

Зрозуміло, що результат суми двох стаціонарних потоків Π_1 і Π_2 – стаціонарний потік $\Pi^{(2)}$, інтенсивність якого дорівнює сумі відповідних інтенсивностей потоків Π_1 і Π_2:

$$\lambda^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_2. \tag{1.21}$$

Зауважимо, що сума n *стаціонарних потоків – стаціонарний потік*, інтенсивність якого дорівнює сумі інтенсивностей відповідних потоків. Результат додавання *ординарних потоків – ординарний потік*.

Сума n *незалежних стаціонарних ординарних потоків* є стаціонарним ординарним потоком, інтенсивність якого визначається за формулою:

$$\lambda^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{1.22}$$

де λ_i – інтенсивність k-го потоку Π_i.

Означення. Два потоки Π_1 і Π_2 називаються незалежними, якщо закон розподілу числа появи подій за будь-який проміжок часу в одному потоці не залежить від того, скільки подій відбулося за будь-який проміжок часу в іншому потоці.

Як відмічено в [5, с. 89], результати статистичних випробувань показали, що всі висновки, які стосуються *стаціонарних однорідних потоків*, характерні і для *нестаціонарних потоків*.

Якщо розглядається сума достатньо великої кількості ординарних незалежних (або слабозалежних) потоків з порівнянними інтенсивностями, то сумарний потік подій є близьким до пуассонівського з інтенсивністю:

$$\lambda^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \tag{1.23}$$

де $\lambda_i(t)$ – інтенсивність i-го потоку Π_i.

Зауважимо, що пуассонівський потік має властивість стійкості до операції додавання: *сума незалежних пуассонівських потоків* також є пуассонівським потоком. Ця властивість широко використовується при розв'язанні багатьох інженерних задач.

Питання для самоперевірки

1. Що називається потоком подій?
2. Який потік подій називається регулярним?
3. Який потік подій називається ординарним?
4. Який потік подій називається потоком без післядії?
5. Що називається інтенсивністю потоку подій?
6. Який потік подій називається пуассонівським?
7. Який потік подій називається стаціонарним?
8. Який потік подій називається найпростішим?
9. Який потік подій називається потоком Пальма?
10. Який потік подій називається потоком Ерланга k-го порядку?
11. Що називається сумою двох потоків Π_1 і Π_2?
12. Сформулюйте властивість стійкості пуассонівського потоку відносно операції додавання.

2 ДИСКРЕТНИЙ МАРКОВСЬКИЙ ПРОЦЕС З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

2.1 Опис процесу Маркова з дискретними станами та неперервним часом

У посібнику [11, с. 54–76] аналізувалися випадкові процеси зі скінченною множиною станів s_1, s_2, …, s_n, які залежать від дискретного параметра. У них зміни можуть відбуватися лише у фіксовані моменти часу $t = 0, 1, ...,$ причому стан системи в наступний момент залежить лише від того, у якому стані система перебуває в даний момент часу і не залежить ні від динаміки переходів зі стану в стан у попередні моменти часу, ні від того, як система потрапила в теперішній стан. У цьому розділі ми будемо вивчати стохастичні процеси, які є залежними від неперервного параметра. У системах, у яких відбуваються такі процеси, переходи з одного стану в інший можливі в будь-які моменти часу. Вказані стохастичні процеси застосовуються в різних розділах природознавства, техніки та економіко-математичного моделювання.

Нехай досліджується деяка система S, яка в кожний фіксований момент часу $t = t_i$ може перебувати в одному з несумісних станів $s_1, s_2, \ldots, s_n$. У загальному випадку число станів системи може бути як скінченним, так і зліченним. При вивченні випадкових процесів, які відбуваються в системах з дискретними станами, важливу роль відіграють *ймовірності станів*.

Означення. Ймовірність події, яка полягає в тому, що в момент t система S буде знаходитися в стані s_i, називається *ймовірністю* i-го *стану в момент часу* t:

$$p_i(t) = P\big(S(t) = s_i\big), \ i = 1, 2, \ldots n. \tag{2.1}$$

Оскільки для будь-якого t випадкові події $S(t) = s_i$, $i = 1, 2, \ldots n$ попарно несумісні та утворюють повну групу подій, то сума ймовірностей цих подій для кожного t дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1. \tag{2.2}$$

Означення. Випадковий процес, який відбувається в будь-якій системі S з дискретними станами, називається *марковським (процесом без післядії)*, якщо для будь-якого моменту часу t_0 ймовірність будь-якого стану системи в майбутньому (при $t > t_0$) залежить лише від його стану в теперішньому (при $t = t_0$) і не залежить від того, як і скільки часу цей процес розвивався в минулому (при $t < t_0$).

Іншими словами, для *марковського випадкового процесу* при фіксованому теперішньому майбутнє не залежить від минулого.

На практиці марковські процеси у чистому вигляді зустрічаються не досить часто, але достатньо часто зустрічаються процеси, які з певним наближенням можна вважати марковськими. *Марковські процеси* є одним із важливих розділів економіко-математичного моделювання; вони визначають окремий вид ймовірнісних моделей різноманітних процесів, що відбуваються у фінансово-економічних системах.

Будемо вважати, що переходи системи S зі стану s_i у стан s_j відбуваються під впливом деякого потоку подій. Теорію марковських процесів з дискретними станами і неперервним часом вивчають у припущенні, що переходи зі стану в стан у системі відбуваються під впливом *пуассонівських потоків подій* (не обов'язково стаціонарних). Саме властивість відсутності післядії в потоці Пуассона дозволяє при фіксованому теперішньому стані (стан s_i системи в момент часу t) не враховувати, як і коли система набула цього стану.

Зауважимо, що як тільки настає перша подія потоку після деякого моменту часу t_0, то система S відразу переходить зі стану s_i у стан s_j. Таким чином, перехід системи S зі стану s_i у стан s_j відбувається під впливом лише першої події потоку Π_{ij}, хоча теоретично цей перехід пояснюється впливом "усього" потоку подій Π_{ij}, що дозволяє використовувати поняття інтенсивності $\lambda(t)$ потоку $\Pi_{ij.}$

Слід зазначити, що, на відміну від ланцюгів Маркова (випадкового процесу Маркова з дискретними станами і дискретним часом), замість ймовірностей переходу $p_{ij}(k)$ [11, с. 55], для процесу Маркова із неперервним часом використовують інші характеристики – *щільності ймовірностей переходу* λ_{ij} зі стану s_i у стан s_j.

Розглянемо детальніше це поняття. Нехай $p_{ij}(t;\ \Delta t)$, $i \neq j$, $\Delta t > 0$ – ймовірність того, що система S, яка знаходиться в стані s_i, за проміжок часу $(t; t+\Delta t)$ перейде зі стану s_i у стан s_j.

Зауважимо, що $p_{ij}(t;\ \Delta t)=0,\ i\neq j,$ якщо:

- система S у момент часу t не знаходилась у стані s_i;
- система S у момент часу t знаходилась у стані s_i, але за час Δt вона перейшла у стан s_k, відмінний від стану s_j: $j\neq k$;
- система S у момент часу t знаходилась у стані s_i і протягом проміжку часу Δt залишалась у цьому стані: $p_{ii}(t;\ \Delta t)=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots\ n.$

Означення. Щільністю ймовірності переходу системи S зі стану s_i у стан s_j у момент часу t називається величина

$$\lambda_{ij}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ij}(t;\Delta t)}{\Delta t}. \tag{2.3}$$

З рівності (2.3) маємо

$$p_{ij}(t;\Delta t)\approx\lambda_{ij}(t)\cdot\Delta t,\ \ \Delta t\to 0. \tag{2.4}$$

Отже, в загальному випадку $\lambda_{ij}(t)$ є функцією від t; $\lambda_{ij}(t)$ набуває невід’ємних значень, на відміну від $p_{ij}(t;\ \Delta t)$, може приймати значення, які більші за 1; $\lambda_{ii}(t)=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$

Теорема 2.1. Щільність ймовірності переходу $\lambda_{ij}(t)$ системи S зі стану s_i у стан s_j у момент часу t під впливом пуассонівського потоку Π_{ij} дорівнює інтенсивності $\lambda(t)$ потоку Π_{ij}.

Доведення

Згідно з формулою (2.4) ймовірність того, що система S за проміжок часу Δt перейде зі стану s_i у стан s_j, дорівнює

$$p_{ij}(t;\ \Delta t)\approx\lambda_{ij}(t)\cdot\Delta t,\ \ \Delta t\to 0.$$

Ця ймовірність – це ймовірність того, що за час Δt відбулася хоча б одна подія пуассонівського потоку, під впливом якої відбувається перехід системи S зі стану s_i у стан s_j.

Для стаціонарного потоку Пуассона ймовірність появи хоча б однієї події за час Δt, згідно з (1.3), дорівнює

$$P_{\Delta t}(k\geq 1)=1-P_{\Delta t}(0)=1-e^{-\lambda\Delta t}.$$

Використовуючи розвинення функції $e^{-\lambda\Delta t}$ в ряд Маклорена

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda\Delta t + \frac{(\lambda\Delta t)^2}{2!} - \frac{(\lambda\Delta t)^3}{3!} + \ldots,$$

отримаємо наближену рівність:

$$e^{-\lambda\Delta t} \approx 1 - \lambda \cdot \Delta t,$$

тоді

$$P_{\Delta t}(k \geq 1) = 1 - P_{\Delta t}(0) = 1 - 1 + \lambda \cdot \Delta t = \lambda \cdot \Delta t, \;\; \Delta t \to 0.$$

Оскільки $p_{ij}(t;\Delta t) = P_{\Delta t}(k \geq 1)$, маємо

$$\lambda_{ij}(t) \cdot \Delta t = \lambda(t) \cdot \Delta t.$$

Отже,

$$\lambda_{ij}(t) = \lambda(t), \tag{2.5}$$

що й потрібно було довести.

Зауважимо ще раз, що для того, щоб випадковий процес із неперервним часом, який відбувається в системі з дискретними станами, був *марковським*, необхідно і достатньо, щоб всі потоки подій, що переводять систему зі стану в стан, *були пуассонівськими (стаціонарними чи нестаціонарними).*

У зв'язку з цим системи, у яких відбуваються марковські випадкові процеси з дискретними станами та неперервним часом, називають *пуассонівськими системами.*

Означення. Процес Маркова з дискретними станами і неперервним часом називається *однорідним*, якщо для будь-яких i та j, $i \neq j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ щільність ймовірності переходу $\lambda_{ij}(t)$ системи зі стану s_i до стану s_j не залежить від часу t, тобто $\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij} = \text{const}$.

Якщо ж хоча б для однієї пари $(i; j)$, $i \neq j$ щільність ймовірності переходу $\lambda_{ij}(t)$ залежить від t, то процес називається *неоднорідним.*

Надалі будемо розглядати однорідні марковські процеси з дискретними станами та неперервним часом.

Для наочності при дослідженні марковських випадкових процесів з дискретними станами і неперервним часом, як і у випадку ланцюгів

Маркова, зручно використовувати *графи станів системи.* У загальному випадку на графі прямокутниками позначають стани системи, а стрілками – можливі переходи зі стану в стан під впливом дії потоку з інтенсивністю λ_{ij}. На графі відображаються безпосередні переходи, а не переходи через інші стани.

Зокрема, на рис. 2.1 показано граф системи, у якій відбувається процес з неперервним часом. Відсутність стрілки між станами s_2 і s_1 вказує на те, що щільність ймовірності відповідного переходу дорівнює нулю: $\lambda_{21} = 0.$ Аналогічно маємо $\lambda_{31} = 0,$ $\lambda_{14} = 0,$ $\lambda_{43} = 0.$

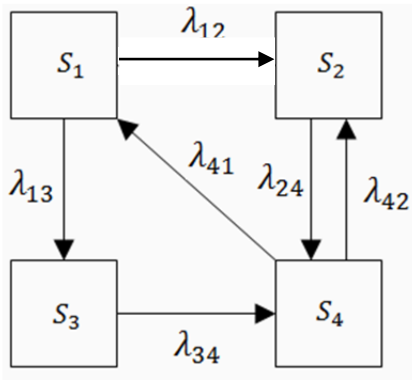

Рисунок 2.1

Щільності ймовірностей переходів λ_{ij}, як і перехідні ймовірності p_{ij} у випадку ланцюга Маркова, можна записати у вигляді квадратної матриці

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \lambda_{n3} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

де $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \ldots = \lambda_{nn} = 0.$

2.2 Диференціальні рівняння Колмогорова

Нехай досліджується деяка система $S,$ яка в кожний фіксований момент часу $t = t_i$ може перебувати в одному з несумісних станів

$s_1, s_2, \ldots, s_n$. Для опису випадкового процесу, який відбувається в системі, використовують ймовірності станів системи (2.1):

$$p_1(t),\ p_2(t),\ \ldots,\ p_n(t).$$

Якщо для кожної пари станів s_i і s_j відомі інтенсивності пуассонівського потоку подій λ_{ij}, то можна скласти диференціальні рівняння для ймовірностей станів.

Теорема 2.1. Ймовірності станів $p_i(t)$, де $i = 1, 2, \ldots, n$ системи S, у якій відбувається однорідний марковський процес з неперервним часом, є розв'язком системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -\left(\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \lambda_{ij}\right) \cdot p_i(t) + \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \lambda_{ji} p_j(t). \qquad (2.6)$$

Доведення

Розглянемо систему S, яка в кожен момент часу t може перебувати в одному із несумісних станів $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Надамо моменту часу t приріст Δt і знайдемо ймовірність $p_i(t+\Delta t)$ того, що в момент часу $t+\Delta t$ система буде знаходитись у стані s_i.

Ця подія може відбутися внаслідок однієї з подій

$$A_i(t, \Delta t) \text{ або } B_i(t, \Delta t)$$

де $A_i(t, \Delta t)$ – подія, яка полягає в тому, що система S у момент часу t знаходилась у стані s_i і за час Δt не вийшла з цього стану, тобто не перейшла в інший стан s_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $j \neq i$;

$B_i(t, \Delta t)$ – подія, яка полягає в тому, що система S у момент часу t знаходилась у деякому стані s_j, $j = 1, 2, \ldots, \ldots, n$, $j \neq i$, і за час Δt перейшла у стан s_i.

Оскільки події $A_i(t, \Delta t)$ та $B_i(t, \Delta t)$ – несумісні, то за теоремою про суму несумісних подій маємо

$$p_i(t+\Delta t) = P\left(A_i(t, \Delta t)\right) + P\left(B_i(t, \Delta t)\right). \qquad (2.7)$$

Подія $A_i(t, \Delta t)$ може бути подана у вигляді добутку двох подій:

$$A_i(t, \Delta t) = S_i(t) \cdot C_i(t, \Delta t)$$

де $S_i(t)$ – подія, яка полягає в тому, що система S у момент часу t знаходилась у стані s_i;

$C_i(t, \Delta t)$ – подія, яка полягає в тому, що система S протягом часу Δt залишалась у стані s_i.

Тоді за теоремою про ймовірність добутку залежних подій маємо

$$P\left(A_i(t, \Delta t)\right) = P\left(S_i(t) \cdot C_i(t, \Delta t)\right) = P\left(S_i(t)\right) \cdot P\left(C_i(t, \Delta t) / S_i(t)\right) = \\ = p_i(t) \cdot P\left(C_i(t, \Delta t) / S_i(t)\right). \tag{2.8}$$

Знайдемо ймовірність події $P\left(C_i(t, \Delta t) / S_i(t)\right)$. Розглянемо протилежну подію $\overline{C}_i(t, \Delta t)$, яка полягає в тому, що система S за час Δt перейде зі стану s_i до іншого стану s_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $j \neq i$. Зрозуміло, що

$$\overline{C}_i(t, \Delta t) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} D_{ij}(t, \Delta t)$$

де $D_{ij}(t, \Delta t)$, $j \neq i$ – подія, яка полягає в тому, що система S за час Δt перейде зі стану s_i до іншого стану s_j.

Оскільки події $D_{ij}(t, \Delta t)$ несумісні, маємо:

$$P\left(\overline{C}_i(t, \Delta t) / S_i(t)\right) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} P\left(D_{ij}(t, \Delta t) / S_i(t)\right) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} p_{ij}(t, \Delta t).$$

Враховуючи (2.4), маємо

$$P\left(\overline{C}_i(t, \Delta t) / S_i(t)\right) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_{ij} \cdot \Delta t.$$

Тоді

$$P\left(C_i(t, \Delta t) / S_i(t)\right) = 1 - P\left(\overline{C}_i(t, \Delta t) / S_i(t)\right) = 1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_{ij} \cdot \Delta t. \tag{2.9}$$

Підставляючи (2.9) у формулу (2.8), отримаємо

$$P\left(A_i\left(t,\Delta t\right)\right)=p_i\left(t\right)-\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ij}\right)p_i\left(t\right)\cdot\Delta t. \qquad (2.10)$$

Для обчислення ймовірності $B_i\left(t,\Delta t\right)$ розглянемо подію $E_j\left(t,\Delta t\right)$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ j\neq i,$ яка полягає в тому, що в момент часу t система знаходилась у стані s_j, а за час Δt перейде у стан s_i. Тоді

$$E_j\left(t,\Delta t\right)=S_j\left(t\right)\cdot F_{ji}\left(t,\Delta t\right)$$

де $S_j\left(t\right)$ – подія, яка полягає в тому, що система S у момент часу t знаходилась у стані s_j;

$F_{ji}\left(t,\Delta t\right)$ – подія, яка полягає в тому, що система S за час Δt перейде зі стану s_j у стан s_i.

Тоді за теоремою добутку ймовірностей залежних подій маємо

$$P\left(E_j\left(t,\Delta t\right)\right)=P\left(S_j\left(t\right)\cdot F_{ji}\left(t,\Delta t\right)\right)=P\left(S_j\left(t\right)\right)\cdot P\left(F_{ji}\left(t,\Delta t\right)/S_j\left(t\right)\right)=$$
$$=p_j\left(t\right)\cdot p_{ji}\left(t,\Delta t\right)=p_j\left(t\right)\cdot\lambda_{ji}\cdot\Delta t,\quad j=1,\ 2,\ \ldots n;\ j\neq i. \qquad (2.11)$$

Зрозуміло, що

$$B_i\left(t,\Delta t\right)=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}E_j\left(t,\Delta t\right),\ \ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ j\neq i,$$

тоді за теоремою про ймовірність суми несумісних подій маємо

$$P\left(B_i\left(t,\Delta t\right)\right)=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}P\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}E_j\left(t,\Delta t\right)\right)=\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ji}p_j\left(t\right)\right)\cdot\Delta t. \qquad (2.12)$$

Підставляючи (2.10) та (2.12) у (2.7), отримаємо

$$p_i\left(t+\Delta t\right)=p_i\left(t\right)-\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ij}\right)p_i\left(t\right)\cdot\Delta t+\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ji}p_j\left(t\right)\right)\cdot\Delta t,$$

звідси

$$\frac{p_i(t+\Delta t)-p_i(t)}{\Delta t}=-\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ij}\right)p_i(t)+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ji}p_j(t). \qquad (2.13)$$

Якщо у рівності (2.13) перейти до границі за умови $\Delta t\to 0,$ отримаємо диференціальне рівняння для функції $p_i(t)$:

$$\frac{dp_i(t)}{dt}=-\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ij}\right)p_i(t)+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ji}p_j(t),$$

яке співпадає з рівнянням системи (2.6) за умови, якщо $\lambda_{ii}=0$.

Таким чином, якщо розглядається однорідний процес Маркова, тобто λ_{ij} не залежить від $t,$ то система (2.6) є системою n звичайних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами. Якщо ж процес Маркова є неоднорідним, тобто хоча б один із коефіцієнтів λ_{ij} залежить від t, то маємо систему звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Система (2.6) називається системою ***диференціальних рівнянь Колмогорова***, на честь академіка А. М. Колмогорова, який запропонував вказаний метод аналізу марковських процесів із дискретними станами та неперервним часом.

Скласти систему диференціальних рівнянь Колмогорова можна, користуючись такими правилами.

Правило I. Для того, щоб скласти систему диференціальних рівнянь Колмогорова *за розміченим графом станів*, необхідно для кожної функції $p_i(t),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ у лівій частині рівняння записати похідну $\frac{dp_i(t)}{dt}$, а в правій – добуток ймовірності $p_i(t)$ стану s_i, взятої зі знаком "–", на суму щільностей ймовірностей λ_{ij} переходу зі стану s_i в інші стани s_j, плюс суму добутків ймовірностей всіх станів $p_j(t)$, із яких можливий перехід до стану s_i, на щільності ймовірностей відповідних переходів λ_{ji}, тобто

$$\frac{dp_i(t)}{dt}=-\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ij}\right)p_i(t)+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ji}p_j(t).$$

Зокрема, для розміченого графа станів, зображеного на рис. 2.1, система диференціальних рівнянь Колмогорова матиме вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})p_1(t) + \lambda_{41}p_4(t), \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda_{24}p_2(t) + \lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{42}p_4(t), \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = -\lambda_{31}p_3(t) + \lambda_{13}p_1(t), \\ \dfrac{dp_4(t)}{dt} = -(\lambda_{41} + \lambda_{42})p_4(t) + \lambda_{24}p_2(t) + \lambda_{34}p_3(t). \end{cases}$$

Правило II. Для того, щоб скласти систему диференціальних рівнянь Колмогорова *за матрицею щільностей ймовірностей переходу,* необхідно для кожної функції $p_i(t)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ у лівій частині рівняння записати похідну $\dfrac{dp_i(t)}{dt}$, а в правій – добуток ймовірності $p_i(t)$ стану s_i, взятої зі знаком “–”, на суму $\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{ij}$ елементів λ_{ij} i-го рядка матриці Λ, плюс суму $\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{ji}p_j(t)$ добутків $\lambda_{ji}p_j(t)$ елементів i-го стовпця матриці Λ на відповідні їм ймовірності $p_j(t)$, тобто

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -\left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\lambda_{ij}\right)p_i(t) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n}\lambda_{ji}p_j(t).$$

Зокрема, система диференціальних рівнянь Колмогорова для матриці щільностей переходів

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

матиме вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -5p_1(t) + 6p_2(t) + 1{,}5p_3(t), \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = -6p_2(t) + 2p_1(t) + 4p_3(t), \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = -5{,}5p_3(t) + 3p_1(t). \end{cases}$$

Зауважимо, що оскільки для довільного t виконується умова (2.2): $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1,$ то будь-яку ймовірність $p_i(t),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ можна виразити через інші ймовірності, що дозволить зменшити на одне число рівнянь системи (2.6).

Для того, щоб розв'язати систему (2.6), потрібно задати початковий розподіл ймовірностей

$$p_1(0),\ p_2(0),\ \ldots,\ p_n(0), \tag{2.14}$$

сума яких дорівнює одиниці: $\sum_{i=1}^{n} p_i(0) = 1.$

Зокрема, якщо в початковий момент $t = 0$ система перебувала у стані s_1, тобто $p_1(0) = 1,$ то всі інші ймовірності (2.14) дорівнюють нулю:

$$p_2(0) = p_3(0) = \ldots = p_n(0) = 0.$$

Приклад 2.1. Досліджується надійність роботи лічильника банкнот, який може перебувати в таких трьох станах: s_1 – лічильник справний, але не експлуатується; s_2 – лічильник справний та експлуатується; s_3 – лічильник несправний. Будемо вважати, що лічильник може вийти з ладу під час його експлуатації, при цьому негайний ремонт лічильника не відбувається. Зауважимо, що проміжок часу, протягом якого досліджується робота лічильника, невеликий, а щільності ймовірностей переходів практично не залежать від часу. Розмічений граф станів системи має вигляд (рис. 2.2).

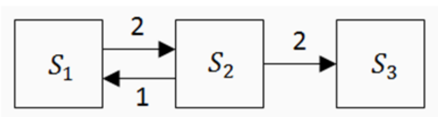

Рисунок 2.2

Потрібно знайти ймовірності станів лічильника в момент часу $t = 1,$ якщо в початковий момент часу, при $t = 0,$ лічильник був справним, але не експлуатувався.

Розв'язання

Оскільки лічильник може змінювати свої стани у випадкові моменти часу, а в кожний момент часу він може перебувати в одному зі станів s_1, s_2, s_3, то процес, який відбувається в системі S, є дискретним випадковим процесом з неперервним часом. Вказаний процес можна вважати процесом Маркова, оскільки стан лічильника в майбутньому істотно залежить від його стану в теперішній момент часу, а несуттєво – від його стану в минулому. Згідно з припущенням про незалежність щільностей ймовірностей переходів робимо висновок, що процес однорідний.

За розміченим графом станів системи складемо матрицю щільностей ймовірностей переходів, яка матиме вигляд

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ймовірності станів системи $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ як функції часу t. Складемо систему диференціальних рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -2p_1(t) + p_2(t), \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = -3p_2(t) + 2p_1(t), \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = 2p_2(t). \end{cases} \qquad (2.15)$$

Оскільки в початковий момент часу (при $t = 0$) лічильник був справний, але не експлуатувався, то $p_1(0) = 1, p_2(0) = 0, p_3(0) = 0.$

Перші два рівняння системи (2.15) не містять функції $p_3(t)$, тому розглянемо їх як систему двох рівнянь з двома невідомими функціями $p_1(t)$ і $p_2(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} + 2p_1(t) - p_2(t) = 0, \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} - 2p_1(t) + 3p_2(t) = 0. \end{cases} \qquad (2.16)$$

Розв'язок системи (2.16) будемо шукати у вигляді $p_1(t) = \gamma_1 e^{\lambda t}$, $p_2(t) = \gamma_2 e^{\lambda t}$, де γ_1, γ_2, λ – невідомі сталі, які потрібно знайти. Після підстановки значень $p_1(t)$, $p_2(t)$ в систему (2.16) і виконання перетворень отримаємо лінійну однорідну систему двох алгебраїчних рівнянь з невідомими γ_1 і γ_2:

$$\begin{cases} (2+\lambda)\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ -2\gamma_1 + (3+\lambda)\gamma_2 = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Система (2.17) має ненульовий розв'язок, якщо

$$\begin{vmatrix} 2+\lambda & -1 \\ -2 & 3+\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

звідки

$$\lambda^2 + 5\lambda - 4 = 0,$$
$$\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -1.$$

Якщо $\lambda = \lambda_2 = -4$, то система (2.17) має вигляд

$$\begin{cases} -2\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ -2\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \end{cases}$$

звідки $\gamma_2 = -2\gamma_1$. Зокрема, якщо $\gamma_1 = 1$, то $\gamma_2 = -2$. Отже,

$$p_1^{(1)}(t) = e^{-4t},\ p_2^{(1)}(t) = -2e^{-4t}. \tag{2.18}$$

Аналогічно, якщо $\lambda = \lambda_1 = -1$, то система (2.17) має вигляд

$$\begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ -2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

звідки $\gamma_2 = \gamma_1$. Зокрема, якщо $\gamma_1 = 1$, то $\gamma_2 = 1$. Отже,

$$p_1^{(2)}(t) = e^{-t},\ p_2^{(2)}(t) = e^{t}. \tag{2.19}$$

Використовуючи (2.18), (2.19), знайдемо загальний розв'язок системи (2.16):

$$\begin{cases} p_1(t) = C_1 p_1^{(1)}(t) + C_2 p_1^{(2)}(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t}, \\ p_2(t) = C_1 p_2^{(1)}(t) + C_2 p_2^{(2)}(t) = -2C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t} \end{cases} \tag{2.20}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Використовуючи (2.20), знайдемо частинний розв'язок системи (2.16), який задовольняє початкові умови $p_1(0)=1,\ p_2(0)=0$:

$$\begin{cases} p_1(0)=C_1+C_2=1, \\ p_2(0)=-2C_1+C_2=0, \end{cases}$$

звідки $C_1=\dfrac{1}{3},\ C_2=\dfrac{2}{3}$. Підставивши ці значення в (2.20), отримаємо частинний розв'язок системи (2.16), що задовольняє початкові умови:

$$\begin{cases} p_1(t)=\dfrac{1}{3}e^{-4t}+\dfrac{2}{3}e^{-t}, \\ p_2(t)=-\dfrac{2}{3}e^{-4t}+\dfrac{2}{3}e^{-t}. \end{cases}$$

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{3} p_i(t)=1$, то

$$p_3(t)=1-\left(p_1(t)+p_2(t)\right)=\frac{1}{3}e^{-4t}-\frac{4}{3}e^{-t}+1.$$

Зауважимо, що $p_3(t)$ можна було також знайти з третього рівняння системи (2.15).

Таким чином,

$$\begin{cases} p_1(t)=\dfrac{1}{3}e^{-4t}+\dfrac{2}{3}e^{-t}, \\ p_2(t)=-\dfrac{2}{3}e^{-4t}+\dfrac{2}{3}e^{-t}, \\ p_3(t)=\dfrac{1}{3}e^{-4t}-\dfrac{4}{3}e^{-t}+1. \end{cases} \tag{2.21}$$

Отже, ймовірності станів системи S у момент часу $t=1$ дорівнюють

$$p_1(1)=\frac{1}{3}e^{-4}+\frac{2}{3}e^{-1}\approx 0,252,$$

$$p_2(1)=-\frac{2}{3}e^{-4}+\frac{2}{3}e^{-1}\approx 0,234,$$

$$p_3(1)=\frac{1}{3}e^{-4}-\frac{4}{3}e^{-1}+1\approx 0,514.$$

Таким чином, при заданому розміченому графі станів системи (див. рис. 2.2) і початкових умовах $p_1(0)=1,\ p_2(0)=0,\ p_3(0)=0$ ймовірність того, що в момент часу $t=1$ лічильник

- був справним, але не експлуатувався, наближено дорівнює $0,252$;
- був справним та експлуатувався, наближено дорівнює $0,234$;
- був несправний, наближено дорівнює $0,514$.

Отже, для заданих умов якість роботи лічильника на момент часу $t=1$ потребує покращення.

2.3 Стаціонарний режим. Граничні ймовірності станів системи

У випадку застосування теорії марковських процесів до дослідження фінансово-економічних систем розглядаються процеси, які відбуваються в системах протягом достатньо великого проміжку часу, тобто коли початкові умови вже не мають значного впливу на перебіг процесу. За таких умов виникає питання про граничні ймовірності станів системи $p_i(t)$ при $t\to\infty.$ В окремих випадках у системі може встановитися *граничний стаціонарний режим процесу*, коли ймовірності станів системи не залежать ні від часу, ні від початкового розподілу ймовірностей.

Нехай у системі S з дискретними станами $s_1, s_2,\ \dots,\ s_n$ відбувається марковський процес із неперервним часом. Якщо всі потоки подій, що переводять систему зі стану в стан, є найпростішими (стаціонарними пуассонівськими потоками зі сталими інтенсивностями λ_{ij}), в окремих випадках існують *граничні (фінальні) ймовірності станів*

$$p_i=\lim_{t\to\infty}p_i(t),\quad i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n, \tag{2.22}$$

які не залежать від того, у якому стані знаходилася система S у початковий момент. Це означає, що в системі встановився *граничний стаціонарний режим*, при якому система переходить зі стану в стан, але ймовірності станів вже не змінюються.

Означення. Ймовірності станів системи в граничному стаціонарному режимі називаються *граничними (фінальними, стаціонарними) ймовірностями і* позначаються $p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_n,$ а вектор $p=(p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_k,\ \dots),$ координатами якого є граничні ймовірності, називається *граничним (фінальним, стаціонарним)* вектором.

Для марковського процесу з неперервним часом умови існування граничного стаціонарного режиму визначає наступна теорема.

Теорема 2.2. Якщо число станів системи S скінченне, система є ергодичною, потоки подій, під впливом яких відбувається перехід системи зі стану в стан, є найпростішими, то існують граничні ймовірності станів, які не залежать ні від часу, ні від початкового стану системи S.

Якщо граничні ймовірності (2.22) існують, то для них виконується *нормувальна умова*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (2.23)$$

Нагадаємо, що система називається *ергодичною*, якщо з будь-якого стану за скінченне число кроків може перейти в будь-який інший стан.

Наприклад, граф станів ергодичної системи показано на рис. 2.3, а на рис. 2.4 – граф неергодичної системи.

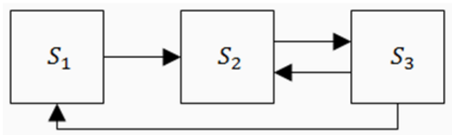

Рисунок 2.3

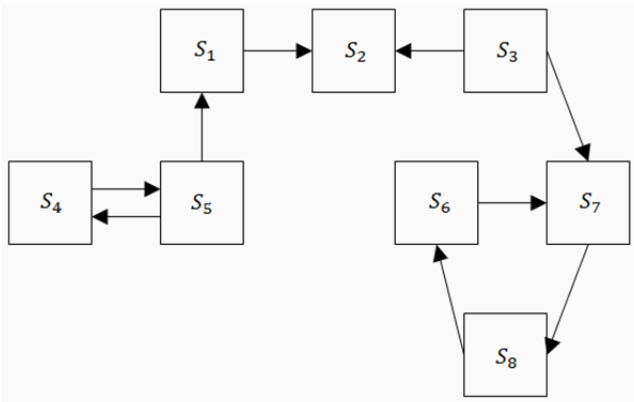

Рисунок 2.4

Граничну ймовірність p_i можна розглядати як середній відносний час перебування системи S у стані s_i після того, як у системі встановився граничний стаціонарний режим.

Граничні ймовірності станів (якщо вони існують) можна знайти із системи диференціальних рівнянь Колмогорова (2.6), яка перетворюється в систему n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно n невідомих p_i, якщо врахувати, що похідні сталих дорівнюють нулю:

$$-\left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_{ij}\right) p_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_{ji} p_j = 0, i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.24}$$

Однорідна система (2.24) має безліч ненульових розв'язків $(p_1,$ $p_2,\ \ldots,\ p_n)$. З цих розв'язків потрібно знайти той, що задовольняє *нормувальну умову* (2.23).

Запишемо систему (2.24) у вигляді

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_{ij} p_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_{ji} p_j,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.25}$$

Скласти систему (2.25) можна, користуючись таким правилом.

Правило I. Сума $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_{ij} p_i$ добутків щільностей ймовірностей переходів λ_{ij} зі стану s_i в інші стани s_j на граничні ймовірності p_i стану s_i дорівнює сумі $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_{ji} p_j$ добутків щільностей ймовірностей переходів λ_{ji} зі станів s_j у стан s_i на граничні ймовірності p_j станів s_j, тобто для кожного стану сумарний вихідний потік ймовірності дорівнює сумарному вхідному потоку.

Наприклад, для системи S, розмічений граф станів якої показано на рис. 2.5,

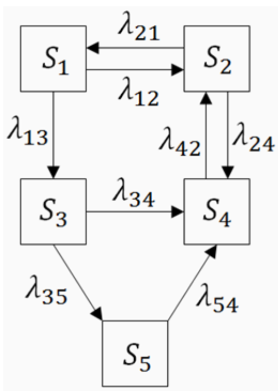

Рисунок 2.5

система рівнянь для фінальних ймовірностей станів має вигляд

$$\begin{cases} \left(\lambda_{12}+\lambda_{13}\right)p_1=\lambda_{21}p_2, \\ \left(\lambda_{21}+\lambda_{24}\right)p_2=\lambda_{12}p_1+\lambda_{42}p_4, \\ \left(\lambda_{34}+\lambda_{35}\right)p_3=\lambda_{13}p_1, \\ \lambda_{42}p_4=\lambda_{24}p_2+\lambda_{34}p_3+\lambda_{54}p_5, \\ \lambda_{54}p_5=\lambda_{35}p_3. \end{cases}$$

Систему (2.24) можна скласти за матрицею щільностей ймовірностей переходів

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1i} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2i} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{i1} & \lambda_{i2} & \dots & \lambda_{ii} & \dots & \lambda_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{ni} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

Правило ІІ. Для того, щоб скласти i-те рівняння системи (2.25) за матрицею Λ, необхідно суму $\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ij}p_i$ добутків елементів i-го рядка матриці Λ на граничну ймовірність p_i дорівняти до суми $\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ji}p_j$ добутків елементів i-го стовпця матриці Λ на відповідні граничні ймовірності p_j.

Зауважимо, що якщо система S зі скінченним числом станів, в якій відбувається однорідний марковський процес із неперервним часом, не є ергодичною, то для неї також існують граничні ймовірності станів, але вони залежать від початкового розподілу ймовірностей.

Питання для самоперевірки

1. Який випадковий процес називається процесом Маркова?
2. Який марковський дискретний процес називається процесом з неперервним часом? У чому його відмінність від марковського дискретного процесу з дискретним часом?

3. Що називається щільністю ймовірності переходу системи S зі стану s_i у стан s_j?
4. Який процес Маркова з дискретними станами і неперервним часом називається однорідним?
5. Який процес Маркова з дискретними станами і неперервним часом називається неоднорідним?
6. Сформулюйте теорему про систему диференціальних рівнянь Колмогорова.
7. Сформулюйте правило складання системи диференціальних рівнянь Колмогорова за розміченим графом станів.
8. Сформулюйте правило складання системи диференціальних рівнянь Колмогорова за матрицею щільностей ймовірностей переходів.
9. Що називається граничними ймовірностями станів системи?
10. Сформулюйте теорему, яка для дискретного марковського процесу з неперервним часом визначає умови існування граничного стаціонарного режиму.
11. Сформулюйте правила складання системи рівнянь для граничних ймовірностей станів.

3 ОДНОРІДНІ ПРОЦЕСИ РОЗМНОЖЕННЯ ТА ВИМИРАННЯ

3.1 Процеси розмноження та вимирання. Основні означення

Означення. Марковський процес із неперервним часом, який відбувається в системі S зі скінченним числом станів, називається *процесом розмноження та вимирання,* якщо граф станів системи має структуру, зображену на рис. 3.1.

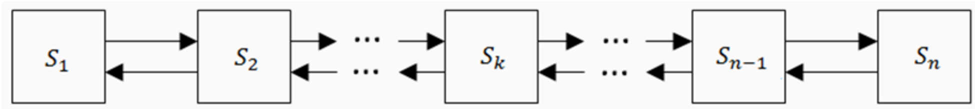

Рисунок 3.1

Таким чином, система S, в якій відбувається процес розмноження та вимирання, може з будь-якого свого стану (окрім крайніх) перейти лише в один із сусідніх станів (попередній і наступний), при цьому під "розмноженням" розуміють процес переходу системи зі стану s_i у наступний стан s_{i+1}, під "вимиранням" – процес переходу зі стану s_i у попередній стан s_{i-1}.

Описаний клас випадкових процесів почали вивчати у зв'язку з необхідністю дослідження динаміки зміни чисельності популяцій, де стан популяції s_k означає наявність у популяції k одиниць; поширення епідемій, зміни складу населення у зв'язку з його міграцією; зміни радіаційного фону, зміни кількості фірм в умовах конкуренції тощо. Якщо вважати, що стани системи описують кількісний склад деякої популяції, то перехід зі стану s_i у стан s_{i+1} означає збільшення популяції на одного індивіда, а перехід зі стану s_i у стан s_{i-1} – зменшення популяції на одного індивіда. У зв'язку з такою інтерпретацією стохастичного процесу всі процеси, що вкладаються в таку схему, називаються *процесами розмноження та вимирання.*

Зауважимо, що число станів системи n може бути як скінченним, так і нескінченним (зчисленним).

Означення. Марковським *процесом розмноження та вимирання з неперервним часом* називається випадковий процес, який може набувати лише цілих невід'ємних значень; зміни цього процесу можуть відбуватися в будь-які моменти часу t, при цьому він може або збільшитися на одиницю, або зменшитися на одиницю, або залишитися без змін.

Розглянемо розмічений граф процесу розмноження та вимирання з неперервним часом (рис. 3.2).

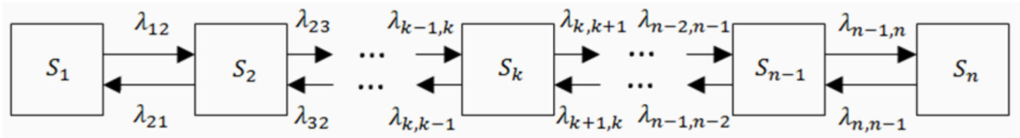

Рисунок 3.2

Матриця щільностей ймовірностей переходів процесу розмноження та вимирання має вигляд:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{21} & 0 & \lambda_{23} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1n-2} & 0 & \lambda_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.1)$$

Користуючись правилом складання системи диференціальних рівнянь Колмогорова (див. теорему 2.1), отримаємо систему диференціальних рівнянь для ймовірностей станів $p_1(t),\ p_2(t),\ \dots,\ p_n(t)$:

$$\begin{cases} p_1'(t) = -\lambda_{12} p_1(t) + \lambda_{21} p_2(t), \\ p_k'(t) = -\left(\lambda_{k\,k-1} + \lambda_{k\,k+1}\right) p_k(t) + \lambda_{k-1k} p_{k-1}(t) + \\ +\lambda_{k+1k} p_{k+1}(t), \quad k = 2, 3, \dots, n-1, \\ p_n'(t) = -\lambda_{n\,n-1} p_n(t) + \lambda_{n-1n} p_{n-1}(t). \end{cases} \qquad (3.2)$$

Зауважимо, що якщо марковський процес є однорідним (стаціонарні пуассонівські потоки), то щільності ймовірностей переходів (інтенсивності потоків) λ_{ij} у системі (3.2) не залежать від часу t; якщо марковський процес неоднорідний, то λ_{ij} є функціями часу: $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$.

Для інтегрування системи (3.2) необхідно задати початкові ймовірності $p_1(0),\ p_2(0),\ \dots,\ p_n(0)$, які задовольняють умову $\sum_{i=1}^{n} p_i(0) = 1.$

Розв'язок системи (3.2) також у будь-який момент часу t повинен задовольняти *нормувальну умову*:

$$p_1(t) + p_2(t) + \ldots + p_n(t) = 1.$$

Аналіз розміченого графа (див. рис. 3.2) показує, що система S є ергодичною; усі потоки, які переводять систему зі стану в стан, – найпростіші, тому за теоремою 2.2 робимо висновок про існування граничних ймовірностей станів $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$.

Теорема 3.1. Граничні ймовірності станів $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ процесу розмноження і вимирання з неперервним часом обчислюються за такими формулами:

$$\begin{cases} p_1 = \left(1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \alpha_k\right)^{-1}, \\ p_k = \alpha_k \cdot p_1, \quad k = 2,\ \ldots,\ n \end{cases} \tag{3.3}$$

де $$\alpha_k = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23} \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1k}}{\lambda_{k\,k-1} \cdot \lambda_{k-1k-2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{21}},\ k = 2,\ \ldots,\ n. \tag{3.4}$$

Доведення

За розміченим графом станів системи, у якій відбувається процес розмноження та вимирання (див. рис. 3.2), складемо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -\lambda_{12} p_1 + \lambda_{21} p_2 = 0, \\ -\left(\lambda_{k\,k-1} + \lambda_{k\,k+1}\right) p_k + \lambda_{k-1k} p_{k-1} + \lambda_{k+1k} p_{k+1} = 0, \\ k = 2, 3, \ldots, n-1, \\ -\lambda_{nn-1} p_n + \lambda_{n-1n} p_{n-1} = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Матриця коефіцієнтів при невідомих системи (3.5) має вигляд

$$\begin{pmatrix} -\lambda_{12} & \lambda_{21} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & -\lambda_{21} & \lambda_{32} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{23} & -\lambda_{23} - \lambda_{34} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda_{n-2n-3} - \lambda_{n-2\,n-1} & \lambda_{n-1n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-2\,n-1} & -\lambda_{n-1n-2} - \lambda_{n-1n} & \lambda_{n\,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_{n-1n} & -\lambda_{n\,n-1} \end{pmatrix}$$

Виконаємо елементарні перетворення:

- 1-й рядок додамо до 2-го рядка;
- отриманий 2-й рядок додамо до третього рядка і т.д.;
- отриманий $(n-1)$-й рядок додамо до n-го рядка.

У результаті перетворень отримаємо матрицю:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_{12} & \lambda_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{23} & \lambda_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{34} & \lambda_{43} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_{n-2n-1} & \lambda_{n-1n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_{n-1n} & \lambda_{nn-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.6)$$

За матрицею (3.6) запишемо систему лінійних рівнянь для граничних ймовірностей станів $p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_n$:

$$\begin{cases} -\lambda_{12}p_1 + \lambda_{21}p_2 = 0, \\ -\lambda_{23}p_2 + \lambda_{32}p_3 = 0, \\ -\lambda_{34}p_3 + \lambda_{43}p_4 = 0, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ -\lambda_{n-2n-1}p_{n-2} + \lambda_{n-1n-2}p_{n-1} = 0, \\ -\lambda_{n-1n}p_{n-1} + \lambda_{nn-1}p_n = 0. \end{cases} \qquad (3.7)$$

Нормувальна умова для ймовірностей $p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_n$ має вигляд

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots\dots + p_n = 1. \qquad (3.8)$$

З першого рівняння системи (3.7), враховуючи (3.4) при $k = 2,$ маємо

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1 = \alpha_2 p_1. \qquad (3.9)$$

З другого рівняння системи (3.7), враховуючи (3.9) і (3.4) при $k = 3,$ маємо

$$p_3 = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23}}{\lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} p_1 = \alpha_3 p_1. \qquad (3.10)$$

З третього рівняння системи (3.7), враховуючи (3.10) і (3.4) при $k = 4,$ маємо

$$p_4 = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23} \cdot \lambda_{34}}{\lambda_{43} \cdot \lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} p_1 = \alpha_4 p_1. \qquad (3.11)$$

Виконуючи аналогічні перетворення, отримаємо

$$p_n = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23} \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1n}}{\lambda_{nn-1} \cdot \lambda_{n-1n-2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{21}} p_1 = \alpha_n p_1. \tag{3.12}$$

Отже, справедливість формули $p_k = \alpha_k \cdot p_1$, $k = 2, \ldots, n$ доведена.

Підставивши (3.9), (3.10), (3.12) в нормувальну умову (3.8), отримаємо

$$p_1 + \alpha_2 p_1 + \alpha_3 p_1 + \ldots\ldots + \alpha_n p_1 = 1,$$

звідки

$$p_1 \cdot \left(1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n p\right) = 1,$$

$$p_1 = \left(1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k\right)^{-1}.$$

Таким чином, теорема доведена.

Зауважимо, що у формулах (3.3) всі граничні ймовірності виражені через граничну ймовірність p_1. При розв'язуванні системи (3.7) їх можна було виразити і через іншу граничну ймовірність.

Достатньо часто нумерацію станів системи S починають не з одиниці, а з нуля: $s_0, s_1, \ldots, s_n$. У цьому випадку формули (3.3) і (3.4) набувають вигляду

$$\begin{cases} p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{-1}, \\ p_k = \alpha_k \cdot p_0, \quad k = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{3.13}$$

де $\alpha_k = \dfrac{\lambda_{01} \cdot \lambda_{12} \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1k}}{\lambda_{kk-1} \cdot \lambda_{k-1k-2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{10}}$, $k = 1, \ldots, n.$ (3.14)

Аналіз формул (3.3) і (3.13) показує, що правило обчислення граничних ймовірностей станів $p_1, p_2, \ldots, p_n$ процесу розмноження та вимирання з неперервним часом можна сформулювати таким чином: *гранична ймовірність будь-якого стану в схемі процесу розмноження та вимирання дорівнює дробу, в чисельнику якого міститься добуток всіх інтенсивностей "розмноження", розташованих лівіше s_k, а в знаменнику – добуток всіх інтенсивностей "вимирання", розташованих лівіше s_k, помножений на ймовірність крайнього лівого стану* (p_1 для (3.3) і p_0 для (3.13)).

3.2 Процеси чистого розмноження та вимирання

На практиці достатньо часто зустрічаються процеси чистого розмноження та чистого вимирання.

Означення. Процесом чистого розмноження називається такий процес розмноження та вимирання, у якого інтенсивності всіх потоків вимирання дорівнюють нулю.

Розмічений граф станів процесу чистого розмноження зі скінченним числом станів показано на рис. 3.3.

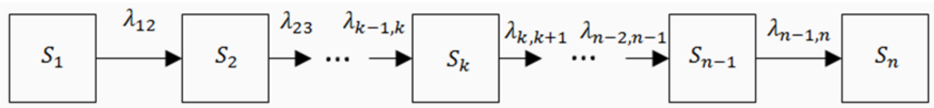

Рисунок 3.3

Система диференціальних рівнянь Колмогорова для процесу чистого розмноження зі скінченним числом станів може бути отримана із системи (3.2) за умови, якщо $\lambda_{k+1k} \equiv 0, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1$:

$$\begin{cases} p_1'(t) = -\lambda_{12} p_1(t), \\ p_k'(t) = \lambda_{k-1k} p_{k-1}(t) - \lambda_{kk+1} p_k(t), \\ \quad k = 2, 3, \ldots, n-1, \\ p_n'(t) = \lambda_{n-1n} p_{n-1}(t), \end{cases} \tag{3.15}$$

з початковою умовою $p_1(0) = 1$.

Означення. Процесом чистого вимирання називається такий процес розмноження та вимирання, у якого інтенсивності всіх потоків розмноження дорівнюють нулю.

Розмічений граф станів процесу чистого розмноження зі скінченним числом станів зображено на рис. 3.4.

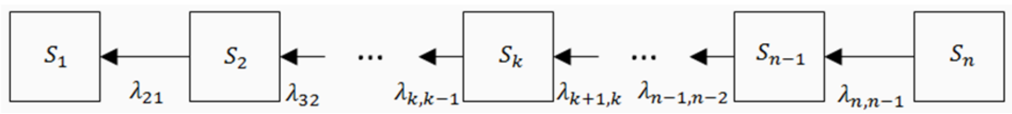

Рисунок 3.4

Система диференціальних рівнянь Колмогорова для процесу чистого вимирання зі скінченним числом станів може бути отримана із системи (3.2) за умови, якщо $\lambda_{k\,k+1} \equiv 0, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1$:

$$\begin{cases} p_1'(t) = \lambda_{21} p_2(t), \\ p_k'(t) = \lambda_{k+1k} p_{k+1}(t) - \lambda_{kk-1} p_k(t), \\ k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1, \\ p_n'(t) = -\lambda_{nn-1} p_n(t), \end{cases} \tag{3.16}$$

з початковою умовою $p_n(0) = 1$.

Зауважимо, що при дослідженні найпростіших процесів розмноження та вимирання нумерацію станів системи S починають з нуля: $s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_n$; "інтенсивності розмноження" позначають через $\lambda_i, \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, а "інтенсивності вимирання" – через μ_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

У цьому випадку розмічений граф *процесу чистого розмноження* має вигляд (рис. 3.5):

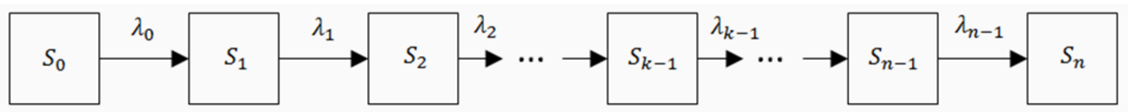

Рисунок 3.5

Розмічений граф *процесу чистого вимирання* матиме вигляд (рис. 3.6).

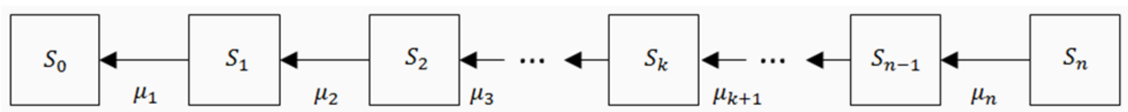

Рисунок 3.6

3.2.1 Процеси чистого розмноження

Розглянемо процес виробництва деяких виробів (банкоматів, автомашин, холодильників тощо). Нехай $X(t)$ – число виробів, виготовлених до моменту часу t, якщо $X(0) = 0$. Припустимо, що потік виготовлених виробів – найпростіший з параметром λ_k.

Потрібно знайти одновимірний закон розподілу випадкового процесу $X(t)$, а також математичне сподівання $m_x(t)$ та дисперсію $D_x(t)$ випадкового процесу $X(t)$.

Зазначений процес моделюється процесом чистого розмноження, розмічений граф якого зображено на рис. 3.5. Система диференціальних рівнянь Колмогорова (3.15) матиме вигляд

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t), \\ p_k'(t) = \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - \lambda_k p_k(t), \\ k = 1,\ 3,\ \ldots,\ n-1, \\ p_n'(t) = \lambda_{n-1} p_{n-1}(t), \end{cases} \tag{3.17}$$

з початковою умовою $p_0(0) = 1$.

Знайдемо розв'язок першого рівняння системи, що задовольняє початкову умову $p_0(0) = 1$:

$$\frac{dp_0}{dt} = -\lambda_0 p_0,$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = -\lambda_0 dt,$$

$$\int \frac{dp_0}{p_0} = \int -\lambda_0 dt,$$

$$\ln p_0 = -\lambda_0 t + \ln C,$$

$$\ln \frac{p_0}{C} = -\lambda_0 t,$$

$$p_0(t) = C \cdot e^{-\lambda_0 t},$$

тоді, враховуючи початкову умову, маємо

$$p_0(0) = 1 \Rightarrow 1 = C \cdot e^0 \Rightarrow C = 1.$$

Отже, частинний розв'язок першого рівняння системи (3.17) має вигляд

$$p_0(t) = e^{-\lambda_0 t}. \tag{3.18}$$

Розглянемо k-те рівняння системи (3.17), де $k=1,\ 3,\ \ldots,\ n-1$, та знайдемо його розв'язок методом варіації довільної сталої. Розв'яжемо спочатку відповідне однорідне рівняння

$$p_k'(t)+\lambda_k p_k(t)=0,$$
$$p_k'(t)=-\lambda_k p_k(t),$$
$$\int \frac{dp_k}{p_k}=\int -\lambda_k dt,$$
$$\ln p_k=-\lambda_k t+\ln C_k,$$
$$\ln \frac{p_k}{C_k}=-\lambda_k t,$$
$$p_k(t)=C_k\cdot e^{-\lambda_k t}.$$

Нехай $C_k=C_k(t)$, тоді

$$p_k(t)=C_k(t)\cdot e^{-\lambda_k t}, \tag{3.19}$$

звідки

$$p_k'(t)=C_k{}'(t)\cdot e^{-\lambda_k t}-\lambda_k C_k(t)e^{-\lambda_k t}.$$

Після підстановки значень $p_k(t)$ і $p_k'(t)$ у k-те рівняння маємо

$$C_k'(t)\cdot e^{-\lambda_k t}-\lambda_k C_k(t)e^{-\lambda_k t}=\lambda_{k-1}p_{k-1}(t)-\lambda_k C_k(t)e^{-\lambda_k t}$$
$$C_k'(t)\cdot e^{-\lambda_k t}=\lambda_{k-1}p_{k-1}(t),$$
$$C_k'(t)=\lambda_{k-1}p_{k-1}(t)e^{\lambda_k t}.$$

Таким чином,

$$C_k'(t)=\lambda_{k-1}p_{k-1}(t)e^{\lambda_k t}. \tag{3.20}$$

Проінтегрувавши обидві частини рівності (3.20) від 0 до t, отримаємо

$$\begin{gathered}C_k(t)-C_k(0)=\int_0^t \lambda_{k-1}p_{k-1}(\tau)e^{\lambda_k \tau}d\tau,\\ C_k(t)=C_k(0)+\int_0^t \lambda_{k-1}p_{k-1}(\tau)e^{\lambda_k \tau}d\tau.\end{gathered} \tag{3.21}$$

З урахуванням значення $C_k(t)$ (3.21) розв'язок (3.19) матиме вигляд

$$p_k(t)=\left(C_k(0)+\int_0^t \lambda_{k-1}p_{k-1}(\tau)e^{\lambda_k \tau}d\tau\right)\cdot e^{-\lambda_k t}.$$

Згідно з початковою умовою $p_k(0)=C_k(0)=0.$ Отже, отримаємо рекурентну формулу

$$p_k(t)=e^{-\lambda_k t}\int_0^t \lambda_{k-1}p_{k-1}(\tau)e^{\lambda_k\tau}d\tau, \tag{3.22}$$

яка разом з (3.18) дозволяє послідовно знайти ймовірності $p_0(t)$, $p_1(t)$, …, $p_{n-1}(t)$. Якщо $n<\infty$, тоді

$$p_n(t)=1-\sum_{k=0}^{n-1}p_k(t). \tag{3.23}$$

Математичне сподівання та дисперсію випадкового процесу $X(t)$ знаходять, використовуючи формули:

$$m_x(t)=M\big(X(t)\big)=\sum_{k=1}^{n}kp_k(t),$$

$$D_x(t)=D\big(X(t)\big)=\sum_{k=1}^{n}k^2p_k(t)-M^2\big(X(t)\big).$$

Розглянемо окремі випадки процесу чистого розмноження.

I. Процес чистого розмноження з інтенсивністю $\lambda_k=\lambda$.

Розглянемо процес чистого розмноження зі сталою інтенсивністю $\lambda_k=\lambda$ *(пуассонівський процес чистого розмноження)*, розмічений граф якого зображено на рис. 3.7.

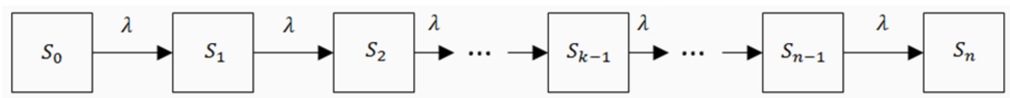

Рисунок 3.7

Знайдемо частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь Колмогорова (3.17), яка в цьому випадку має вигляд

$$\begin{cases} p_0'(t)=-\lambda p_0(t), \\ p_k'(t)=\lambda p_{k-1}(t)-\lambda p_k(t), \\ k=1,3,\dots,n-1, \\ p_n'(t)=\lambda p_{n-1}(t), \end{cases} \tag{3.24}$$

Згідно з (3.18)

$$p_0(t)=e^{-\lambda t},\quad t>0.$$

Використовуючи рекурентну формулу (3.22), отримаємо

$$k=1 \Rightarrow p_1(t)=e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda p_0(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau = e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau}\cdot e^{\lambda\tau}d\tau = e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda d\tau = \lambda t e^{-\lambda t};$$

$$k=2 \Rightarrow p_2(t)=e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda p_1(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau = e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda^2 \tau e^{-\lambda\tau}\cdot e^{\lambda\tau}d\tau = e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda^2 \tau d\tau = \frac{(\lambda t)^2}{2}e^{-\lambda t}.$$

Аналогічно

$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \quad t>0,\ k\ge 0.$$

Таким чином, *процес чистого розмноження зі сталою інтенсивністю* λ в момент часу t є випадкове число народжень $X(t)$ в інтервалі $(0;\, t)$, яке розподілене за законом Пуассона з параметром λt. Отже,

- $p_n(t)=1-\sum_{k=0}^{n-1} p_k(t),\ n<\infty;$
- $M\big(X(t)\big)=D\big(X(t)\big)=\lambda t;$
- інтервал між сусідніми народженнями – випадкова величина, розподілена за показниковим законом з параметром λ.

II. Процес чистого розмноження з інтенсивністю $\lambda_k = k\lambda,\ k\ge 1.$

Розглянемо процес чистого розмноження з інтенсивністю $\lambda_k = k\lambda$ *(геометричний процес чистого розмноження)*, розмічений граф якого зображено на рис. 3.8.

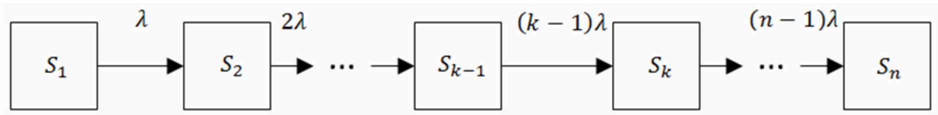

Рисунок 3.8

Знайдемо частинний розв’язок системи диференціальних рівнянь Колмогорова (3.17), яка для цього випадку має вигляд

$$\begin{cases} p_1'(t)=-\lambda p_1(t), \\ p_k'(t)=(k-1)\lambda p_{k-1}(t)-k\lambda p_k(t), \\ k=1,\ 3,\ \ldots,\ n-1, \\ p_n'(t)=(n-1)\lambda p_{n-1}(t). \end{cases} \qquad (3.25)$$

Згідно з (3.18)

$$p_1(t)=e^{-\lambda t},\ \ t>0.$$

Використовуючи рекурентну формулу (3.22), отримаємо

$$k=2\Rightarrow p_2(t)=e^{-2\lambda t}\int_0^t \lambda p_1(\tau)e^{2\lambda\tau}d\tau=e^{-2\lambda t}\int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau}\cdot e^{2\lambda\tau}d\tau=\lambda e^{-2\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau}d\tau=$$

$$=e^{-2\lambda t}\cdot\left(e^{\lambda t}-1\right)=e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right);$$

$$k=3\Rightarrow p_3(t)=e^{-3\lambda t}\int_0^t 2\lambda p_2(\tau)e^{3\lambda\tau}d\tau=e^{-3\lambda t}\int_0^t 2\lambda\cdot e^{-\lambda\tau}\left(1-e^{-\lambda\tau}\right)e^{3\lambda\tau}d\tau=$$

$$=2\lambda e^{-3\lambda t}\int_0^t e^{2\lambda\tau}\cdot\left(1-e^{-\lambda\tau}\right)d\tau=2\lambda e^{-3\lambda t}\int_0^t\left(e^{2\lambda\tau}-e^{\lambda\tau}\right)d\tau=2\lambda e^{-3\lambda t}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2\lambda}e^{2\lambda t}-\frac{1}{2\lambda}-\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}+\frac{1}{\lambda}\right)=e^{-\lambda t}\left(1-2e^{-\lambda t}+e^{-2\lambda t}\right)=e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^2.$$

Аналогічно $p_k(t)=e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{k-1},\quad t>0,\ 1\le k\le n-1.$

Таким чином, *процес чистого розмноження з інтенсивністю* $\lambda=k\lambda$ в момент часу t є випадкове число народжень $X(t)$ в інтервалі $(0;t)$, яке розподілене за геометричним законом з ймовірністю успіху $p=e^{-\lambda t}$. Отже,

- $p_n(t)=1-\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k(t),\ n<\infty;$
- $M\left(X(t)\right)=\frac{1}{p}=e^{\lambda t};$
- $D\left(X(t)\right)=\frac{1-p}{p^2}=e^{\lambda t}\left(1-e^{\lambda t}\right).$

3.2.2 Процеси чистого вимирання

Розглянемо процес експлуатації деяких виробів (банкоматів, автомашин, комп'ютерів тощо) на підприємстві. Нехай $X(t)$ – число виробів, які знаходяться в експлуатації на момент часу t, при цьому $X(0)=n$ та $X(t)$ набуває значень $k=n,\ n-1,\ \ldots,\ 0.$ Припустимо, що нові вироби на підприємство не надходять, а ті, що виходять з ладу, – списуються. Вважаємо, що потік списаних виробів – найпростіший з параметром μ_k.

Потрібно знайти одновимірний закон розподілу випадкового процесу $X(t)$, а також математичне сподівання $m_x(t)$ та дисперсію $D_x(t)$ випадкового процесу $X(t)$.

Зазначений процес моделюється процесом чистого вимирання, розмічений граф якого зображено на рис. 3.6. Система диференціальних рівнянь Колмогорова (3.16) матиме вигляд

$$\begin{cases} p_n'(t) = -\mu_n p_n(t), \\ p_k'(t) = \mu_{k+1} p_{k+1}(t) - \mu_k p_k(t), \\ k = 1,\ 3,\ \ldots,\ n-1, \\ p_0'(t) = \mu_1 p_1(t), \end{cases} \tag{3.26}$$

з початковою умовою $p_n(0) = 1$.

Знайдемо розв'язок n-го рівняння системи, що задовольняє початкову умову $p_n(0) = 1$:

$$\frac{dp_n}{dt} = -\mu_n p_n,$$

$$\frac{dp_n}{p_n} = -\mu_n dt,$$

$$\int \frac{dp_n}{p_n} = \int -\mu_n dt,$$

$$\ln p_n = -\mu_n t + \ln C,$$

$$\ln \frac{p_n}{C} = -\mu_n t,$$

$$p_n(t) = C \cdot e^{-\mu_n t},$$

тоді, враховуючи початкову умову, маємо

$$p_n(0) = 1 \Rightarrow 1 = C \cdot e^0 \Rightarrow C = 1.$$

Отже, частинний розв'язок n-го рівняння системи (3.26) має вигляд

$$p_n(t) = e^{-\mu_n t},\ t > 0. \tag{3.27}$$

Розглянемо k-те рівняння системи (3.26), $k=1,\ 3,\ \ldots,\ n-1$ та знайдемо його розв'язок методом варіації довільної сталої. Розв'яжемо спочатку відповідне однорідне рівняння

$$p_k'(t)+\mu_k p_k(t)=0,$$
$$p_k'(t)=-\mu_k p_k(t),$$
$$\int\frac{dp_k}{p_k}=\int-\mu_k dt,$$
$$\ln p_k=-\mu_k t+\ln C_k,$$
$$\ln\frac{p_k}{C_k}=-\mu_k t,$$
$$p_k(t)=C_k\cdot e^{-\mu_k t}.$$

Нехай $C_k=C_k(t)$, тоді

$$p_k(t)=C_k(t)\cdot e^{-\mu_k t}, \tag{3.28}$$

звідки

$$p_k'(t)=C_k'(t)\cdot e^{-\mu_k t}-\mu_k C_k(t)e^{-\mu_k t}.$$

Після підстановки значень $p_k(t)$ і $p_k'(t)$ в k-те рівняння маємо

$$C_k'(t)\cdot e^{-\mu_k t}-\mu_k C(k)e^{-\mu_k t}=\mu_{k+1}p_{k+1}(t)-\mu_k C_k(t)e^{-\mu_k t},$$
$$C_k'(t)\cdot e^{-\mu_k t}=\mu_{k+1}p_{k+1}(t),$$
$$C_k'(t)=\mu_{k+1}p_{k+1}(t)e^{\mu_k t}.$$

Таким чином,

$$C_k'(t)=\mu_{k+1}p_{k+1}(t)e^{\mu_k t}. \tag{3.29}$$

Проінтегрувавши обидві частини рівності (3.29) від 0 до t, матимемо

$$\begin{aligned}C_k(t)-C_k(0)&=\int_0^t\mu_{k+1}p_{k+1}(\tau)e^{\mu_k\tau}d\tau,\\ C_k(t)&=C_k(0)+\int_0^t\mu_{k+1}p_{k+1}(\tau)e^{\mu_k\tau}d\tau.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Ураховуючи значення $C_k(t)$ (3.30), розв'язок (3.28) матиме вигляд

$$p_k(t) = \left(C_k(0) + \int_0^t \mu_{k+1} p_{k+1}(\tau) e^{\mu_k \tau} d\tau \right) \cdot e^{-\mu_k t}.$$

Згідно з початковою умовою $p_k(0) = C_k(0) = 0$. Отже, для $1 \le k \le$ $\le n-1$ отримаємо рекурентну формулу

$$p_k(t) = e^{-\mu_k t} \cdot \int_0^t \mu_{k+1} p_{k+1}(\tau) e^{\mu_k \tau} d\tau. \tag{3.31}$$

яка разом з (3.27) дозволяє послідовно знайти ймовірності $p_n(t), p_{n-1}(t)$, ..., $p_1(t)$, а також

$$p_0(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t). \tag{3.32}$$

Математичне сподівання та дисперсію випадкового процесу $X(t)$ знаходять, використовуючи формули

$$m_x(t) = M\left(X(t)\right) = \sum_{k=1}^{n} k p_k(t);$$

$$D_x(t) = D\left(X(t)\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2 p_k(t) - M^2\left(X(t)\right).$$

Розглянемо окремі випадки процесу чистого вимирання.

I. Процес чистого вимирання з інтенсивністю $\mu_k = \mu$, $1 \le k \le n$.

Розглянемо процес чистого вимирання зі сталою інтенсивністю $\mu_k = \mu$ *(пуассонівський процес чистого вимирання)*, розмічений граф якого зображено на рис. 3.9.

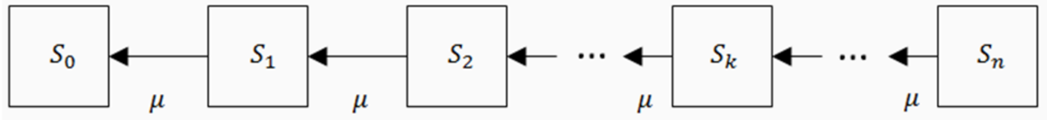

Рисунок 3.9

Знайдемо частинний розв’язок системи диференціальних рівнянь Колмогорова (3.26), яка в цьому випадку має вигляд

$$\begin{cases} p_n'(t) = -\mu\, p_n(t), \\ p_k'(t) = \mu\, p_{k+1}(t) - \mu\, p_k(t), \\ k = 1,\ 3,\ \ldots,\ n-1, \\ p_0'(t) = \mu\, p_1(t) \end{cases} \tag{3.33}$$

Згідно з (3.27)

$$p_n(t) = e^{-\mu t},\ t > 0.$$

Використовуючи рекурентну формулу (3.31)

$$p_k(t) = e^{-\mu_k t} \cdot \int_0^t \mu_{k+1} p_{k+1}(\tau) e^{\mu_k \tau} d\tau,$$

отримаємо

$$k = n-1 \Rightarrow p_{n-1}(t) = e^{-\mu t} \cdot \int_0^t \mu e^{-\mu\tau} e^{\mu\tau} d\tau = \mu t e^{-\mu t}, t > 0;$$

$$k = n-2 \Rightarrow p_{n-2}(t) = e^{-\mu t} \int_0^t \mu e^{-\mu\tau} \mu\tau e^{\mu\tau} d\tau = \frac{(\mu t)^2}{2} e^{-\mu t}.$$

Аналогічно

$$p_k(t) = p_{n-(n-k)}(t) = \frac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\mu t},\quad t > 0,\ 1 \le k \le n, \tag{3.34}$$

звідки

$$p_0(t) = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k(t).$$

Таким чином, *процес чистого вимирання зі сталою інтенсивністю* μ в момент часу t є випадкове число $X(t)$ живих індивідуумів, що залишилися, яке розподілене за аналогом закону розподілу Пуассона з параметром $\mu t.$ При цьому випадкове число індивідуумів, які загинули $Y(t) = n - X(t),$ має закон розподілу Пуассона. Отже,

$$P\big(Y(t) = k\big) = P\big((n - X(t)) = k\big) = P\big(X(t) = n - k\big) = p_{n-k}(t) = \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t}.$$

Звідки

$$M\big(X(t)\big) = n - \mu t, D\big(X(t)\big) = \mu t. \tag{3.35}$$

ІІ. Процес чистого вимирання з інтенсивністю $\mu_k = k\mu$, $1 \le k \le n$.

Розглянемо процес чистого вимирання з інтенсивністю $\mu_k = k\mu$ *(біноміальний процес чистого вимирання)*, розмічений граф якого зображено на рис. 3.10.

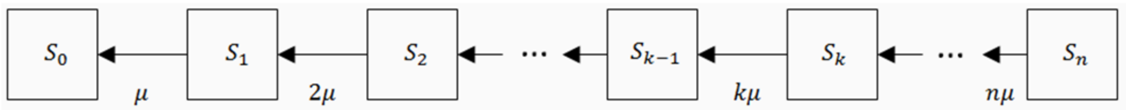

Рисунок 3.10

Знайдемо частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь Колмогорова (3.26), яка в цьому випадку має вигляд

$$\begin{cases} p_n'(t) = -n\mu\, p_n(t), \\ p_k'(t) = (k+1)\mu\, p_{k+1}(t) - k\mu\, p_k(t), \\ k = 1,\ 3,\ \ldots,\ n-1, \\ p_0'(t) = \mu\, p_1(t), \end{cases} \tag{3.36}$$

з початковою умовою $p_n(0) = 1$.

Згідно з (3.27)

$$p_n(t) = e^{-n\mu t},\ \ t > 0.$$

Використовуючи рекурентну формулу (3.31), яка матиме вигляд

$$p_k(t) = e^{-n\mu t} \cdot \int_0^t (k+1)\mu\, p_{k+1}(\tau) e^{k\mu\tau} d\tau,$$

отримаємо:

$$k = n-1 \Rightarrow p_{n-1}(t) = e^{-(n-1)\mu t} \cdot \int_0^t n\mu e^{(n-1)\mu\tau} e^{-n\mu\tau} d\tau = ne^{-(n-1)\mu t} \cdot \int_0^t \mu e^{-\mu\tau} d\tau =$$

$$= ne^{-(n-1)\mu t}\left(1 - e^{-\mu t}\right) = C_n^1 \left(e^{-\mu t}\right)^{n-1} \left(1 - e^{-\mu t}\right)^{n-(n-1)},\quad t > 0;$$

$$k = n-2 \Rightarrow p_{n-2}(t) = e^{-(n-2)\mu t} \int_0^t (n-1)\mu e^{-(n-2)\mu\tau} ne^{-(n-1)\mu\tau} \left(1 - e^{-\mu t}\right) d\tau =$$

$$= n(n-1)e^{-(n-2)\mu t} \int_0^t \mu e^{-\mu\tau} \left(1 - e^{-\mu t}\right) d\tau = C_n^2 \left(e^{-\mu t}\right)^{n-2} \left(1 - e^{-\mu t}\right)^{n-(n-2)},\quad t > 0.$$

Аналогічно

$$p_{n-k}(t)=C_n^k\left(e^{-\mu t}\right)^{n-k}\left(1-e^{-\mu t}\right)^{n-(n-k)}, \quad t>0. \qquad (3.37)$$

За умови, якщо $i=n-k$, отримаємо

$$p_i(t)=C_n^i\left(e^{-\mu t}\right)^i\left(1-e^{-\mu t}\right)^{n-i}, \; 0\le i\le n.$$

Таким чином, *процес чистого вимирання з інтенсивністю* $\mu=k\mu$ в момент часу t є випадкове число $X(t)$ живих індивідуумів, що залишилися, яке розподілене за біноміальним законом з ймовірністю успіху $e^{-\mu t}$. При цьому випадкове число індивідуумів, які загинули до моменту часу t: $Y(t)=n-X(t)$, розподілене за біноміальним законом з ймовірністю успіху $1-e^{-\mu t}$. Отже,

$$M\left(X(t)\right)=ne^{-\mu t}, \; D\left(X(t)\right)=ne^{-\mu t}\left(1-e^{-\mu t}\right).$$

3.3 Процеси розмноження та вимирання в системі з *n* вузлами

Розглянемо окремий вид процесу розмноження та вимирання. Нехай система S складається з n вузлів. Як вузли можна розглянути комп'ютери, банкомати, станки тощо. Кожен із вузлів може незалежно від інших виходити з ладу, тобто на кожен із вузлів діє найпростіший "потік відмов", подіями якого є відмови вузла. У проміжку між двома сусідніми відмовами вузол працює безвідмовно. Середній час безвідмовної роботи кожного з вузлів позначимо через $\overline{T}_\delta$. Якщо в початковий момент часу вузол був справним, то після появи першої події потоку відмов, що діє на вказаний вузол, він виходить з ладу. Зауважимо, що при розгляді цього виду процесу розмноження та вимирання розглядають "весь" потік відмов, що дозволяє говорити про інтенсивність потоку відмов.

Вузол, який вийшов з ладу, починає відразу ремонтуватися. Будемо вважати, що на кожний вузол діє найпростіший потік "відновлення", подіями якого є відновлення роботи вузла, тобто закінчення ремонту вузла. На інтервалі між двома сусідніми відновленнями вузол знаходиться в ремонті. Середній час відновлення (ремонту) позначимо через $\overline{T}_в$. Вузол, що знаходиться в ремонті, відновлюється після появи першої події потоку відновлень, що діє на вказаний вузол. Як і у випадку потоку відмов, розглядають "весь" потік відновлень, що дозволяє говорити про інтенсивність цього потоку.

Розглянемо стан системи S:

s_0 – всі n вузлів справні;

s_1 – 1 вузол відмовив (ремонтується), інші $n-1$ вузли справні;

s_2 – 2 вузли відмовили (ремонтуються), інші $n-2$ вузли справні;

...

s_{n-1} – $n-1$ вузли відмовили (ремонтуються), 1 вузол справний;

s_n – всі n вузлів відмовили (ремонтуються).

Відповідний граф станів системи S показано на рис. 3.11.

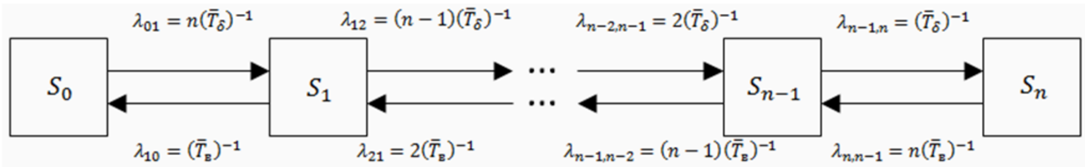

Рисунок 3.11

Оскільки перехід системи S зі стану в стан відбувається під дією найпростіших потоків, то в системі S відбувається однорідний дискретний марковський процес із неперервним часом. Аналіз розміченого графа дозволяє зробити висновок, що відповідний процес є процесом розмноження та вимирання. Фінальні ймовірності p_0, p_1, …, p_n станів системи можна знайти за формулами (3.13), (3.14), якщо відомі щільності ймовірностей переходу системи зі стану в стан. Достатньо часто простіше визначити середній час безвідмовної роботи кожного з вузлів $\bar{T}_б$ та середній час відновлення $\bar{T}_в$, ніж щільності ймовірностей переходів. Отже, виникає задача знаходження залежностей між фінальними ймовірностями і середнім часом $\bar{T}_б$ та середнім часом $\bar{T}_в$. Відповідь на це запитання дає наступна теорема.

Теорема 3.2. Граничні ймовірності станів p_0, p_1, …, p_n процесу розмноження та вимирання в системі з n вузлами обчислюються за такими формулами:

$$p_k = C_n^k \left(\frac{\bar{T}_в}{\bar{T}_б} \right)^k \cdot \left(1 + \frac{\bar{T}_в}{\bar{T}_б} \right)^{-n}, \; k = 0, 1, \ldots n \tag{3.38}$$

де $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сполучень з n елементів по k.

Доведення

Оскільки потік відмов вузлів є найпростішим, то неперервна випадкова величина T – проміжок часу між двома послідовними відмовами в цьому потоці, тобто час безвідмовної роботи вузла, розподілена за показниковим законом з параметром λ, що дорівнює інтенсивності потоку відмов. З урахуванням характеристик показникового розподілу $\lambda = \dfrac{1}{M(T)}$. Враховуючи, що математичне сподівання $M(T)$ дорівнює середньому часу безвідмовної роботи вузла $\overline{T}_\delta$, отримаємо $\lambda = \left(\overline{T}_\delta\right)^{-1}$. Таким чином, на систему S у стані s_0 впливає сумарний потік відмов з сумарною інтенсивністю $n\lambda = n\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1}$, що дорівнює щільності ймовірності переходу λ_{01} системи S зі стану s_0 у стан s_1: $\lambda_{01} = n\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1}$.

У стані s_1 функціонують $n-1$ вузлів. Отже, зі стану s_1 у стан s_2 систему S переводить сумарний потік відмов із сумарною інтенсивністю $(n-1)\lambda = (n-1)\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1}$, звідки $\lambda_{12} = (n-1)\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1}$.

Таким чином,

$$\lambda_{k-1k} = \big(n-(k-1)\big)\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (3.39)$$

Розглянемо потік відновлень. Оскільки потік відновлень є найпростішим, то інтенсивність цього потоку визначається як обернена величина середнього часу відновлення, тобто $\lambda = \left(\overline{T}_в\right)^{-1}$. Якщо система знаходиться у стані s_n – всі n вузлів відмовили, то на кожен з них діє потік “відновлення”. Отже, на систему S у стані s_n діє сумарний потік відновлення, з сумарною інтенсивністю $n\lambda = n\left(\overline{T}_в\right)^{-1}$. Під дією цього потоку система S переходить зі стану s_n у стан s_{n-1}, тобто $\lambda_{nn-1} = n\left(\overline{T}_в\right)^{-1}$.

Здійснюючи аналогічні міркування, отримаємо

$$\lambda_{kk-1} = k\left(\overline{T}_в\right)^{-1},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (3.40)$$

Підставляючи формули (3.39) та (3.40) у (3.14), знайдемо вираз для α_k:

$$\alpha_k = \frac{n\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1} \cdot (n-1)\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1} \cdot \ldots \cdot \left(n-(k-1)\right)\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1}}{k\left(\overline{T}_в\right)^{-1} \cdot (k-1)\left(\overline{T}_в\right)^{-1} \cdot \ldots \cdot \left(\overline{T}_в\right)^{-1}} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot \left(n-(k-1)\right)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} \cdot \left(\frac{\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1}}{\left(\overline{T}_в\right)^{-1}}\right)^k = C_n^k \left(\frac{\overline{T}_в}{\overline{T}_\delta}\right)^k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \cdot (3.41)$$

Підставляючи знайдені значення α_k (3.41) у (3.13) та враховуючи, що $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$, отримаємо

$$p_k = C_n^k \left(\frac{\overline{T}_в}{\overline{T}_\delta}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{\overline{T}_в}{\overline{T}_\delta}\right)^{-n},\ k = 0,\ 1,\ \ldots\ n.$$

Приклад 3.1. Робітники відділу фінансово-економічної інформації фінансової компанії використовують три комп’ютери, кожен з яких незалежно від інших може виходити з ладу. Потік відмов комп’ютера – найпростіший. Середній час безвідмовної роботи комп’ютера – 120 годин. Комп’ютер, що вийшов з ладу, починає негайно ремонтуватися (відновлюватися). Потік відновлення – найпростіший. Середній час ремонту комп’ютера – 6 годин. Визначити середню ефективність роботи відділу фінансово-економічної інформації, якщо при трьох справних комп’ютерах вона дорівнює 100 %, при двох – 60 %, при одному – 30 %, при непрацюючих комп’ютерах – 10 %.

Розв’язання

Як систему S розглянемо сукупність трьох комп’ютерів, зокрема стани системи S:

s_0 – всі три комп’ютери справні;

s_1 – один комп’ютер ремонтується, два інші – справні;

s_2 – два комп’ютери ремонтуються, один – справний;

s_3 – всі три комп’ютери ремонтуються.

Вказаний процес можна розглядати як процес розмноження та вимирання в системі з n вузлами. Якщо вузлами є комп’ютери, то $n = 3$. Отже, за формулами (3.38) можна обчислити фінальні ймовірності p_0, p_1, p_2, p_3 станів системи S:

$$p_0 = \left(1 + \frac{6}{120}\right)^{-3} = 0,8638;$$

$$p_1 = C_3^1 \cdot \frac{6}{120} \cdot \left(1 + \frac{6}{120}\right)^{-3} = 3 \cdot 0,05 \cdot 0,8638 = 0,1296;$$

$$p_2 = C_3^2 \cdot \left(\frac{6}{120}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{6}{120}\right)^{-3} = 3 \cdot 0,0025 \cdot 0,8638 = 0,0065;$$

$$p_3 = C_3^3 \cdot \left(\frac{6}{120}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{6}{120}\right)^{-3} = 3 \cdot 0,000125 \cdot 0,8638 = 0,0001.$$

Таким чином, найбільш ймовірною є подія – в усталеному стаціонарному режимі справними є всі три комп'ютери, оскільки $p_0 = 0,8638 > p_k$, де $k = 1, 2, 3$.

Для того, щоб визначити середню ефективність роботи відділу фінансово-економічної інформації, розглянемо дискретну випадкову величину X – середня ефективність роботи відділу в кожному зі станів s_0, s_1, s_2, s_3, закон розподілу якої має вигляд

X	100 %	60 %	30 %	10 %
p	p_0	p_1	p_2	p_3

Середня ефективність роботи системи S дорівнює математичному сподіванню $M(X)$ випадкової величини X:

$$M(X) = p_0 \cdot 100\,\% + p_1 \cdot 60\,\% + p_2 \cdot 30\,\% + p_3 \cdot 10\,\% =$$
$$= 0,8638 \cdot 100\,\% + 0,1296 \cdot 60\,\% + 0,0065 \cdot 30\,\% + 0,0001 \cdot 10\,\% = 94,352\,\%.$$

Отже, середня ефективність роботи відділу фінансово-економічної інформації в усталеному стаціонарному режимі роботи комп'ютерів достатньо висока та становить 94,352 %.

Питання для самоперевірки

1. Який випадковий процес називається процесом розмноження та вимирання?
2. Яка характерна ознака структури графа станів системи, у якій відбувається процес розмноження та вимирання?
3. Який вигляд має матриця щільностей ймовірностей переходів процесу розмноження та вимирання?

4. Що називається процесом чистого розмноження?
5. Який вигляд має розмічений граф станів процесу чистого розмноження зі скінченним числом станів?
6. Що називається процесом чистого вимирання?
7. Який вигляд має розмічений граф станів процесу чистого вимирання зі скінченним числом станів?
8. Який вигляд має система диференціальних рівнянь Колмогорова для процесу чистого розмноження зі скінченним числом станів?
9. Який вигляд має система диференціальних рівнянь Колмогорова для процесу чистого вимирання зі скінченним числом станів?
10. Який вигляд має частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь Колмогорова для процесу чистого розмноження зі сталою інтенсивністю $\lambda_k = \lambda$?
11. Який вигляд має частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь Колмогорова для процесу чистого розмноження з інтенсивністю $\lambda_k = k\lambda$?
12. Який вигляд має частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь Колмогорова для процесу чистого вимирання зі сталою інтенсивністю?
13. Який вигляд має частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь Колмогорова для процесу чистого вимирання з інтенсивністю $\mu_k = k\mu$?
14. Дайте пояснення системи з n вузлами. У яких станах може перебувати система, що складається з n вузлів?
15. Як визначити граничні ймовірності станів процесу розмноження та вимирання в системі з n вузлами?

4 ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ В СИСТЕМАХ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

4.1 Основні поняття теорії масового обслуговування

Теорія масового обслуговування як розділ теорії ймовірностей виникла на початку XX століття у зв’язку з потребами практики, зокрема бурхливим розвитком телефонних мереж. Згодом виявилося, що математичні моделі, розроблені і досліджені як моделі телефонії, є адекватними математичними моделями багатьох об’єктів у техніці, економіці, природознавстві, суспільстві.

Початок розвитку теорії закладено в роботах датчанина А. К. Ерланга (1878–1929 рр.). Працюючи в Копенгагенській телефонній компанії, він у 1909 році опублікував роботу “Теорія ймовірностей та телефонні переговори”. У своїх роботах А. К. Ерланг сформулював перші прикладні задачі телефонії, що були пов’язані з необхідністю впорядкування роботи телефонної мережі та розробкою методів оцінки якості обслуговування споживачів залежно від кількості використовуваних пристроїв.

Значний внесок у створення й розробку загальної теорії масового обслуговування вніс видатний радянський математик Олександр Якович Хінчин (1894–1959 рр.), який сформулював загальні ідеї та методи теорії, а також запропонував термін “*теорія масового обслуговування”.* В іноземній літературі найчастіше використовується термін “*теорія черг”.*

Основи теорії масового обслуговування отримали подальший розвиток у роботах багатьох вітчизняних та іноземних вчених, серед яких Б. В. Гнєденко, А. М. Колмогоров, М. П. Бусленко, І. М. Коваленко, Д. Кендалл, Т. Сааті та інші.

Системи масового обслуговування (СМО) є одними з моделей, за допомогою яких можна описати фінансово-економічні процеси та банківську сферу. Використовуючи моделі СМО, можна досліджувати функціонування підприємств, банків, кредитних установ, страхових компаній, центрів обслуговування платників податків, різних підприємств сфери обслуговування (магазинів, перукарень тощо), діяльність яких пов’язана з виконанням деяких однотипних завдань і операцій.

Теорія масового обслуговування (ТМО) вивчає процеси з опрацюванням часто повторюваних однорідних подій, які відбуваються в системах виробництва, обслуговування та управління.

Прикладом згаданих подій є заявки на підприємствах побутового обслуговування, передача та опрацювання інформації, операції на автоматизованих лініях виробництва тощо.

Предметом теорії масового обслуговування є встановлення та вивчення залежностей між характером потоку заявок, кількістю каналів обслуговування, продуктивністю окремого каналу та ефективним обслуговуванням з метою відшукання найкращих способів управління процесами обслуговування.

Дослідження системи масового обслуговування можна звести до побудови та вивчення деякого випадкового процесу, який описує еволюцію системи. Щоб математично описати СМО, необхідно описати *властивості потоку замовлень, структуру системи, дисципліну і характеристики обслуговування*, а також визначити характеристики, роботи системи.

Як зазначено в [8, с. 4], численні розрахунки, здійснені під час розв'язування задач теорії масового обслуговування, засвідчують, що задовільний за точністю розв'язок можна отримати, припустивши, що всі потоки, які діють на систему, – пуассонівські, тобто процес функціонування системи є марковським випадковим процесом з неперервним часом. Тому будемо розглядати лише марковські моделі СМО.

Таким чином, *системи масового обслуговування* – системи, до яких у випадкові моменти часу надходять масові запити (вимоги) на обслуговування (виконання деяких видів послуг), при цьому вимоги, що надійшли, виконуються за допомогою наявних у розпорядженні системи каналів обслуговування.

Зауважимо, що поняття "обслуговування" та "канал обслуговування" є узагальнюючими, суть яких пов'язана із конкретними досліджуваними системами.

Оскільки потік вимог і час, витрачений каналом на обслуговування окремого замовлення, мають випадковий характер, то математичні моделі, побудовані для дослідження СМО, називаються *стохастичними (ймовірнісними)*.

Розглянемо основні складові елементи систем масового обслуговування:

- *вхідний потік вимог* – це сукупність вимог (заявок) на надання певної послуги, що надходять до системи. Вважається, що вимоги на обслуговування надходять у систему у випадкові моменти часу і утворюють пуассонівський потік з інтенсивністю λ;
- *черга*, що складається з вимог, які очікують на обслуговування;
- *канали обслуговування*, що об'єднуються в обслуговуючу систему, – технічні пристрої та люди, які забезпечують обслуговування однієї вимоги;
- *вихідний потік вимог* – це потік вимог, що залишають систему, отримавши чи не отримавши замовлену послугу. Вихідний потік у деяких СМО є вхідним для наступної групи приладів.

Серед важливих параметрів систем масового обслуговування – *механізм та дисципліна обслуговування*.

Роботу кожного каналу обслуговування характеризують тим часом, який витрачається на обслуговування одного замовлення. Загалом цей час є випадковим. Якщо розглядати найпростішу пуассонівську систему, то потік обслуговувань кожного каналу – найпростіший з інтенсивністю μ. *Інтенсивність потоку обслуговувань* зазвичай визначають через середній час обслуговування одним каналом однієї вимоги $\overline{t}_{обс}$: $\mu = \frac{1}{\overline{t}_{обс}}$. Вважатимемо, що всі канали мають однакову інтенсивність потоку обслуговувань μ. Крім того, вважатимемо, що замовлення може обслуговуватися будь-яким із каналів, тобто будь-який з n каналів доступний для замовника.

Важливим параметром системи масового обслуговування є також *інтенсивність потоку замовлень* λ. Потік замовлень вважатимемо найпростішим. Інтенсивність потоку замовлень визначають через середній інтервал часу між надходженнями двох замовлень $\overline{t}_{\lambda}$: $\lambda = \frac{1}{\overline{t}_{\lambda}}$.

Дисципліна (алгоритм) обслуговування, тобто порядок розподілу замовлень між вільними каналами, встановлюється залежно від специфіки самої системи. Найпростіша з точки зору логіки – перший надійшов до каналу і першим був обслужений, а за наявності черги – чекає свого часу на обслуговування. В інших випадках вимоги поділяються на пріоритетні і прості. У деяких системах вводиться кілька рівнів пріоритетності. Зокрема при введенні двох рівнів пріоритетності вимоги поділяються на прості, з відносним і абсолютним пріоритетом. Вимоги з відносним пріоритетом мають перевагу в обслуговуванні над простими, а вимоги з абсолютним пріоритетом – над простими та вимогами з відносним пріоритетом.

Аналізуючи процеси, що відбуваються в системах масового обслуговування, можна зробити висновок, що між цими процесами, за певного рівня формалізації, і процесами, які фіксують зміни в певному обсязі популяції, за умови $\lambda_k = \lambda = \text{const}$, $\mu_k = \mu = \text{const}$, існує аналогія.

Дійсно, якщо в певному обсязі популяції збільшення обсягу на одиницю моделюється пуассонівським потоком, а зменшення на одиницю – показниковим законом, то в системах масового обслуговування зміна вимог у системі на одиницю також буде моделюватися відповідно пуассонівським потоком та показниковим законом розподілу. Отже, ймовірнісна модель, що побудована для процесу розмноження та вимирання, який відбувається при певному обсязі популяції, повністю відповідає процесу, що відбувається в системі масового обслуговування з одним обслуговуючим каналом, одним пуассонівським потоком вимог та показниковим розподілом часу обслуговування. На основі вказаної моделі будуються ймовірнісні моделі для більш складних систем масового обслуговування.

4.2 Класифікація систем масового обслуговування

Існує декілька видів систем масового обслуговування, що відрізняються особливостями надходження вимог і організації роботи обслуговуючих апаратів. Ще Ерланг звернув увагу на те, що в телефонії існують два основні типи систем – з очікуванням та втратами. У сучасній теорії масового обслуговування розрізняють значно більшу кількість типів систем.

За характером випадкового процесу, що відбувається в системі масового обслуговування, розрізняють *марковські* та *немарковські* системи. У *марковських* системах вхідний потік вимог і вихідний потік обслужених вимог є пуассонівськими, що дозволяє побудувати математичну модель системи. У випадку *немарковських* процесів задача дослідження системи масового обслуговування значно ускладнюється і такі системи, як правило, досліджують методами імітаційного моделювання.

Незалежно від характеру процесів, що відбуваються в системі масового обслуговування, розрізняють два основні види СМО:

- *системи з відмовами*, у яких заявка, що надійшла в момент часу, коли всі канали зайняті, миттєво отримує відмову і залишає систему (втрачається);
- *системи з чергою (очікуванням)*, у яких заявка, що надійшла в момент часу, коли всі канали зайняті, стає в чергу і чекає свого обслуговування (звільнення каналу).

Системи масового обслуговування з чергою поділяються на системи з обмеженим очікуванням і необмеженим очікуванням.

У системах з *обмеженим очікуванням* може обмежуватися довжина черги та час перебування в черзі.

У системах з *необмеженим очікуванням* заявка, що надійшла до системи в той час, коли всі канали були зайняті, стає в чергу та очікує обслуговування до того часу, поки звільниться канал для обслуговування даної заявки.

Всі системи масового обслуговування поділяються за кількістю каналів обслуговування на:

- одноканальні системи;
- багатоканальні (n-канальні) системи.

Системи масового обслуговування поділяються також за кількістю етапів обслуговування:

- однофазні системи;
- багатофазні системи.

Якщо канали обслуговування розташовані послідовно і вони неоднорідні, оскільки виконують різні операції обслуговування, то говорять про *багатофазну* систему масового обслуговування. Прикладом такої системи може бути обслуговування автомобілів на станції технічного обслуговування (миття, діагностування тощо).

Залежно від обмеження потоку вимог СМО поділяють на *розімкнені* і *замкнені* системи. На вхід *розімкненої системи* надходить деякий потік замовлень, причому джерела цих замовлень до складу системи не належать і їх стани аналізу не піддаються. У *замкненій системі* кількість джерел замовлень обмежена, а інтенсивність надходження замовлень залежить від станів джерел, зумовлених роботою системи загалом. Прикладом такої системи є робота гаража, у якому є m автомобілів і n місць ремонту. У випадку поломки машини її скеровують на ремонт. Отже, інтенсивність потоку замовлень залежить від того, скільки машин у певний проміжок часу експлуатують.

Наведена класифікація СМО є умовною. На практиці найчастіше зустрічаються системи масового обслуговування змішаного типу. У системах змішаного типу заявка, що надходить до системи, коли всі канали зайняті, стає в чергу та очікує обслуговування до певного моменту часу. Якщо у встановлений час обслуговування не почалося, то заявка залишає систему необслуженою.

Зауважимо, що системи масового обслуговування відрізняються принаймні чотирма показниками: характером вхідного потоку заявок (розподілом випадкової величини проміжку часу між моментами надходжень сусідніх заявок), розподілом часу обслуговування, кількістю каналів обслуговування та місць у черзі. Саме ці показники використав Д. Кендалл у своїй роботі, опублікованій у 1953 році, для позначення (класифікації, кодування) моделей систем масового обслуговування. Основою класифікації однофазних систем масового обслуговування є запис у вигляді:

$$A/B/C/D/E$$

де A – закон розподілу вхідного потоку вимог. Найчастіше використовують такі закони розподілу: показниковий (M), розподіл Ерланга (E), гамма-розподіл (Γ), детермінований (D). Для позначення довільного характеру розподілу використовують символ G.

B – закон розподілу часу обслуговування в каналах СМО. Використовують такі самі позначення, як і для вхідного потоку вимог.

C – кількість каналів обслуговування.

D – кількість місць у черзі. Якщо кількість місць у черзі необмежена, то це позначення можна не використовувати.

E – дисципліна обслуговування. Найчастіше використовують такі позначення: *FIFO* (першим прийшов – першим обслуговується), *LIFO* (останнім прийшов – першим обслуговується), *RANDOM* (випадковий характер обслуговування). За дисципліни *FIFO*, це позначення можна не використовувати.

Розглянемо приклади позначень:

$M/M/1$ – СМО з одним каналом обслуговування, нескінченною чергою, показниковими законами розподілу інтервалів часу між надходженнями вимог і часу обслуговування, дисципліна обслуговування – *FIFO*.

$G/G/l/m$ – СМО з кількома каналами обслуговування, обмеженою чергою (m місць), довільними законами розподілу інтервалів часу між надходженнями вимог і часу обслуговування, дисципліна обслуговування – *FIFO*.

4.3 Показники ефективності систем масового обслуговування

Ефективність функціонування систем масового обслуговування характеризують три основні групи показників.

1. Показники ефективності використання СМО:

- абсолютна пропускна здатність системи A – середня кількість вимог, обслужених системою за одиницю часу;
- відносна пропускна здатність системи Q – відношення середнього числа вимог, обслужених системою за одиницю часу, до середнього числа вимог, що надійшли до системи за цей час: $Q = \frac{A}{\lambda}$. Таким чином, відносна пропускна здатність системи – ймовірність того, що вимога, яка надійшла на вхід системи, буде обслуженою;
- середній час зайнятості СМО;
- коефіцієнт використання СМО тощо.

2. Показники якості обслуговування вимог:

- середній час перебування вимоги в системі;
- середній час перебування вимог у черзі;
- ймовірність відмови обслуговування вимоги;
- середня кількість вимог, що перебувають у черзі;
- середня кількість вимог, які перебувають у системі, тощо.

3. Показники ефективності функціонування пари “СМО – клієнт”, де під “клієнтом” розуміють всю сукупність вимог. До таких показників відносять, зокрема, середній дохід від використання СМО за одиницю часу.

Розглянемо окремі види систем масового обслуговування та знайдемо показники (характеристики) ефективності їх роботи.

4.4 Одноканальна СМО з відмовами

Розглянемо задачу. На вхід одноканальної системи масового обслуговування з відмовами подається найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ. Потік обслуговування – також найпростіший з інтенсивністю μ. У початковий момент часу канал вільний. Необхідно знайти граничні ймовірності станів системи та показники її ефективності.

Розв’язання

Аналіз роботи системи почнемо з розгляду можливих станів і побудови розміченого графа станів системи. Система S (СМО) має два стани:

s_0 – канал вільний;

s_1 – канал зайнятий (відбувається обслуговування заявки).

Граф станів системи S зображено на рис. 4.1.

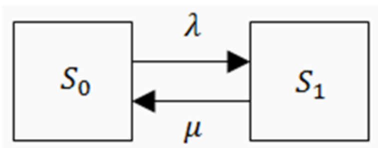

Рисунок 4.1

Користуючись розміченим графом системи S (див. рис. 4.1), складемо систему диференціальних рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda\, p_0(t) + \mu\, p_1(t), \\ p_1'(t) = \lambda\, p_0(t) - \mu\, p_1(t), \end{cases} \tag{4.1}$$

розв'язок якої з початковими умовами: $p_0(0)=1,\ p_1(0)=0$ повинен задовольняти нормувальну умову $p_0(t)+p_1(t)=1$.

Для фінальних ймовірностей станів p_0 і p_1 у стаціонарному режимі система алгебраїчних рівнянь матиме вигляд

$$\begin{cases} \lambda\, p_0 = \mu\, p_1, \\ \mu\, p_1 = \lambda\, p_0. \end{cases} \tag{4.2}$$

З урахуванням нормувальної умови $p_0 + p_1 = 1$ отримаємо

$$\begin{cases} \lambda\, p_0 = \mu\, p_1, \\ p_0 + p_1 = 1, \end{cases}$$

звідки

$$p_0 = \frac{\mu}{\mu+\lambda}, \tag{4.3}$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}. \tag{4.4}$$

Зауважимо, що ймовірність p_0 – це ймовірність обслуговування вимоги, оскільки канал є вільним, а ймовірність p_1 – це ймовірність відмови, оскільки канал зайнятий обслуговуванням попередньої вимоги.

Оскільки інтенсивність потоку замовлень λ визначають через середній інтервал часу між надходженнями двох замовлень $\overline{t_\lambda}$: $\lambda = \frac{1}{\overline{t_\lambda}}$, а інтенсивність потоку обслуговувань μ через середній час обслуговування каналом одного замовлення $\overline{t_{обс}}$: $\mu = \frac{1}{\overline{t_{обс}}}$, отримаємо

$$p_0 = \frac{\overline{t_\lambda}}{\overline{t_{обс}} + \overline{t_\lambda}},\quad p_1 = \frac{\overline{t_{обс}}}{\overline{t_{обс}} + \overline{t_\lambda}}.$$

Таким чином, граничні ймовірності p_0 і p_1 визначають середній відносний час перебування системи S у стані s_0 (канал вільний) і стані s_1 (канал зайнятий), тобто визначають *відносну пропускну здатність системи* та *ймовірність відмови*.

Отже,

$$Q = \frac{\mu}{\mu+\lambda}, \tag{4.5}$$

$$P_{відм} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}. \qquad (4.6)$$

Абсолютну пропускну здатність системи знайдемо за формулою:

$$A = \lambda Q = \frac{\lambda \mu}{\mu + \lambda}. \qquad (4.7)$$

Після введення позначення $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – *зведена інтенсивність завантаження каналу*, формули (4.5)–(4.7) можна подати у вигляді

$$Q = \frac{1}{1+\rho}, \ P_{відм} = \frac{\rho}{1+\rho}, \ A = \frac{\lambda}{1+\rho}.$$

Приклад 4.1. На телефонну лінію філіалу банку, яку обслуговує один оператор, поступає найпростіший потік викликів клієнтів з інтенсивністю $\lambda = 0,9$ викликів/хв. Потік обслуговувань викликів – найпростіший потік з інтенсивністю $\mu = 0,8$ викликів/хв. Визначити показники ефективності роботи лінії, що впливають на підсумкову роботу філіалу.

Розв'язання

Математичною моделлю телефонної лінії є одноканальна СМО з $\lambda = 0,9$ і $\mu = 0,8$. Використовуючи формули для показників ефективності, отримаємо:

- ймовірність того, що канал вільний: $p_0 = \frac{\mu}{\mu+\lambda} = \frac{0,8}{0,8+0,9} \approx 0,47$;
- ймовірність того, що канал зайнятий: $p_1 = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} = \frac{0,9}{0,8+0,9} \approx 0,529$;
- ймовірність відмови: $P_{відм} = p_1 = 0,529$;
- відносна пропускна здатність системи: $Q = \frac{\mu}{\mu+\lambda} \approx 0,47$;
- абсолютна пропускна здатність: $A = \frac{\lambda \mu}{\mu+\lambda} \approx 0,424$;
- середній час обслуговування однієї вимоги: $\overline{t}_{обс} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0,8} = 1,25$ хв;
- середній час простою каналу: $\overline{t}_{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,9} \approx 1,11$ хв.

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити висновок, що ймовірність того, що канал зайнятий, більша за ймовірність того, що канал вільний; у середньому обслуговується 47 % дзвінків.

4.5 *n*-канальна СМО з відмовами

Розглянемо задачу. На вхід n-канальної системи масового обслуговування подається найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ. Потік обслуговувань кожного каналу – також найпростіший, з інтенсивністю μ. Якщо вимога застає всі канали зайнятими, то вона залишає систему необслуженою. Якщо ж вимога застає вільним хоча б один канал, то вона приймається на обслуговування будь-яким із вільних каналів і обслуговується до завершення. Описану систему масового обслуговування називають *класичною*. Розгляд такої системи Ерлангом зумовив розвиток теорії масового обслуговування (на прикладі дослідження роботи телефонної станції).

Аналіз роботи системи почнемо з розгляду можливих станів системи і побудови розміченого графа. Множина станів системи S (СМО) має вигляд:

s_0 – усі канали вільні;

s_1 – зайнятий лише один канал (обслуговується одна вимога);

…

s_k – зайнято k каналів (обслуговується k вимог);

…

s_n – зайнято всі n каналів (обслуговується n вимог).

Граф станів цієї системи зображено на рис. 4.2.

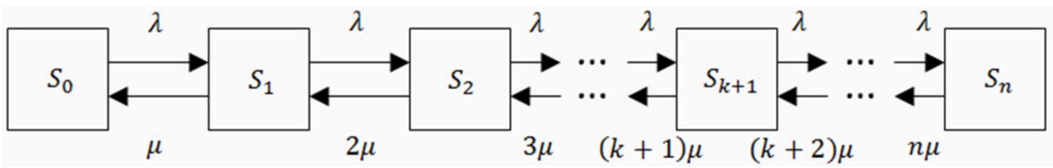

Рисунок 4.2

Зауважимо, що коли система перебуває у стані s_0, на неї діє потік вимог з інтенсивністю λ, який переводить систему у стан s_1. Якщо система перебуває у стані s_1, то на неї діють два потоки подій: потік вимог з інтенсивністю λ, який переводить систему у стан s_2, та потік звільнень каналу (потік обслуговувань) з інтенсивністю μ, який намагається перевести систему у стан s_0. У стані s_k $k = 1, 2, \ldots, n-1$ на систему також діють два потоки: потік замовлень з інтенсивністю λ, який переводить систему у стан s_{k+1}, та потік звільнень всіх k зайнятих каналів з інтенсивністю $k\mu$, який намагається перевести систему в стан s_{k-1}.

У стані s_n на систему діє лише потік звільнень усіх n зайнятих каналів з інтенсивністю $n\mu$, який намагається перевести систему у стан s_{n-1}.

Система диференціальних рівнянь Колмогорова має вигляд

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ p_k'(t) = -(\lambda + k\mu) p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1, \\ p_n'(t) = -n\mu p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \end{cases} \tag{4.8}$$

з початковими умовами $p_0(0) = 1,\ p_k(0) = 0, k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$ Розв'язок системи (4.8) повинен задовольняти *нормувальну умову* $\sum_{k=0}^{n} p_k(t) = 1,$ $t \geq 0.$

Рівняння (4.8) називають *рівняннями Ерланга*. Вони справедливі і в тому випадку, коли потоки подій є нестаціонарними пуассонівськими з інтенсивностями $\lambda(t), \mu(t).$

Для ймовірностей станів стаціонарного режиму отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\ -(\lambda + k\mu) p_k + \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, \\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1, \\ -n\mu p_n + \lambda p_{n-1} = 0, \end{cases} \tag{4.9}$$

яку потрібно розв'язати разом з нормувальною умовою $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1.$

Після введення позначень $u_i = -\lambda p_{i-1} + i\mu p_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ система (4.9) набуває вигляду

$$u_1 = 0; \quad u_{k+1} - u_k = 0, k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1; \quad u_n = 0,$$

звідки $u_i = 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$ тобто

$$p_k = \frac{\lambda}{k\mu} p_{k-1},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \tag{4.10}$$

За формулою (4.10) послідовно отримаємо:

$$p_k = \frac{\lambda}{k\mu} p_{k-1} = \frac{\lambda^2}{k(k-1)\mu^2} p_{k-2} = \ldots = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Використовуючи нормувальну умову

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = 1,$$

отримаємо

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}. \tag{4.11}$$

Таким чином, граничні ймовірності станів стаціонарного режиму визначаються за формулами:

$$p_k = \frac{\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}, \; k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n, \tag{4.12}$$

які називають *формулами Ерланга*.

Після введення позначення $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ – *зведена інтенсивність завантаження каналу* – середнє число заяв, що надходять у систему за середній час обслуговування однієї вимоги в одному каналі, формула (4.11) набирає вигляду

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\,\mu^2} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\right)^{-1} = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, \tag{4.13}$$

при цьому формули Ерланга можна записати у вигляді

$$p_1 = \rho\, p_0,\; p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0,\; \ldots,\; p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \tag{4.14}$$

Перетворимо формули Ерланга (4.12), помноживши чисельник і знаменник дробу на $e^{-\rho}$:

$$p_k = \frac{\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k e^{-\rho}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k e^{-\rho}} = \frac{P(k,\rho)}{R(n,\rho)},\; k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n \tag{4.15}$$

де $P(k,\, \rho), R(n, \rho)$ – табличні функції пуассонівського розподілу.

Зауважимо, що

$$P(k,\ \rho)=R(n,\rho)-R(n-1,\rho).$$

Формули (4.15) зручно використовувати при великих значеннях n.

Визначимо характеристики роботи класичної системи масового обслуговування з відмовами.

Ймовірність відмови СМО (ймовірність втрати замовлення), тобто ймовірність того, що всі канали будуть задіяні, дорівнює:

$$P_{відм}=p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0. \tag{4.16}$$

З урахуванням формул (4.15) отримаємо

$$P_{відм}=p_n=\frac{P(n,\ \rho)}{R(n,\rho)}=B(n,\ \rho). \tag{4.17}$$

У додатку А наведено таблиці функцій $B(n,\ \rho)$ для різних значень n і ρ.

Цілком очевидно, що *ймовірність обслуговування замовлення (відносна пропускна здатність системи)* дорівнює ймовірності того, що вимога, яка надійшла в систему, застане вільним хоча б один канал, тоді

$$P_{обс}=Q=1-P_{відм}=1-\frac{\rho^n}{n!}p_0, \tag{4.18}$$

або

$$P_{обс}=1-p_n=1-\frac{P(n,\ \rho)}{R(n,\rho)}=\frac{R(n,\rho)-P(n,\ \rho)}{R(n,\rho)}=\frac{R(n-1,\rho)}{R(n,\rho)}. \tag{4.19}$$

Абсолютну пропускну здатність системи A визначають за формулою

$$A=\lambda Q=\lambda\left(1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right). \tag{4.20}$$

Середню кількість зайнятих каналів $\overline{k}$ можна обчислити безпосередньо через ймовірності p_k (як математичне сподівання дискретної випадкової величини):

$$\overline{k}=\sum_{k=0}^{n}kp_k.$$

Оскільки абсолютна пропускна здатність системи A – це середнє число вимог, обслужених системою за одиницю часу, а кожен зайнятий канал обслуговує в середньому μ вимог за одиницю часу, тоді *середнє число зайнятих каналів* можна визначити як $\overline{k}=\frac{A}{\mu}$, звідки

$$\overline{k}=\rho\left(1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right)=\rho\frac{R(n-1,\rho)}{R(n,\rho)}. \tag{4.21}$$

Ймовірність того, що канал зайнятий, дорівнює відношенню середньої кількості зайнятих каналів $\overline{k}$ до загальної кількості каналів n:

$$P_{з.к.}=\frac{\overline{k}}{n}=\frac{\rho}{n}\left(1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right), \tag{4.22}$$

або

$$P_{з.к.}=\frac{\overline{k}}{n}=\frac{\rho}{n}\frac{R(n-1,\rho)}{R(n,\rho)}. \tag{4.23}$$

Розглянемо випадкову величину $T_{з.к.}$ – *час зайнятості каналу*, що дорівнює тривалості проміжку часу, починаючи з моменту надходження вимоги у канал до наступного безпосереднього звільнення каналу. Оскільки потік обслуговувань – найпростіший, то час $T_{з.к.}$ розподілений за показниковим законом з параметром μ. Отже, *середній час зайнятості каналу* $\overline{t}_{з.к.}=M\left(T_{з.к.}\right)=\frac{1}{\mu}$.

Розглянемо час повного завантаження системи $T_{п.з.}$ – час з моменту, коли зайнято вимогами усі n каналів, до моменту звільнення хоча б одного каналу, тобто час одноразового перебування системи у стані s_n. Аналіз розміченого графа системи (див. рис. 4.2) показує, що час $T_{п.з.}$ розподілений за показниковим законом із параметром $n\mu$. Отже, *середній час повного завантаження* системи визначається за формулою: $\overline{t}_{п.з.}=M\left(T_{п.з.}\right)=\frac{1}{n\mu}$.

Під *простоєм системи* розуміють такий її стан, коли всі канали вільні (простоюють). Ймовірність простою системи, очевидно, дорівнює ймовірності того, що всі канали вільні, тобто ймовірності перебування системи у стані s_0: $P_{п.с.}=p_0$. Аналіз графа показує, що час простою системи $T_{п.с.}$ розподілений за показниковим законом з параметром λ. Отже, *середній час простою* системи становить $\overline{t}_{п.с.}=M\left(T_{п.с.}\right)=\frac{1}{\lambda}$.

Оскільки середня кількість замовлень, які перебувають у системі, дорівнює середній кількості зайнятих каналів: $\overline{l} = \overline{k}$, а $\overline{l} = \lambda \overline{t}$, то *середній час перебування вимоги в системі* $\bar{t}$ визначається за формулою: $\overline{t} = \dfrac{\overline{k}}{\lambda}$.

Приклад 4.2. Розглянемо класичну 10-канальну систему масового обслуговування з відмовами, під час роботи якої втрачається в середньому 1 % замовлень. Відомо, що наступного року інтенсивність замовлень зросте вдвічі. Визначити мінімальну кількість каналів, які потрібно додати, щоб середній відсоток втрачених замовлень не збільшився.

Розв'язання

Згідно з умовою задачі $P_{відм.} = p_{10} = 0{,}01.$ За формулою (4.17) маємо

$$p_n = p_{10} = B\left(10,\ \rho\right) = 0{,}01.$$

Для визначення значення ρ використовуємо таблицю значень функції $B\left(n,\ \rho\right)$ (додаток А). За таблицею $B\left(10;\ 4,\ 5\right) = 0{,}0105$, звідки $\rho = 4{,}5.$ Оскільки наступного року інтенсивність замовлень зросте вдвічі, маємо $\rho_1 = 2\rho = 2 \cdot 4{,}5 = 9.$ За таблицею значень функції $B\left(n,\ \rho\right)$ маємо:

$$B\left(16;\ 9\right) = 0{,}0110,\ B\left(17;\ 9\right) = 0{,}0058.$$

Отже, робимо висновок, що ймовірність втрати замовлення не збільшиться, якщо додати 7 каналів.

4.6 *n*-канальна СМО з відмовами і повною взаємодопомогою між каналами

Розглянемо задачу. На вхід n-канальної системи масового обслуговування подається найпростіший потік заявок з інтенсивністю $\lambda.$ Інтенсивність найпростішого потоку обслуговувань кожного каналу дорівнює $\mu.$ Якщо заявка застає всі канали вільними, то вона приймається на обслуговування і, на відміну від класичної системи з відмовами, обслуговується *всіма каналами одночасно.*

Припустимо, що таке обслуговування можливе і продуктивність обслуговування при цьому збільшується в n разів, тобто інтенсивність сумарного потоку обслуговувань становить $n\mu.$ Після завершення обслуговування всі n каналів звільняються одночасно. Якщо нова вимога застає в системі k замовлень, де $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$ то вона приймається на обслуговування, і всі n каналів перерозподіляються довільно між $k+1$ вимогами, таким чином, щоб усі канали брали участь в обслуговуванні вимог. Якщо нова вимога, яка поступає в систему, застає в системі n вимог, то вона отримує відмову і не обслуговується. Заявка, що потрапила на обслуговування, обслуговується до завершення. Якщо обслуговування однієї з вимог завершено, то група каналів, що звільнилася, приєднується до обслуговування вимог, що залишились. Отже, за наявності в системі хоча б одного замовлення, всі n каналів будуть зайнятими.

Аналіз роботи системи почнемо з розгляду можливих станів системи. Множина станів системи S (СМО) має вигляд:

s_0 – всі канали вільні;

s_1 – в системі одна вимога, її обслуговує n каналів;

$\ldots$

s_k – в системі k вимог, їх обслуговує n каналів, загальна продуктивність обслуговування дорівнює $n\mu$, канали довільно розподілено між вимогами;

$\ldots$

s_n – у системі n вимог, їх обслуговує n каналів. Загальна продуктивність обслуговування дорівнює $n\mu$.

Зауважимо, що в кожному стані s_k $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$ на систему діє потік замовлень, інтенсивність якого дорівнює $\lambda,$ та потік звільнень усіх зайнятих n каналів з інтенсивністю $n\mu,$ який намагається перевести систему в стан $s_{k-1}.$

Розглянемо стаціонарний режим роботи такої системи: $\lambda=\text{const},$ $\mu=\text{const},$ $n\to\infty,$ який існує, оскільки система є ергодичною. Для ймовірностей станів стаціонарного режиму отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + n\mu\, p_1 = 0, \\ -\left(\lambda + n\mu\right) p_k + \lambda p_{k-1} + n\mu\, p_{k+1} = 0, \\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1, \\ -n\mu\, p_n + \lambda p_{n-1} = 0, \end{cases} \tag{4.24}$$

яку потрібно розв'язати разом з нормувальною умовою $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1.$

Після введення позначень $u_i = -\lambda p_{i-1} + n\mu\, p_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ система (4.24) набуває вигляду

$$u_1 = 0; \quad u_{k+1} - u_k = 0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1; \quad u_n = 0,$$

звідки маємо, що $u_i = 0,\ i = 1, 2,\ \ldots,\ n,$ тобто

$$p_k = \frac{\lambda}{n\mu} p_{k-1},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{4.25}$$

За формулою (4.25) послідовно отримаємо:

$$p_k = \frac{\lambda}{n\mu} p_{k-1} = \frac{\lambda^2}{(n\mu)^2} p_{k-2} = \ldots = \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^k p_0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Введемо позначення $\dfrac{\lambda}{n\mu} = \dfrac{\rho}{n} = \alpha$ – середня кількість замовлень, які надходять у систему за середній час обслуговування однієї вимоги всіма n каналами, тоді $p_k = \alpha^k p_0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$

Використовуючи нормувальну умову

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = 1,$$

отримаємо

$$p_0 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{n+1}}, k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{4.26}$$

Таким чином, граничні ймовірності станів стаціонарного режиму визначаються за формулами:

$$p_k = \alpha^k \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{n+1}},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{4.27}$$

Якщо $k = 1,$ тобто $\lambda = n\mu,$ то, перейшовши у співвідношенні (4.27) до границі та використовуючи правило Лопіталя, отримаємо

$$p_k = \frac{1}{n+1},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

тобто всі стани є рівноймовірними.

Ймовірність обслуговування замовлення, очевидно, дорівнює ймовірності того, що вимога, яка надійшла в систему, не застане на обслуговуванні в ній n вимог. Оскільки p_n – ймовірність того, що в системі перебуває n замовлень, то, як і у випадку класичної системи з відмовами, маємо

$$P_{обс} = 1 - p_n.$$

Середню кількість вимог, які перебувають у системі, можна визначити як математичне сподівання дискретної випадкової величини:

$$\bar{l} = \sum_{k=0}^{n} k p_k.$$

Ймовірність зайнятості каналу дорівнює ймовірності зайнятості хоча б одного каналу (в системі є хоча б одна вимога), тобто

$$P_{з.к.} = 1 - p_0.$$

З іншого боку, ця ймовірність дорівнює відношенню середньої кількості зайнятих каналів $\bar{k}$ до загальної кількості каналів n. Отже,

$$\frac{\bar{k}}{n} = 1 - p_0,$$

звідки *середня кількість зайнятих каналів* обчислюється за формулою

$$\bar{k} = n\left(1 - p_0\right).$$

4.7 Одноканальна СМО з необмеженою чергою

Ми розглядали системи масового обслуговування з відмовами, тобто коли заявка, заставши всі канали зайнятими, миттєво отримувала відмову і покидала систему. Особливістю систем масового обслуговування з чергою (очікуванням) є те, що вимога може стати в чергу і очікувати звільнення каналу, який зможе її обслужити.

Розглянемо задачу. На вхід одноканальної системи масового обслуговування з чергою, на яку не накладаються жодні обмеження, подається найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ. Потік обслуговування – найпростіший з інтенсивністю μ. Необхідно знайти граничні ймовірності станів системи та показники її ефективності.

Розв'язання

Аналіз роботи системи почнемо з розгляду можливих станів системи і побудови розміченого графа. Множина станів системи S (СМО) має вигляд:

s_0 – канал обслуговування вільний;

s_1 – канал обслуговування зайнятий, черга відсутня;

s_2 – канал обслуговування зайнятий, у черзі одна вимога;

…

s_k – канал обслуговування зайнятий, у черзі $(k-1)$ вимог;

…

Граф станів цієї системи зображено на рис. 4.3.

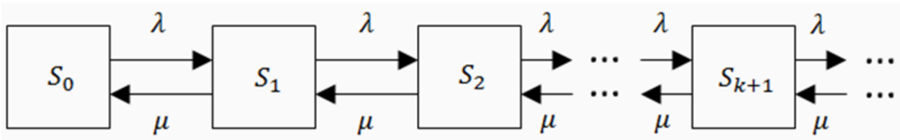

Рисунок 4.3

Аналіз графа показує, що процес, який відбувається в системі S, є марковським процесом розмноження та вимирання, але з нескінченним числом станів, у якому інтенсивність потоку вимог дорівнює λ, а інтенсивність потоку обслуговувань – μ.

Зауважимо, що якщо $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1,$ черга буде зменшуватись. У цьому випадку система зможе досягти стаціонарного режиму (граничні ймовірності існують), якщо ж $\rho \geq 1$ – черга має тенденцію збільшуватися.

Для визначення граничних ймовірностей станів системи S використаємо формули (3.13), (3.14). У результаті отримаємо:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \ldots\right]^{-1} =$$

$$= \left(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^k + \ldots\right)^{-1}. \qquad (4.28)$$

Оскільки граничні ймовірності існують лише за умови $\rho < 1,$ то сума нескінченного геометричного ряду (4.28) дорівнює $\dfrac{1}{1-\rho}$, звідки

$$p_0 = 1 - \rho. \qquad (4.29)$$

Враховуючи, що $p_1 = \rho \cdot p_0,\ p_2 = \rho^2 \cdot p_0, \ldots, p_k = \rho^k \cdot p_0,\ \ldots,$ отримаємо

$$p_1 = \rho(1-\rho),\ p_2 = \rho^2(1-\rho), \quad \ldots,\ p_k = \rho^k(1-\rho), \ldots \qquad (4.30)$$

Граничні ймовірності $p_0,\ p_1,\ \ldots, p_k,\ \ldots$ утворюють нескінченну спадну геометричну прогресію зі знаменником $\rho < 1$. Отже, ймовірність p_0 – найбільша. Таким чином, при $\rho < 1$ найбільш ймовірною є подія – відсутність заявок у системі.

Оскільки в системі відсутнє обмеження на довжину черги, то будь-яка вимога може бути обслуженою, тобто ймовірність обслуговування замовлення *(відносна пропускна здатність системи)* дорівнює одиниці:

$$P_{обс} = Q = 1.$$

Абсолютну пропускну здатність системи A визначають за формулою

$$A = \lambda Q = \lambda.$$

Середню кількість вимог (математичне сподівання числа вимог), *які перебувають у системі*, обчислюємо за формулою:

$$L_{сист} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = (1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k. \qquad (4.31)$$

Формулу (4.31) при $\rho < 1$ можна звести до вигляду

$$L_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho}. \qquad (4.32)$$

Середню кількість вимог, які перебувають у черзі, знайдемо, використовуючи співвідношення:

$$L_{оч} = L_{сист} - L_{обс}$$

де $L_{обс}$ – середня кількість заявок, що обслуговуються.

Середню кількість вимог, які обслуговуються (математичне сподівання числа вимог), обчислюємо за формулою:

$$L_{обс} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = 1 - p_0,$$

тобто

$$L_{обс} = 1 - p_0 = P_{відм}.$$

Отже, середня кількість вимог, які обслуговуються в системі, дорівнює ймовірності того, що канал зайнятий.

З урахуванням (4.29) маємо

$$L_{обс} = \rho. \qquad (4.33)$$

Таким чином,

$$L_{оч} = L_{сист} - L_{обс} = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \tag{4.34}$$

Слід підкреслити, що для будь-якої системи масового обслуговування в граничному стаціонарному режимі *середній час перебування вимоги в системі* $\overline{t}_{сист}$ та *середній час перебування вимоги в черзі* $\overline{t}_{оч}$ обчислюються за формулами Літтла:

$$\overline{t}_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист}, \tag{4.35}$$

$$\overline{t}_{оч} = \frac{1}{\lambda} L_{оч}. \tag{4.36}$$

Справедливість формул Літтла пояснюється тим, що в стаціонарному режимі середня кількість вимог, що надходять у систему, дорівнює середній кількості вимог, що покидають систему, оскільки вхідний і вихідний потоки вимог мають однакову інтенсивність λ.

Використовуючи формули Літтла, а також (4.32), (4.34), знайдемо *середній час перебування вимоги в одноканальній СМО з необмеженою чергою*

$$\overline{t}_{сист} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}, \tag{4.37}$$

та *середній час перебування вимоги в черзі*

$$\overline{t}_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}. \tag{4.38}$$

4.8 *n*-канальна СМО з обмеженою чергою

Розглянемо задачу. На вхід n -канальної системи масового обслуговування надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ. Інтенсивність найпростішого потоку обслуговувань кожного каналу дорівнює μ. Потрапивши на обслуговування, вимога обслуговується до завершення. Якщо вимога застає всі канали зайнятими, то вона стає в чергу і чекає свого обслуговування, не покидаючи чергу.

Дисципліна черги природна: спочатку обслуговують того, хто раніше прийшов. Максимальна кількість місць у черзі – m. Кожне замовлення може обслуговуватися лише одним каналом. Якщо вимога надійшла в систему, коли всі m місць у черзі зайняті, вона покидає систему необслуженою. Отже, параметрами такої системи з очікуванням є величини n, λ, μ, m.

Аналіз роботи системи почнемо з розгляду можливих станів системи і побудови розміченого графа. Множина станів системи S (СМО) має вигляд:

s_0 – всі канали вільні, черга відсутня;

s_1 – один канал зайнятий, черга відсутня;

s_2 – два канали зайняті, черга відсутня;

…

s_n – n каналів зайняті, черги немає;

s_{n+1} – n каналів зайняті, 1 вимога в черзі;

s_{n+2} – n каналів зайняті, 2 вимоги в черзі;

…

s_{n+m} – n каналів зайняті, m вимог перебуває в черзі.

Отже, система має $n+m+1$ стан. Граф станів цієї системи зображено на рис. 4.4.

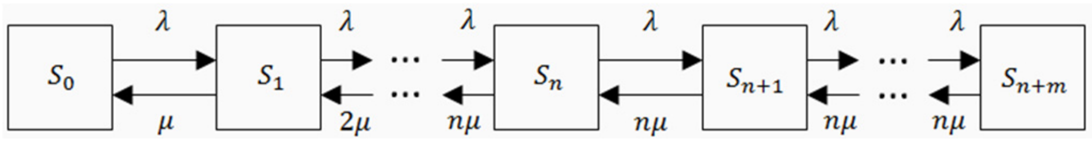

Рисунок 4.4

Від стану s_0 до стану s_n граф станів системи такий самий, як граф станів класичної системи Ерланга з відмовами. Для станів s_{n+1}, …, …, s_{n+m-1} на систему діє потік звільнень зайнятих n каналів інтенсивності $n\mu$, намагаючись перевести її в сусідній стан ліворуч, і потік вимог інтенсивності $\lambda \sin^{-1}$.

Для аналізу стаціонарної роботи системи ($\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $t \to \infty$) можна використати результати, одержані при розв'язуванні відповідних систем алгебраїчних рівнянь для класичної системи з відмовами (граф – від стану s_0 до стану s_n), і системи з відмовами і повною взаємодопомогою між каналами (граф – від стану s_n до стану s_{n+m}):

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ p_{n+r} = \alpha^r p_n, r = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

де $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$; $\alpha = \dfrac{\rho}{n}$.

Використовуючи нормувальну умову

$$\sum_{k=0}^{n} p_k + \sum_{r=1}^{m} p_{n+r} = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} p_0 + \sum_{r=1}^{m} \alpha^r \frac{\rho^n}{n!} p_0 = p_0 \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{\alpha\left(1-\alpha^m\right)}{1-\alpha} \right) = 1,$$

отримаємо

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{\alpha\left(1-\alpha^m\right)}{1-\alpha}}. \qquad (4.39)$$

Домножимо чисельник і знаменник дробу (4.39) на $e^{-\rho}$. Враховуючи, що

$$P(k;\rho) = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}; \; R(n;\rho) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho},$$

знайдемо шукані ймовірності станів:

$$p_k = \frac{P(k,\rho)}{R(n,\rho) + \frac{\alpha\left(1-\alpha^m\right)}{1-\alpha} P(n,\alpha)}, k = 0,\ 1,\ \ldots, n;$$

$$p_{n+r} = \alpha^r p_n,\; r = 1,\ \ldots, m. \qquad (4.40)$$

Зауважимо, що у формулах (4.40) $\alpha \neq 1$.

Якщо $\alpha = 1$, то $\rho = n$. Враховуючи, що за правилом Лопіталя $\lim\limits_{\alpha\to 1} \frac{1-\alpha^m}{1-\alpha} = m$, формули для визначення ймовірностей (4.40) при $\alpha = 1$ набувають вигляду:

$$p_k = \frac{P(k,n)}{R(n,n) + mP(n,n)},\; k = 0,\ 1,\ \ldots, n;$$

$$p_{n+r} = p_n,\; r = 1,\ \ldots, m. \qquad (4.41)$$

Ймовірність обслуговування вимоги дорівнює ймовірності того, що вимога, яка надійшла в систему, застане вільним хоча б один з каналів або хоча б одне місце в черзі. Отже,

$$P_{обс} = 1 - p_{n+m} = 1 - \alpha^m p_n.$$

Середню кількість зайнятих каналів обчислимо як математичне сподівання дискретної випадкової величини з урахуванням того, що ймовірностям p_{n+r} відповідає n зайнятих каналів:

$$\overline{k} = \sum_{k=0}^{n} kp_k + n\sum_{r=1}^{m} p_{n+r}.$$

Середню кількість зайнятих каналів можна також обчислити за формулою:

$$\overline{k} = \frac{\lambda}{\mu} P_{обс} = \rho\left(1 - \alpha^m p_n\right).$$

Ймовірність зайнятості каналу обчислюють за формулою:

$$P_{з.к.} = \frac{\overline{k}}{n} = \frac{\rho}{n}\left(1 - \alpha^m p_n\right).$$

Середню кількість замовлень, які перебувають у черзі, можна обчислити як математичне сподівання:

$$\overline{r} = \sum_{r=1}^{m} rp_{n+r} = p_n \sum_{r=1}^{m} r\alpha^r.$$

Можна показати, зокрема [8, с. 108], що

$$\overline{r} = \alpha\, p_n \frac{1 - \alpha^m \left(m\left(1-\alpha\right)+1\right)}{\left(1-\alpha\right)^2},\ \ \alpha \neq 1.$$

Якщо $\alpha = 1,$ враховуючи (4.41), отримаємо

$$\overline{r} = \sum_{r=1}^{m} r \frac{P\left(n,n\right)}{R\left(n,n\right) + mP\left(n,n\right)} = \frac{m\left(m+1\right)}{2} \frac{P\left(n,n\right)}{R\left(n,n\right) + mP\left(n,n\right)}.$$

Розглянемо систему масового обслуговування, *в якій є лише один канал обслуговування* $n = 1$ і m місць у черзі. У цьому випадку $\alpha = \rho.$ Отже, формули (4.40) набувають вигляду

$$p_k = \frac{\rho^k\left(1-\rho\right)}{1-\rho^{m+1}}, k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m+1 \qquad (4.42)$$

та визначають ймовірність того, що в системі буде k вимог (одна вимога обслуговується, а решта чекає в черзі).

Ймовірність обслуговування вимоги визначається за формулою:

$$P_{обс} = 1 - p_{m+1} = \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}.$$

Середня кількість зайнятих каналів (або ймовірність того, що один канал зайнятий) обчислюється за формулою:

$$\bar{k} = P_{з.к.} = \rho \cdot P_{обс} = \rho \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}.$$

Середню кількість замовлень, які перебувають у черзі, обчислюють за формулою:

$$\bar{r} = \rho\, p_1 \frac{1-\rho^m\left(m(1-\rho)+1\right)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^2}{1-\rho^{m+1}} \cdot \frac{1-\rho^m\left(m(1-\rho)+1\right)}{1-\rho}.$$

Приклад 4.3. На автозаправці є n бензоколонок. Майданчик поблизу АЗС допускає одночасне очікування не більше 3 автомобілів. Потік автомобілів, які прибувають на заправку, – найпростіший з інтенсивністю $\lambda = 2\left(\text{хв}^{-1}\right)$. Час обслуговування автомобіля розподілений за показниковим законом із середнім значенням $1\,\text{хв}$. Визначити мінімальну кількість бензоколонок, які забезпечать обслуговування не менше $95\ \%$ автомобілів, що потребують заправки.

Розв'язання

Згідно з умовою задачі АЗС – n -канальна система масового обслуговування з очікуванням і обмеженою довжиною черги $(m=3)$, $\lambda = 2$, $\mu = 1$, тоді $\rho = 2$.

Для такої системи

$$P_{обс} = 1 - p_{n+m} = 1 - \alpha^m p_n = 1 - \alpha^m \frac{\rho^n}{n!} p_0$$

де $$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{\alpha\left(1-\alpha^m\right)}{1-\alpha} \right)^{-1},\ \alpha = \frac{\rho}{n} \neq 1;;$$

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} m \right)^{-1},\ \alpha = 1,$$

причому за умовою $P_{обс} \geq 0{,}95.$

Використовуючи формулу

$$P_{обс} = 1 - p_{n+m} = 1 - \alpha^m p_n = 1 - \alpha^m \frac{\rho^n}{n!} p_0,$$

знайдемо ймовірність обслуговування $P_{обс}$ для різних значень n.

Якщо $n = 1$, маємо

$$\alpha = 2, \; p_0 = \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^1}{1!} \cdot \frac{2\left(1 - 2^3\right)}{1-2} \right)^{-1} = \frac{1}{31},$$

$$P_{обс} = 1 - 2^3 \cdot \frac{2}{1!} \cdot \frac{1}{31} = \frac{15}{31} \approx 0,484 < 0,95.$$

Якщо $n = 2$, маємо

$$\alpha = 1, \; p_0 = \left(\sum_{k=0}^{2} \frac{2^k}{k!} + \frac{2^2}{2!} \cdot 3 \right)^{-1} = \frac{1}{11} \approx 0,091,$$

$$P_{обс} = 1 - \frac{2^2}{2!} \cdot \frac{1}{11} = \frac{9}{11} \approx 0,818 < 0,95.$$

Якщо $n = 3$, маємо

$$\alpha = \frac{2}{3}, \; p_0 = \left(\sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{k!} + \frac{2^3}{3!} \cdot \frac{2/3 \cdot \left(1 - 8/27\right)}{1/3} \right)^{-1} = \frac{81}{665} \approx 0,122,$$

$$P_{обс} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{2^3}{3!} \cdot \frac{81}{665} = 1 - \frac{32}{665} = \frac{633}{665} \approx 0,952 > 0,95.$$

Таким чином, для забезпечення обслуговування не менше $95\,\%$ автомобілів, що потребують заправки, необхідно 3 бензоколонки.

Слід зазначити, що ми розглядали лише окремі види систем масового обслуговування. Інші види систем масового обслуговування та визначення показників їх ефективності можна знайти в інших посібниках, зокрема в [8–10; 13].

Зауважимо також, що ми досліджували системи обслуговування, до яких надходив один найпростіший потік вимог, а отже, ймовірнісні моделі мали просту структуру, їх характеристики визначалися шляхом алгебраїчних перетворень із використанням умови нормування.

Задача значно ускладнюється в тому випадку, коли до системи надходять два або більше пуассонівських потоків вимог, для яких вводиться певна черговість в обслуговуванні, і при цьому число обслуговуючих каналів може бути більше одного. Тоді в стаціонарному режимі стохастична модель буде описуватися системою лінійних алгебраїчних рівнянь високого порядку відносно ймовірностей станів системи. Розв'язати таку систему класичними методами лінійної алгебри складно, а в деяких випадках неможливо.

У цьому випадку можна застосувати аналітичний метод розв'язання таких систем – *метод твірних функцій*, які в теорії випадкових процесів називають ймовірнісними твірними функціями. Метод твірних функцій можна застосовувати як до систем диференціальних рівнянь, що являють собою ймовірнісну модель системи в динаміці (застосовують перетворення Лапласа), так і до систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що являють собою ймовірнісну модель системи в стаціонарному режимі.

З прикладами застосування методу ймовірнісних твірних функцій для дослідження моделей, що описують роботу систем масового обслуговування, можна ознайомитись у [9, с. 172–238].

З прикладами розв'язання задач з дослідження систем масового обслуговування та визначення показників їх ефективності можна ознайомитись у [2, с. 363–385].

Питання для самоперевірки

1. Що є предметом теорії масового обслуговування?
2. Що називається системою масового обслуговування?
3. Охарактеризуйте основні складові елементи системи масового обслуговування.
4. Які системи масового обслуговування називаються марковськими (немарковськими)?
5. Які системи масового обслуговування називаються одноканальними (багатоканальними)?
6. Охарактеризуйте системи масового обслуговування з відмовами.
7. Охарактеризуйте системи масового обслуговування з чергою.
8. Охарактеризуйте розімкнені і замкнені системи масового обслуговування.
9. Охарактеризуйте скорочену символіку позначень Д. Кендалла.
10. Що називається абсолютною пропускною здатністю системи?
11. Що називається відносною пропускною здатністю системи?
12. Запишіть систему диференціальних рівнянь Колмогорова для одноканальної СМО з відмовами.
13. Визначте показники ефективності одноканальної СМО з відмовами.
14. Запишіть систему диференціальних рівнянь Колмогорова для n -канальної СМО з відмовами.

15. Запишіть рівняння для граничних ймовірностей станів n -канальної СМО з відмовами.
16. Запишіть формули Ерланга для граничних ймовірностей станів n -канальної СМО з відмовами.
17. Визначте показники ефективності класичної системи масового обслуговування з відмовами.
18. Охарактеризуйте принцип роботи n -канальної СМО з відмовами і повною взаємодопомогою між каналами.
19. Визначте граничні ймовірності станів та показники ефективності одноканальної системи масового обслуговування з необмеженою чергою.
20. Запишіть формули Літтла.
21. Охарактеризуйте принцип роботи n -канальної СМО з обмеженою чергою.
22. Визначте показники ефективності n -канальної СМО з обмеженою чергою.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бережная Е. В. Математические методы моделирования экономических систем : учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 432 с.
2. Вентцель Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей : учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 5-е изд., испр. – М. : Издат. центр “Академия”, 2003. – 488 с.
3. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология : учеб. пособие / Е. С. Вентцель. – 4-е изд., стер. – М. : Дрофа, 2006. – 206 с.
4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей : учеб. для вузов / Е. С. Вентцель. – 7-е изд., стер. – М. : Высшая шк., 2001. – 575 с.
5. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения : учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2007. – 479 с.
6. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1998. – 400 с.
7. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 6-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1998. – 479 с.
8. Жерновий Ю. В. Марковські моделі масового обслуговування : тексти лекцій / Ю. В. Жерновий. – Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004. – 154 с.
9. Жлуктенко В. І. Стохастичні моделі в економіці : монографія / В. І. Жлуктенко, А. В. Бєгун. – К. : КНЕУ, 2005. – 352 с.
10. Исследование операций в экономике / [Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин и др.] ; под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.
11. Коломієць С. В. Теорія випадкових процесів : навчальний посібник : у 2 ч. / С. В. Коломієць ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2010. – Ч. 1. – 78 с.
12. Лабскер Л. Г. Вероятностное моделирование в финансово-экономической области / Л. Г. Лабскер. – М. : Альпина Паблишер, 2002. – 224 с.

13. Максимов О. В. Елементи теорії масового обслуговування : навчальний посібник / О. В. Максимов, М. О. Рашевський. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2004. – 147 с.
14. Сеньо П. С. Випадкові процеси : підручник / С. П. Сеньо ; Мін-во освіти і науки України, ЛНУ. – Львів : Компакт-ЛВ, 2006. – 288 с.
15. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник / С. П. Сеньо ; Мін-во освіти і науки України, ЛНУ. – К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 448 с.
16. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе : учеб. пособие для вузов / С. И. Шелобаев. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 367 с.

Додаток А

Значення ймовірностей $p_n = B\left(n,\ \rho\right) = \dfrac{\dfrac{\rho^n}{n!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\rho^k}{k!}}$

n	$\rho = 0{,}1$	$\rho = 0{,}2$	$\rho = 0{,}3$	$\rho = 0{,}4$	$\rho = 0{,}5$	$\rho = 0{,}6$	$\rho = 0{,}7$
1	0,0909	0,1667	0,2308	0,2857	0,3333	0,3750	0,4118
2	0,0045	0,0164	0,0335	0,0541	0,0769	0,1011	0,1260
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0127	0,0198	0,0286
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

n	$\rho = 0{,}8$	$\rho = 0{,}9$	$\rho = 1{,}0$	$\rho = 1{,}5$	$\rho = 2{,}0$	$\rho = 2{,}5$	$\rho = 3{,}0$
1	0,4444	0,4737	0,5000	0,6000	0,6667	0,7143	0,7500
2	0,1509	0,1757	0,2000	0,3103	0,4000	0,4717	0,5294
3	0,0387	0,0501	0,0625	0,1343	0,2105	0,2822	0,3462
4	0,0077	0,0111	0,0154	0,0480	0,0952	0,1499	0,2061
5	0,0012	0,0020	0,0031	0,0142	0,0367	0,0697	0,1101
6	0,0002	0,0003	0,0005	0,0035	0,0121	0,0282	0,0522
7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0034	0,0100	0,0219
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0031	0,0081
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0027
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002

Продовження додатка А

n	$\rho=3{,}5$	$\rho=4{,}0$	$\rho=4{,}5$	$\rho=5{,}0$	$\rho=6{,}0$	$\rho=7{,}0$	$\rho=8{,}0$
1	0,7778	0,8000	0,8182	0,8333	0,8571	0,8570	0,8889
2	0,5765	0,6154	0,6480	0,6757	0,7200	0,7538	0,7805
3	0,4021	0,4507	0,4929	0,5297	0,5902	0,6375	0,6755
4	0,2603	0,3107	0,3567	0,3983	0,4696	0,5273	0,5746
5	0,1541	0,1991	0,2430	0,2849	0,3604	0,4247	0,4790
6	0,0825	0,1172	0,1542	0,1918	0,2649	0,3313	0,3898
7	0,0396	0,0627	0,0902	0,1205	0,1851	0,2489	0,3082
8	0,0170	0,0304	0,0483	0,0700	0,1219	0,1788	0,2356
9	0,0066	0,0133	0,0236	0,0375	0,0751	0,1221	0,1731
10	0,0023	0,0053	0,0105	0,0184	0,0431	0,0787	0,1217
11	0,0007	0,0019	0,0043	0,0083	0,0230	0,0477	0,0813
12	0,0002	0,0006	0,0016	0,0034	0,0114	0,0271	0,0514
13	0,0001	0,0002	0,0006	0,0013	0,0052	0,0144	0,0307
14	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0022	0,0071	0,0172
15		0,0000	0,0001	0,0002	0,0009	0,0033	0,0091
16			0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0045
17					0,0001	0,0006	0,0021
18					0,0000	0,0002	0,0009
19						0,0001	0,0004
20						0,0000	0,0002

Продовження додатка А

n	$\rho = 9$	$\rho = 10$	$\rho = 11$	$\rho = 12$	$\rho = 13$	$\rho = 14$	$\rho = 15$
1	0,9000	0,9091	0,9167	0,9231	0,9286	0,9333	0,9375
2	0,8020	0,8197	0,8345	0,8471	0,8579	0,8673	0,8755
3	0,7064	0,7321	0,7537	0,7721	0,7880	0,8019	0,8140
4	0,6138	0,6467	0,6745	0,6985	0,7192	0,7373	0,7532
5	0,5249	0,5640	0,5974	0,6264	0,6516	0,6737	0,6932
6	0,4405	0,4845	0,5227	0,5561	0,5854	0,6112	0,6341
7	0,3616	0,4090	0,4510	0,4880	0,5209	0,5500	0,5761
8	0,2892	0,3338	0,3828	0,4227	0,4584	0,4905	0,5193
9	0,2243	0,2732	0,3187	0,3604	0,3984	0,4328	0,4639
10	0,1680	0,2146	0,2596	0,3019	0,3412	0,3773	0,4103
11	0,1208	0,1632	0,2061	0,2478	0,2874	0,3244	0,3588
12	0,0831	0,1197	0,1589	0,1986	0,2374	0,2746	0,3096
13	0,0544	0,0843	0,1185	0,1549	0,1919	0,2282	0,2632
14	0,0338	0,0568	0,0852	0,1172	0,1512	0,1858	0,2200
15	0,0199	0,0365	0,0588	0,0875	0,1159	0,1478	0,1803
16	0,0110	0,0223	0,0389	0,0604	0,0860	0,1145	0,1446
17	0,0058	0,0129	0,0245	0,0409	0,0617	0,0862	0,0862
18	0,0029	0,0071	0,0148	0,0265	0,0427	0,0628	0,1446
19	0,0014	0,0037	0,0085	0,0165	0,0284	0,0442	0,0637
20	0,0006	0,0019	0,0046	0,0098	0,0181	0,0300	0,0456

Продовження додатка А

n	$\rho = 11$	$\rho = 12$	$\rho = 13$	$\rho = 14$	$\rho = 15$
21	0,0024	0,0056	0,0111	0,0196	0,0315
22	0,0012	0,0030	0,0065	0,0123	0,0211
23	0,0006	0,0016	0,0037	0,0075	0,0135
24	0,0003	0,0008	0,0020	0,0043	0,0084
25	0,0001	0,0004	0,0010	0,0024	0,0050
26	0,0000	0,0002	0,0005	0,0013	0,0029
27		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016
28		0,0000	0,0001	0,0003	0,0009
29			0,0001	0,0002	0,0004
30			0,0000	0,0001	0,0002

n	$\rho = 16$	$\rho = 17$	$\rho = 18$	$\rho = 19$	$\rho = 20$
1	0,9412	0,9444	0,9474	0,9500	0,9286
2	0,8828	0,8892	0,8950	0,9002	0,9050
3	0,8248	0,8344	0,8430	0,8508	0,8578
4	0,7674	0,7800	0,7914	0,8016	0,8109
5	0,7106	0,7262	0,7402	0,7529	0,7644
6	0,6546	0,6729	0,6895	0,7045	0,7181
7	0,5994	0,6204	0,6394	0,6566	0,6723
8	0,5452	0,5687	0,5899	0,6093	0,6270
9	0,4922	0,5179	0,5413	0,5626	0,5822
10	0,4406	0,4682	0,4935	0,5167	0,5380
11	0,3905	0,4198	0,4468	0,4716	0,4945
12	0,3424	0,3729	0,4012	0,4275	0,4518
13	0,2965	0,3278	0,3571	0,3845	0,4101
14	0,2531	0,2847	0,3147	0,3429	0,3694

Продовження додатка А

n	$\rho=16$	$\rho=17$	$\rho=18$	$\rho=19$	$\rho=20$
15	0,2126	0,2440	0,2741	0,3028	0,3300
16	0,1753	0,2059	0,2357	0,2645	0,2920
17	0,1416	0,1707	0,1997	0,2282	0,2557
18	0,1118	0,1388	0,1665	0,1941	0,2213
19	0,0861	0,1105	0,1362	0,1625	0,1889
20	0,0644	0,0859	0,1092	0,1338	0,1589
21	0,0468	0,0605	0,0856	0,1080	0,1314
22	0,0329	0,0478	0,0655	0,0853	0,1067
23	0,0224	0,0341	0,0487	0,0658	0,0849
24	0,0147	0,0236	0,0353	0,0495	0,0661
25	0,0093	0,0158	0,0248	0,0363	0,0502
26	0,0057	0,0102	0,0169	0,0258	0,0372
27	0,0034	0,0064	0,0111	0,0178	0,0268
28	0,0019	0,0039	0,0071	0,0120	0,0188
29	0,0011	0,0023	0,0044	0,0078	0,0128
30	0,0006	0,0013	0,0026	0,0049	0,0085
31	0,0003	0,0007	0,0015	0,0030	0,0054
32	0,0001	0,0004	0,0009	0,0018	0,0034
33	0,0001	0,0002	0,0005	0,0010	0,0020
34	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0012
35		0,0000	0,0001	0,0003	0,0007
36			0,0001	0,0002	0,0004
37			0,0000	0,0001	0,0002
38				0,0000	0,0001
39					0,0001
40					0,0000

Навчальне видання

Коломієць Світлана Володимирівна

ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник

У 2 частинах

Частина II

Редагування *Г. М. Нужненко*

Технічне редагування *І. О. Кругляк*

Комп’ютерна верстка *Н. А. Височанська*

Підписано до друку 24.05.2013 Формат 60х90/16. Гарнітура Times.
Обл.-вид. арк. 3,75. Умов. друк. арк. 6,5. Зам. № 1215

Видавець і виготовлювач
Державний вищий навчальний заклад
“Українська академія банківської справи Національного банку України”
вул. Петропавлівська, 57, м. Суми, 40000, Україна, тел. 0(542) 66-51-27

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції: серія ДК № 3160 від 10.04.2008