Українська академія банківської справи
Національного банку України

**К.В. Ніколаєва, В.В. Койбічук**

# ДИСКРЕТНИЙ АНАЛІЗ
## Частина 1

Посібник

Для студентів спеціальності “Економічна кібернетика”
денної форми навчання

Суми
УАБС НБУ
2006

**УДК 510(076.5)**
**Н63**

Рекомендовано до видання методичною радою Української академії банківської справи Національного банку України, протокол № 4 від 27.12.2005.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри вищої математики та інформатики, протокол № 3 від 24.10.2005.

Автори:
кандидат фізико-математичних наук, доцент
*К.В. Ніколаєва;*
викладач-стажист
*В.В. Койбічук*

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук, професор
кафедри вищої математики
Сумського національного аграрного університету
*К.Г. Малютін;*

кандидат фізико-математичних наук, доцент
кафедри математичного аналізу
Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
*О.О. Курченко*

Відповідальний за випуск
кандидат технічних наук, доцент
*В.В. Яценко*

**Н63** **Ніколаєва К.В., Койбічук В.В. Дискретний аналіз. Частина 1:** Посібник. – Суми: УАБС НБУ, 2006. – 100 с.

Посібник є практикумом із розв’язування задач основних розділів дискретного аналізу. Рекомендований для проведення практичних занять та самостійного опрацювання курсу.

Призначений для студентів спеціальності “Економічна кібернетика” денної форми навчання.

**УДК 510(076.5)**

# ПЕРЕДМОВА

Посібник написано відповідно до діючої програми з курсу “Дискретний аналіз” для студентів спеціальності “Економічна кібернетика”.

Головна мета його полягає в тому, щоб сприяти свідомому засвоєнню теорії, розвитку математичного мислення студентів, прищепленню їм навичок розв’язування задач.

Необхідність його видання зумовлена тим, що, по-перше, студенти першого курсу стикаються зі значними труднощами при засвоєнні великої кількості нових досить специфічних понять і осмисленні їх взаємозв’язків. По-друге, ситуація ускладнюється великою кількістю підручників та посібників з різними підходами та різним тлумаченням основних понять, які до того ж не адаптовані для економістів-кібернетиків. По-третє, майже відсутні збірники завдань, що відповідають діючій програмі.

Дискретний аналіз – це галузь математики, **предметом** якої є вивчення властивостей структур скінченого характеру, що виникають як в самій математиці, так і її застосуванні.

Як синонім дискретного аналізу, або в більш широкому розумінні дискретної математики, іноді використовують термін “скінчена математика”.

До **структури** дискретного аналізу входять математична логіка, теорія чисел, скінченні алгебраїчні структури, комбінаторика та комбінаторний аналіз, теорія графів, теорія кодування та декодування, теорія алгоритмів, скінченні автомати та машини Т’юрінга та інші. Кожний з цих розділів має свій предмет, свої методи дослідження. Та основним критерієм їх об’єднання під єдиною назвою “дискретна математика” є конструктивний характер теорії, алгоритмічний та комбінаторний методи.

Посібник складається з двох частин. Дана частина є першою і охоплює розділи: “Математична логіка”, “Теорія множин та відношень”, “Алгебраїчні структури”, “Булева алгебра формул та функцій”, “Системи числення”.

Основою, і не тільки дискретної, а й усієї математики, є математична логіка. Логікою взагалі називають науку про закони і форми мислення. Математична логіка є наслідком проникнення логіки в математику і математики в логіку. Таке взаємопроникнення стало плідним: воно збагачує кожну з цих наук новими методами дослідження, розширює сферу їх практичних застосувань. Саме так з’явилась так звана “технічна логіка” – напрям математики, що займається проектуванням дискретних технічних пристроїв.

Зазначимо, що особливістю курсу математичної логіки в нашому викладі є лінія формалізації знань: від інтуїтивної логіки в розділі "Алгебра висловлень" через сучасні погляди на аксіоматичні теорії (змістовні – в розділі "Алгебраїчні структури" і формалізовані – в численні висловлень та предикатів) до загальних понять ізоморфізма та гомоморфізма алгебраїчних систем, теорії відношень та булевих функцій, включаючи питання повноти, представлення формулами та мінімізації.

Окремий розділ присвячено поняттям "множина", "відношення", "функція". Цей комплекс, включаючи терміни, властивості, операції, класифікацію, є необхідною основою для подальшої побудови всієї математики.

Жорстка обмеженість в часі зумовила розгляд лише скінченних множин і свідому відмову від глибоких, тонких, але складних питань, пов'язаних із нескінченністю.

Значна увага приділена важливим, на нашу думку, для кібернетиків питанням застосування булевих функцій до аналізу та синтезу релейно-контактних схем з їх використанням в комп'ютерних пристроях. Необхідним в цьому є розуміння алгоритмів переводу чисел з однієї системи числення в іншу та оперування з числами в різних системах.

Посібник складається з шести розділів, деякі з них розділені на параграфи.

Нумерація прикладів, формул, рисунків, таблиць та схем у кожному параграфі своя.

Позначення та скорочення, що використовуються в посібнику, є, в основному, загальновживаними.

В посібнику підібрані різні за характером задачі. По-перше, це досить прості змістовні задачі, спрямовані на розкриття основних понять курсу і взаємозв'язків між ними. По-друге, це досить велика добірка задач технічного характеру для відпрацювання необхідних навичок. Наведені зразки розв'язання типових вправ. Крім того, вміщені позначені зірочкою дещо складніші задачі як теоретичного, так і практичного змісту, для заохочення здібних студентів.

В задачнику викладачі знайдуть матеріал для аудиторних занять, домашніх завдань та контрольних робіт.

Декілька варіантів комплексної контрольної роботи з опрацьованих тем запропоновано в додатку А.

В кінці посібника наведено список рекомендованої літератури. Він є досить великим і включає підручники, рекомендовані для вивчення курсу, збірники задач, які значною мірою допомогли створити цей посібник, а також додаткову літературу для всебічного ознайомлення з окремими питаннями курсу.

Модернізація освіти України в контексті Болонського процесу передбачає її переорієнтацію, перенесення акцентів із знань та вмінь як результатів навчання на формування компетентності випускників.

Міжнародна комісія Ради Європи розглядає поняття компетентності спеціаліста як відповідальне виконання своїх обов'язків на рівні світових вимог і стандартів певної галузі, що ґрунтується на знаннях, досвіді, цінностях, здобутих завдяки навчанню.

Опрацювавши включені в посібник розділи, студенти повинні

***знати:***

- поняття множини, операції над ними, поняття нечіткої множини;
- відношення порядку й еквівалентності, функціональні відношення;
- основні алгебраїчні структури;
- основні поняття, операції, властивості алгебри логіки;
- булеві функції двох змінних;
- поняття та алгоритми мінімізації булевих функцій;
- поняття та алгоритми операції над числами в різних позиційних системах числення;

***вміти:***

- доводити теоретико-множинні рівності;
- мати навички комбінаторного аналізу;
- аналізувати структуру математичних тверджень, причинно-наслідкові зв'язки;
- оперувати формулами алгебри висловлень;
- виконувати аналітичні перетворення функцій алгебри логіки;
- знаходити нормальні форми формул та функцій алгебри логіки;
- встановлювати повноту системи булевих функцій;
- мінімізувати булеві функції;
- виконувати аналіз та синтез релейно-контактних схем;
- виконувати операції над числами в різних системах числення.

# ТЕМА 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

## § 1.1. Висловлення. Операції над висловленнями

**Завдання 1.** Наступні складені висловлення розкласти на прості складові і записати символічно, ввівши позначення цих складових:

1. Якщо $a$ ділиться на 2 і не ділиться на 3, то воно не ділиться на 6.
2. Добуток трьох чисел дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли один з них дорівнює 0.
3. Для того, щоб трикутники були нерівними, достатньо, щоб вони були неподібними.
4. Якщо в трикутнику медіана не є висотою і бісектрисою, то цей трикутник не рівнобедрений і не рівносторонній.

► 4. Виділимо і позначимо через A, B, C, D такі прості висловлення:

A: “В трикутнику медіана є висотою”.

B: “В трикутнику медіана є бісектрисою”.

C: “Цей трикутник – рівнобедрений”.

D: “Цей трикутник – рівносторонній”.

Тоді дане висловлення має символічний запис:

$(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg C \wedge \neg D)$.

**Завдання 2.** Нехай через A позначено висловлення “Цей трикутник рівнобедрений”, через B – “Цей трикутник рівносторонній”. Прочитати висловлення:

1. $\neg A \wedge \neg B$.
2. $\neg (A \vee B)$.
3. $\neg A \Rightarrow \neg B$.
4. $(A \vee B) \Leftrightarrow A$.
5. $\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg B$.
6. $(A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg\neg A$.

► 6. Якщо цей трикутник рівнобедрений та нерівносторонній, то невірно, що він нерівнобедрений.

**Завдання 3.** Дано висловлення:

A: “Я люблю математику”.

B: “Я люблю спорт”.

Який зміст мають висловлення?

1. $A \wedge B$.
2. $\overline{A \wedge B}$.
3. $A \vee B$.

4. $A \wedge \overline{B}$.
5. $\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$.
6. $\overline{A}$.
7. $\overline{A} \vee B$.

Які з цих висловлень істинні, якщо A і B істинні?

**Завдання 4.** Дано висловлення:

A: “$m$ і $n$ – невід’ємні числа”.

B: “$m+n=mn$”.

C: “$m=0$”.

D: “$n=0$”.

E: “$m=2$”.

F: “$n=2$”.

Сформулювати словами твердження $A \to [B \sim ((C \wedge D) \vee (E \wedge F))]$ і довести його.

**Завдання 5.** За допомогою кванторів записати твердження:

1. Сума трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3.
2. Протягом години існує момент, коли годинна та хвилинна стрілки співпадають.
3. Серед будь-яких трьох цілих чисел завжди є два, сума яких парна.

Встановити їх істинність.

**Завдання 6.** Записати у вигляді логічної формули твердження:

1. Якщо ціле число $n$ ділиться на 30, то воно ділиться на 3 і на 10, а також на 5 і на 6.
2. Якщо ціле число $n$ ділиться на 3 і на 10 або на 5 і на 6, то воно ділиться на 30.
3. Ціле число $n$ ділиться на 30 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на 3 і на 10 або на 5 і на 6.

**Завдання 7.** Дано два висловлення:

A: “Василь знає Петра”.

B: “Петро знає Василя”.

Записати логічними формулами такі висловлення:

1. “Василь і Петро знають один одного”.
2. “Василь і Петро не знають один одного”.
3. “Або Василь знає Петра, або Петро знає Василя”.
4. “Василь не знає Петра, а Петро знає Василя”.
5. “Неправильно, що Петро не знає Василя”.
6. “Неправильно, що Василь і Петро один одного не знають”.

Нехай твердження А завдання 7 істинне, а В – хибне. Які значення істинності мають судження 1-6?

**Завдання 8.** Записати мовою символів твердження: “Рівняння виду $ax = b$ у множині раціональних чисел має єдиний розв’язок для всіх $a \neq 0$”.

► У даному реченні стверджується існування розв’язку рівняння $ax = b$ у множині раціональних чисел, коли $a \neq 0$, і його єдність. Враховуючи це, дане твердження мовою символів можна записати так:

$$\forall a,b \in Q((a \neq 0 \Rightarrow \exists x \in Q\ ax = b) \wedge \forall y \in Q(ay = b \Rightarrow x = y)).$$

Якщо ввести позначення для предикатів

$$P(a): a \neq 0,\ C(a,x,b): ax = b,\ R(x,y): x = y,$$

то твердження набуде вигляду:

$$\forall a,b \in Q((P(a) \Rightarrow \exists x \in Q\ C(a,x,b)) \wedge \forall y \in Q(C(a,y,b) \Rightarrow R(x,y)).$$

**Завдання 9.** Навести приклади таких висловлень *A* і *B*, щоб:

1. Пряма і обернена імплікації були істинними.
2. Пряма імплікація була хибною, а протилежна – істинною.

**Завдання 10.** Скласти таблицю істинності для логічної формули:

1. $\overline{A \wedge B \vee \left(\overline{A} \wedge \overline{B}\right)}.$
2. $(A \vee B) \cdot (\overline{A} \vee C).$
3. $\overline{A} \wedge (\overline{\overline{A} \vee B}) \vee B.$

**Завдання 11.** Які розміри має таблиця істинності для формули

$$\overline{(A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{(\overline{C \wedge D}) \vee (B \wedge \overline{D})})}?$$

Знайти значення істинності цієї формули при *a = 0, b = 1, c = 1, d = 0.*

**Завдання 12.** Скласти таблиці істинності для формул:

1. $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \Rightarrow (C \Rightarrow B).$
2. $(\overline{A \Rightarrow \overline{A}}) \Leftrightarrow A.$
3. $(A \wedge (A \vee B)) \Leftrightarrow \overline{A}.$
4. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C)).$
5. $(\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}) \sim (A \vee B).$

6. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.
7. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.
8. $\overline{[(A \Rightarrow B) \Rightarrow A] \Rightarrow A}$.
9. $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow (B \vee A)$.
10. $(B \Rightarrow (A \wedge C)) \wedge ((\overline{A \vee C) \Rightarrow B})$.
11. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \vee A) \Rightarrow (C \vee B))$.

## § 1.2. Структура та види теорем. Необхідні та достатні умови

**Завдання 1.** Виділивши умову та висновок теореми, сформулювати її, використовуючи слова “якщо..., то...”:

1. Для подільності добутку на деяке число достатньо, щоб хоча б один із співмножників ділився на це число.
2. Необхідною умовою прямокутника є рівність його діагоналей.
3. На 5 діляться ті цілі числа, які закінчуються цифрами 0 або 5.
4. Дві прямі на площині паралельні, коли вони перпендикулярні до однієї і тієї ж прямої.
5. Кожне квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами має не більше двох дійсних коренів.
6. Парність суми є необхідною умовою парності кожного доданка.
7. Рівність трикутників є достатньою умовою їх рівновеликості.
8. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

**Завдання 2.** Дані твердження:

A: “Трикутник рівнобедрений”.
B: “Два внутрішні кути трикутника рівні між собою”.
C: “Три внутрішні кути трикутника рівні між собою”.
D: “Два зовнішні кути трикутника рівні між собою”.
E: “Дві висоти трикутника рівні між собою”.
F: “Три висоти трикутника рівні між собою”.
G: “Один з кутів трикутника дорівнює $45^\circ$”.

1. Які з цих тверджень є наслідками інших (скласти всі можливі пари)?
2. Які з тверджень B-G є достатніми, необхідними, необхідними та достатніми для A?

**Завдання 3.** В наступних реченнях замість крапок вставити фрази “необхідно, але не достатньо”, “достатньо, але не необхідно”, “необхідно і достатньо” так, щоб утворене висловлення було істинним:

1. Для того, щоб чотирикутник був прямокутником, ..., щоб всі його кути були рівні.
2. Для того, щоб чотирикутник був паралелограмом, ..., щоб всі його сторони були рівні.
3. $\alpha = \beta$ ... для того, щоб $\sin\alpha = \sin\beta$.
4. $x > 1$ ... для того, щоб $x^2 - 1 > 0$.
5. $a \vdots c$ … для того, щоб $ab \vdots c$ $(a,b,c \in Z)$.
6. Для того, щоб чотирикутник був паралелограмом, ..., щоб всі його сторони були рівні.

**Завдання 4.** Нехай задано такі висловлення:

1. A – "Чотирикутник є ромб", B – "Діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні", C – "Чотирикутник має вісь симетрії".
2. A – "Числова функція є періодичною", B – "Числова функція є тригонометричною", C – "Числова функція має властивості парності".
3. A – "Добуток двох натуральних чисел ділиться на 6", B – "Один із множників ділиться на 6"; C – "Один із множників ділиться на 3".
4. A – "Студент Іваненко одержав на екзамені з геометрії оцінку відмінно", B – "Студент Іваненко відвідав протягом семестру всі лекції і футбольні матчі".

Що можна сказати про необхідність чи достатність одного з висловлень для інших?

**Завдання 5.** Сформулювати твердження обернені, протилежні та протилежні до обернених для таких теорем:

1. Якщо трикутник рівнобедрений, то два його кути рівні.
2. Якщо чотирикутник ромб, то його діагоналі взаємно перпендикулярні.
3. У прямокутному трикутнику квадрат довжини гіпотенузи дорівнює сумі квадратів довжин катетів.
4. Якщо кожний доданок є парним числом, то і сума – парне число.
5. Якщо вільний член $c$ квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ дорівнює 0, то один із коренів цього рівняння дорівнює 0.
6. Якщо $a = 0$ і $b = 0$, то $a^2 + b^2 = 0$ $(a,b \in R)$.
7. Якщо $a \vdots c$ і $b \vdots c$, то $(a+b) \vdots c$ $(a,b,c \in Z)$.
8. Якщо ціле число ділиться на 12, то воно ділиться на 3 і на 4.
9. Кожний паралелограм з рівними діагоналями є прямокутник або квадрат.
10. На 5 діляться ті цілі числа, що закінчуються цифрами 0 або 5.

## § 1.3. Предикати. Операції над предикатами

**Завдання 1.** Задані предикати:

$P(x,y,z):\ x^2+y^2\ge z^2;$ $S(n,y):\ y=n!;$

$Q(x,y):\ y=(x-4)/(x+4);$ $T(a,b,c):a$ подобається $b$ більше ніж $c$

$R(x,r):\ |x-1|\le r;$

Записати висловлення:

1. $P(3,4,5)$.
2. $Q(8,2)$.
3. $R(3,7)$.
4. $S(4,24)$.
5. $T(Джон, Сю, Мері)$.

**Завдання 2.** Задані предикати:

$P(x,y,z):\ x^2+y^2=z^2;$ $S(a,b,x):\ a\le x^2\le b;$

$Q(x,y):$ якщо $y^2=x^2$, то $x=y$; $T(a,b):a$ грає в теніс краще ніж $b$.

$R(x):\ [[x]]=[x];$

Записати висловлення:

1. $P(3,4,5)$.
2. $Q(-2,2)$.
3. $R(3{,}1416)$.
4. $S(0,4,-3)$.
5. $T(Джон, Фред)$.

**Завдання 3.** Використовуючи $P$, $Q$, $R$, $S$ і $T$ з вправи 1, записати висловлення:

1. $(\exists x)(\exists y)P(x,y,25)$.
2. $(\exists x)Q(x,7)$.
3. $(\forall r)(\exists x)R(x,r)$.
4. $(\exists n)(\forall y)S(n,y)$.
5. $(\forall c)\ T(Джон, Сю, c)$.

**Завдання 4.** Використовуючи $P$, $Q$, $R$, $S$ і $T$ з вправи 1, записати висловлення:

1. $(\forall x)(\forall y)(\exists z)P(x,y,z)$.
2. $(\forall x)(\forall y)Q(x,y)$.

3. $(\forall x)R(x)$.
4. $(\forall x)(\exists a)(\exists b)S(a,b,x)$.
5. $(\forall a)T(a, Тед)$.

**Завдання 5.** Розглянути всі можливі варіанти навішування кванторів на предикат $D(x,y)$ – “$x$ ділиться на $y$”, визначений на множині $N$. Прочитати одержані твердження. Встановити істинність висловлень.

► 1) $\forall x \ D(x, y)$ – одномісний предикат “кожне натуральне число ділиться на натуральне число $y$”;

а) $\exists x \ D(x, y)$ – одномісний предикат “існує натуральне число, що ділиться на натуральне число $y$”;

б) $\forall y \ D(x, y)$ – одномісний предикат “натуральне число $x$ ділиться на будь-яке натуральне число $y$”;

в) $\exists y \ D(x, y)$ – одномісний предикат “існує натуральне число $y$, що є дільником $x$”;

г) $\forall x \ \forall y \ D(x, y)$ – висловлення “для будь-яких натуральних $x$ і $y$ $x$ ділиться на $y$” – хибне;

ґ) $\forall x \ \exists y \ D(x, y)$ – висловлення “будь-яке натуральне число має натуральний дільник” – істина;

д) $\exists x \ \exists y \ D(x, y)$ – висловлення “існують натуральні числа $x$ і $y$ такі, що $x$ ділиться на $y$” – істина;

е) $\exists x \ \forall y \ D(x, y)$ – висловлення “існує натуральне число $x$, що ділиться на довільне натуральне $y$” – хибне.

**Завдання 6.** Нехай $Q(x, y)$ – предикат порядку “$x \le y$”, визначений на множині чисел $M_9 = \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$. Розглянути різні варіанти квантифікації його змінних. Визначити істинність одержаних висловлень.

**Завдання 7.** Нехай предикат $P(x, y)$ заданий на множині $M = \{a, b, c\}$ таблицею 1.

*Таблиця 1*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $a$ | $a$ | $a$ | $b$ | $b$ | $b$ | $c$ | $c$ | $c$ |
| $y$ | $a$ | $b$ | $c$ | $a$ | $b$ | $c$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $P(x, y)$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Визначити істинність висловлень:

1. $\forall x \ P(x,a)$, $\exists x \ P(x,a)$, $\forall y \ P(a, y)$, $\exists y \ P(a, y)$.
2. $\forall x \ P(x,b)$, $\exists x \ P(x,b)$, $\forall y \ P(b, y)$, $\exists y \ P(b, y)$.

3. $\forall x\ \forall y\ P(x,y), \forall x\ \exists y\ P(x,y), \forall y\ \exists x\ P(x,y), \exists y\ \forall x\ P(x,y).$
4. $\forall y\ \forall x\ P(x,y), \exists x\ \forall y\ P(x,y), \exists x\ \exists y\ P(x,y), \exists y\ \exists x\ P(x,y).$

**Завдання 8.** Нехай *S(x, y, z), П(x, y, z)* – предикати суми та добутку, визначені:
1. На множині $Z$ цілих чисел.
2. На множині $N_0$ натуральних чисел з нулем.

Який зміст мають висловлення:

1) $\exists y\ \forall x\ S(x,y,z)$; 3) $\forall z\ \forall x\ \exists y\ S(x,y,z)$;
2) $\exists y\ \forall x\, \Pi(x,y,z)$; 4) $\forall z\ \forall x\ \exists y\, \Pi(x,y,z)$?

На якій з множин $Z$ або $N_0$ вони істинні?

**Завдання 9.** Розглянути всі варіанти навішування кванторів на предикат $P(x,y)$, описати в словесній формі одержані висловлення. Встановити їх істинність, якщо:
1. $P(x,y)$, визначений на скінченній множині натуральних чисел $N' \subset N$, означає:
   а) "*x* ділить *y*" ("*x* є дільником *y*");
   б) "*x* має спільний дільник з *y*";
   в) "*x* і *y* діляться на 3";
   г) "$x \geq y$";
   ґ) "*x*, *y* – парні числа";
   д) "$x < y$".
2. $P(x,y)$, визначений на системі множин $\beta(U)$, означає:
   а) "*x* є частиною *y*";
   б) "*x* перетинається з *y*".
3. $P(x,y)$, визначений на множині людей, означає:
   а) "*x* є батьком *y*";
   б) "*x* є родичем *y*";
   в) "*x* мешкає в одному місті з *y*";
   г) "*x* є сином *y*";
   ґ) "*x* байдужий до *y*".

**Завдання 10.** Нехай задано предикати:

$P_1(x)$ – "*x* – ціле число", $P_2(x)$ – "*x* – додатне число", $P_3(x)$ – "*x* – парне число",

$C_1(x)$ – "*x* – просте число", $C_2(x)$ – "*x* – натуральне число", $R(x,y)$ – "*x* –ділиться на *y*".

Сформулювати українською мовою висловлення:

1. $\forall x(P_1(x) \wedge P_2(x) \Rightarrow C_2(x))$.
2. $\forall x(P_1(x) \Rightarrow P_3(x) \vee C_1(x))$.
3. $\forall x \exists y(P_3(x) \wedge R(x, y)$.
4. $\exists x(P_3(x) \wedge \forall y(\overline{P_3(y)} \Rightarrow \overline{R(x, y)}))$.
5. $\exists x \forall y(P_1(y) \Rightarrow R(y, x))$.
6. $\forall x(C_1(x) \Rightarrow \exists y(P_3(y) \wedge R(y, x)))$.

**Завдання 11.** Знайти область істинності предиката:

1. “х – космонавт, який перебував у космосі більш як сто днів”, заданого на множині всіх людей.
2. “ $x^2 - x = 0$”, заданого на множині N.
3. “х і у – прості числа, різниця яких дорівнює 2” (числа-близнята), де $x, y \in [1;40]$.
4. “х не ділиться на у”, заданого на множині $\{2,3,5\} \times \{2,3,5\}$.
5. “$\left|\frac{2}{x-13}\right| > \frac{8}{9}$” заданого на множині Z.
6. “$\frac{2}{x} + \frac{y}{3} = 3$ і $\frac{x}{2} + \frac{3}{y} = \frac{3}{2}$”, де $x, y \in N$.
7. “$(x^2 - 4)^2 + (y^2 - 9)^2 = 0$”, де $x, y \in R$.
8. “Х є точка, з якої відрізок [AB] видно під прямим кутом”, заданого на множині точок площини.

# ТЕМА 2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

## § 2.1. Множини. Операції над множинами

**Завдання 1.** Нехай:

1. U={1,2,3,4}, A={1,3,4}, B={2,3}, C={1,4}.
2. U={1,2,…,10}, A={2,4,6,8}, B={3,6,9}, C={1,3,5}.
3. U={a,b,c,d,e,f,g,h}, A={a,b,d}, B={b,d,e,h}, C={a,e,f}.

Знайти:

а) $B \cap C$;
б) $A \setminus C$;
в) $\overline{A} \cup \overline{B}$;
г) $\overline{A \cap B}$.
ґ) $(B \setminus A) \cup \overline{C}$;
д) $A \cap \overline{B}$.

► 1. а) $B \cap C = \{2,3\} \cap \{1,4\} = \varnothing$;
б) $A \setminus C = \{1,3,4\} \setminus \{1,4\} = \{3\}$;
в) $\overline{A} \cup \overline{B} = (U \setminus A) \cup (U \setminus B) = \{2\} \cup \{1,4\} = \{1,2,4\}$;
г) $\overline{A \cap B} = U \setminus (A \cap B) = \{1,2,3,4\} \setminus \{3\} = \{1,2,4\}$;
ґ) $(B \setminus A) \cup \overline{C} = \{2\} \cup \{2,3\} = \{2,3\}$;
д) $A \cap \overline{B} = \{1,3,4\} \cap \{1,4\} = \{1,4\}$.

**Завдання 2.** Нехай $A$ ={1,2}, $B$ = {2,3}, $C$ ={1,3}.

Знайти:

1. $A \cup B \cup C$.
2. $A \cap B \cap C$.
3. $A \setminus (B \cup C)$.
4. $(A \setminus B) \cup C$.
5. $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
6. $C \Delta B$.
7. $A \times B$.

**Завдання 3.** Нехай U ={a,b,c,d}, X = {a,c}, Y = {a,b,d}, Z = {b,c}.

Знайти:

1. $X \cap \overline{Y}$.
2. $(X \cap Z) \cup \overline{Y}$.
3. $X \cup (Y \cap Z)$.
4. $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.
5. $\overline{X} \cap \overline{Y}$.

6. $\overline{X \cap Y}$.
7. $X \setminus \overline{Z}$.
8. $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$.
9. $X \Delta Z$.
10. $X \times Z$.

**Завдання 4.** Нехай U={1,2,3,4,5,6}, A={1,2,3}, B={1,3,5,6}, C= ={4,5,6}.

Знайти:
1. $A \setminus C$.
2. $C \setminus B$.
3. $\overline{A} \cup B$.
4. $B \cap \overline{A}$.
5. $(C \cup A) \setminus (C \cap A)$.
6. $A \Delta C$.

**Завдання 5.** Нехай через *U, A, B, C* позначені відповідно множини всіх співробітників певної фірми; співробітників фірми віком старше 35 років; співробітників цієї фірми, стаж роботи яких перевищує 10 років; менеджерів фірми.

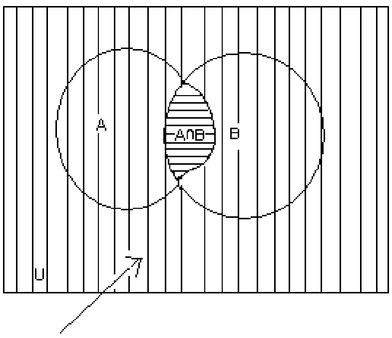
Визначити множини:
1. $\overline{A} \cap B \cap C$.
2. $B \setminus C$.
3. $A \cup (B \cap \overline{C})$.
4. $C \setminus B$.
5. $A \cap (B \setminus C)$.
6. $(A \cap B) \setminus C$.
7. $B \setminus \overline{A}$.
8. $(A \cap B) \cup C$.
9. $A \cap (B \cup C)$.

► 1. $\overline{A} \cap B \cap C$ – множина менеджерів фірми віком не старше 35 років, що мають стаж роботи більше 10 років.
2. Множина робітників зі стажем більше 10 років, що не є менеджерами.

**Завдання 6.** Використовуючи діаграми Ейлера-Венна, заштрихувати частини, що є зображенням заданих множин:

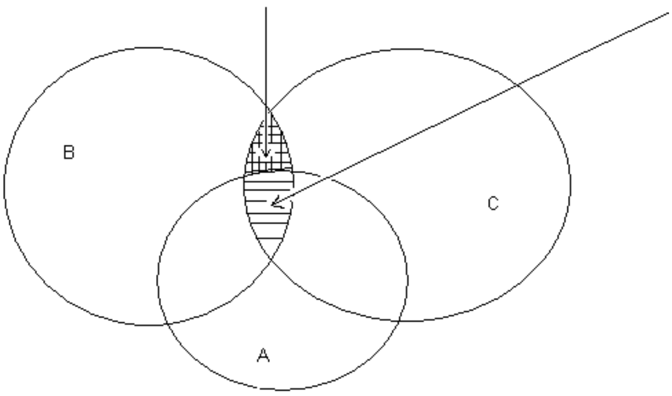
1. $\overline{(A \cap B)}$.
2. $A \cup (B \cap C)$.
3. $B \setminus (A \cup C)$.
4. $A \setminus B$.
5. $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
6. $\overline{(A \cap B \cap C)}$.
7. $(B \cap C) \setminus A$.
8. $A \Delta B$.
9. $A \setminus A \cap B$.
10. $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$.
11. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.
12. $\overline{(A \cup B)}$.
13. $(A \cap B) \Delta C$.
14. $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$.

► 1.

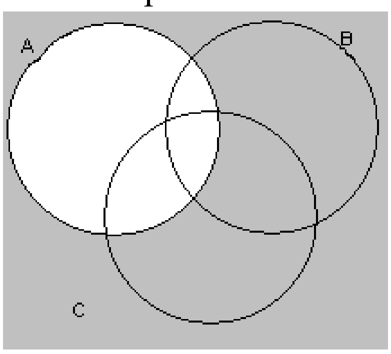



$\overline{(A \cap B)}$ – це вертикально заштрихована частина прямокутника U.

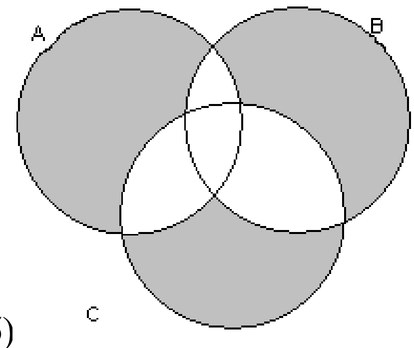
7. Штрихована в клітинку – $(B \cap C) \setminus A$; горизонтально штрихована $- B \cap C$.



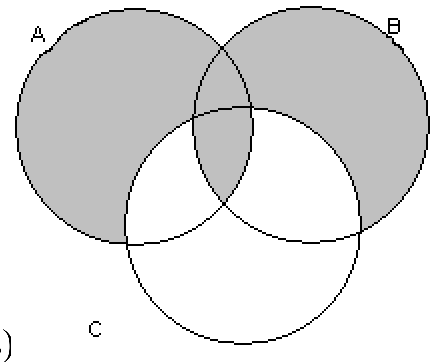

**Завдання 7.** Записати множини, зображені на кожному з рис. а)-е) темним кольором.



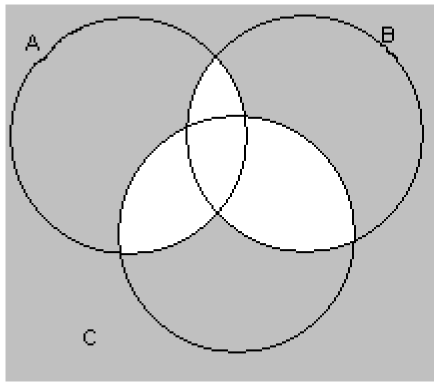

а)



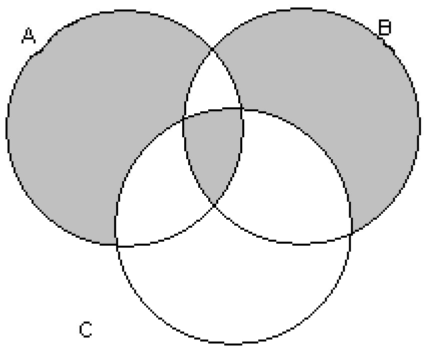

б)



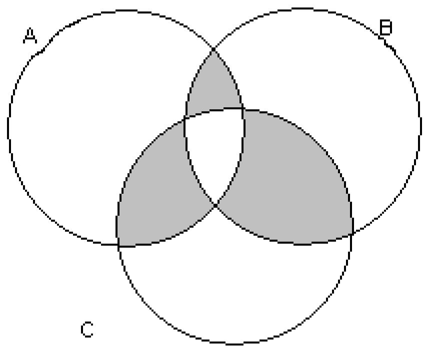

в)



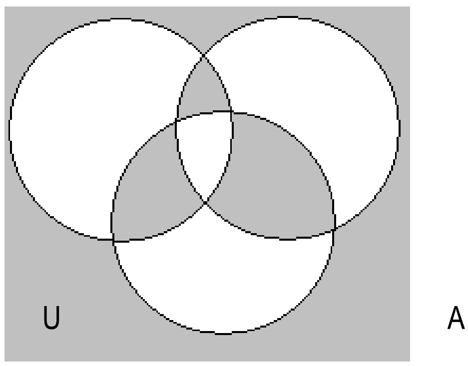

г)




ґ)




д)




е)

**Завдання 8**. Нехай A – множина всіх цілих чисел, які діляться на 3, а B – множина всіх цілих чисел, що діляться на 2. Якими є множини $A \cup B$, $A \cap B$ і $A \setminus B$?

**Завдання 9.** Знайти об'єднання, переріз та різницю множин *A* і *B*:

1. $A = \{x : 0 < x < 2\}, B = \{x : 1 \le x \le 3\}$.
2. $A = \{x : x^2 - 2x > 0\}, B = \{x : x^2 - 4x + 3 > 0\}$.
3. $A = \{x : (x^2 - 5x + 6)/(x - 4) < 0\}, B = \{x : (x - 1)/(x + 2) \le 0\}$.

**Завдання 10.** Знайти доповнення до відрізка [0;1] таких множин:
1. {0, 1}.
2. (0; 1).
3. (1/2; 1].
4. {1/2}.
5. [0;1/2).

**Завдання 11.** Зобразити на координатній площині такі множини:
1. $A=\{(x;y)\in R^2 : x-y=1\}$.
2. $A=\{(x;y)\in R^2 : x^2+y^2=1\}$.
3. $A=\{(x;y)\in R^2 : (x-y)(x+y)=0\}$.
4. $A=\{(x;y)\in R^2 : y>x^2\}$.

**Завдання 12.** Нехай $A=\{x: f(x)=0\}$, $B=\{x: g(x)=0\}$. Як виразити через ці множини розв'язків рівнянь:
1. $f(x)g(x)=0$.
2. $f^2(x)+g^2(x)=0$.
3. $f(x)/g(x)=0$?

**Завдання 13.** Із 30 студентів групи 20 займаються волейболом (множина *A*), 15 – тенісом (множина *B*). Відомо, що 8 студентів займаються обома видами спорту.

За допомогою діаграм Венна з'ясувати, скільки студентів займаються тільки одним видом спорту; не займаються жодним видом спорту.

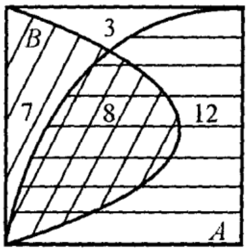



***Рис. 1***

► Зобразимо множини A і B за допомогою діаграм Венна (рис. 1). За умовою задачі універсальна множина Ω складається з 30 студентів, множина A∩B – з 8 студентів.

Множина *A\B* складається за 20 – 8 = 12 студентів, які займаються тільки волейболом, а множина B\A – з 15 – 8 = 7 студентів, які займаються тільки тенісом.

Отже, тільки одним видом спорту займаються 12 + 7 = 19 студентів.

З діаграми випливає, що спортом займаються 12 + 8 + 7 = 27 студентів (множина $A \cup B$). Отже, множина $\overline{A \cup B}$ складається з 30 – 27 = 3 студентів, які не займаються жодним видом спорту. ◄

**Завдання 14.** Для визначення впливу реклами на купівлю миючих засобів було проведено опитування, після якого з'ясувалося, що при виборі товару 50 % осіб користувалося рекламою, 40 % – власною думкою про якість товару, 30 % – порадами друзів та знайомих. При цьому 10 % осіб керувались рекламою і власною думкою, 8 % – рекламою та порадами друзів, 7 % – власною думкою і порадами друзів.

Скільки відсотків опитуваних при виборі товару керувались одночасно рекламою, власною думкою та порадами друзів? Скільки процентів опитуваних керувались тільки рекламою, тільки власною думкою, тільки порадами друзів?

► Позначимо через Р, В, П множини, кількість елементів у яких є відповідно кількістю процентів опитуваних, які керувались рекламою, власною думкою, порадами друзів. Вважаємо, що універсальна множина Ω має 100 елементів (кількість всіх опитуваних). Зобразимо ці множини за допомогою діаграм Венна (рис. 2).

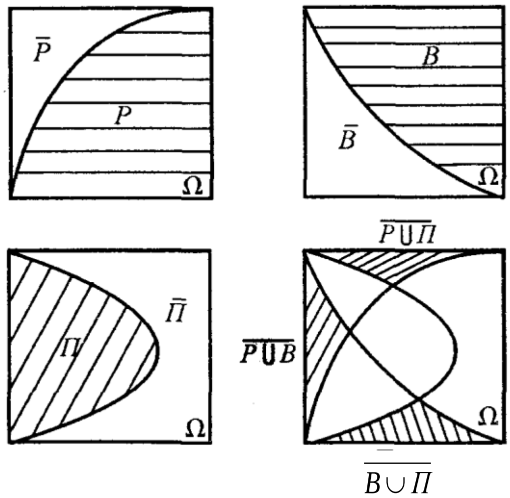



***Рис. 2***

Кількість елементів скінченної множини $A$ позначимо $n(A)$. Зрозуміло, що $n(\overline{A}) = n(\Omega) - n(A)$ і $n(A \cup A_1) = n(A) + n(A_1) - n(A \cap A_1)$ $\forall A, A_1 \subset \Omega$.

За умовою задачі

$n(\Omega) = 100,$ $n(P) = 50,$ $n(B) = 40,$ $n(\Pi) = 30,$ $n(P \cap B) = 10,$ $n(P \cap \Pi) = 8,$

$n(B \cap \Pi) = 7.$

З рис. 2 видно, що

$$n(\Omega)=n(P)+n(B)+n(\Pi)-n(P\cap B)-n(P\cap\Pi)-n(B\cap\Pi)+$$
$$+n(P\cap B\cap\Pi)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow n(P\cap B\cap\Pi)=100-(50+40+30-10-8-7)=5.$$

Отже, 5 % опитуваних при виборі товару керувались одночасно рекламою, власною думкою та порадами друзів.

Далі помічаємо, що $n(\overline{P\cup B})=n(\Omega)-(n(P)+n(B)-n(P\cap B))=$ $=100-(50+40-10)=20$, тобто 20 % опитуваних керувались лише порадами друзів;

$$n(\overline{P\cup\Pi})=n(\Omega)-(n(P)+n(\Pi)-n(P\cap\Pi))=100-(50+30-8)=28,$$

тобто 28 % опитуваних керувались лише власною думкою, і, нарешті,

$$n(\overline{B\cup\Pi})=n(\Omega)-(n(B)+n(\Pi)-n(B\cap\Pi))=100-(40+30-7)=37,$$

тобто 37 % опитуваних керувались лише рекламою. ◄

**Завдання 15.** Для визначення якості кондитерської продукції вітчизняних виробників було проведено опитування серед населення. Із 500 респондентів 420 купують продукцію вітчизняного виробництва, 150 – імпортного, 100 – як вітчизняного, так і імпортного виробництва. За допомогою діаграм Венна визначити кількість опитуваних, які:

1. Купують продукцію тільки вітчизняного виробництва.
2. Купують продукцію тільки імпортного виробництва.
3. Взагалі не купують кондитерської продукції.

**Завдання 16.** Для аналізу попиту населення на побутові прилади було проведено опитування 1000 відвідувачів магазину. З’ясовано, що протягом року 600 осіб купили пральні машини, 250 – електричні плити, 350 – телевізори. Виявилося, що 90 відвідувачів купили пральні машини та електричні плити, 100 – пральні машини та телевізори, 80 – електричні плити та телевізори, 20 – пральні машини, електричні плити і телевізори. За допомогою діаграм Венна визначити:

1. Скільки відвідувачів купили хоча б один з названих побутових приладів.
2. Скільки відвідувачів не купили жодного з названих побутових приладів.
3. Скільки відвідувачів купили тільки один з названих побутових приладів?

**Завдання 17.** Нехай $A=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$; $B=\{(x,y):|x|-|y|\le 1\}$. Зобразити множини $A$, $\overline{A}$, $B$, $\overline{B}$, $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

► Якщо зобразити дані множини як множини точок площини з координатами *(x, y)*, то множина $A$ складається з внутрішніх точок круга з центром у точці $O(0;0)$ радіуса $1$, причому точки кола $x^2 + y^2 = 1$ не входять в множину $A$ (рис. 3). Множина $\overline{A}$ – це зовнішність круга разом з точками кола $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 4).

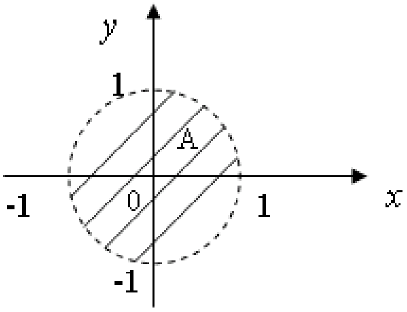



**Рис. 3**

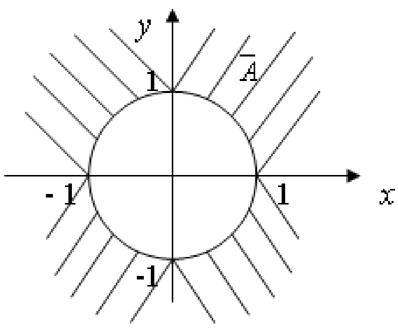



**Рис. 4**

Множина $B$ – це множина внутрішніх точок квадрату разом з точками сторін квадрату $|x| + |y| = 1$ (рис. 5), а множина $\overline{B}$ – це множина точок поза межами квадрату (рис. 6).

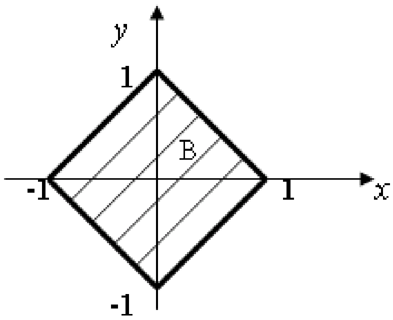



**Рис. 5**

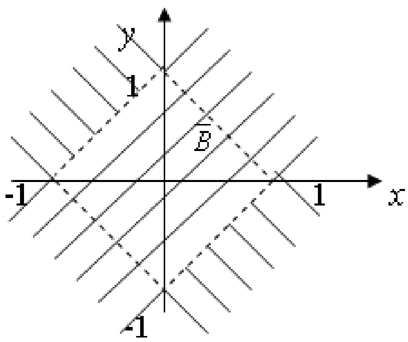



**Рис. 6**

Множина $A \cup B$ в даному прикладі збігається з множиною $A$ (рис. 7). Переріз множин $A \cap B$ збігається з множиною $B$ (рис. 8).

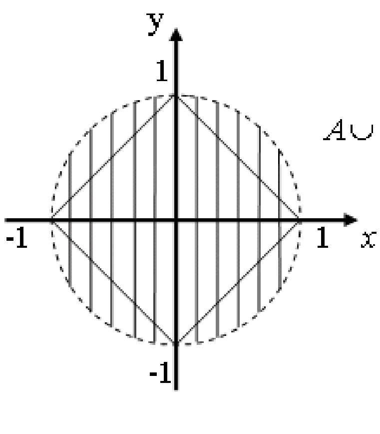



**Рис. 7**

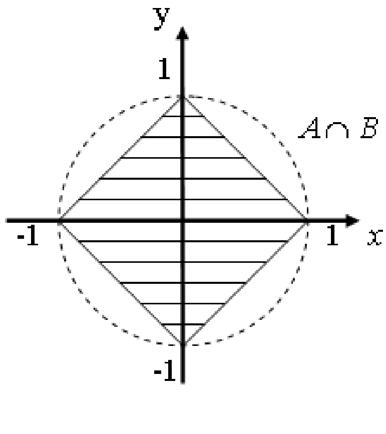



**Рис. 8**

Різниця множин $A \setminus B$ – це сегменти круга радіуса 1 без точок (0;1), (1;0), (0;–1), (–1;0) (рис. 9). Різниця множин $B \setminus A$ – це точки (0;1), (1;0), (0;–1), (–1;0) (рис. 10).

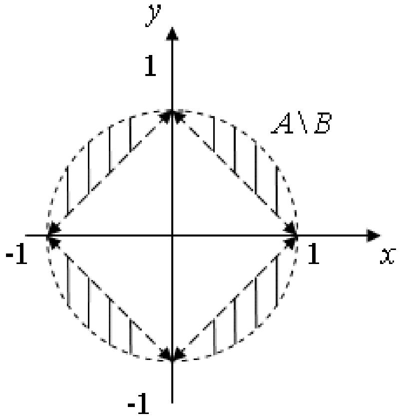



**Рис. 9**

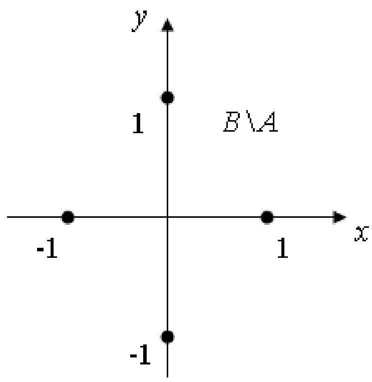



**Рис. 10**

**Завдання 18.** Знайти множини $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$ та $B \setminus A$, якщо

1. $A = \{x : x^2 + x - 6 < 2|x-2|\}$; $B = \{x : |x^2 - 5x| < 6\}$.

2. $A = \left\{x : \dfrac{x+2}{x^2 - x - 2} < -1\right\}$; $B = \{x : x^4 + 3x^3 - 4x > 0\}$.

3. $A = \left\{x : 2 - \dfrac{x-3}{x-2} > \dfrac{x-2}{x-1}\right\}$; $B = \left\{x : \left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| > 3\right\}$.

► 1. Оскільки

$$x^2 + x - 6 < 2|x-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 2, \\ x^2 + 3x - 10 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 2, \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 2, \\ -5 < x < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 2, \\ -1 < x < 2 \end{cases} \end{array}\right., \text{ то}$$

$A = ((-\infty,2) \cap (-5,2)) \cup ([2,+\infty) \cap (-1,2)) = (-5,2)$. А оскільки

$$|x^2 - 5x| < 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 5x < 0, \\ -x^2 + 5x < 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 5x \ge 0, \\ x^2 - 5x < 6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 5, \\ x < 2 \vee x > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0 \vee x \ge 5, \\ -1 < x < 6 \end{cases} \end{array}\right., \text{ то}$$

$B = ((0,5) \cap ((-\infty,2) \cup (3,+\infty)) \cup (((-\infty,0] \cup [5,+\infty)) \cap (-1,6)) =$

$= (-1,2) \cup (3,6)$.

Тоді

$A \cup B = (-5,2) \cup (3,6)$; $A \cap B = (-1,2)$; $A \setminus B = (-5,-1)$; $B \setminus A = (3,6)$.

**Завдання 19.** Довести тотожності:

1. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
3. $A \cap CA = \varnothing$;
4. $C(A \cup B) = CA \cap CB$;
5. $C(A \cap B) = CA \cup CB$;
6. $(A \cap B) \cup (A \cap CB) = A$;
7. $(A \cup B) \cap (A \cup CB) = A$;
8. $(CA \cup B) \cap A = A \cap B$;
9. $C(CA) = A$;
10. $A \setminus B = A \cap CB$;
11. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;
12. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
13. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
14. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
15. $A \cup (B \bigcap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
16. $A \cup CA = U$;
17. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
18. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;
19. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
20. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
21. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
22. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
23. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
24. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$;
25. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;
26. $A \Delta (A \Delta B) = B$;
27. $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$;
28. $A \setminus B = (A \cup B) \Delta B$;
29. $A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$.

► 23. Тотожність $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ доведемо за означенням рівності двох множин. Цей метод часто називають методом двох включень.

Нехай $x \in A \Delta B$. За означенням симетричної різниці $x \in A \setminus B$ або $x \in B \setminus A$. Якщо $x \in A \setminus B$, то $x \in A$ і $x \notin B$, тобто $x \in A \cup B$ і

$x \notin A \cap B$. Якщо ж $x \in B \setminus A$, то $x \in B$ і $x \notin A$, звідки $x \in A \cup B$ і $x \notin A \cap B$. Отже, в обох випадках $x \in A \cup B$ і $x \notin A \cap B$, тобто належить різниці множин $A \cup B$ і $A \cap B$. Таким чином,

$A \Delta B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Доведемо обернене включення: $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \Delta B$.

Нехай $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Тоді $x \in A \cup B$ і $x \notin A \cap B$. З $x \in A \cup B$ маємо, що $x \in A$ або $x \in B$. Якщо $x \in A$, то з урахуванням $x \notin A \cap B$ одержимо $x \notin B$, а отже, $x \in A \setminus B$. Якщо ж $x \in B$, то знову, через $x \notin A \cap B$. маємо, що $x \notin A$ і $x \in B \setminus A$. Таким чином, $x \in A \setminus B$ або $x \in B \setminus A$, тобто $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B$ і $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \Delta B$.

Обидва включення виконуються, отже, за означенням множини рівні і тотожність доведена.

Скорочено це доведення можна записати у вигляді:

$$x \in A\Delta B \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A, \\ x \notin B \end{cases} \\ \begin{cases} x \in B, \\ x \notin A \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \cup B, \\ x \notin B \end{cases} \\ \begin{cases} x \in B \cup A, \\ x \notin A \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cup B, \\ x \notin A \cap B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Навпаки,

$$x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cup B, \\ x \notin A \cap B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in A, \\ x \in B \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \notin A, \\ x \notin B \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A, \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \setminus B \\ \begin{cases} x \in B, \\ x \notin A \end{cases} \Leftrightarrow x \in B \setminus A \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B.$$

19. Тотожність $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ доведемо, виходячи з означення різниці множин та властивостей логічних операцій над висловленнями.

Для довільного $x$ маємо:

$$x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = [x \in A \setminus C] \wedge [x \notin B \setminus C] \equiv ([x \in A] \wedge [x \notin C] \wedge$$

$$\wedge \overline{([x \in B] \wedge [x \notin C])} \equiv ([x \in A] \wedge [x \notin C]) \wedge ([x \notin B] \vee [x \in C]) \equiv$$

$$\equiv ([x \in A] \wedge [x \notin C] \wedge [x \notin B]) \vee ([x \in A] \wedge [x \notin C] \wedge [x \in C]) \equiv$$

$$\equiv [x \in A] \wedge [x \notin B]) \wedge [x \notin C] \equiv [x \in A \setminus B] \wedge [x \notin C] \equiv x \in (A \setminus B) \setminus C$$

Це означає, що $(A \setminus B) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

6. Як і в прикладі 23 доведемо рівність двох множин $C(A \cup B)$ і $CA \cap CB$.

Якщо $x \in C(A \cup B)$, то $x \notin (A \cup B)$, а, отже, $x \notin A$ і $x \notin B$, тобто, $x \in CA$ і $x \in CB$. А це означає, що $x \in CA \cap CB$.

Якщо $x \in CA \cap CB$, то $x \in CA$ і $x \in CB$, тобто $x \notin A$ і $x \notin B$, а тоді $x \notin A \cup B$, а, отже, x належить доповненню до $A \cup B$. Таким чином, $x \in C(A \cup B)$, і рівність доведено.

Скорочено доведення має вигляд:

$$x \in C(A \cup B) \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A, \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in CA, \\ x \in CB \end{cases} \Leftrightarrow x \in CA \cap CB.$$

Зазначимо, що, уважно перевіривши еквівалентність тверджень, можна не проводити обернені міркування.

**Завдання 20.** Застосовуючи властивості операцій над множинами, спростити запис множин:

1. $X = ((A \cup B) \cap C(CA \cup B) \cap (CB \cup A)) \setminus C(B \cap (B \cup CD))$.
2. $Y = C(C(CA \cup B) \cup (A \cup CB))$.
3. $Z = (A \cap B) \cup (A \cap CB) \cup (CA \cap B)$.
4. $K = C(C(X \cup Y) \cap (CX \cup CY))$.
5. $L = (A \cap B \cap D) \cup (CA \cap B \cap D) \cup CB \cup CD$.
6. $M = C(CA \cup CB \cup D) \cup C(CA \cup B) \cup (CA \cup D)$.
7. $N = ((A \cup CB) \cap (CA \cup D)) \setminus (CB \cup D)$.
8. $O = C((A \setminus B) \cap (CA \cup B))$.

► 1. Задана множина X є різницею множин

$X_1 = (A \cup B) \cap C(CA \cup B) \cap (CB \cup A)$;

$X_2 = C(B \cap (B \cup CD))$.

Запис кожної з цих множин можна спростити:

$$X_1 = (A \cup B) \cap (A \cap CB) \cap (CB \cup A) = (A \cap (A \cup B)) \cap (A \cup CB) \cap CB =$$
$$= (A \cap (A \cup CB)) \cap CB = A \cap CB;$$

$$X_2 = C(B \cap (B \cup CD)) = CB \cup (CB \cap D) = CB.$$

При цьому було застосовано властивості де Моргана, подвійного доповнення, асоціативності перетину і поглинання.

Отже, $X = X_1 \setminus X_2 = (A \cap CB) \setminus CB = \varnothing$.

**Завдання 21***. За допомогою діаграм Ейлера-Венна показати, що

1. $(A \setminus B) = A \setminus (A \cap B)$.
2. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. Якщо $A \cap B = C$, то $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap C$.
4. $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$.

**Завдання 22*.** Довести, що для скінченних множин $A$ і $B$ $N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$.

Результат узагальніть на випадок трьох ($n$) множин.

**Завдання 23*.** Знайти $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, якщо:

1. $X_n = \left[-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right]$.
2. $X_n = [0,\ 1/n]$.
3. $X_n = (0,\ 1/n)$.

**Завдання 24*.** Довести тотожності

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
2. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

Проілюструвати графічно, взявши за *A, B, C, D* відрізки прямої.

**Завдання 25.** Мадемуазель Рембо полюбляє хижих тварин і має їх не менше 3-х. Відомо, що всі її тварини, крім 2-х – собаки, всі, крім 2-х – коти, всі, крім 2-х – папуги, всі, крім котів, собак, папуг – таргани.

Описати множину тварин мадемуазель Рембо.

**Завдання 26.** У світильнику п’ять лампочок. Перемикач має 6 положень, при яких горить різна кількість лампочок: від 0 до 5. Кілька лампочок перегоріло.

Чи може людина, яка не знає схеми роботи перемикача визначити множину лампочок, що перегоріли?

**Завдання 27.** У кімнаті знаходяться дванадцять людей. Деякі з них завжди кажуть правду, інші – завжди кривлять душею. Кожен сказав по одному реченню.

Перший сказав: “Тут немає жодної правдивої людини”.

Другий – “Тут не більше однієї правдивої людини”.

Третій – “Тут не більше двох правдивих людей” і т. д. Дванадцятий – “Тут не більше одинадцяти правдивих людей”.

Визначити множину правдивих людей.

**Завдання 28.** Полем проходить прямолінійна дорога. Людина, що знаходиться на дорозі в точці А, може йти полем зі швидкістю не більше 3 км/год., а дорогою – не більше 6 км/год.

Визначити множину точок, в яких вона може знаходитись через годину.

## § 2.2. Відповідності, відношення, відображення

**Завдання 1.** Розглянемо множини програмістів $A=\{P, \Pi, C\}$, програм $B=\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ та замовників $C=\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

Відповідності $\tau$ з A в B та $\delta$ з B в $C$ задамо як

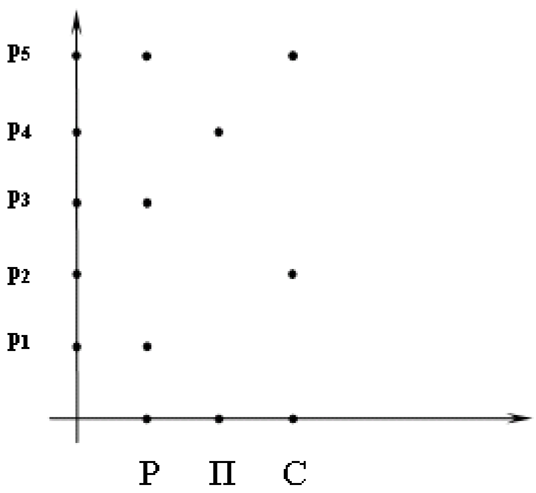
$\tau=\{(P, p_1),(P, p_3),(P, p_5),(\Pi, p_4),(C, p_2),(C, p_5)\}$,

$\delta=\{(p_1, z_3),(p_1, z_4),(p_2, z_1),(p_3, z_2),(p_4, z_4),(p_5, z_3)\}$.

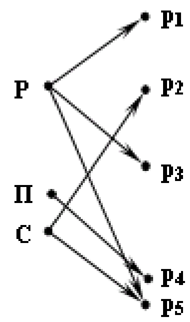
Побудувати графіки та графи відповідностей $\tau$, $\delta$, $\tau\circ\delta$, $\delta^{-1}\circ\tau^{-1}$.

► Для відповідності $\tau$ графік і граф мають вигляд:

$(\tau)$

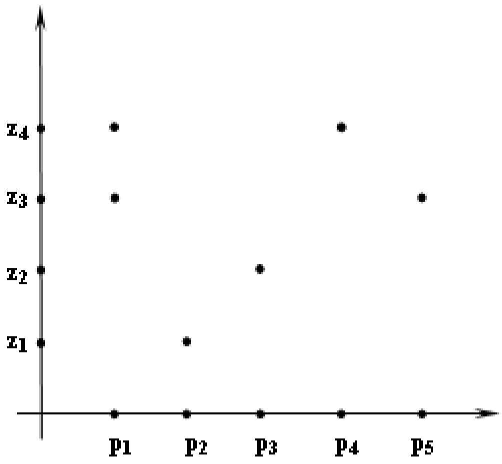



$(\tau)$

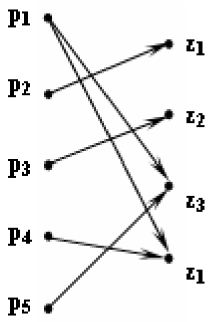



Для $\delta$:

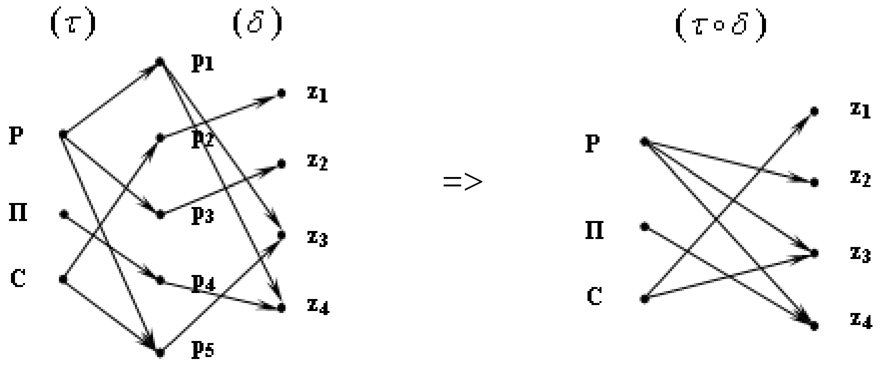
$(\delta)$

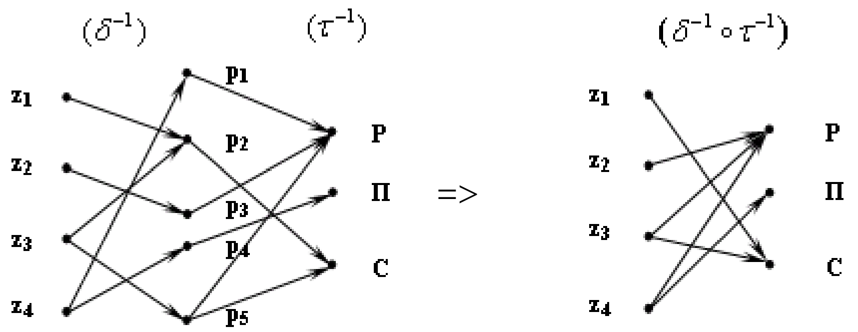



$(\delta)$

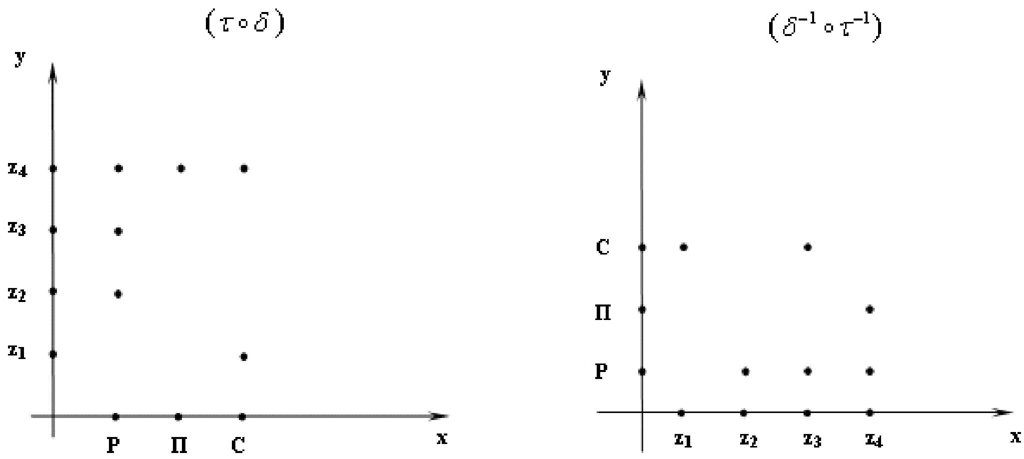


Побудуємо графи $\tau \circ \delta$ та $\delta^{-1} \circ \tau^{-1}$:




Їх графіки відповідно мають вигляд:




**Завдання 2.** Знайти область визначення та область значень відповідностей:

1. $\{(a,1),(a,2),(c,1),(c,2),(c,4),(d,5)\}$.
2. $\{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),...\}$.
3. $\{(x,y): x,y \in R$ і $x = y^2\}$.
4. $\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(a,5),(a,6)\}$.

5. $\{(x,y): x,y \in R$ і $x^2+y^2 \le 16\}$.
6. $\{(x,y): 0 \le x,y \le 10$ і $x > 2y\}$.

**Завдання 3.** Нехай
*A={1, 2, 3, 4, 5}; B={6, 7, 8, 9}; C={10, 11, 12, 13};* $D=\{\square, \Delta, \text{O}, *\}$
Відповідності
$R \subseteq A \times B,\ S \subseteq B \times C$ і $T \subseteq C \times D$.
задані наступним чином:
$R=\{(1,7),(4,6),(5,6),(2,8)\}$;
$S=\{(6,10),(6,11),(7,10),(8,13)\}$;
$T=\{(11,\Delta),(10,\Delta),(13,*),(12,\square),(13,\text{O})\}$.
Визначити відповідності:
1. $R^{-1}$ і $S^{-1}$.
2. $S \circ R$.
3. $S \circ S^{-1}$ і $S^{-1} \circ S$.
4. $R^{-1} \circ S^{-1}$.
5. $T \circ (S \circ R)$.
6. $T \circ S$.
7. $(T \circ S) \circ R$.

Побудувати графіки та графи відповідностей $R,\ S,\ T$ та відповідностей, знайдених в пунктах 1-7.

**Завдання 4.** Нехай A={1, 2, 3, 4}.
1. Бінарні відношення $\varphi$ і $p$ на A визначені відповідно як множини всіх впорядкованих пар $(x,y)$ таких, що $x$ є дільником $y$ і $x \ge y$. Задати їх:
   - переліком елементів;
   - матрицею;
   - графіком;
   - графами.
2. Бінарні відношення
   $\alpha=\{(x,y): x+1<y\}$,
   $\beta=\{(x,y): |x-y|=2\}$.
   Знайти композиції $\alpha \circ \beta,\ \beta \circ \alpha$.
3. Для відношення $\gamma=\{(3,1),(4,1),(4,2)\}$ знайти $\gamma^2,\ \gamma^{-1},\ \gamma \circ \gamma^{-1}$ та $\gamma^{-1} \circ \gamma$.
4. Визначити властивості відношень $\alpha, \beta,\ \gamma,\ p,\ \varphi$.
5. Чи є серед них відношення еквівалентності та порядку?

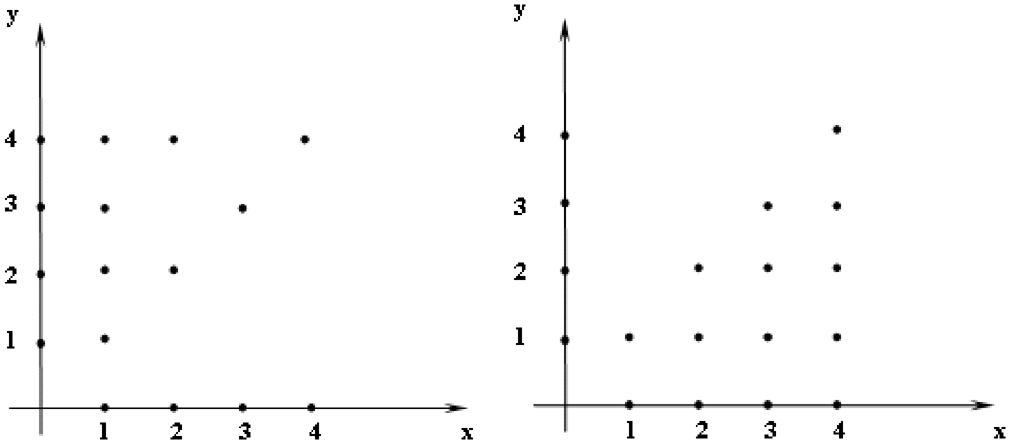
► 1. $\varphi = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$.

а) $p = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$.

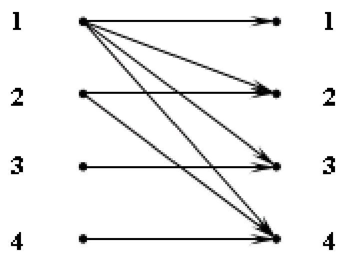
б) $\varphi : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad p : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в)

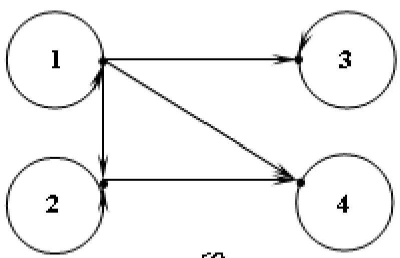
$\varphi$ $\qquad\qquad$ $p$



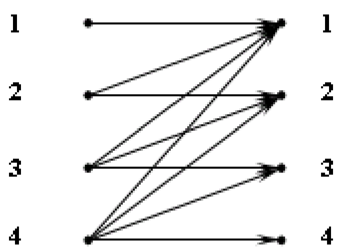

г)



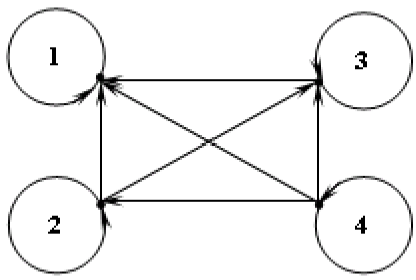

або




$\varphi$ $\qquad\qquad$ $\varphi$




або




$p$ $\qquad\qquad$ $p$

2. $\alpha \circ \beta : \alpha(1) = \{3,4\}, \ \beta(3) = \{1\}, \ \beta(4) = \{2\}$.

Отже, $\alpha \circ \beta(1) = \beta(3) \cup \beta(4) = \{1,2\}$.

Далі, $\alpha(2) = \{4\}, \ \beta(4) = \{2\}$ і $\alpha \circ \beta(2) = \{2\}$.

Оскільки $\alpha(3) = \alpha(4) = \varnothing$, то $\alpha \circ \beta(3) = \alpha \circ \beta(4) = \varnothing$.

Таким чином, $\alpha \circ \beta = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$.

Знайдемо $\beta \circ \alpha$:

$\beta(1) = \{3\}$, а $\alpha(3) = \varnothing$. Тому $\beta \circ \alpha(1) = \varnothing$.

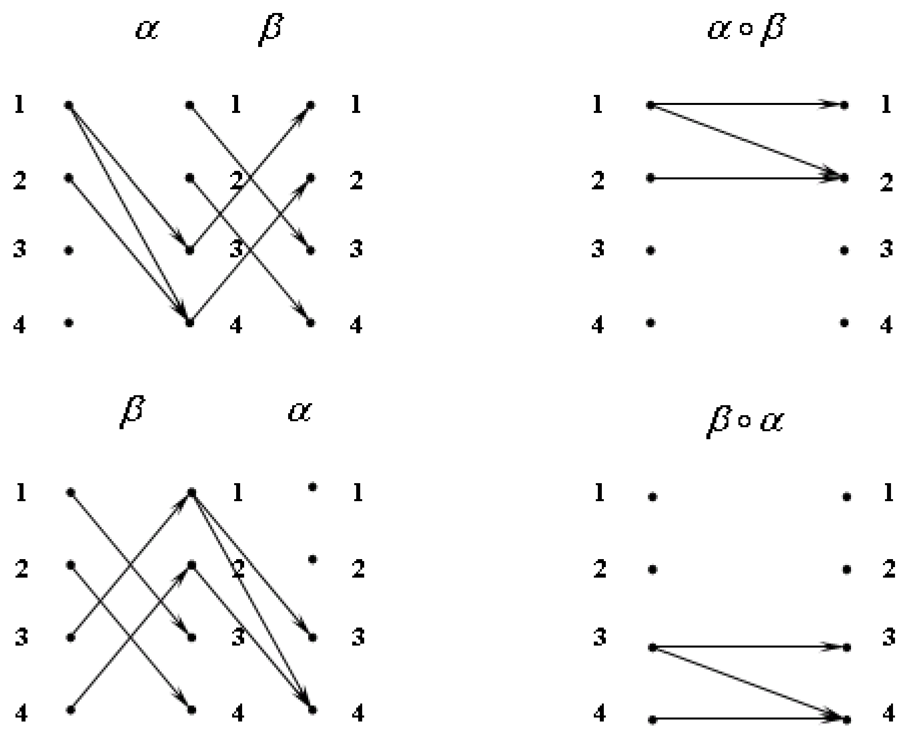
Аналогічно $\beta(2) = \{4\}$, а $\alpha(4) = \varnothing$, тому $\beta \circ \alpha(2) = \varnothing$.

Далі $\beta(3) = \{1\}$, $\alpha(1) = \{3,4\}$ і $\beta \circ \alpha(3) = \{3,4\}$.

$\beta(4) = \{2\}$, $\alpha(2) = \{4\}$ і $\beta \circ \alpha(4) = \{4\}$.

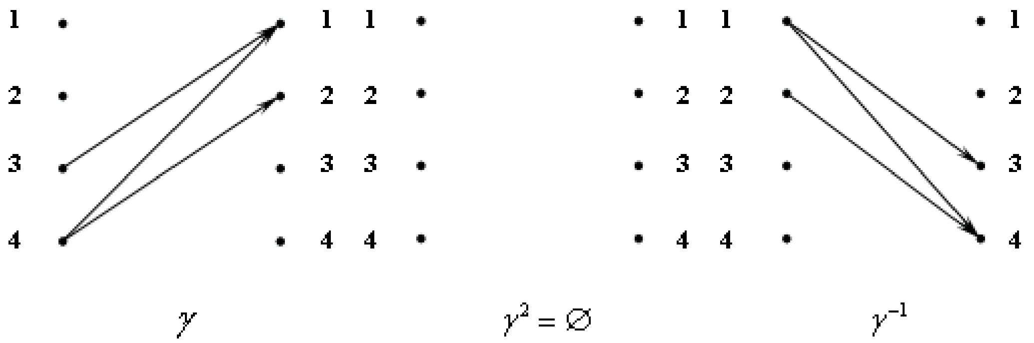
Звідси $\beta \circ \alpha = \{(3,3),(3,4),(4,4)\}$.

Графічною ілюстрацією композицій $\alpha \circ \beta$ і $\beta \circ \alpha$ відповідно є:



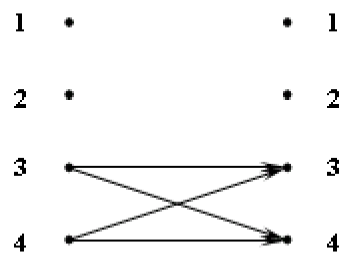

Бачимо, що $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$.

3. Для відношення $\gamma$ побудуємо його граф та графи $\gamma^2$, $\gamma^{-1}$, $\gamma \circ \gamma^{-1}$, $\gamma^{-1} \circ \gamma$:

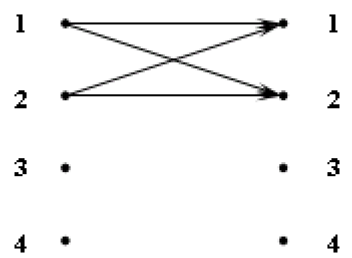


$\gamma$ $\qquad$ $\gamma^2 = \varnothing$ $\qquad$ $\gamma^{-1}$

(всі вершини
графа – ізольовані)




$\gamma \circ \gamma^{-1}$




$\gamma^{-1} \circ \gamma$

4. Відношення $\alpha$ є антирефлексивним; $\beta$ – антирефлексивне, симетричне, нетранзитивне, неповне (нелінійне); $\gamma$ – антирефлексивне, неповне; $\varphi$–рефлексивне, транзитивне, антисиметричне, неповне; $p$ – рефлексивне, транзитивне, антисиметричне, повне.
5. Відношення еквівалентності повинно мати властивості рефлективності, симетрії та транзитивності, отже, серед заданих таких немає. Відношеннями порядку з властивостями рефлективності, транзитивності, антисиметричності є $\varphi$ та $p$. Порядок в них нестрогий. Крім цього, в $\varphi$ – неповний, а в $p$ – повний або лінійний.

**Завдання 5.** Побудувати графіки та графи бінарних відношень, заданих на множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

1. $x_1 \, \alpha \, x_2$, якщо $x_1 < x_2 + 1$.
2. $x_1 \, \beta \, x_2$, якщо $x_1 \le x_2$.
3. $x_1 \, \gamma \, x_2$, якщо $|x_1 - x_2| \ge 3$.
4. $\{(x_1, x_2) : x_1 + x_2$ – парне$\}$.
5. $\{(x_1, x_2) : x_1 = 2x_2\}$.

Які властивості мають ці відношення?

**Завдання 6.** Які властивості мають відношення:

1. $\alpha = \{(a,a),(a,b),(c,a),(b,d),(a,d),(b,c)\}$ на множині $M = \{a,b,c,d\}$.
2. $\beta = \{(m,k) : (m-k) \vdots 2, \ m,k \in Z\}$.
3. $\gamma = \{(x,y) : x - y \le 2, \, x \in R, \, y \in R\}$.

**Завдання 7.** Побудувати графи відношень *R*, заданих на множині *A*:

1. *A = {a, b, c, d, e}*;
   *R = {(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,a), (a,c), (d,e), (e, d)}*.
2. *A = {a, b, c, d, e}*;
   *R = {(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,c), (c,a), (a,c)}*.

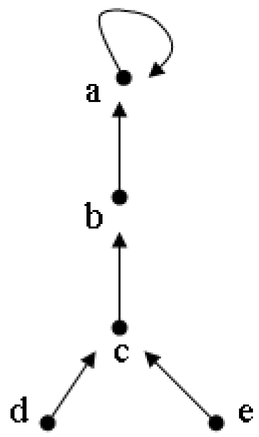
3. $A = \{a, b, c, d, e\}$;
   $R = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,c), (d,e), (e,d), (b,e), (e,b), (b,d), (d,b)\}$.
4. $A = \{a, b, c, d, e\}$;
   $R = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,c), (d,a), (a,d), (b,d), (d,b), (a,c), (c,a)\}$.
5. $A = \{a, b, c, d, e\}$;
   $R = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,c), (d,a), (c,d)\}$.
6. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$;
   $R = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,a), (a,c), (d,e), (e,d)\}$.
7. $A = \{a, b, c, d, e\}$;
   $R = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,c), (d,e), (e,d), (a,d), (d,a)\}$.
8. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$;
   $R = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,a), (a,c), (a,e), (e,a), (b,e), (e,b), (b,f), (f,b), (c,d), (d,c), (c,f), (f,c), (d,f), (f,d), (e,f), (f,e)\}$.

Які з них є:

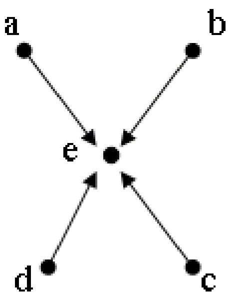
а) симетричними;
б) рефлексивними;
в) транзитивними?

**Завдання 8.** Відношення задані графами. Записати їх іншим способом.

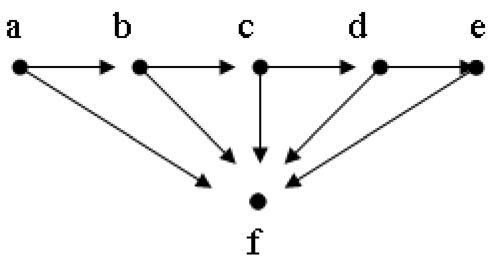
а)



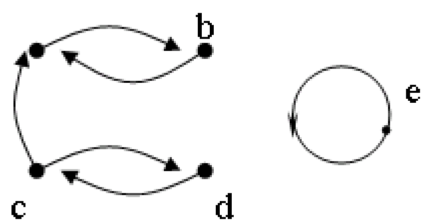

б)

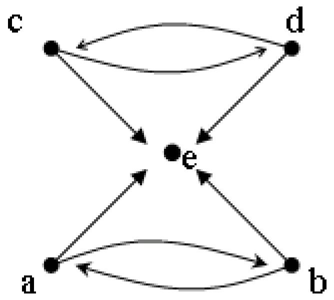


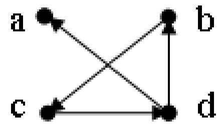

в)

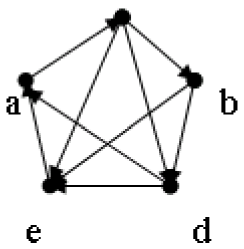


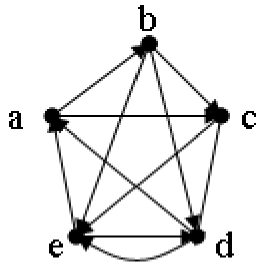

г)



г) 


д) 


е) 


є) 


Визначити властивості заданих відношень.

**Завдання 9.** Нехай відношення $U,V \subseteq R \times R$ визначені таким чином:

$U = \{(x,y) : y = x^2 + 5\}$; $V = \{(x,y) : y = 3x\}$.

Записати відношення $U \circ V$; $V \circ U$; $U^{-1}$; $V^{-1}$.

**Завдання 10.** Нехай *A = {a, b, c, d, e}*, а *S, T, U* і *V* – відношення на *A*:

*S = {(a,a), (a,b), (b,c), (b,d), (c,e), (e,d), (c,a)};*
*T = {(a,b), (b,a), (b,c), (b,d), (e,e), (d,e), (c,b)};*
*U = {(a,b), (a,a), (b,c), (b,b), (e,e), (b,a), (c,b), (c,c), (d,d), (a,c), (c,a)};*
*V = {(a,b), (b,c), (b,b), (e,e), (b,a), (c,b), (d,d), (a,c), (c,a)}.*

Яке з них є:

1. Симетричним.
2. Рефлексивним.
3. Транзитивним.
4. Антисиметричним?

**Завдання 11.** Нехай *A = {a, b, c, d, e}*, а *S, T, U* і *V* – відношення на *A*:

*S = {(a,a), (a,b), (b,c), (b,d), (c,e), (e,d), (c,a)};*
*T = {(a,b), (b,a), (b,c), (b,d), (e,e), (d,e), (c,b)};*
*U = {(a,b), (a,a), (b,c), (b,b), (e,e), (b,a), (c,b), (c,c), (d,d), (a,c), (c,a)};*
*V = {(a,b), (b,c), (b,b), (e,e), (b,a), (c,b), (d,d), (a,c), (c,a)}.*

Описати: $U \cap V$; $S \cup T$; $U \setminus T$; $U \Delta S$;

**Завдання 12.** Знайти область визначення $X(p)$, область значень $Y(p)$, $p^{-1}$, $p^2$, $p^{-1} \circ p$ та $p \circ p^{-1}$ для бінарних відношень:

1. $p = \{(x, y) : x, y \in [0,1],\ x + y \le 1\}$.
2. $p = \{(x, y) : x, y \in [0,1],\ 2x \ge 3y\}$.
3. $p = \{(x, y) : x, y \in \{1,2,5,7,10\},\ x - y \ge 3\}$.
4. $p = \{(x, y) : x, y \in \{1,2,5,7,10\},\ x + y$ – парне$\}$.

**Завдання 13.** Нехай $A = \{(b,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)\}$;
$B = \{(v,a), (w,e), (x,i), (y,o), (z,u)\}$.

Записати відношення: $A^{-1}$, $B^{-1}$, $A^{-1} \circ B$; $B^{-1} \circ A$.

**Завдання 14.** Задати бінарне відношення "*x* ділиться на *y*" на множині $M_{10}$ перших десяти натуральних чисел:

1. Характеристичною властивістю.
2. Переліком елементів.
3. Графом.
4. Таблицею.
5. Графіком.
6. Стрілками.

**Завдання 15.** Заповнити таблицю знаками "+", "–" залежно від того, чи має дане відношення відповідну властивість (табл. 1):

*Таблиця 1*

| Відношення | Властивість | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Рефлексивність | Антирефлексивність | Симетричність | Антисиметричність | Транзитивність | Досконалість |
| "*x* проживає в одному будинку з *y*" на множині всіх жителів м. Суми | | | | | | |
| "*x* батько або мати *y*" на множині всіх людей | | | | | | |
| "*x* сестра *y*" на множині всіх людей | | | | | | |
| "*x* командир *y*" на множині військовослужбовців деякого підрозділу | | | | | | |
| "*x* більше *y*" на множині *R* | | | | | | |
| "*x* ділиться на *y*" на множині *Z* | | | | | | |
| "*x* і *y* – числа однакової парності" на множині *Z* | | | | | | |

**Завдання 16.** Чи можна доповнити бінарне відношення $p$ між елементами $M_3$ до:

1. Рефлексивного відношення, якщо $p=\{(1,2), (3,3)\}$.
2. Антирефлексивного, якщо $p=\{(1,2), (2,1), (2,2)\}$.
3. Симетричного, якщо $p=\{(1,3), (1,2), (2,2)\}$.
4. Антисиметричного, якщо $p=\{(1,3), (1,2), (2,2)\}$.
5. Транзитивного, якщо $p=\{(1,1), (1,3), (3,2)\}$.
6. Досконалого, якщо $p=\{(1,1), (2,2), (1,2)\}$?

**Завдання 17*.** Знайти число бінарних відношень між елементами множини $M_2$ ($M_3$), які мають властивість:

1. Рефлективності.
2. Антирефлексивності.
3. Симетричності.
4. Антисиметричності.
5. Транзитивності.
6. Досконалості.

**Завдання 18*.** Знайти число відношень на множині $M_n$, які мають одночасно властивості симетричності і антисиметричності.

**Завдання 19*.** Довести, що між елементами будь-якої скінченної множини $M_n$ існує однакове число відношень:

1. Рефлексивних і анти рефлексивних.
2. Симетричних і антисиметричних.

**Завдання 20*.** Довести, що відношення $p$, яке має властивості симетричності і антисиметричності, є також транзитивним.

**Завдання 21*.** Знайти число бінарних відношень між елементами множини $M_n$, які не мають властивостей:

1. Рефлективності.
2. Рефлексивності і антирефлексивності.
3. Симетричності.
4. Симетричності і антисиметричності.

**Завдання 22.** Знайти відношення, обернене до відношення:

1. $p=\{(1,2), (2,4), (3,1), (4,4)\}$ на множині $M_4$.
2. "*x* брат *y*" на множині всіх людей.

3. “$x$ командир $y$” на множині військовослужбовців деякого підрозділу.
4. $p = \{(x, y), x, y \in Z : (x - y)$ ділиться на $5\}$.

**Завдання 23.** Знайти перетин і об’єднання відношень:
1. “$x$ ділиться на $y$” і “$x$ не перевищує $y$” на множині $M_5$.
2. “$x$ батько $y$” і “$x$ мати $y$” на множині всіх людей.

**Завдання 24.** Знайти композиції відношень, узятих в різному порядку, і порівняти їх:
1. $p=\{(1,1), (1,2), (2,3)\}$ і $\sigma=\{(1,1), (1,3)\}$ на множині $M_3$.
2. $\|$ і $\perp$ на множині прямих площини.
3. “$x$ батько $y$” і “$x$ мати $y$” на множині всіх людей.
4. “х ділиться на у” і “х є дільником у”, заданих на множинах {0, 1, 2, 3, 4} і {2, 3, 4} відповідно.

**Завдання 25.** Скількома способами можна утворити розбиття множини $M_3$?

**Завдання 26.** Перевірити, чи є відношення $\varepsilon$ відношенням еквівалентності, якщо:
1. $\varepsilon = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,3), (1,2)\}$ і $\varepsilon \subset M_3 \times M_3$.
2. $\varepsilon = \{(1,1), (3,3), (3,1), (2,2)\}$ і $\varepsilon \subset M_3 \times M_3$.
3. $\varepsilon$ – відношення “х – брат або сестра у” на множині всіх людей.

**Завдання 27.** Скільки відношень еквівалентності можна задати на множинах $M_2$, $M_3$ і $M_4$?

**Завдання 28.** За даним розбиттям $\mathcal{M}$ деякої множини М знайти відповідне йому відношення еквівалентності, якщо:
1. $\mathcal{M}$ – множина всіх класів даної школи.
2. $\mathcal{M}$ – множина всіх країн на земній кулі.
3. $\mathcal{M}$ містить точно два елементи – множини всіх парних і непарних цілих чисел.

**Завдання 29*.** Нехай $A=\{a, b, c, d, e\}$. Навести приклад відношення на $A$, яке є:
1. Рефлексивним, але не симетричним і не транзитивним.
2. Симетричним, але не є ні рефлексивним, ні транзитивним.
3. Транзитивним, але не є ні рефлексивним, ні симетричним.

4. Рефлексивним і симетричним, але не транзитивним.
5. Симетричним і транзитивним, але не рефлексивним.
6. Рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним.
7. Рефлексивним, симетричним, транзитивним.

**Завдання 30.** Записати мовою символів означення:
1. Рефлексивного бінарного відношення.
2. Антисиметричного бінарного відношення.
3. Антитранзитивного бінарного відношення.
4. Границі послідовності.
5. Границі функції.
6. Неперервності функції в точці.

**Завдання 31.** Задати яке-небудь відображення множини $A$ в $B$ та яке-небудь відображення $B$ в $A$:
1. $A$ – множина мешканців міста, $B$ – множина дійсних чисел.
2. $A$ – множина точок прямої, $B$ – множина точок площини.
3. $A$ – множина точок відрізка [–1, 1], $B$ – множина дійсних чисел.
4. $A$ – множина дійсних чисел, $B$ – множина додатних дійсних чисел.

**Завдання 32.** Які з наступних відображень $A \to B$ є ін'єктивними; сюр'єктивними; бієктивними:
1. $A$ – множина українських слів; $B$ – множина букв українського алфавіту;
   $f$ – співставляє кожному слову букву, з якої воно починається.
2. A = B = R
   а) $f(x) = \sin x$;
   б) $f(x) = 2^x$;
   в) $f(x) = x^3 - 3x$.
3. $f(x) = x^2$
   а) $A$ = [–2, 4], $B$ = [0, 16];
   б) $A$ = [2, 4], $B$ = [4, 16].
4. $A$ – множина всіх кіл на площині; $B$ – множина точок площини, $f$ – співставляє кожному колу його центр;
5. $A$ – множина кіл радіуса 1; $B$ – множина точок площини, $f$ – співставляє кожному колу його центр.
6. $A$ – множина всіх кіл на площині; $B$ – множина дійсних чисел; $f$ – кожному колу – довжину його радіуса.
7. $A$ – множина кіл на площині з центром у фіксованій точці; $B$ = $R$; $f$ – кожному колу – довжину його радіуса.

8. $A$ – множина всіх квадратів; $B$ – множина всіх кіл на площині; $f$ – кожному квадрату – вписане в нього коло.
9. $A$ – множина правильних трикутників; $B$ – множина всіх кіл на площині; $f$ – кожному трикутнику – вписане в нього коло.
10. $A$ – множина квадратів, одна із сторін кожного з яких паралельна деякій фіксованій прямій; $B$ – множина кіл на площині; $f$ – кожному квадрату з $A$ – описане навколо нього коло.
11. $A$ – множина всіх правильних трикутників, сторони яких паралельні до сторін фіксованого трикутника, $B$ – множина всіх кіл на площині, $f$ – кожному трикутнику з $A$ – описане навколо нього коло.
12. $A$ – множина квадратних рівнянь виду $x^2 + ax - b = 0$ ($a > 0$, $b > 0$), $B$ – множина додатних дійсних чисел, $f$ – кожному рівнянню з $A$ – його додатний корінь.

**Завдання 33.** Задати яке-небудь ін'єктивне відображення $f$ і яке-небудь сюр'єктивне відображення $g$ $A$ в $B$, якщо:

1. $A$ – пряма, $B$ – промінь $[0, +\infty)$.
2. $A$ – промінь $(-\infty, 0)$, $B$ – пряма.
3. $A = [1, 2]$, $B = [0, 1]$.
4. $A$ – коло, $B$ – пряма.

**Завдання 34.** Множина А складається з трьох елементів, В – з двох. Скільки існує:

1. Ін'єкцій А в В.
2. Сюр'єкцій А в В.
3. Ін'єкцій В в А.
4. Сюр'єкцій В в А.

# ТЕМА 3. ОСНОВНІ АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ

**Завдання 1.** У множині $\{0, 1, 2, 3\}$ задано бінарну операцію так, що $a \otimes b$ є остачею від ділення добутку $ab$ на число 4. Задати операцію $\otimes$ таблицею Келі і перевірити, чи є дана алгебра групою.

► Таблицю Келі для бінарної операції в $n$-елементній множині складають так. У лівому верхньому куті квадратної таблиці, що містить $(n+1)^2$ клітинок, пишуть знак операції. Потім у першому рядку і першому стовпці записують усі елементи даної множини по одному в клітині (для зручності – в однаковому порядку). Кожній порожній клітинці таблиці тепер відповідає впорядкована пара $(a,b)$ елементів даної множини ($a$ – елемент, який стоїть у вибраному рядку, $b$ – у вибраному стовпці). Запишемо в таблицю результат для операції над цією парою. Щоб задати операцію в такому випадку, треба заповнити порожні клітинки елементами даної множини.

Таблиця Келі для операції $\otimes$ у множині $\{0, 1, 2, 3\}$ має вигляд

| $\otimes$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 3 | 2 | 1 |

У множині $\{0, 1, 2, 3\}$ нейтральним елементом відносно операції $\otimes$ є 1. Крім того, для елемента 2 не існує симетричного, оскільки $2\otimes 0 = 2\otimes 2 = 0$ і $2\otimes 1 = 2\otimes 3 = 2$.

Отже, задана алгебра не є групою.

**Завдання 2.** Перевірити, які з аксіом групи виконуються в алгебрі:

1. $\langle\{nz : z \in Z\};+\rangle = \langle nZ;+\rangle$ – усіх цілих чисел, кратних $n$ з операцією додавання.
2. $\langle Z;-\rangle$ – усіх цілих чисел з операцією віднімання.
3. $\langle Q_+;:\rangle$ – усіх додатних раціональних чисел з операцією ділення.
4. $\langle Q_+;\cdot\rangle$ – усіх додатних раціональних чисел з операцією множення.
5. $\langle Z[i];+\rangle$ – усіх цілих чисел Гаусса (комплексних чисел $a+bi,$ де $a,b \in Z$) з операцією додавання.
6. $\langle Z[i] \setminus \{0\};\cdot\rangle$ – усіх відмінних від нуля чисел Гаусса з операцією множення.
7. $\langle S_n;\circ\rangle$ – усіх підстановок $n$-го степеня з операцією множення.

**Завдання 3.** Чи є групою щодо операції множення:

1. Множина всіх неособливих матриць другого порядку з невід'ємними дійсними елементами?
2. Множина всіх матриць другого порядку з цілими елементами, визначник яких дорівнює одиниці?
3. Множина всіх матриць виду $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, де $a \in R \setminus \{0\}$?
4. Множина всіх неособливих діагональних матриць *n*-го порядку?

**Завдання 4.** Нехай у множині $Z^2$ задано операцію
$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d).$$
Довести, що задана алгебра є групою.

**Завдання 5.** У множині всіх пар $(a,b)$ раціональних чисел, де $a \neq 0$, операція множення визначається рівністю
$$(a,b)(c,d)=(ac,bc+d).$$
Довести, що задана алгебра є групою.

**Завдання 6.** Нехай у множині $R^2$ задано операції:
$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)(c,d)=(ac,ad+bc).$$
Елементи цієї алгебри називають *дуальними числами.* Довести, що операція множення комутативна, асоціативна і дистрибутивна щодо додавання.

**Завдання 7.** Нехай у множині $R^2$ задано операції:
$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)(c,d)=(ac+bd,ad+bc).$$
Елементи цієї алгебри називають *подвійними числами.* Довести, що операція множення комутативна, асоціативна і дистрибутивна щодо додавання.

**Завдання 8.** Довести, що множина {0, 1, 2, 3, 4, 5} з операцією $\otimes$ (див. завдання 1) є абелевою групою.

**Завдання 9.** Довести, що множина всіх цілих степенів числа 2 є мультиплікативною групою.

**Завдання 10.** Довести, що множина всіх цілих чисел, які діляться на 3, є абелевою групою щодо додавання.

**Завдання 11.** Довести, що множина всіх векторів площини є абелевою групою щодо операції додавання.

**Завдання 12.** Довести, що множина всіх поворотів кола навколо свого центра є абелевою групою щодо композиції поворотів.

**Завдання 13.** Довести, що адитивна група $Z$ ізоморфна адитивній групі $G$ всіх цілих чисел, кратних 3.

**Завдання 14.** Довести, що адитивна група $Z$ ізоморфна мультиплікативній групі $G$ всіх цілих степенів числа 2.

**Завдання 15.** Довести, що алгебра натуральних чисел $N$ з операцією додавання ізоморфна адитивній алгебрі всіх парних додатних чисел.

**Завдання 16.** Задати ізоморфізм адитивної групи $Z$ в алгебру $Z^2$ з операцією $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$.

**Завдання 17.** Задати гомоморфізм адитивної групи $Z$ на мультиплікативну групу $\{-1,1\}$.

**Завдання 18.** Задати гомоморфізм мультиплікативної алгебри $Z$ на мультиплікативну алгебру всіх невід'ємних цілих чисел.

**Завдання 19.** У множині $R^2$ задано операцію $(a,b)\otimes(c,d)=$ $=(ac-2bd,ad+bc)$. Довести, що множина $G=R^2\setminus\{(0,0)\}$ є групою щодо операції $\otimes$.

**Завдання 20.** Які з заданих числових множин утворюють кільце щодо операцій додавання і множення. У кільцях з одиницею знайти всі дільники одиниці. Визначити пари таких кілець, в яких перше є підкільцем другого.

1. $Z$.
2. $mZ$ (множина цілих чисел, кратних $m$, $m\in Z$); окремо розглянути випадки $m=0$ і $m=1$.
3. $Z[-\sqrt{2}]$ (множина чисел виду $a+b(-\sqrt{2})$, де $a,\ b\in Z$).

4. $mZ[\sqrt{2}]$ (множина чисел виду $a+b\sqrt{2},$ де $a,\ b\in mZ$).
5. $Z[i]$ (множина всіх чисел виду $a+bi,$ де $a,\ b\in Z$ ).
6. $mZ[i]$ (множина всіх чисел виду $a+bi,$ де $a,\ b\in mZ$).
7. $Z[\sqrt{2}i]$ (множина всіх чисел виду $a+b(i\sqrt{2}),$ де $a,\ b\in Z$).
8. $mZ[\sqrt{2}i]$ (множина всіх чисел виду $a+b(i\sqrt{2}),$ де $a,\ b\in mZ$).
9. $Z[\sqrt[3]{2}]$ (множина всіх чисел виду $a+b\sqrt[3]{2},$ де $a,\ b\in Z$).
10. $Z[\sqrt{p}]$ (множина всіх чисел виду $a+b\sqrt{p},$ де $a,\ b\in Z,\ \ p\in N$ і $p$ не є точним квадратом).
11. $Q[\sqrt{2}]$ (множина всіх чисел виду $a+b\sqrt{2},$ де $a,\ b\in Q$).
12. $Q[\sqrt[3]{2}]$ (множина всіх чисел виду $a+b\sqrt[3]{2},$ де $a,\ b\in Q$).
13. $\left\{\dfrac{a+bi\sqrt{3}}{2},\ a,\ b \text{ – цілі числа однакової парності}\right\}.$

**Завдання 21.** Які з заданих множин матриць утворюють кільце щодо операцій додавання і множення? Які з кілець комутативні? Які містять одиницю? Знайти дільники нуля і одиниці. Знайти пари таких кілець, в яких перше є підкільцем другого.

1. а) $M(n,N)$– множина квадратних матриць $n$-го порядку, елементами яких є натуральні числа;
   б) $M(n,Z)$;
   в) $M(n,Q)$;
   г) $M(n,R)$;
   ґ) $M(n,C)$;
   д) $M(n,2Z)$;
   е) $\left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,b\in Z\right\}$;
   є) $\left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,b\in 3Z\right\}$;
   ж) $\left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,b\in Q\right\}$;
   з) $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,b\in Z\right\}$;

и) $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,b \in 2Z \right\}$;

і) $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,b \in Q \right\}$;

ї) $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,b \in R \right\}$.

2. а) $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a & -\frac{3}{2}b \\ \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}a \end{pmatrix},\ a,b \text{ – цілі числа однакової парності} \right\}$;

б) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix},\ a,b \in Z \right\}$;

в) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix},\ a,b \in Q \right\}$;

г) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix},\ a,b \in Z \right\}$;

ґ) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a,b \in Q \right\}$;

д) $\left\{ \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,b \in Q \right\}$;

е) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,b \in Z \right\}$;

є) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ a,b \in Z \right\}$;

ж) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a,b \in Z \right\}$;

з) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},\ a,b,c \in Z \right\}$.

► Зазначимо корисність перевірки аксіом кільця ще й для відпрацювання техніки роботи з матрицями. Для перевірки результатів надамо відповіді:

1. Усі множини, крім а), є кільцями. Усі кільця, крім д), є), и), містять одиничний елемент. Дільники одиниці: б) такі матриці $A$, що

$|A| = \pm 1$; в), г), ґ) будь-яка невироджена матриця; е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; ж) будь-яка ненульова матриця; з) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; і) будь-яка ненульова матриця; ї) будь-яка ненульова матриця. Дільники нуля мають б)-д), це вироджені ненульові матриці. Комутативним є кільце е)-ї).

2. Усі множини є кільцями. Всі кільця, крім б)-ґ), є комутативними і містять одиницю. Дільники одиниці: а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; д) будь-яка ненульова матриця; е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; є) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, де $b$ – довільне ціле число; з) матриці виду $\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & b & c \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Дільники нуля: а) немає; б)-ґ) усі ненульові матриці; д) немає; е) матриці виду $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$, де $a \neq 0$; є) матриці виду $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, де $a \neq 0,\ b \neq 0$; ж) довільна матриця виду $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b \neq 0$; з) матриці виду $\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, де $b^2 + c^2 \neq 0$.

**Завдання 22.** Які із заданих множин пар цілих чисел $(a,b)$, $a,b \in Z$ утворюють кільце, якщо операції додавання і множення пар введено так (дві пари рівні, якщо рівні їхні однойменні компоненти):

1. $(a,b)+(c,d)=(ac,bd)$,
   $(a,b)\cdot(c,d)=(a+c,b+d)$.

2. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$,
$(a,b)\cdot(c,d)=(a+b+c+d,0)$.

3. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$,
$(a,b)\cdot(c,d)=(0,0)$.

4. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$,
$(a,b)\cdot(c,d)=(ac,bd)$.

5. $(a,b)+(c,d)=(a+c,c+d)$,
$(a,b)\cdot(c,d)=(ab,cd)$.

6. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$,
$(a,b)\cdot(c,d)=(ac+bd,ad+bc)$.

► Не утворюють кільце множини з п. 2, 5. Усі кільця комутативні. *Дільники одиниці*: 1. Усі елементи (одиницею в цьому кільці є пара (0,0)). 3. Немає одиниці. 4. (1, 1), (1,–1), (–1,1), (–1,–1) (одиницею тут є (1, 1) ); 6. (1,0), (–1,0) (одиниця тут (1,0)). *Дільники нуля*: 1. Усі пари, крім нульової (1,1) і одиничної (0,0). 3. Усі пари, крім нульової (0,0). 4. $(a,0)$, $(0,b)$, де $a,b\neq 0$; 6. $(a,a)$, $(a,-a)$, де $a\neq 0$.

**Завдання 23.** Довести, що множина $A=\{0,1,2\}$ з операціями $\oplus$ і $\otimes$, заданими таблицями Келі,

| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 0 |

| $\otimes$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |

є полем.

► Як видно з таблиці для операції $\oplus$, 0 є нейтральним елементом. Для кожного елемента існує симетричний, і операція $\oplus$ є комутативною. Враховуючи це та рівності $0\oplus a\otimes b=a\oplus b$, $a\oplus a\oplus a=0$, $1\oplus 2\oplus 1=1$ і $2\oplus 1\oplus 2=2$, для всіх $a,b\in A$ дістаємо, що операція $\oplus$ є асоціативною. Згідно з таблицею для операції $\oplus$, 1 є нейтральним елементом, операція комутативна, і для відмінних від 0 елементів існують симетричні. Крім того, $0\otimes a\otimes b=0$, $1\otimes a\otimes b=a\otimes b$, $2\otimes 2\otimes 2=2$ для всіх $a,b\in A$. Звідси випливає, що операція $\otimes$ також асоціативна.

Оскільки

$0\otimes(a\oplus b)=0=0\otimes a\oplus 0\otimes b,\qquad 1\otimes(a\oplus b)=a\oplus b=1\otimes a\oplus 1\otimes b,$

$2\otimes(1\oplus 1)=1=2\oplus 2=2\otimes 1\oplus 2\otimes 1,\quad 2\otimes(2\oplus 2)=2=1\oplus 1=2\otimes 2\oplus 2\otimes 2,$

$2\otimes(1\oplus 2)=0=2\oplus 1=2\otimes 1\oplus 2\otimes 2.$

для всіх $a,b\in A,$ то операція $\otimes$ дистрибутивна щодо операції $\oplus$. Це означає, що задана алгебра є полем.

**Завдання 24.** Чи є полем множина всіх чисел виду:

а) $a+b\sqrt[3]{3};$

б) $a+b\sqrt[3]{3}+c\sqrt[3]{9},$ де $a,b,c\in Q.$

**Завдання 25.** Довести, що множина всіх дійсних чисел виду $a+b\sqrt{p},$ де $a,b\in Q$ і $p-$ фіксоване просте число, є полем.

**Завдання 26.** Довести, що множина $Q^2$ з операціями, визначеними рівностями $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),(a,b)\cdot(c,d)=(ac+2bd,ad+bc)$ є полем.

**Завдання 27.** Довести, що ізоморфними між собою є такі кільця:

1. $Z[\sqrt{2}]$ і $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix},\ a,b\in Z\right\}.$
2. $2Z[\sqrt{3}]$ і $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,b\in 2Z\right\}.$
3. $Q[\sqrt{3}]$ і $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,b\in Q\right\}.$
4. $Z[i]$ і $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ a,b\in Z\right\}.$
5. $3Z[i]$ і $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,b\in Z\right\}.$
6. $Q[i]$ і $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,b\in Q\right\}.$

7. $Z[\sqrt{3}i]$ і $\left\{\begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,b \in 2Z \right\}$.

8. $Q[\sqrt{3}i]$ і $\left\{\begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,b \in Q \right\}$.

9. $\left\{\dfrac{a+bi\sqrt{3}}{2},\ a,b \text{ – цілі числа однакової парності} \right\}$ і

$$\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a & \frac{3}{2}b \\ \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}a \end{pmatrix},\ a,b \text{ – цілі числа однакової парності} \right\}.$$

**Завдання 28.** Нехай $\varphi$ – відображення кільця $K = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\right.$ $\left. a,b \in Z \right\}$ на кільце $Z$ – цілих чисел, причому $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = a - b.$ Довести, що $\varphi$ – гомоморфізм.

**Завдання 29.** Нехай $\varphi$ – відображення кільця діагональних матриць

$K = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a,b \in Q \right\}$ на кільце раціональних чисел $Q,$ причому $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = a,$ для будь-яких $a,b \in Q$. Довести, що $\varphi$ – гомоморфізм.

**Завдання 30.** Довести, що кільце $Z$ цілих чисел не ізоморфне кільцю $K$ всіх парних цілих чисел.

► Нехай $f$ – деяка бієкція множини $Z$ на $K$ і $f(1) = a \in K.$ Якщо $f$ є ізоморфізмом, то $f(x,y) = f(x) f(y)$ і $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для всіх $x,y \in Z.$ Тоді $a = f(1) = f(1\cdot 1) = f(1)\cdot f(1) = a\cdot a.$ Звідси $a = 0$ і $f(2) = f(1+1) = = f(1) + f(1) = a + a = 0.$ Отже, $f(1) = f(2),$ а це суперечить взаємній однозначності відображення $f$. Знайдена суперечність показує, що задати ізоморфізм кільця $Z$ на кільце $K$ *не можна,* тобто всі вони не ізоморфні.

# ТЕМА 4. АЛГЕБРА ВИСЛОВЛЕНЬ

## § 4.1. Формули алгебри висловлень

**Завдання 1.** Визначити, чи є послідовність символів формулою:

1. $((P \wedge Q)R) \to \neg S$;
2. $((P \leftrightarrow Q) \wedge R) \to (P \vee R)$;
3. $((\neg P \to Q) \to (R \wedge (Q \vee S)))$;
4. $((P \vee \neg Q) \to (R \neg S))$;
5. $((P \to (Q \wedge R \to \neg P))$;
6. $\neg((\neg P \wedge \neg Q) \to (P \vee (R \wedge \neg S)))$;
7. $((P \wedge (\neg Q \to R)) \vee ((\neg P \leftrightarrow R) \wedge \neg Q))$.

► 1. Ця послідовність не є формулою, бо вона не має зовнішніх дужок. Покажемо, що і при домовленості про опускання зовнішніх дужок послідовність *a*) не буде формулою. Дійсно, за означенням формулами є $P$, $Q$, а, отже, і $(P \wedge Q)$. Але вираз $((P \wedge Q)R)$ вже не є формулою, бо формули $(P \wedge Q)$ та $R$, що входять до нього, не з'єднані жодним із символів логічних операцій $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$.

Таким чином, вираз 1 не є формулою.

**Завдання 2.** В поданих послідовностях розставити дужки так, щоб одержати якомога більше формул:

1. $P \to Q \wedge \neg R \vee S$.
2. $P \to \neg Q \vee R \to \neg P \to \neg R$.
3. $\neg P \wedge Q \to R$.
4. $P \vee \neg Q \to \neg R \wedge Q$.
5. $\neg P \leftrightarrow \neg Q \vee R \wedge Q$.

► 5. Формули мають вигляд (зовнішні дужки опущені):

$(\neg P \leftrightarrow \neg Q) \vee (R \wedge Q)$;
$\neg(P \leftrightarrow \neg Q) \vee (R \wedge Q)$;
$\neg(P \leftrightarrow \neg((Q \vee R) \wedge Q))$;
$\neg((P \leftrightarrow (\neg Q \vee R)) \wedge Q)$;
$(\neg P \leftrightarrow (\neg Q \vee R)) \wedge Q$;
$\neg P \leftrightarrow ((\neg Q \vee R) \wedge Q)$;
$\neg((P \leftrightarrow \neg Q) \vee (R \wedge Q))$;
$\neg(P \leftrightarrow ((\neg Q \vee R) \wedge Q))$;
$(\neg P \leftrightarrow \neg(Q \vee R)) \wedge Q$;
$\neg P \leftrightarrow (\neg(Q \vee R) \wedge Q)$;
$\neg((P \leftrightarrow \neg(Q \vee R)) \wedge Q)$;
$\neg(P \leftrightarrow (\neg Q \vee (R \wedge Q)))$;
$\neg(P \leftrightarrow (\neg Q \vee R)) \wedge Q$;
$\neg(P \leftrightarrow \neg(Q \vee R)) \wedge Q$;
$\neg(P \leftrightarrow (\neg Q \vee R) \wedge Q))$;
$\neg(P \leftrightarrow \neg(Q \vee (R \wedge Q)))$.
$\neg((P \leftrightarrow \neg Q) \vee R) \wedge Q$;

**Завдання 3.** Виписати всі можливі підформули кожної з формул:

1. $((P \leftrightarrow Q) \wedge \neg R) \to (((P \vee Q) \to P) \to \neg R)$.
2. $((P \vee Q) \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee (\neg Q \vee R))$.
3. $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to (P \wedge Q))$.

**Завдання 4.** Скласти таблицю істинності для формул:

1. $(\overline{A \Rightarrow \overline{A}}) \Leftrightarrow A$.
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.
3. $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B \vee A)$.
4. $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow \overline{A}$.
5. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.
6. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \wedge C)$.
7. $(B \Rightarrow A \wedge C) \wedge (\overline{A \vee C \Rightarrow B})$.
8. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \vee A \Rightarrow C \vee B)$.

► 8. У дану формулу входять три змінні висловлення і п'ять разів застосовуються логічні операції. Це означає, що таблиця істинності для даної формули, яку позначимо буквою *F*, міститиме 8 рядків і 8 стовпців. Усі можливі варіанти значень істинності для простих висловлень будуть перебрані, якщо записати цілі числа з проміжку [0;7] у двійковій системі числення трьома цифрами.

Отже, шукана таблиця має вигляд:

*Таблиця 1*

| $p(A)$ | $p(B)$ | $p(C)$ | $p(C \vee A)$ | $p(C \vee B)$ | $p(A \Rightarrow B)$ | $p(C \vee A \Rightarrow$ $\Rightarrow C \vee B)$ | $p(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Останній стовпець таблиці істинності показує, що дана формула є тавтологією.

Зазначимо, що для скорочення запису $p(F)$ значень істинності формули $F$ букву $p$ часто опускають.

**Завдання 5.** Побудувавши таблиці істинності формул, визначити, які з них є виконуваними, які – невиконуваними, які – тавтологіями і які – протиріччями:

1. $(P \to Q) \to ((P \to Q) \to \neg P)$.
2. $((P \to Q) \to P) \to Q$.
3. $(P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \to P) \vee Q)$.
4. $((P \wedge \neg Q) \to Q) \to (P \to Q)$.
5. $P \wedge (Q \wedge (\neg P \vee \neg Q))$.
6. $((P \to Q) \to Q) \to Q$.
7. $((P \vee \neg Q) \to Q) \wedge (\neg P \vee Q)$.
8. $((P \to Q) \vee (P \to (Q \wedge P)))$.
9. $(\neg(P \to \neg(Q \wedge P)) \to (P \vee R))$.
10. $((P \wedge (Q \to P)) \to \neg P)$.
11. $((P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R)))$.

►7. Користуючись означеннями логічних операцій, складемо таблицю істинності формули, яку позначимо $F(P,Q)$:

*Таблиця 2*

| $P$ | $Q$ | $\neg Q$ | $P \vee \neg Q$ | $(P \vee \neg Q) \to Q$ | $\neg P$ | $\neg P \vee Q$ | $F(P,Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

З побудованої таблиці бачимо, що формула є виконуваною, бо вона істинна, наприклад, при хибності $P$ і істинності $Q$. Ця формула є також невиконуваною (наприклад, при хибності $P$ і $Q$).

Разом з цим, вона не є тавтологією та тотожно хибною.

**Завдання 6.** Довести виконуваність формул:

1. $\neg(P \to \neg P)$.
2. $(P \to Q) \to (Q \to P)$.
3. $(Q \to (P \wedge R)) \wedge \neg((P \vee R) \to Q)$.
4. $\neg((P \leftrightarrow \neg Q) \vee R) \wedge Q$.
5. $(P \wedge Q) \to ((R \vee Q) \to (Q \wedge \neg Q))$.

**Завдання 7.** При яких значеннях змінних формули є хибними?

1. $(((X \to (Y \wedge Z)) \to (\neg Y \to \neg X)) \to \neg Y)$.
2. $((X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \vee (U \wedge S) \vee (U \wedge W) \vee (S \wedge W) \vee (\neg X \wedge \neg Y))$.
3. $(((X \vee Y) \vee Z) \to ((X \vee Z) \wedge (X \vee Z)))$.
4. $((X \vee Y) \wedge ((Y \vee Z) \wedge (Z \vee X))) \to ((X \wedge Y) \wedge Z))$.
5. $((X \vee Y) \to ((\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y)))$.

**Завдання 8.** Довести, що формули є тавтологіями:

1. $P \to (Q \to P)$.
2. $(P \to Q) \to (P \to (Q \to R)) \to (P \to R))$.
3. $P \to (Q \to (P \wedge Q))$.
4. $P \to (P \vee Q)$.
5. $[P \to (Q \wedge R)] \leftrightarrow [(P \to Q) \wedge (P \to R)]$.
6. $(P \wedge Q) \to P$.
7. $[(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q)] \to \neg P$.
8. $(P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to R))$ (ця тавтологія має назву “розбір випадків”).
9. $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$.
10. $\neg\neg P \to P$.
11. $(P \to Q) \vee (Q \to P)$.
12. $(P \to Q) \to ((Q \to P) \to (P \leftrightarrow Q))$.
13. $((P \to Q) \to P) \to P$.
14. $(P \leftrightarrow Q) \to (P \to Q)$.
15. $(P \to R) \to ((P \vee Q) \to (R \vee Q))$.
16. $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$.
17. $(F_1 \to (F_2 \to G)) \leftrightarrow ((F_1 \wedge F_2) \to G$.

## § 4.2. Рівносильні перетворення формул. Диз’юнктивні та кон’юнктивні нормальні форми для формул алгебри висловлень

**Завдання 1.** Застосовуючи рівносильні перетворення, звести формули до найбільш простої форми:

1. $\neg(\neg P \vee Q) \to ((P \vee Q) \to P)$.
2. $\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee ((P \to Q) \wedge P)$.
3. $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \wedge (P \vee Q)$.
4. $(P \to Q) \wedge (Q \to \neg P) \wedge (R \to P)$.
5. $(P \wedge R) \vee (P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$.

6. $\neg((P \to Q) \wedge (Q \to \neg P))$.

► 6. $\neg((P \to Q) \wedge (Q \to \neg P)) \cong \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \cong$
$\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P) \cong (P \wedge \overline{Q}) \vee (Q \wedge P) \cong P \wedge (\overline{Q} \vee Q) \cong P$.

**Завдання 2.** Перетворити формули так, щоб в них входили лише символи $\neg$ і $\wedge$:

1. $(X \neg Y) \to (\neg X \to Z)$.
2. $(\neg X \to Y) \vee \neg(X \to Y)$.
3. $((X \vee Y \vee Z) \to X) \vee Z$.
4. $((X \to Y) \to Z) \to \neg X$.
5. $(X \vee (Y \to Z)) \to X$.

► 5. $(X \vee (Y \to Z)) \to X \cong (X \vee (\neg Y \vee Z)) \to X \cong (\neg X \wedge \neg(\neg Y \vee Z)) \vee X \neg$
$\neg(\neg(\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \wedge \neg X)$.

**Завдання 3.** Спростити формули так, щоб до їх складу входили лише операції $\neg$ та $\vee$:

1. $(X \to Y) \to (Y \wedge Z)$.
2. $(\neg X \wedge \neg Y) \to (X \wedge Y)$.
3. $((\neg X \wedge \neg Y) \vee Z) \to (Z \wedge \neg Y)$.
4. $((X \to (Y \wedge Z)) \to (\neg Y \to \neg X)) \to \neg Y$.
5. $((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to (X \to Z)$.

**Завдання 4.** Перетворити формули так, щоб заперечення відносилось лише до пропозиціональних змінних і не стояло б перед дужками:

1. $\neg((X \wedge (\neg Y \vee \neg Z)) \vee Z)$.
2. $\neg((X \wedge Y) \vee \neg Z) \to \neg(X \wedge Z)$.
3. $\neg(U \to \neg(Z \wedge \neg(Y \wedge \neg X)))$.
4. $\neg(\neg(\neg(X \wedge Y) \to (\neg X \wedge Z))$.
5. $\neg(\neg(X \vee (\neg Y \wedge Z) \vee (Y \wedge Z))$.

**Завдання 5.** Знайти заперечення кожної з формул:

1. $(X \wedge (Y \vee \neg Z)) \vee (\neg X \wedge Y)$.
2. $((\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee R) \wedge \neg U \wedge \neg V \wedge \neg W$.
3. $(((\neg X \wedge (\neg Y \vee Z)) \vee P) \wedge \neg Q) \vee (\neg R \wedge (S \vee \neg T))$.
4. $((X \wedge (\neg Y \vee (\neg Z \wedge P))) \vee \neg Q) \wedge R$.

► 4. $\neg(((X \wedge (\neg Y \vee (\neg Z \wedge P))) \vee \neg Q) \wedge R) \cong \neg((X \wedge (\neg Y \vee (\neg Z \wedge P))) \vee$
$\vee \neg Q) \wedge \neg R \cong (\neg(X \wedge (\neg Y \vee (\neg Z \wedge P))) \wedge Q) \vee \neg R \cong (\neg X \vee (Y \wedge (Z \vee \neg P))) \wedge Q) \vee \neg R$.

**Завдання 6.** Рівносильними перетвореннями позбавитись операцій $\Rightarrow$ та $\Leftrightarrow$:

1. $((X \to Y) \wedge (Y \to X)) \to (X \vee Y)$.
2. $((X \to Y) \wedge (Y \to \neg X)) \to (Z \to X)$.
3. $((X \leftrightarrow Y) \wedge (\neg X \leftrightarrow \neg Y)) \to ((X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y))$.
4. $((X \leftrightarrow \neg Y) \to Z) \to (X \leftrightarrow \neg Z)$.
5. $(X \to (Y \leftrightarrow Z)) \leftrightarrow ((X \to Y) \leftrightarrow Z)$.

► 1. $((X \to Y) \wedge (Y \to X)) \to (X \vee Y) \cong \neg((\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{Y} \vee X)) \vee X \vee Y \cong$
$\cong (X \wedge \overline{Y}) \vee (Y \wedge \overline{X}) \vee X \vee Y \cong X \vee Y$.

**Завдання 7.** Користуючись рівносильними перетвореннями, довести, що наведені формули є протиріччями:

1. $(X \to Y) \wedge (Y \to X) \wedge ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y))$.
2. $((X \to \neg Y) \to (\neg X \vee (X \wedge Y))) \wedge ((\neg X \vee (X \wedge Y)) \to (X \wedge \neg Y))$.
3. $((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to \neg(X \to Z)$.
4. $(X \to Y) \wedge (X \to \neg Y) \wedge X$.
5. $((X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge \neg Z)) \leftrightarrow ((X \to Y) \wedge (X \to Z))$.

► 1. Покажемо, що формула рівносильна 0:

$(X \to Y) \wedge (Y \to X) \wedge ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)) \cong (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X) \wedge$
$\cong (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X) \wedge ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)) \cong ((\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \wedge$
$\wedge (X \vee \neg Y)) \vee ((\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \wedge Y)) \cong ((\neg X \vee Y) \wedge \cong ((\neg X \vee Y) \wedge$
$\wedge \neg(X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y)) \cong (0 \wedge (X \vee \neg Y)) \vee (0 \wedge (\neg X \vee Y)) \cong 0 \vee 0 = 0.$

**Завдання 8.** Виконуючи рівносильні перетворення, показати, що кожна з формул завдання 8 попереднього параграфа є тавтологією.

**Завдання 9.** Рівносильними перетвореннями звести кожну з формул до ДДН-формули:

1. $(\neg X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$.
2. $(X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z)$.
3. $X \vee (Y \wedge Z)$.
4. $(X \wedge Y) \vee (Z \wedge T)$.
5. $((X \wedge \neg Y) \vee Z) \wedge (\neg X \vee Z)$.
6. $X \vee Y \vee Z$.
7. $((X \vee Y) \wedge (X \vee Z)) \vee (\neg Y \wedge (Z \vee \neg Y))$.
8. $(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee T) \wedge (Z \vee T)$.
9. $(X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Z) \vee (Y \wedge \neg Z) \vee (\neg Y \wedge Z)$.
10. $\neg X \vee (X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z) \vee (Z \wedge T)$.

11. $X \vee Y \vee Z \vee S \vee T$.

► 1. $(\neg X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \cong (\neg X \wedge Y) \vee Z$. Кон'юнктивний одночлен $\neg X \wedge Y$ не є досконалим по змінних *X, Y, Z,* бо в нього не входить змінна *Z*. Введемо її таким чином:

$\neg X \wedge Y \cong \neg X \wedge Y \wedge 1 \cong \neg X \wedge Y \wedge (Z \vee \neg Z) \cong (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z)$.

В одночлені *Z* відсутні змінні *X* і *Y*. Введемо в нього спочатку *Y*:

$Z \cong 1 \wedge Z \cong (Y \vee \neg Y) \wedge Z \cong (Y \wedge Z) \vee (\neg Y \wedge Z)$.

Далі в кожний з кон'юнктивних одночленів $Y \wedge Z$ і $\neg Y \wedge Z$ введемо змінну *X*:

$(Y \wedge Z) \vee (\neg Y \wedge Z) \cong (1 \wedge Y \wedge Z) \vee (1 \wedge \neg Y \wedge Z) \cong ((X \vee \neg X) \wedge Y \wedge Z) \vee$
$\vee ((X \vee \neg X) \wedge \neg Y \wedge Z) \cong (X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee$
$\vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z)$.

Таким чином, ДДНФ даної формули набуває вигляду:

$(\neg X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \cong (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z) \vee$
$\vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \cong (X \wedge Y \wedge Z) \vee$
$\vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X) \wedge Y \wedge \neg Z)$.

**Завдання 10.** Кожну з формул рівносильними перетвореннями звести до ДКНФ:

1. $(\neg X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$.
2. $(X \vee Y) \wedge Z$.
3. $(\neg X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$.
4. $(\neg X \wedge Y) \vee (Z \wedge T)$.
5. $(X \wedge Y \wedge Z) \vee T$.
6. $X \wedge Y \wedge Z$.
7. $(X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z) \vee (Z \wedge T)$.
8. $X \vee Y \vee (\neg Z \wedge T)$.
9. $(X \vee Y) \vee Z$.
10. $X \wedge Y \wedge Z \wedge T$.
11. $(X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge \neg Z$.

► 1. $(\neg X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \cong (\neg X \vee Y) \wedge Z$

Диз'юнктивний одночлен $\neg X \wedge Y$ не є досконалим, бо в нього не входить змінна *Z*. Введемо її таким чином:

$\neg X \vee Y \cong X \vee Y \vee 0 \cong \neg X \vee Y \vee (Z \wedge \neg Z) \cong (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge$
$\wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z)$

Далі в одночлені *Z* відсутні змінні *X* та *Y*. Введемо спочатку *Y*:

$Z \cong 0 \vee Z \cong (Y \wedge \neg Y) \vee Z \cong (Y \vee Z) \wedge (\neg Y \vee Z)$.

Насамкінець, в кожний з одночленів $Y \vee Z$ та $\neg Y \vee Z$ введемо *X:*

$(Y \vee Z) \wedge (\neg Y \vee Z) \cong (0 \vee Y \vee Z) \wedge (0 \vee \neg Y \vee Z) \cong ((X \wedge \neg X) \vee Y \vee Z) \wedge$
$\wedge ((X \wedge \neg X) \vee \neg Y \vee Z) \cong (X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z) \wedge$
$\wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z)$.

Підставляючи одержані вирази в формулу і відкидаючи одночлен, що вже є в запису, одержуємо ДКНФ даної формули:

$(\neg X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \cong (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge$
$\wedge (X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \cong$
$\cong (X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z)$.

**Завдання 11.** Кожну з формул рівносильними перетвореннями звести до:

1) диз'юнктивної та 2) кон'юнктивної нормальних форм:

а) $\neg(X \vee Z) \wedge (X \rightarrow Y)$;

б) $(X \leftrightarrow Y) \wedge \neg(Z \rightarrow T)$;

в) $(X \vee (Y \wedge \neg Z)) \wedge (X \vee Z)$;

г) $((X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \rightarrow \neg X)) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg Z)$;

г) $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow \neg Z) \rightarrow (X \rightarrow \neg Y))$.

► 1) а) $\neg(X \vee Z) \wedge (X \rightarrow Y) \cong (\neg X \wedge \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y) \cong \neg X \wedge$
$\wedge (\neg Z \wedge (\neg X \vee Y)) \cong \neg X \wedge ((\neg Z \wedge \neg X) \vee (\neg Z \wedge Y)) \cong (\neg X \wedge \neg Z \wedge \neg X) \vee$
$\vee (\neg X \wedge \neg Z \wedge Y) \cong (\neg X \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z)$.

Зведемо цю ж формулу *а)* до кон'юнктивної нормальної форми:

$\neg(X \vee Z) \wedge (X \rightarrow Y) \cong (\neg X \wedge \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y) \cong (\neg X \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \cong$
$\cong ((\neg X \wedge \neg Z) \vee \neg X) \wedge ((\neg X \wedge \neg Z) \vee Y) \wedge ((\neg X \wedge \neg Z) \vee \neg Z) \cong \neg X \wedge ((\neg X \vee Y) \wedge$
$\wedge (\neg Z \vee Y)) \wedge \neg Z \cong (\neg X \wedge (\neg X \vee Y)) \wedge ((\neg Z \vee Y) \wedge \neg Z) \cong \neg X \wedge \neg Z$.

**Завдання 12.** Звести формули задачі 11 до 1) ДДНФ та 2) ДКНФ:

1. а) $\neg(X \vee Z) \wedge (X \rightarrow Y) \cong (\neg X \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \cong ((\neg X \wedge \neg Z) \wedge$
$\wedge (Y \vee \neg Y)) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \cong (\neg X \wedge \neg Z \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Z \wedge \neg Y) \vee$
$\vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \cong (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$;
2. а) $\neg(X \vee Z) \wedge (X \rightarrow Y) \cong \neg X \wedge \neg Z \cong (\neg X \vee (Y \wedge \neg Y)) \wedge$
$\wedge (\neg Z \vee (X \wedge \neg X)) \cong (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg Z \vee X) \wedge (\neg Z \vee \neg X) \cong$
$\cong (\neg X \vee Y \vee (Z \wedge \neg Z)) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee (Z \wedge \neg Z)) \wedge (X \vee \neg Z \vee (Y \wedge \neg Y)) \wedge$
$\wedge (\neg X \vee \neg Z \vee (Y \wedge \neg Y)) \cong (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge$
$\wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge$
$\wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \cong (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge$
$\wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z)$.

**Завдання 13.** Звести формули 1-3 до ДДНФ, а 4-6 до ДКНФ:

1. $(\neg X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z \wedge T) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z \wedge T)$.
2. $\neg((X \rightarrow Y) \rightarrow \neg Y) \rightarrow (X \rightarrow (Y \wedge X))$.
3. $\neg((X \wedge Y) \rightarrow \neg X) \wedge \neg((X \wedge Y) \rightarrow \neg Y)$.
4. $(X \vee Y) \wedge (Y \vee Z) \wedge (Z \vee T)$.
5. $X \wedge (Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee Y \vee Z)$.
6. $\neg(X \wedge (Y \vee Z)) \rightarrow ((X \wedge Y) \vee Z)$.

**Завдання 14.** За даним набором значень змінних побудувати кон'юнктивний одночлен, що набуває значення 1 тільки на цьому наборі значень змінних:
1. $(0,1)$.
2. $(0,0)$.
3. $(1,1)$.
4. $(0,1,1)$.
5. $(1,0,0)$.
6. $(1,0,1,1)$.

► 4. Оскільки кон'юнктивний одночлен $Y_1 \wedge Y_2 \wedge Y_3$ набуває значення 1 тоді і тільки тоді, коли $Y_1 = 1$, $Y_2 = 1$, $Y_3 = 1$, то кон'юнкція $\neg X_1 \wedge X_2 \wedge \wedge X_3$ істинна тоді і тільки тоді, коли $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$, що відповідає умові 4.

**Завдання 15.** Використовуючи ДДНФ, знайти формулу, що набуває значення 1 на поданих наборах значень змінних і тільки на них:
1. $F(0,0) = F(1,1) = 1$.
2. $F(1,0) = 1$.
3. $F(0,1,0) = F(1,0,1) = F(1,1,1) = 1$.
4. $F(0,1,1) = F(1,1,0) = 1$.
5. $F(1,0,0) = F(0,1,0) = F(0,0,1) = 1$.
6. $F(0,1,1) = F(1,0,1) = F(1,1,0) = F(1,1,1) = 1$.
7. $F(0,0,0) = F(0,1,0) = F(1,1,1) = 1$.
8. $F(0,1,0,1) = F(1,0,1,0) = F(1,0,0,0) = F(1,1,1,0) = F(1,1,1,1) = 1$.

► 7. Першу умову задовольняє лише кон'юнктивний одночлен $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$, другу – $\neg X \wedge Y \wedge \neg Z$, третю – $X \wedge Y \wedge Z$. Формула $F(X,Y,Z) = (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$ істинна тоді і тільки тоді, коли істинною є або $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$, або $\neg X \wedge Y \wedge \neg Z$, або $X \wedge Y \wedge Z$, тобто тоді і тільки тоді, коли $(X,Y,Z) = (0,0,0)$, або $(X,Y,Z) = (0,1,0)$, або $(X,Y,Z) = (1,1,1)$. Отже, побудована формула і є шуканою.

**Завдання 16.** За даним набором значень змінних побудувати диз'юнктивний одночлен, що набуває значення *0* тільки на цьому наборі:
1. (*0,0*).
2. (*1,0*).
3. (*1,1*).
4. (*0,1,1*).
5. (*1,0,1*).
6. (*0,0,1*).
7. (*1,0,0,1*).
8. (*0,1,0,0*).

► 4. Оскільки диз'юнктивний одночлен $Y_1 \vee Y_2 \vee Y_3$ набуває значення 0 тоді і тільки тоді, коли $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$, $Y_3 = 0$, то диз'юнкція $X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3$ хибна тоді і тільки тоді, коли $X_1 = 0$, $\neg X_2 = 0$, $\neg X_3 = 0$, тобто $(X_1, X_2, X_3) = (0,1,1)$.

**Завдання 17.** Використовуючи ДКНФ, знайти формулу, що набуває значення *0* на цих і тільки на цих наборах значень змінних:
1. $F(0,1) = F(1,1) = 0$.
2. $F(0,1) = 0$.
3. $F(0,1,1) = 0$.
4. $F(1,0,0) = F(1,0,1) = 0$.
5. $F(0,1,1) = F(0,0,0) = F(0,1,0) = 0$.
6. $F(1,1,1) = F(0,0,1) = F(1,1,0) = F(1,0,0) = 0$.
7. $F(0,0,0) = F(0,1,0) = F(1,1,1) = 0$.
8. $F(1,1,0,1) = F(0,0,1,0) = F(1,0,1,0) = F(0,0,1,1) = F(0,0,0,0) = 0$.

► 7. Першу умову задовольняє лише диз'юнктивний одночлен $X \vee Y \vee Z$, другу – $X \vee \neg Y \vee Z$, третю – $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$. Формула $F(X,Y,Z) = (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$ перетворюється на 0 тоді і тільки тоді, коли хибними є $X \vee Y \vee Z$, або $X \vee \neg Y \vee Z$, або $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$, тобто $F(X,Y,Z) = 0$ лише тоді, коли $(X,Y,Z) = (0,0,0)$, або $(X,Y,Z) = (0,1,0)$, або $(X,Y,Z) = (1,1,1)$. Отже, знайдена формула – шукана.

**Завдання 18.** Склавши таблицю істинності, знайти ДДНФ кожної з формул:
1. $\neg(X \wedge Y) \to \neg(X \vee Y)$.
2. $X \to Y$.
3. $(X \wedge Y) \vee Z$.
4. $(X \leftrightarrow Z) \to (X \wedge \neg Y)$.
5. $X \vee (Y \to (Z \leftrightarrow (X \wedge Y)))$.
6. $((X \wedge \neg Y) \vee Z) \wedge T$.
7. $(X \wedge ((Y \wedge Z) \vee T)) \vee \neg T$.

► 1. Складемо таблицю істинності даної формули:

| X | Y | Z | $\neg(X \wedge Y)$ | $\neg(X \vee Y)$ | $\neg(X \wedge Y) \to \neg(X \vee Y)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Вибираючи ті набори значень змінних, на яких формула істинна, подібно до задачі 15, виписуємо ДДНФ:

$$\neg(X \wedge Y) \to \neg(X \vee Y) \cong (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee$$
$$\vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \ \wedge Y \wedge Z).$$

**Завдання 19.** Скласти ДКНФ кожної з формул, користуючись таблицею істинності:

1. $\neg(X \wedge Y) \to \neg(X \vee Y)$.
2. $X \leftrightarrow Y$.
3. $(X \vee Y) \wedge Z$.
4. $\neg(\neg X \vee \neg Y) \wedge (X \to (Y \wedge Z))$.
5. $(X \wedge Y \wedge Z) \vee T$.
6. $X \wedge \neg(\neg Y \wedge (Z \to (X \leftrightarrow Y)))$.
7. $(X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z) \vee (Z \wedge T)$.

► 1. З таблиці істинності, складеної в попередній задачі, вибираємо набори значень змінних, на яких формула хибна. Подібно до розв'язання завдання 17, утворюємо з них ДКНФ даної формули:

$$\neg(X \wedge Y) \to \neg(X \vee Y) \cong (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge$$
$$(\neg X \vee Y \vee \neg Z).$$

**Завдання 20.** ДКНФ деякої формули від трьох змінних має шість співмножників (досконалих диз'юнктивних одночленів). Що є більш простим ДКНФ чи ДДНФ цієї формули?

**Завдання 21*.** Довести, що заперечення $\neg F$ будь-якої формули $F$ алгебри висловлень є диз'юнкцією тих і тільки тих досконалих кон'юнктивних одночленів, які не входять в її ДДНФ.

**Завдання 22*.** Довести, що заперечення $\neg F$ будь-якої формули $F$ є кон'юнкцією тих і тільки тих її досконалих диз'юнктивних одночленів, що не входять в ДКНФ формули $F$.

**Завдання 23.** Застосовуючи твердження задачі 21, перейти від ДДНФ до ДКНФ заданих формул:

1. $\mathrm{F}=(\neg \mathrm{X}\wedge \neg \mathrm{Y}\wedge \neg \mathrm{Z})\vee(\neg \mathrm{X}\wedge \mathrm{Y}\wedge \mathrm{Z})\vee(\mathrm{X}\wedge \neg \mathrm{Y}\wedge \mathrm{Z})\vee(\mathrm{X}\wedge \mathrm{Y}\wedge \neg \mathrm{Z})\vee$ $\vee(\mathrm{X}\wedge \mathrm{Y}\wedge \mathrm{Z})$.
2. $F=(\neg X\wedge Y)\vee(X\wedge \neg Y)$.
3. $F=(\neg X\wedge \neg Y)\vee(X\wedge Y)$.
4. $F=(\neg X\wedge \neg Y\wedge Z)\vee(X\wedge \neg Y\wedge \neg Z)\vee(\neg X\wedge Y\wedge \neg Z)\vee(\neg X\wedge Y\wedge Z)\vee$ $\vee(\mathrm{X}\wedge \mathrm{Y}\wedge \neg \mathrm{Z})$.
5. $F=(\neg X\wedge \neg Y\wedge \neg Z)\vee(X\wedge Y\wedge Z)$.
6. $F=(\neg X\wedge \neg Y\wedge \neg Z\wedge \neg T)\vee(\neg X\wedge \neg Y\wedge Z\wedge \neg T)\vee(\neg X\wedge Y\wedge \neg Z\wedge \neg T)$ $\vee(X\wedge \neg Y\wedge \neg Z\wedge \neg T)\vee(\neg X\wedge \neg Y\wedge \neg Z\wedge T)\vee(X\wedge Y\wedge Z\wedge T)$.

► 1. Відповідно до завдання 21 заперечення $\neg F$ має ДДНФ:
$\neg F\cong(\neg X\wedge \neg Y\wedge Z)\vee(\neg X\wedge Y\wedge \neg Z)\vee(X\wedge Y\wedge \neg Z)$.
Звідси:
$F\cong(X\wedge Y\wedge \neg Z)\wedge(X\wedge \neg Y\vee Z)\wedge(\neg X\wedge Y\wedge Z)$.
Це і є ДКНФ формули $F$.

**Завдання 24.** Застосовуючи твердження задачі 22, перейти від ДКНФ до ДДНФ заданих формул:

1. $\mathrm{F}=(\neg \mathrm{X}\vee \mathrm{Y}\vee \mathrm{Z})\wedge(\mathrm{X}\vee \neg \mathrm{Y}\vee \neg \mathrm{Z})\wedge(\neg \mathrm{X}\vee \mathrm{Y}\vee \neg \mathrm{Z})\wedge(\mathrm{X}\vee \mathrm{Y}\vee \mathrm{Z})$.
2. $F=(\neg X\vee Y)\wedge(X\vee \neg Y)$.
3. $F=(\neg X\vee \neg Y)\wedge(X\vee Y)$.
4. $F=(\neg X\vee \neg Y\vee \neg Z)\wedge(\neg X\vee \neg Y\vee Z)\wedge(\neg X\vee Y\vee Z)\wedge(X\vee Y\vee Z)$.
5. $F=(\neg X\vee \neg Y\vee Z)\wedge(X\vee \neg Y\vee \neg Z)\wedge(\neg X\vee Y\vee \neg Z)$.
6. $F=(\neg X\vee \neg Y\vee \neg Z\vee \neg T)\wedge(\neg X\vee Y\vee Z\vee T)\wedge(X\vee \neg Y\vee Z\vee T)\wedge$ $\wedge(X\vee Y\vee \neg Z\vee T)\wedge(X\vee Y\vee Z\vee T)\vee(X\vee Y\vee Z\vee T)$.

► 1. Відповідно до завдання 22 маємо:
$\neg F=(\neg X\vee \neg Y\vee \neg Z)\wedge(\neg X\vee Y\vee Z)\wedge(X\vee \neg Y\vee Z)\wedge(X\vee Y\vee \neg Z)$.
Звідси:
$F=(X\wedge Y\wedge Z)\vee(X\wedge \neg Y\wedge \neg Z)\vee(\neg X\wedge Y\wedge \neg Z)\vee(\neg X\wedge \neg Y\wedge Z)$.
Це і є ДКНФ формули $F$.

**Завдання 25.** Знайти найпростішу формулу від трьох змінних, останній стовпець таблиці істинності якої має вигляд:

1. *0 0 0 0 1 1 1 1.*
2. *0 1 0 1 0 1 0 1.*
3. *0 0 1 0 0 1 0 0.*

4. *1 0 1 1 1 1 0 1.*

5. *1 1 0 0 0 0 1 0.*

► 1. Для відшукання такої формули можна скористатись як ДДНФ, так і ДКНФ. Використаємо, наприклад, ДКНФ. Вибираємо ті набори значень змінних, на яких формула хибна, і склавши ДКНФ, спростимо її:

$$F(X,Y,Z) \cong (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \cong$$
$$\cong (X \vee Y(Z \wedge \neg Z)) \wedge (X \vee \neg Y(Z \wedge \neg Z)) \cong (X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \cong X \vee (Y \wedge \neg Y) \cong$$
$$\cong X \vee 0 \cong X.$$

# ТЕМА 5. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

## § 5.1. Булеві функції, їх властивості і тотожні перетворення

### *Диз'юнктивні та кон'юнктивні форми булевих функцій*

**Завдання 1.** Побудувати таблицю значень булевої функції:

1. $f(x,y) = ((x \to y)y') \to x'$.
2. $f(x,y,z) = ((x \to (y \vee z))(yz)') \to x$.
3. $f(x,y,z) = x' \to (z \leftrightarrow (y + (xz)))$.
4. $f(x,y,z) = (((x \mid y) \downarrow z) \mid y) \downarrow z$.
5. $f(x,y,z) = ((x \vee y') \to z)((x \mid y) \leftrightarrow z')$.
6. $f(p,q,r) = (\neg(p \wedge \neg r) \vee q) \to (q \vee r)$.
7. $f(p,q,r) = \neg((p \wedge \neg q) \vee r) \leftrightarrow (r \to q)$.
8. $f(p,q,r) = (\neg(p \to q) \to (q \to r))$.
9. $f(p,q,r) = (p \vee q) \wedge (p \to r)$.
10. $f(p,q,r) = ((p \vee r) \to q) \to ((p \to q) \vee (p \to r))$.
11. $f(p,q,r) = (p \to q) \vee \neg(r \wedge q)$.
12. $f(p,q,r) = (p \vee r) \to (p \wedge q)$.
13. $f(p,q,r) = \neg((p \to q) \wedge \neg r) \to (p \vee \neg r)$.
14. $f(p,q,r) = ((p \to q) \wedge \neg(r \vee p)) \to (\neg p \vee \neg q)$.
15. $f(p,q,r) = (p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$.
16. $f(p,q,r) = (p \wedge \neg(q \vee \neg r)) \leftrightarrow (p \to q)$.
17. $f(p,q,r) = (p \vee r) \to q$.
18. $f(p,q,r) = ((p \to q) \wedge (q \to \neg r)) \to (r \to p)$.
19. $f(p,q,r) = (p \wedge (q \vee r)) \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$.

► Для функції 5 таблиця, наприклад, має вигляд:

| x | y | z | y' | $x \vee y'$ | $(x \vee y') \to z$ | x\|y | z' | $(x\|y) \to z$ | f(x,y,z) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

**Завдання 2.** Побудувавши таблицю значень, з'ясувати, чи є рівними функції $f$ та $g$:

1. $f(x,y,z) = ((x \vee y) \vee z) \to ((x \vee y)(x \vee z)),$
   $g(x,y,z) = x \leftrightarrow z;$
2. $f(x,y,z) = (x' \vee y)(y \vee z),$
   $g(x,y,z) = (x \vee y \vee z)(x' \vee y \vee z)(x' \vee y \vee z');$
3. $f(x,y,z) = (x \to y) \to z,$
   $g(x,y,z) = x \to (y \to z);$
4. $f(x,y) = ((x+y) \to (x \vee y))((x' \to y) \to (x+y)),$
   $g(x,y) = x \mid y;$
5. $f(x,y,z) = ((x \vee y')z) \vee (xz') \vee (z(y \vee z')),$
   $g(x,y,z) = x \vee z.$

**Завдання 3.** Перевірити, що додавання за модулем 2 (сума Жегалкіна) має властивості:

1. $x + y = (x \leftrightarrow y)'$.
2. $x + y = y + x$.
3. $(x+y)+z = x+(y+z)$.
4. $(x+y)z = (xz)+(yz)$.
5. $x + x = 0$.
6. $x + 0 = x$.

**Завдання 4.** Довести, що:

1. $xy = (x' \vee y')'.$
2. $x \to y = x' \vee y.$
3. $x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x) = (x' \vee y)(x \vee y').$
4. $x + y = (x' \vee y)' \vee (x \vee y')'.$

5. $x \downarrow y = (x \vee y)'$.
6. $x \mid y = x' \vee y'$.
7. $x' = x \mid x$.
8. $xy = (x \mid y) \mid (x \mid y)$.
9. $x \vee y = (x \mid x) \mid (y \mid y)$.
10. $x \to y = x \mid (y \mid y)$.

► І спосіб – використання таблиць значень функцій в лівій і правій частинах рівностей.

ІІ спосіб – використання співвідношень між булевими функціями та властивостей цих функцій. В прикладі 9

$$x \vee y = (x'y')' = ((x \mid x)(y \mid y))' = (x \mid x)' \vee (y \mid y)' = (x \mid x) \mid (y \mid y).$$

**Завдання 5.** Виразити через суперпозицію:
1. $\bullet$ і ' функції $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $+$, $|$, $\downarrow$.
2. $\to$ і ' функції $\vee$, $\bullet$, $\leftrightarrow$, $+$, $|$, $\downarrow$.
3. $\downarrow$ функції $\vee$, $\bullet$, ', $\to$, $\leftrightarrow$, $|$, $+$.

**Завдання 6.** Показати, що:
1. $x' = x + 1$.
2. $x \vee y = ((x+1)(y+1)) + 1$.
3. $x \to y = ((xy) + x) + 1$.
4. $x \leftrightarrow y = (x + y) + 1$.

**Завдання 7.** Довести повноту систем булевих функцій:
1. $\{\vee, '\}$.
2. $\{\cdot, '\}$.
3. $\{\to, '\}$.
4. $\{|\}$.
5. $\{\downarrow\}$.
6. $\{+, \cdot, 1\}$.

**Завдання 8.** Спростити запис булевої функції до трьох входжень букв:
1. $x'y'z \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz' \vee xyz$.
2. $(x \vee y \vee z)(x \vee y \vee z')(x \vee y' \vee z)$.
3. $x'yz \vee xy'z \vee xyz$.

4. $x(y' \vee z') \vee (x' \vee yz)(x \vee uv)$.

5. $(x' \vee y \vee z)(x \vee y' \vee z)(x \vee y \vee z)$.

6. $(x' \vee y' \vee z')(x' \vee y \vee z')(x \vee y' \vee z')(x \vee y \vee z')(x \vee y \vee z)$.

►1. $x'y'z \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz' \vee xyz = (x'y'z \vee x'yz) \vee (xy'z \vee xyz) \vee$
$\vee xyz' = x'z(y' \vee y) \vee xz(y' \vee y) \vee xyz' = x'z \cdot 1 \vee xz \cdot 1 \vee xyz' =$
$= x'z \vee xz \vee xyz' = (x' \vee x)z \vee xyz' = z \vee xyz' = (z \vee xy)(z \vee z') =$
$= (z \vee xy) \cdot 1 = z \vee xy$.

**Завдання 9.** Спростити запис булевої функції до чотирьох входжень букв:

1. $xy' \vee x'yz \vee xz$.
2. $xy' \vee xz' \vee x'yz'$.
3. $x'yz \vee x'y'z \vee x \vee x'y'z' \vee t$.
4. $xyz \vee xy'z \vee xyz't$.
5. $x \vee y'zt \vee y'z't \vee y \vee y'z't'$.
6. $xyz \vee xyz' \vee xy'zt \vee xyzt' \vee xyzt$.
7. $xy(zt' \vee y' \vee x) \vee x'(z \vee t)(x \vee y)$.
8. $xyz \vee yzt \vee xy't' \vee x'yzt' \vee xy't'$.
9. $xt(x' \vee y's \vee t) \vee t'(y \vee s')(x \vee z) \vee xtt'$.

► Іноді для спрощення запису функції корисно вводити допоміжні змінні, наприклад:

а) $xy' \vee x'yz \vee xz = xy' \vee x'yz \vee x(y \vee y')z = xy' \vee x'yz \vee xyz \vee xy'z =$
$= (xy' \vee x'yz) \vee (x'yz \vee xyz) = xy' \vee (x' \vee x)yz = xy' \vee 1 \cdot yz = xy' \vee yz$;

б) $x \vee y'zt \vee y'z't \vee y \vee y'z't' = x \vee (y \vee y'zt) \vee (y'z't \vee y'z't') =$
$= x \vee (y \vee y')(y \vee zt) \vee x \vee y'zt \vee y'z't \vee y \vee y'z't' = x \vee (y \vee y'zt) \vee$
$\vee (y'z't \vee y'z't') = x \vee (y \vee y')(y \vee zt) = x \vee y \vee z' \vee zt = x \vee y \vee$
$\vee (z' \vee z)(z' \vee t) = x \vee y \vee z' \vee t$.

**Завдання 10.** Спростити запис функції $xyz' \vee x'yz \vee x'yz' \vee xyz \vee$ $\vee xy'z \vee x'y'z$ до двох входжень букв.

**Завдання 11.** Спростити булеві функції:

1. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_1x_3 \vee x_1'x_2x_3 \vee x_2x_3'$.
2. $f(x, y, z) = x(y' \vee z)(x' \vee y \vee z)$.
3. $x \to x'$.

4. $x \leftrightarrow x'$.
5. $(x \to x) \to x$.
6. $x' \to (x \to y)$.
7. $((x \to y) \to x) \to y$.
8. $x \to (y \to x)$.
9. $(x \leftrightarrow y) \to (x \to y)$.
10. $(x \to y) \to (y \to x)$.
11. $(x' \to y) \to (y' \to x)$.

► 1. $f(x_1x_2x_3) = x_1 \vee x_1x_3 \vee x_1'x_2x_3 \vee x_2x_3' = x_1 \vee x_1'x_2x_3 \vee$ $\vee x_2x_3' = x_1 \vee x_2x_3 \vee x_2x_3' = x_1 \vee x_2(x_3 \vee x_3') = x_1 \vee x_2 \cdot 1 = x_1 \vee x_2$.

2. $f(x, y, z) = x(y' \vee z)(x' \vee y \vee z) = xx'y' \vee xx'z \vee xyy' \vee xyz \vee$ $\vee xy'z \vee xzz = 0 \cdot y' \vee 0 \cdot z \vee x \cdot 0 \vee xyz \vee xy'z \vee xzz = xyz \vee xy'z \vee xz = xz$.

3. $((x \to y) \to x) \to y = ((x' \vee y) \to x) \to y = ((x' \vee y)' \vee x) \to y =$
$= ((x' \vee y)' \vee x)' \vee y = ((x''y') \vee x)' \vee y = ((xy')'x') \vee y =$
$= ((x' \vee y'')x') \vee y = ((x' \vee y)x') \vee y = x' \vee y = x \to y$.

**Завдання 12.** Представити булеву функцію $x_1x_2 \vee \overline{x_2}(x_3 \vee x_4)$в базисі $\{\wedge, \neg\}$ і $\{\vee, \neg\}$.

► а) $x_1x_2 \vee \overline{x_2}(x_3 \vee x_4) = x_1x_2 \vee \overline{x_2} \cdot \overline{\overline{x_3}}\,\overline{\overline{x_4}} = \overline{\overline{x_1x_2} \cdot \overline{\overline{x_2} \cdot \overline{\overline{x_3}} \cdot \overline{\overline{x_4}}}}$;

б) $x_1x_2 \vee \overline{x_2}(x_3 \vee x_4) = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}} \vee \overline{x_2}(x_3 \vee x_4) =$
$= \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}} \vee \overline{x_2 \vee \overline{x_3 \vee x_4}}$.

**Завдання 13.** Привести функції до ДНФ:

1. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{(x_1 \vee \overline{x_2})} \vee \overline{x_1}x_3 \vee x_2}$.
2. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{(x_1x_2)} \vee \overline{(x_1\overline{x_3} \vee x_2)}} \vee \overline{x_1}x_2x_3$.
3. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{(x_1 \vee \overline{x_3})} \vee \overline{(\overline{x_1}x_2 \vee x_3)}} \vee x_1x_2x_3$.
4. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{(x_1x_2\overline{x_3})} \vee \overline{(x_2 \vee \overline{x_1})}}\,\overline{x_1\overline{x_3} \vee \overline{x_2}}$.
5. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{(x_1x_2)} \vee \overline{(x_1\overline{x_3} \vee x_2)} \vee \overline{x_1}} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_2}x_3$.
6. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x_1 \vee x_3} \vee \overline{(x_1\overline{x_2} \vee x_2\overline{x_3})}} \vee x_1x_3$.
7. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x_2 \vee \overline{x_3}} \cdot \overline{(x_1x_2 \vee x_2\overline{x_3})}} \vee x_1$.

8. $f(x,y,z) = xy \vee \bar{x}(y \vee xz)(\overline{x(\bar{y} \vee z) \vee yz}.$

►8. $f(x,y,z) = xy \vee \bar{x}(y \vee xz)(\overline{x(\bar{y} \vee z) \vee yz} = xy \vee$
$\vee (\bar{x}y \vee \bar{x}xz) \cdot \overline{x(\bar{y} \vee z)} \cdot \overline{yz} = xy \vee \bar{x}y(\bar{x} \vee \overline{(\bar{y} \vee z)}) \cdot \overline{yz} =$
$= xy \vee \bar{x}y(\bar{x} \vee y\bar{z})(\bar{y} \vee \bar{z}) = xy \vee \bar{x}y(\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee y\bar{y}\bar{z} \vee y\bar{z}\bar{z}) =$
$= xy \vee \bar{x}y(\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee y\bar{z}) = xy \vee \bar{x}y(\bar{x}\bar{y} \vee y\bar{z}) = xy \vee \bar{x}y\bar{z} =$
$= y(x \vee \bar{x}\bar{z}) = y(x \vee \bar{z}) = xy \vee y\bar{z}.$

**Завдання 14.** Привести функцію до КНФ: $f(x,y,z) =$
$= x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{z}.$

► $f(x,y,z) = x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{z} = \overline{\overline{x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{z}}} = \overline{\overline{x\bar{y}} \cdot \overline{\bar{x}y} \cdot \overline{x\bar{z}}} =$
$= \overline{(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee z)} = \overline{(\bar{x}\bar{y} \vee xy)(\bar{x} \vee z)} = \overline{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz} =$
$= \overline{\bar{x}\bar{y} \vee xyz} = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$

**Завдання 15.** Знайти ДДНФ булевих функцій $f_1 - f_4$, заданих таблицею:

| x | y | z | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

**Завдання 16.** Одержати ДДНФ функції $f(x,y,z)$ методом тотожних перетворень та, користуючись таблицею значень:

1. $y \cdot z \vee x \cdot y \vee x \cdot z \vee \bar{x}\bar{y}z.$
2. $x \cdot y \vee y \cdot z \vee \bar{x} \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}.$
3. $x \cdot z \vee y \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z.$

4. $x \cdot \bar{y} \vee x \cdot \bar{z} \vee y \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \cdot z.$

5. $y \cdot z \vee \bar{x} \cdot z \vee x \cdot y \cdot z.$

6. $\bar{x} \cdot z \vee y \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \vee x \cdot y \cdot z.$

7. $x \cdot y \vee y \cdot z \vee x \cdot z \vee x \cdot (z \vee \bar{y}).$

8. $\bar{x} \cdot \bar{z} \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \vee y \cdot z \vee x \cdot \bar{y} \cdot z.$

9. $y \cdot \bar{z} \vee \bar{x} \cdot y \vee \bar{x} \cdot z \vee x \cdot y \cdot z.$

10. $\bar{y} \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \vee x \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}.$

**Завдання 17.** Для функцій, заданих у вигляді ДНФ, одержати ДДНФ.

1. $f(x, y, z) = xz \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{z}.$
2. $f(x, y, z) = xy \vee xz \vee y\bar{z} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}\bar{z}.$
3. $f(x, y, z) = yz \vee xz \vee \bar{y}\bar{z}.$
4. $f(x, y, z) = \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{z} \vee yz \vee x\bar{y}z.$
5. $f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}z \vee xy.$
6. $f(x, y, z) = x\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee xz \vee yz.$
7. $f(x, y, z) = \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{z} \vee xz.$
8. $f(x, y, z) = y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{y}z \vee xyz.$
9. $f(x, y, z) = x\bar{y} \vee yz \vee \bar{y}\bar{z}.$
10. $f(x, y, z) = \bar{x}y \vee xz \vee yz \vee \bar{x}\bar{z}.$

**Завдання 18.** Для функції $f$ знайти ДНФ двоїстої функції $f^*$, виходячи з 1) означення двоїстої функції та 2) принципу двоїстості в булевій алгебрі:

1. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_3.$
2. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee (\overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_3).$
3. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee \overline{x_1 x_2 \vee x_3}.$
4. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 \vee \overline{x_1} x_2 x_3.$
5. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \overline{x_2})(x_1 x_3 \vee x_2 \overline{x_3}).$
6. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \vee x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1 \vee x_2 x_3}.$

7. $f(x, y, z) = x \vee yz \vee \bar{x}\bar{y}z.$

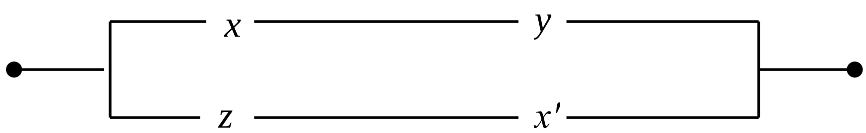
► 7. 1) $f^*(x, y, z) = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}} = \bar{\bar{x}} \cdot \overline{\bar{y}\bar{z}} \cdot \overline{xy\bar{z}} = x(y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) =$
$= xyz \vee x\bar{y}z \vee xz = xz;$

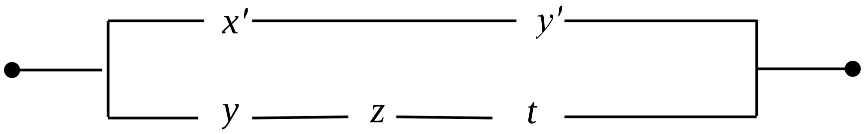
2) $f^*(x, y, z) = x \cdot (y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) = xyz \vee x\bar{y}z \vee xz = xz.$

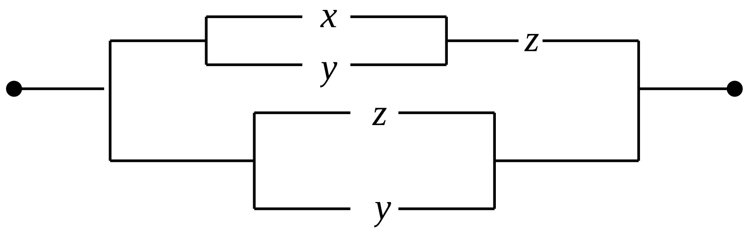
Той же результат одержимо, якщо спочатку спростимо функцію $f$ до вигляду $f(x, y, z) = x \vee z$ (завдання 11, приклад, п. 1), а далі за принципом двоїстості $f^*(x, y, z) = xz$.

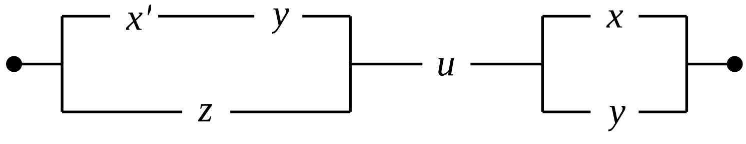
## § 5.2. Застосування булевих функцій до аналізу та синтезу релейно-контактних схем

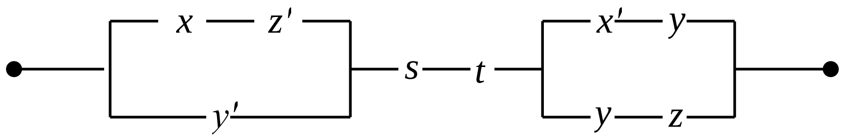
**Завдання 1.** Записати функції провідності поданих релейно-контактних схем:

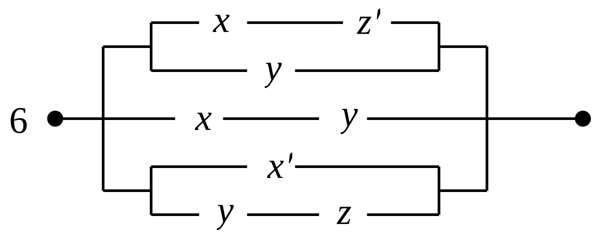
1 


2 


3 


4 


5 



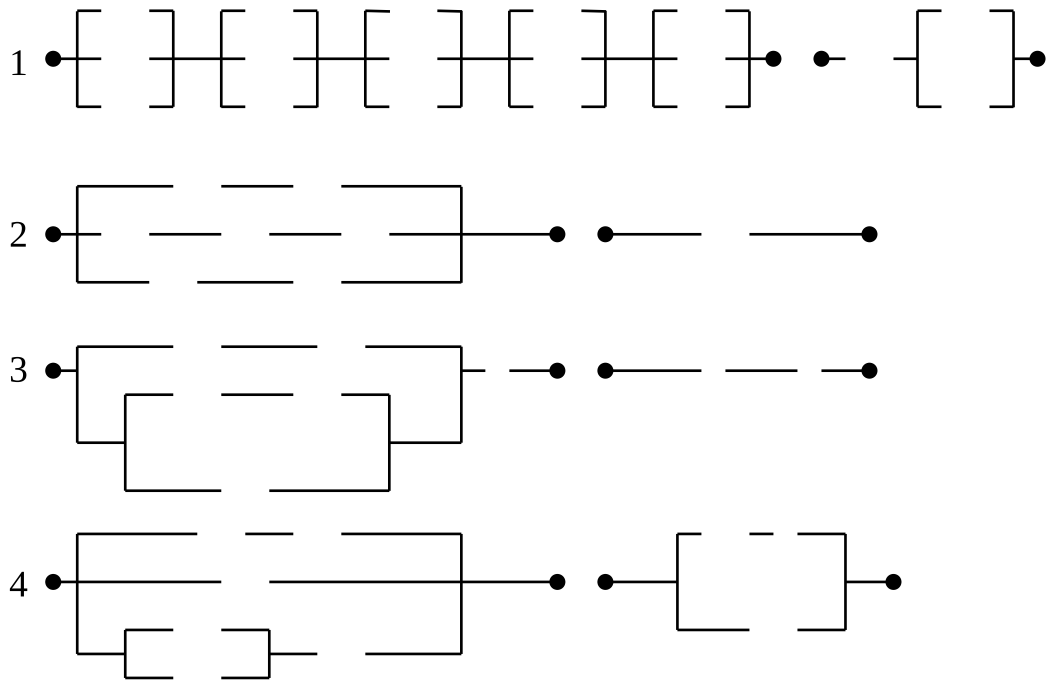

► 6. Схема складається з трьох паралельних віток. Перша, в свою чергу, є паралельним з'єднанням двох: в одній – послідовно з'єднані контакти $x$ і $z'$, в другій – один контакт $y$. Отже, перша вітка має функцію провідності $xz' \vee y$. Друга вітка є послідовним поєднанням контактів $x$ і $y$, а тому має функцію провідності $xy$.

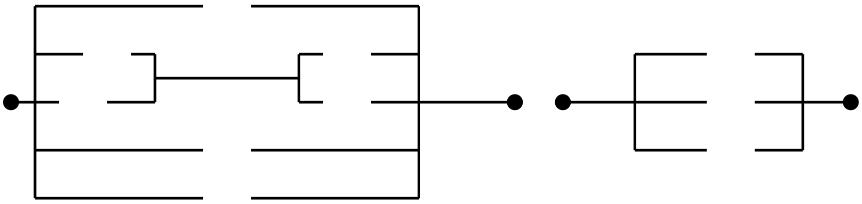
Третя паралельна вітка також складається з двох паралельно з'єднаних – $x'$ та послідовних – $y$ і $z$. Їй відповідає функція $x' \vee yz$.

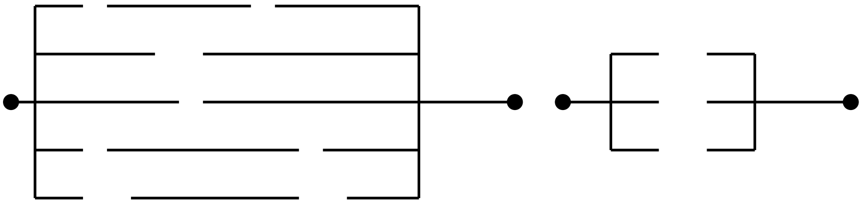
Таким чином, функція провідності схеми 6 є диз'юнкцією функцій провідності трьох віток: $\pi(x, y, z) = (xz' \vee y) \vee xy \vee (x' \vee yz)$.

Зазначимо, що дану схему можна розглядати і як паралельне поєднання п'яти віток з відповідними функціями провідності $xz'$; $y$; $xy$; $x'$ та $yz$. Функція провідності всієї схеми є їх диз'юнкцією: $\pi(x, y, z) = xz' \vee y \vee xy \vee x' \vee yz$.

**Завдання 2.** Перевірити рівносильність релейно-контактних схем:



5 

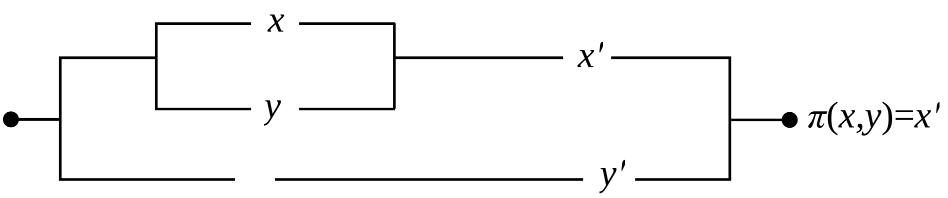
6 

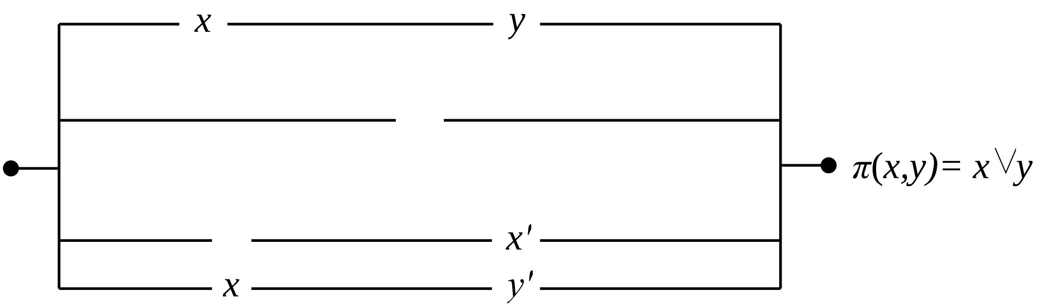
► 6. Складемо функцію провідності першої з двох заданих схем і перетворимо її таким чином:

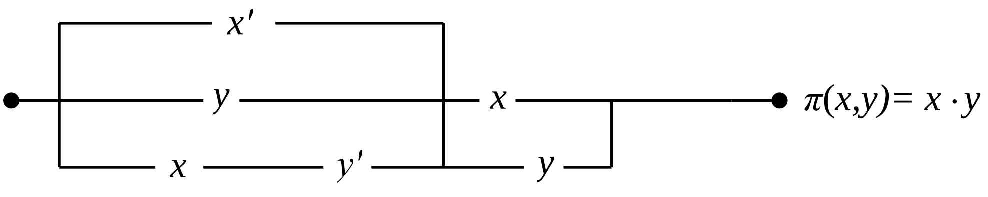
$$\pi(x,y,z)=x\vee((x\vee y')\cdot(y\vee z'))\vee y'\vee z=x\vee[((x\vee y')\cdot(y\vee z'))\vee y']\vee z=$$
$$=x\vee[(x\vee y'\vee y')\cdot(y\vee z'\vee y')]\vee z=x\vee[(x\vee y')\cdot(y\vee y'\vee z')]\vee z=x\vee((x\vee y')\times$$
$$\times(1\vee z'))\vee z=x\vee((x\vee y')\cdot 1)\vee z=x\vee(x\vee y')\vee z=x\vee y'\vee z.$$

Одержана формула і є функцією провідності другої схеми.

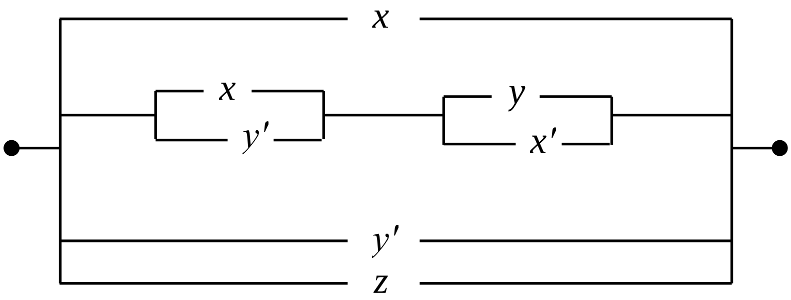
**Завдання 3.** Який контакт необхідно вставити у вільну комірку, щоб функція провідності співпадала з даною?

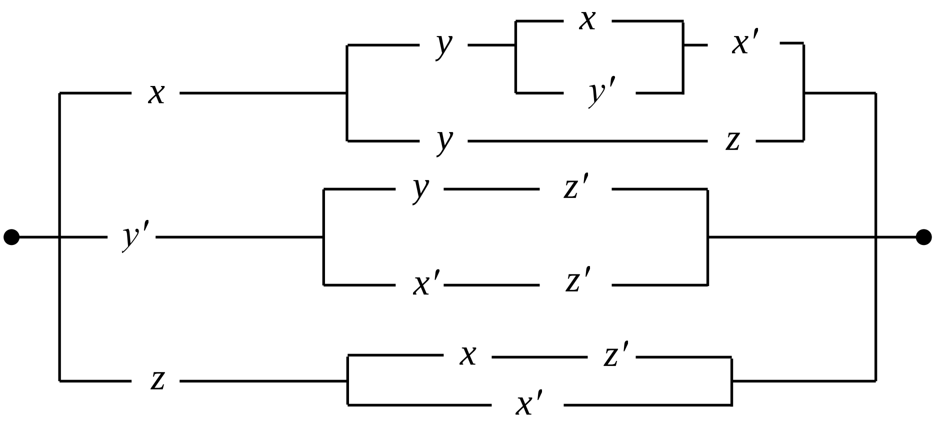
1 

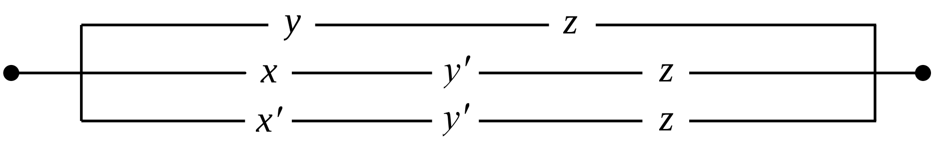

2 

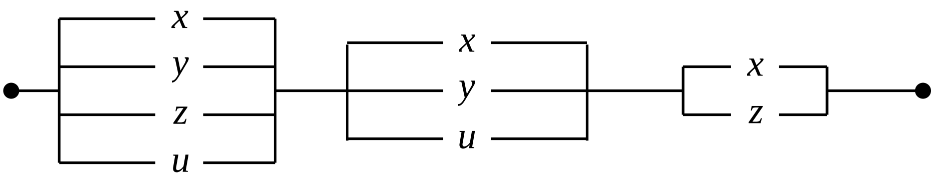

3 

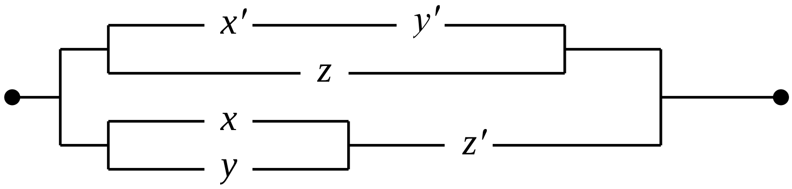
**Завдання 4.** Спростити схеми:

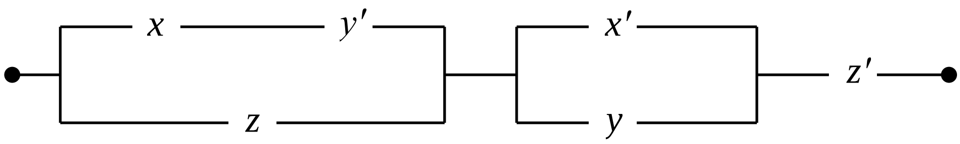
1 

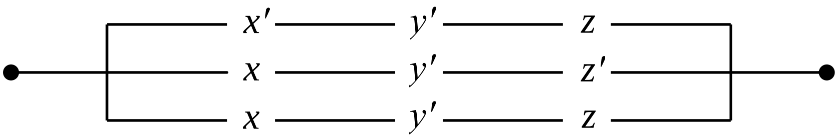

2 

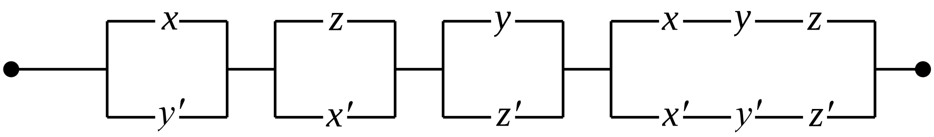

3 

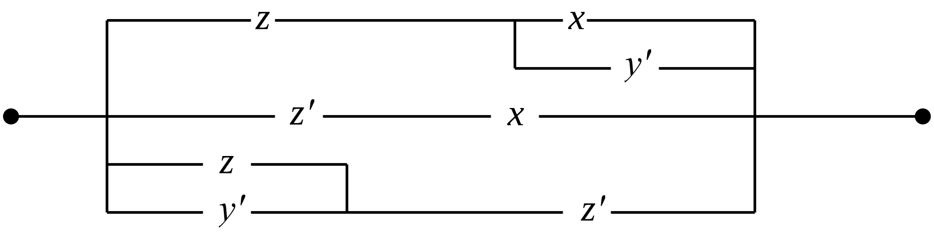

4 

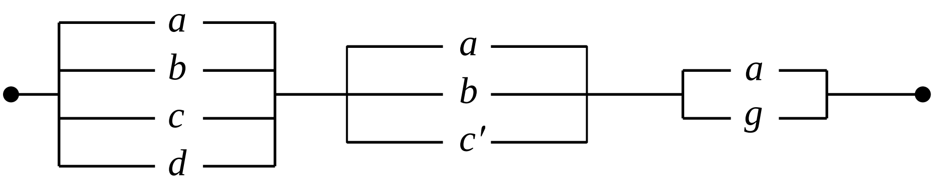

5 

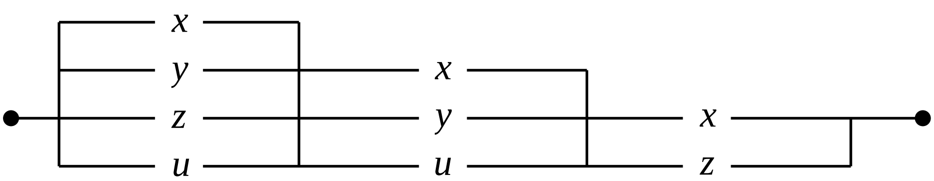

6 

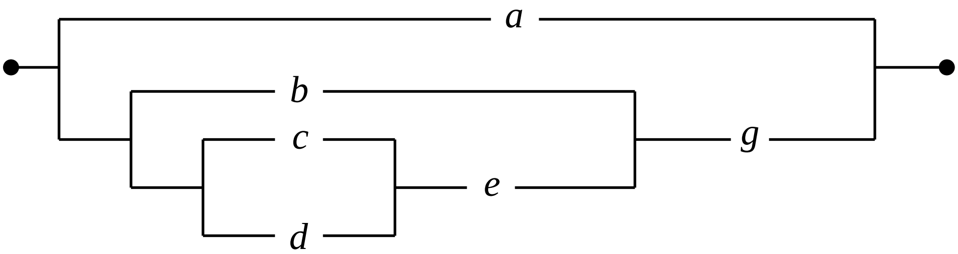
7


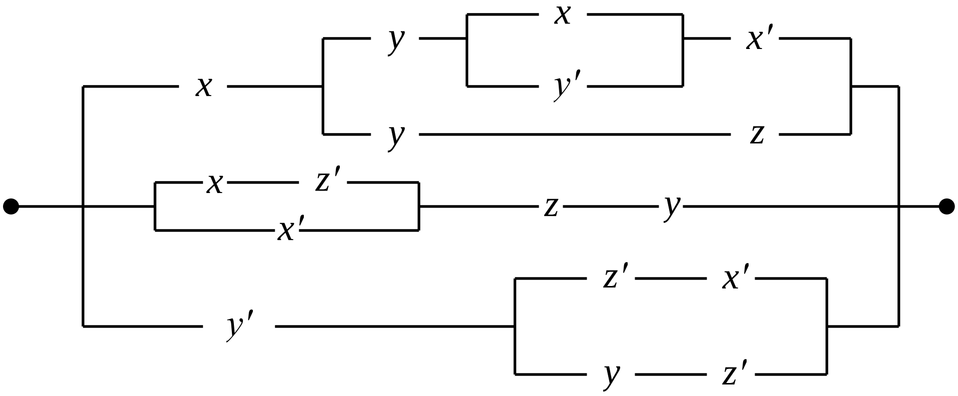

8


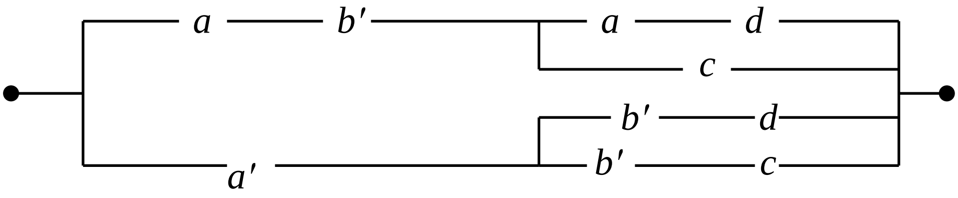

9


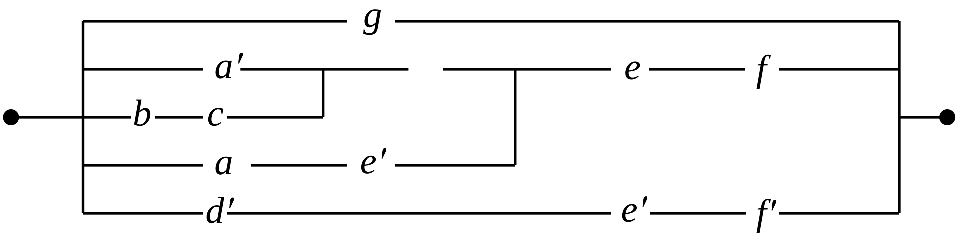

10



11


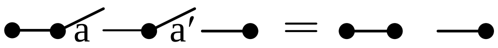

12


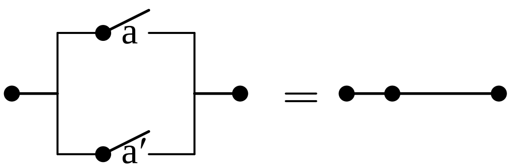

13


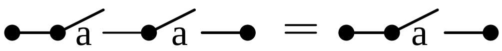
14 

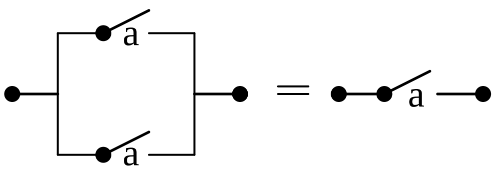

15 

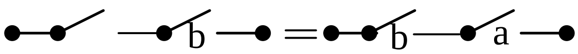

**Завдання 5.** Записати властивості булевих функцій, що ілюструються відповідними еквівалентностями схем:

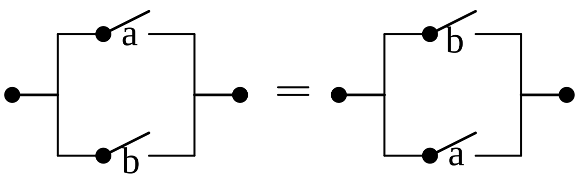
1 

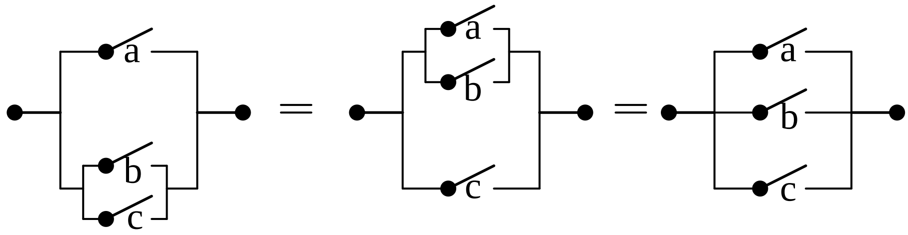

2 

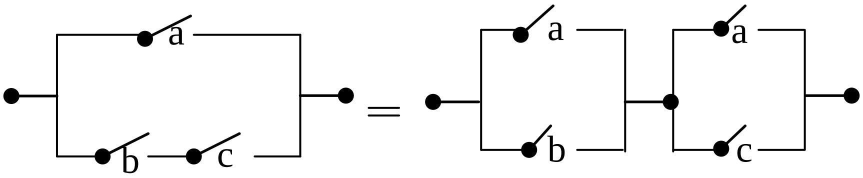

3 

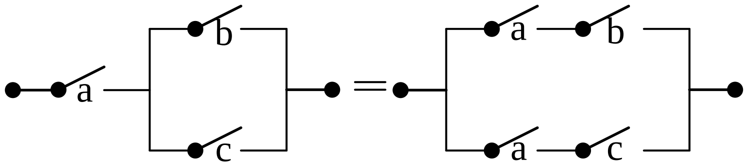

4 

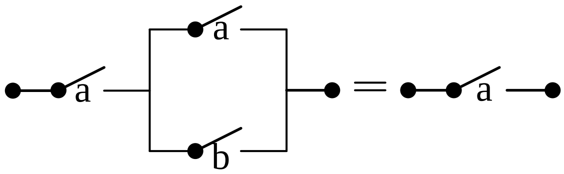

5 

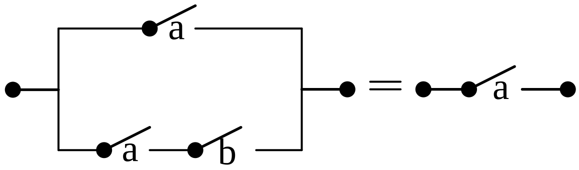

6 

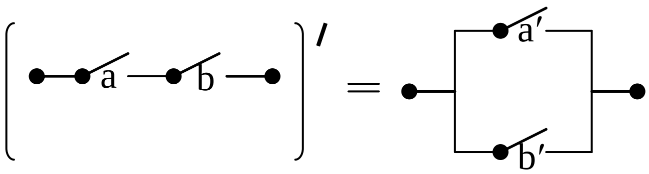
7 

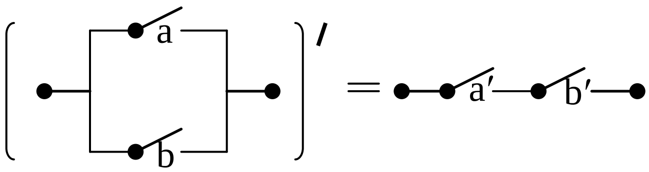

8 

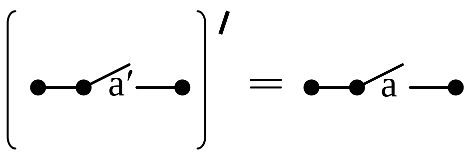

9 


10 


11 


12 


13 


14 

**Завдання 6.** Довести, що:

1. $ab \vee cd = (a \vee c)(a \vee d)(b \vee c)(b \vee d)$.
2. $(x \vee y)(x' \vee z) = xz \vee x'y$.
3. $x \vee x'y = x \vee y$.
4. $x(x' \vee y) = xy$.

Проілюструвати ці рівності відповідними схемами.

Зазначимо, що наведену рівність 1 називають законом “перехресного додавання”.

**Завдання 7.** Побудувати схеми із заданими функціями провідності. Спростити схеми так, щоб вони мали:

1. До 3-х входжень букв-контактів:

а) $a'bc \vee ab'c \vee abc$;

б) $a(b' \vee c') \vee (a' \vee bc)(a \vee de)$;

в) $(d' \vee e \vee f)(d \vee e' \vee f)(d \vee e \vee f)$;

г) $ghm \vee gh'm \vee ghm'n$;

ґ) $g'(g \vee h' \vee m)$;

д) $(c'e'd \vee c'ed \vee ce'd \vee ced' \vee ced$;

е) $(abc \vee bcgh \vee b(d \vee h) \vee bcdg$;

2. До 4-х входжень букв:

а) $abc \vee abd$;

б) $(a \vee d)(b \vee d)(c \vee d)$;

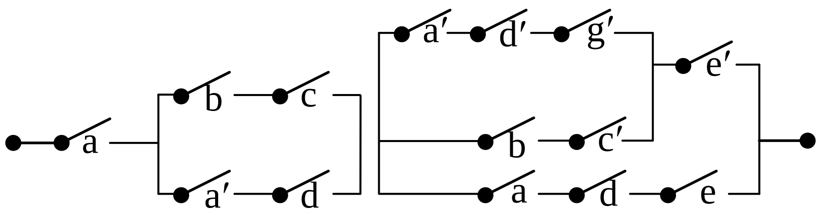
в) $abc \vee ab'c \vee abc'd$;

г) $ab(cd' \vee b' \vee a) \vee a'(c \vee d)(a \vee b)$;

ґ) $abc \vee bcd \vee ab'd' \vee a'bcd' \vee ab'd'$;

д) $(d \vee e \vee f)(d \vee e' \vee f)(d \vee e \vee f' \vee g')$.

3. До 5-ти входжень букв:

а) 


б) $(a \vee e)(b \vee c \vee d)(a \vee e)(b \vee d \vee e)$;

в) $ab \vee bc \vee ade \vee dce$.

4. До 6-ти входжень букв:

а) $abce \vee bcd \vee bf$;

б) $a \vee (b \vee c)a' \vee (c \vee d' \vee gh)(a' \vee d \vee g')(b \vee d)$.

5. До 6-ти входжень букв:

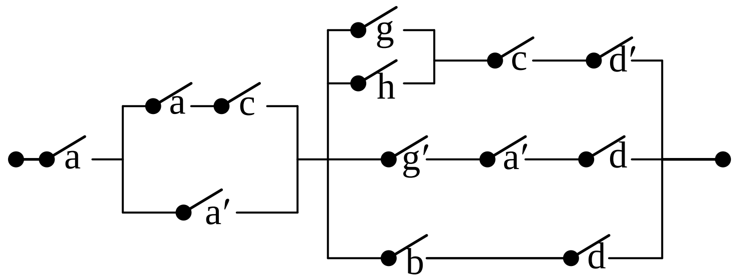
а) $ab' \vee a'b \vee a'c \vee ac' \vee bc' \vee b'c$;

б) $(a \vee b \vee c \vee d)(a \vee b \vee e)(a \vee g)$.

6. До 7-ми входжень букв:

а) $(a \vee b \vee c \vee d)(c \vee d \vee e)(a \vee d \vee e)$.

7. До 7-ми входжень букв:

а) 


Побудувати спрощені схеми.

**Завдання 8.** Спростити:

1. $gkm'n \vee (g' \vee n')eh' \vee eh'km'$.
2. $(b'(c \vee d) \vee c'd')(a'(c \vee d') \vee cd)(d(a \vee b) \vee a'b)$.
3. $c \vee d'eg \vee d'e'g \vee d \vee d'e'g'$.
4. $g'hm' \vee gh' \vee gm'$.
5. $ade \vee bf(c \vee f \vee ge) \vee ae$.

Побудувати відповідні схеми.

**Завдання 9.** Чи може бути спрощений запис функції $f = ab' \vee bc' \vee a'c$?

**Завдання 10.** Чи може кількість контактів у схемі, що відповідає функції $f = a'b'c' \vee a'bc \vee ab'c$, бути меншим ніж 8?

**Завдання 11.** Кожну з функцій спростити до мінімальної кількості входжень змінних.

Побудувати відповідні схеми.

1. $a'bc' + ab'c + ac' + abc$.
2. $(a + bc')(a' + b + c)$.
3. $abc' + a'bc + a'bc' + abc + ab'c + a'b'c$.

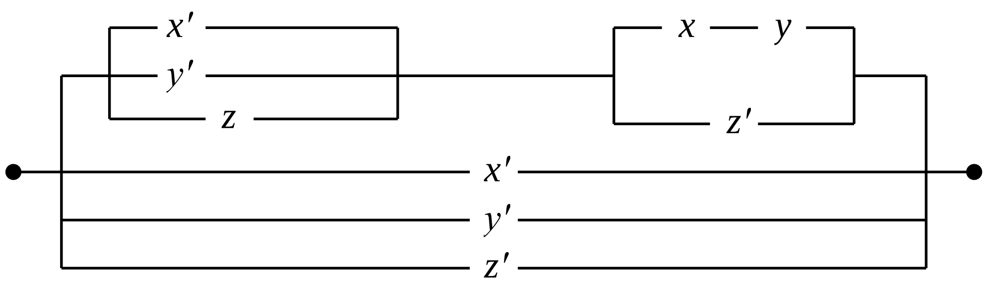
4. $(a'+d')b'e+ac'dh+b'c'eh.$
5. $[b+(d'+h)(a+g+e')][b'+h(a+d+e')]\cdot[a+g+c(d+e+h')].$
6. $(a'+b'+c')(a'+b+s')(a+b+c')(a+b+c')(a+b+c).$
7. $[bce'(a+d)+b'd+a'd'h][h(ce'+ab+bd)+b(c'+e)(a+d)].$
8. $abc'dgh'+dc'e'aghb+ebhc'ag'+ab'c'\mathrm{d}'\mathrm{eg}'h+$
$+c'dab'heg+eah\mathrm{gc}'\mathrm{d}'b'+bc'ead'hg.$
9. $[a'+(d'+h)(b+e'+g)][a+h(b+d+e')][b+g+c(d+e+h')]\cdot[ad'h+dh'].$
10. $(b+cd')(c'+d')+(a'+cd')(c+d)+(d+b'a)(b'+a')+(c'+b'a)\cdot(b+a).$
11. $ae(a'+b'd+e)+e'(b+d')(a+c)+aee'.$

**Завдання 12.** Побудувати релейно-контактну схему із заданою функцією провідності:
1. $x'\cdot(y'z\vee x\vee y).$
2. $[(x'\vee y)\cdot(yz\vee x)]\vee u\cdot z.$
3. $[x\cdot(yz\vee y'z')]\vee[x'\cdot(y'z\vee yz')].$
4. $(x\vee y)(x\to z).$
5. $a(b\vee c')\vee a'b.$
6. $(a'b'c'\vee d)e'f'g'.$
7. $(x\to y)\to(x'\cdot(y\vee z)).$
8. $(x\to(y\to z))\to(y\to x').$
9. $(x\to(y\to z'))\vee((x\cdot y)\leftrightarrow z).$
10. $ab'\vee a'b\vee a'b'.$
11. $(((a'(b\to c)\vee d)e'\vee f)g'\vee h'k'e)m'.$
12. $a'(b\vee c'(d\to ef')).$
13. $(a(b\to c'd)\vee e')g.$

► 6. Виразимо спочатку дану функцію через функції $'$ , та $\vee$ за умови, що заперечення відноситься лише до змінних:

$$(x\to(y\to z'))\vee((x\cdot y)\leftrightarrow z)=x'\vee(y\to z'))\vee(((x\cdot y)'\vee z)\cdot((x\cdot y)\vee z'))=$$
$$=x'\vee y'\vee z'\vee[(x'\vee y'\vee z)\cdot((x\cdot y)\vee z')].$$

Відповідна схема має вигляд:

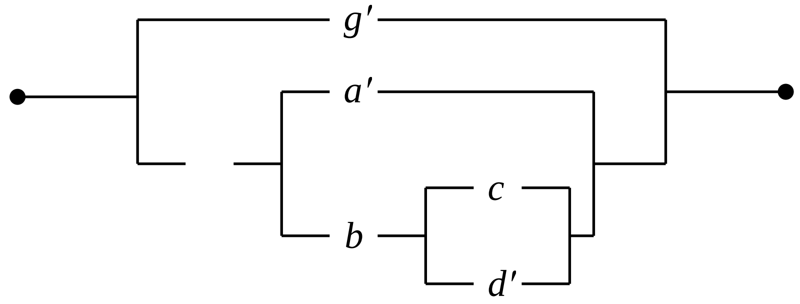


**Завдання 13.** Записати заперечення функцій прикладу 12. Побудувати релейно-контактні схеми, що реалізуються цими функціями. Порівняти ці схеми зі схемами функцій прикладу 12.

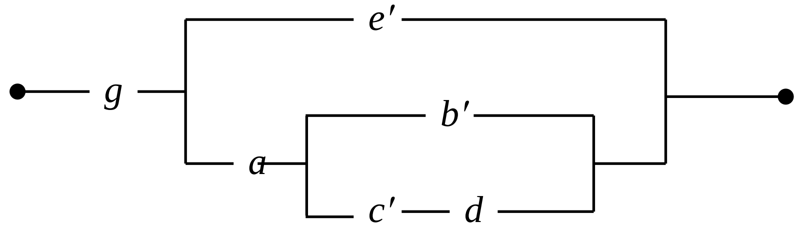
► 13. Рівносильними перетвореннями позбудемось символу $\Rightarrow$ в запису функції: $(a(b \to c'd) \vee e')g \cong (a(b' \vee c'd) \vee e')g = \pi(a,b,c,d,e,g)$;

$\pi'(a,b,c,d,e,g) = (a' \vee b(c \vee d'))e \vee g'$.

Схема, що відповідає цій функції провідності, має вигляд:




Порівнюючи її зі схемою функції $\pi(a,b,c,d,e,g)$, що має вигляд




робимо висновок, що схема функції-заперечення $\pi'$ одержується зі схеми $\pi$ заміною всіх паралельних контактів послідовними і навпаки, а кожного контакту – контактами протилежної замкненості.

**Завдання 14.** Деяка перемикальна (булева) функція $f(a,b,c)$ має таблицю істинності, останній стовпець якої – 00001111. Записати формулу (найпростішу формулу) цієї функції. Побудувати відповідну схему.

**Завдання 15.** Деяка функція *f (a, b, c)* має таблицю істинності, останній стовпець якої – 00011111. Спростити запис цієї функції до трьох входжень змінних.

**Завдання 16.** Побудувати найбільш прості схеми за заданими функціями провідності:
1. π (0, 0, 0) = π (1, 0, 1) = 1;
2. *π (1, 1, 0) = π (0, 0, 0) = π (1, 0, 0)* = 1;
3. *π (0, 0, 0) = π (0, 1, 0) = π (1, 0, 0) = π (0, 1, 1)* = 1;

4. $\pi(0, 0, 1, 1) = \pi(1, 1, 1, 0) = \pi(0, 1, 1, 0) = 1$;
5. $\pi(0, 0, 1, 1) = \pi(0, 0, 0, 0) = \pi(1, 1, 0, 0) = 1$;
6. $\pi(1, 1, 1, 1) = \pi(0, 1, 0, 1) = 1$.

► Вказівка. Використовуючи ДДНФ, записати аналітичний вираз функції $\pi$. Спростивши його, побудувати відповідну схему.

**Завдання 17.** На вході в під'їзд двоповерхового будинку розташована лампочка. Побудувати схему так, щоб на кожному поверсі своїм вимикачем можна було б вмикати і вимикати лампочку незалежно від положення другого вимикача.

► Функція провідності $\pi(x,y)$ такої схеми повинна мати таку властивість: її значення змінюється кожного разу при зміні значення одного з аргументів. Тобто, наприклад,

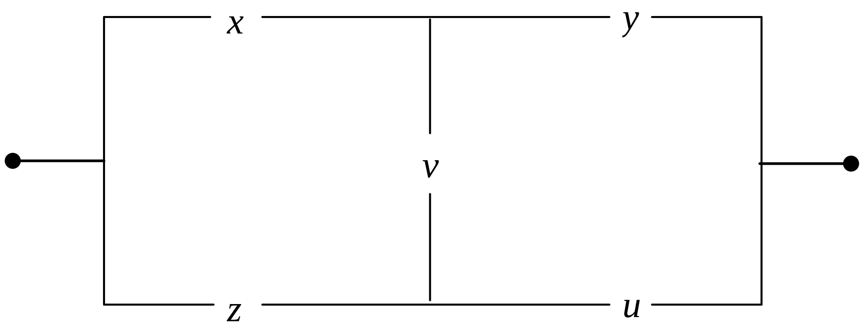
$\pi(0, 0) = \pi(1, 1) = 1$; $\pi(1, 0) = \pi(0, 1) = 0$;

використовуючи ДДНФ, одержуємо:

$\pi(x, y) = (x\,y) \vee (x'\,y')$.

Відповідна схема має вигляд:


**Завдання 18.** Знайти функцію провідності так званої місткової схеми:



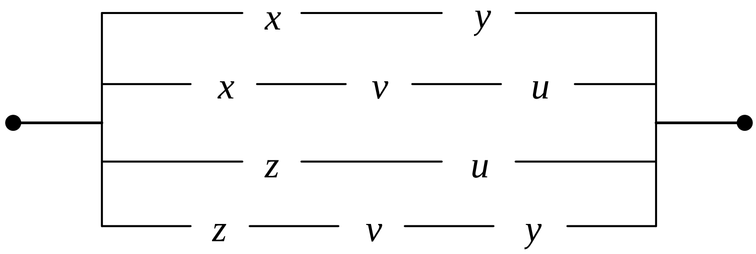

В цій схемі струм може йти через контакти x і y, якщо вони замкнені, тобто якщо кон'юнкція x·y = 1, або через x, v, u, якщо вони замкнені, тобто $xvu = 1$. Аналогічно, струм може пройти через $z$ і $u$, або $z$, $v$, $y$, якщо вони замкнені, тобто за умови $z{\cdot}y = 1$ або $zvy = 1$.

Отже, струм іде через схему тоді і тільки тоді, коли дорівнює $1$ хоча б одна з кон'юнкцій $xy$, $xvu$, $zu$, $xvy$, тобто, коли їх диз'юнкція $xy \vee xvy \vee zu \vee xvy = 1$.

Таким чином, функція провідності даної місткової схеми така:

$$\pi(x, y, z, u, v) = xy \vee xvy \vee zu \vee xvy.$$

Схема, що відповідає цій функції, має вигляд:




**Завдання 19.** Кожний з трьох членів комітету голосує “за”, натискаючи кнопку. Побудувати найбільш просту схему, струм через яку проходив би тоді і тільки тоді, коли не менше двох членів комітету голосували “за”.

**Завдання 20.** Комітет складається з 5 осіб. Рішення приймається більшістю голосів. Якщо голова “проти”, то рішення не приймається. Побудувати таку схему, щоб голосуючи “за”, кожний з 5 членів мав свою кнопку і у випадку прийняття рішення світилася лампочка.

**Завдання 21.** Спроектувати релейно-контактну схему, що дозволяє включати та виключати лампочку за допомогою трьох незалежних вимикачів.

**Завдання 22.** Спроектувати схему:

1. З двома вимикачами, яка б замикалась тоді і тільки тоді, коли замкнений або один, або другий вимикач, але не два разом.
2. З трьома перемикачами, яка б замикалась тоді і тільки тоді, коли замкнені рівно 1, або рівно 2 перемикачі (використовувати не більше 6 контактів).
3. Із 7 перемикачами, яка б замикалась тоді і тільки тоді, коли замкнені:

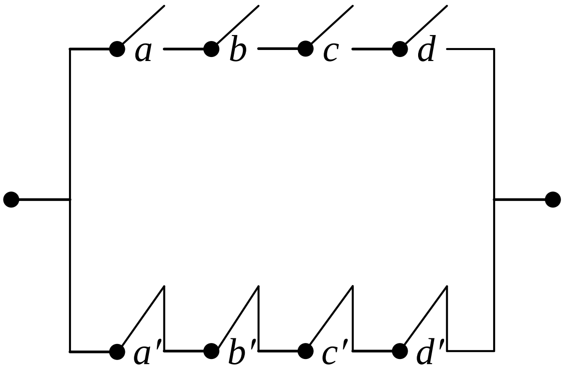
а) рівно 4 перемикачі;
б) рівно 1 або рівно 3 перемикачі.

► <u>Вказівка</u>. При побудові схем з подібними умовами роботи зручно користуватись такими конструкціями:

1

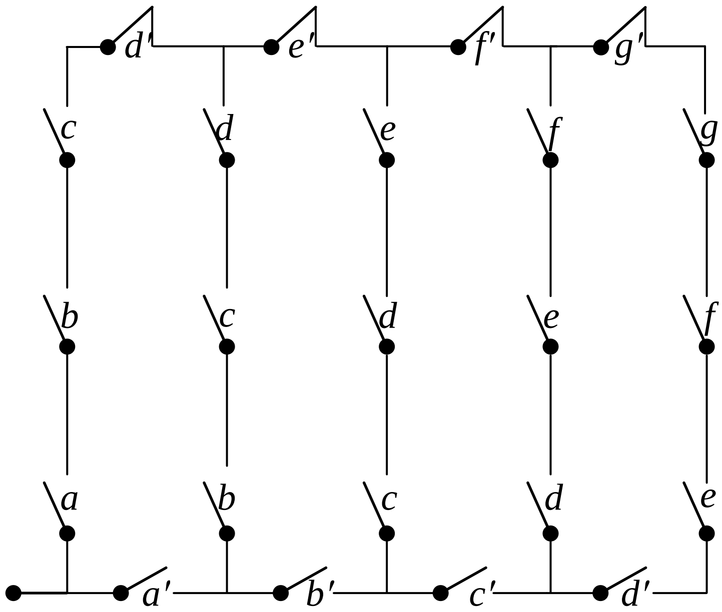

“Деякі, але не всі”

2



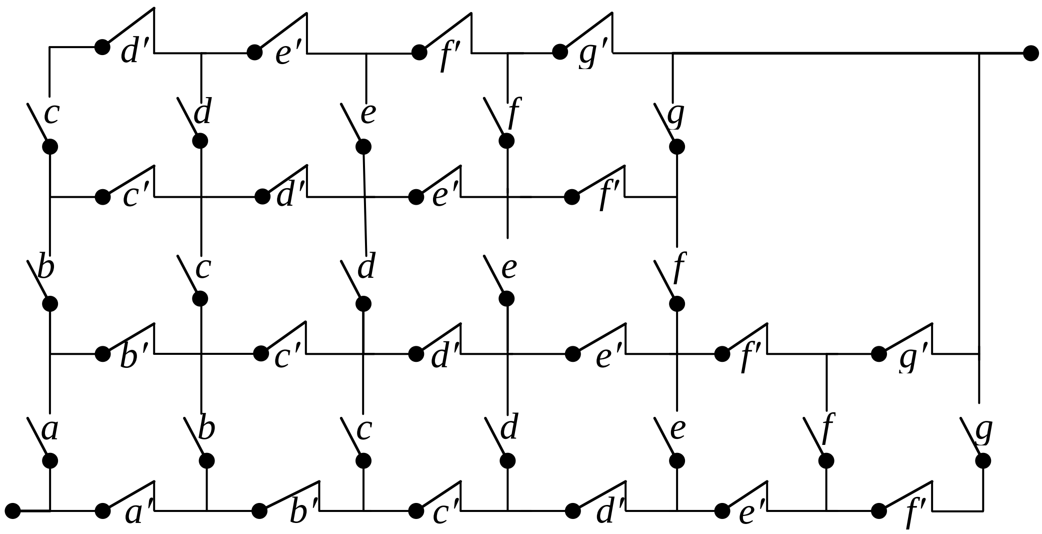

“Всі або жоден”

3




“Деякі 3 послідовні із 7 послідовних”

4




“Рівно 3 або рівно 1 із 7”

# ТЕМА 6. СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

Під позиційною системою числення розуміють систему, в якій значення кожної цифри визначається не тільки цифрою, а й позицією, яку вона займає в запису числа.

Під непозиційною системою числення розуміють систему, в якій кожна цифра завжди позначає те саме число незалежно від її місця (позиції) в запису числа.

Прикладом непозиційної системи числення є римська система, яка дійшла до нас із Стародавнього Риму. В ній для запису чисел використовують сім цифр: цифра I означає одиницю, цифра V – п'ять, цифра X – десять, L –п'ятдесят, C – сто, D – п'ятсот, M – тисячу. За допомогою цих цифр можна записати будь-яке число, використовуючи принцип додавання і віднімання. Якщо менша цифра стоїть справа від більшої, то вона додається до неї (причому вона може повторюватися не більше ніж 3 рази), якщо зліва – то віднімається (повторення меншої цифри не дозволяється). Наприклад, 1985 – MCMLXXXV, 2005 – MMV.

Хоч символу для позначення нуля в римській системі числення немає, проте можна записувати числа, які містять нуль. Наприклад, 1809 – MDCCCIX.

**Завдання 1.** Записати в десятковій системі числення такі числа римської нумерації:

1. LXIV.
2. CLIX.
3. DXCVI.
4. MCCV.
5. MCDXXIX.
6. MDCCCLXXIV.

**Завдання 2.** Записати в римській нумерації числа:

1. 26.
2. 112.
3. 1980.

**Завдання 3.** Записати перші 12 чисел натурального ряду в системах числення з основами: 2, 3, 4, 5, 6.

► Для системи числення з основою 3, цифрами в якій є 0, 1, 2, маємо:

1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 110.

**Завдання 4.** Записати числа в десятковій системі числення:

1. $100111_2$.
2. $11001101_2$.
3. $345_8$.
4. $5071_8$.
5. $1300_8$.
6. $33311_7$.
7. $4602_7$.
8. $(10)6(11)_{12}$.
9. $26014_7$.
10. $42125_6$.
11. $530415_6$.
12. $87125_{10}$.
13. $24713_8$.
14. $10110_2$.
15. $3t7e4_{12}$.
16. $4231_5$.
17. $21202_3$.
18. $21201_3$.
19. $2314_5$.
20. $2et3_{12}$.
21. $12562_8$.
22. $111111111_2$.

► Подібно до того, як в десятковій системі

12. $87125_{10} = 8\cdot 10^4 + 7\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10 \; + 5\cdot 10^0$.

В системі з основою $g$ кожне натуральне число $m$ можна записати і притім єдиним способом у вигляді $m = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \ldots + a_1 g + a_0$, де $a_i$, $i = 0,1,\ldots,n$ – цілі невід’ємні числа, менші від g, причому $a_n \neq 0$.

Цей вираз називають записом числа m у системі числення з основою g.

Отже,

14. $10110_2 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2 \; + 0\cdot 2^0 = 22$.

15. $3t7e4_{12} = 3\cdot 12^4 + 10\cdot 12^3 + 7\cdot 12^2 + 11\cdot 12^1 + 4\cdot 12^0 = 80632$.

**Завдання 5.** Записати у десятковій системі числення такі числа:

1. $0{,}111_2$.
2. $0{,}110_2$.
3. $11001{,}1111_2$.
4. $437{,}321_8$.
5. $0{,}027_8$.
6. $10{,}1101_2$.
7. $73{,}24_8$.
8. $32e{,}tt8_{12}$.
9. $1254{,}7632_8$.
10. $22{,}12_3$.
11. $0e5{,}0t_{12}$.

► Запис додатного дробового числа у будь-якій системі числення є зображення цього числа у вигляді суми степенів основи з цілими невід'ємними коефіцієнтами, меншими від основи, але не лише додатних і нульового, а й від'ємних цілих степенів. Для запису дробового числа, крім цифр, використовують ще один знак – кому.

10. $22{,}12_3 = 2\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0 + 1\cdot 3^{-1} + 2\cdot 3^{-2} = 8 + \dfrac{3+2}{3^2} = 8{,}555\ldots_{10}$.

11. $0e5{,}0t_{12} = 11\cdot 12^1 + 5\cdot 12^0 + 0\cdot 12^{-1} + 10\cdot 12^{-2} = 137 + \dfrac{10}{12^2} = 137{,}069444\ldots_{10}$.

**Завдання 6.** Обчислити:

1. $1101_2 + 1011_2$.
2. $1011_2 \cdot 1101_2$.
3. $1000110_2 - 11011_2$.
4. $100011_2 : 101_2$.
5. $3604_7 \cdot 423_7$.
6. $7(10)1_{12} \cdot 5(11)73_{12}$.
7. $23054_7 + 4326_7$.
8. $(10)(11)792_{12} + 9534(10)_{12} + 70(10)0_{12}$.
9. $26153_7 : 326_7$.
10. $8(10)05(11)_{12} : 9(10)_{12}$.
11. $101_8 + 32_8$.
12. $4523_6 + 3452_6$.
13. $5032_9 + 2106_9$.

14. $202332_4 + 22222_4$.

15. $32105_8 + 16237_8$.

16. $12020_3 - 2111_3$.

17. $220111_4 - 32323_4$.

18. $6025_7 \cdot 6_7$.

19. $1234_5 \cdot 12_5$.

20. $23230301_4 : 113_4$.

21. $51222_7 : 6_7$.

22. $1101_2 : 1000_2$.

► 14, 17, 20. У четвірковій системі числення цифрами є: 0, 1, 2, 3.

Складемо для них таблиці додавання і множення:

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 10 |
| 2 | 2 | 3 | 10 | 11 |
| 3 | 3 | 10 | 11 | 12 |

| × | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 10 | 12 |
| 3 | 0 | 3 | 12 | 21 |

Тепер виконуємо дії:

14. $$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 202332_4 \\ 22222_4 \\ \hline 231220_4 \end{array} \end{array}$$ перевірка: $$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 231220_4 \\ 22222_4 \\ \hline 202332_4 \end{array} \end{array}$$

17. $$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 220111_4 \\ 32323_4 \\ \hline 121122_4 \end{array} \end{array}$$ перевірка: $$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 121122_4 \\ 32323_4 \\ \hline 220111_4 \end{array} \end{array}$$

20. $$\begin{array}{l} -\begin{array}{l|l} 23230301_4 & 113 \\ \cline{2-2} 232 & 200203_4 \\ \cline{1-1} \end{array} \\ \quad -\begin{array}{r} 303 \\ 232 \\ \hline \end{array} \\ \qquad -\begin{array}{r} 1101 \\ 1011 \\ \hline \end{array} \\ \qquad\qquad 30_4 (\mathit{остача}) \end{array}$$ перевірка: $$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 200203_4 \\ 113_4 \\ \hline 1201221 \end{array} \\ + \begin{array}{r} 200203 \\ 200203 \\ \hline 23230211_4 \end{array} \end{array}$$

$23230211_4 + 30_4 = 23230301_4$.

**Завдання 7.** Обчислити:

1. $11011{,}101_2 + 101{,}011_2$.
2. $11{,}001_2 \cdot 1{,}01_2$.
3. $111{,}01_2 \cdot 101{,}101_2$.
4. $0{,}25_8 \cdot 0{,}43_8$.
5. $2{,}5_8 \cdot 3{,}4_8$.
6. $7{,}1_8 + 15{,}5_8$.
7. $25{,}6_8 - 11{,}1_8$.
8. $100_2 - 1{,}11_2$.
9. $1001_2 : 100_2$.

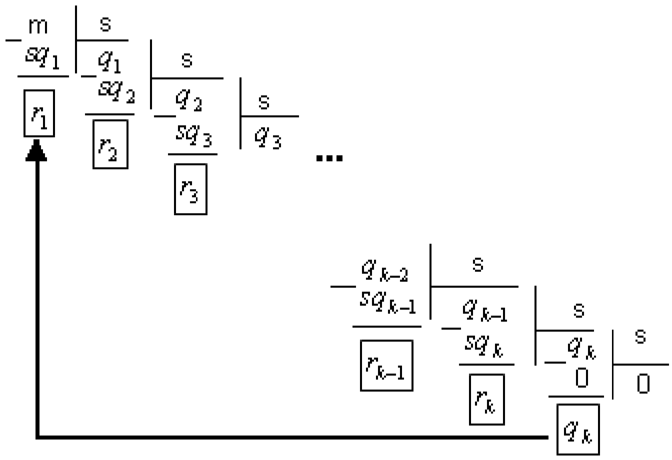
**Завдання 8.** Виконати дії:

1. $7306_8 + 25645_8 - 6774_8 - 26156_8$.
2. $(425_6 \cdot 54_6 - 531_6 \cdot 43_6) : 245_6$.
3. $20671_8 : 131_8 - 140_8$.
4. $23213_5 : 32_5 + 113_5 \cdot 3_5 - 1242_5$.
5. $232011_5 : 104_5 + 1234_5 \cdot 322_5 - 1022131_5$.
6. $(563_8 + 217_8) \cdot 15_8 + (2365_8 - 636_8) : 17_8 - 15122_8$.
7. $120111_3 : 102_3 + 201_3 \cdot 12_3 - 11220_3$.
8. $6325_7 - 456_7 - 150335_7 : 23_7 - 551_7$.
9. $3215_7 \cdot 24_7 - 11461_7 : 25_7 + 1532_7 - 115044_7$.
10. $(4123_8 - 4221_8) \cdot 11_8 + (1222_8 + 773_8) : 3_8$.
11. $(3333_4 + 2222_4) \cdot 12_4 - (231020_4 + 3333333_4) : 23_4$.
12. $[(215_8 + 532_8) \cdot 16_8 - (11031_8 - 527_8) : 32_8] : 14775_8$.
13. $[(351_6 \cdot 14_6 - 1153_6 : 31_6 - 150_6) : 205_6] : 25_6$.

**Завдання 9.** Перевести з однієї системи в іншу:

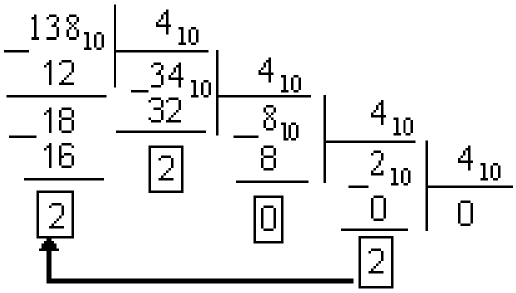
1. $33311_7 \to x_{12}$.
2. $11110111011100001_2 \to x_3$.
3. $32014_5 \to x_8$.
4. $21000122122_3 \to x_9$.
5. $4672510_9 \to x_3$.
6. $1340_{10} \to x_{15}$.
7. $21066754_8 \to x_2$.
8. $206315_7 \to x_5$.
9. $10032_4 \to x_3$.
10. $4379_{10} \to x_8, y_5, z_2$.
11. $138_{10} \to x_4$.
12. $2032_4 \to x_{10}$.

► Перехід від десяткової системи числення до *s*-кової системи відбувається за допомогою послідовного ділення числа *m*, заданого в десятковій системі, на число *s*, записане теж у десятковій системі. Маємо $m = sq_1 + r_1$. Тепер неповну частку $q_1$ ділимо на *s*. Дістаємо $q_1 = sq_2 + r_2$. Процес ділення продовжуємо доти, поки не знайдемо неповну частку $q_k < s$. При цьому запишемо число *m* у *s*-ковій системі: $(q_k r_k r_{k-1} .. r_2 r_1)_s$. Цей процес можна записати у вигляді такої схеми:



Стрілкою показано напрям від вищих до нижчих розрядів числа, записаного в системі з основою *s*, цифри числа *m* у цій системі взято в рамки.

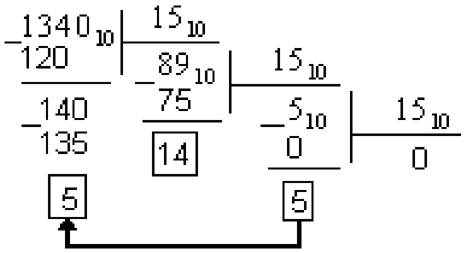
9. $138_{10} \to x_4$.




Оскільки 4 < 10, то всі остачі є цифрами в новій системі числення.

Отже, $138_{10} = 2022_4$.

10. $1340_{10} \to x_{15}$;



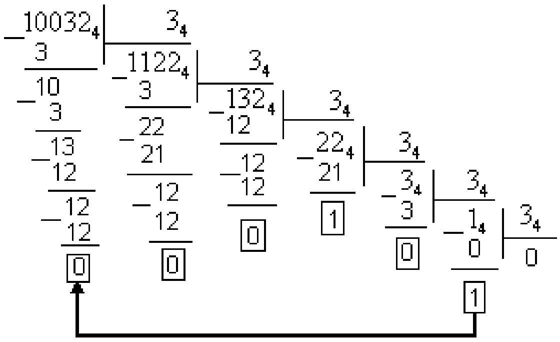

У 15-ковій системі числення число 14 є цифрою і позначається (14) або $\bar{4}$.

Отже, $1340_{10} = 5(14)5_{15}$.

Щоб перевести число з $g$-кової системи численне в $s$-кову, діють аналогічно, причому всі обчислення виконуються в $g$-ковій системі числення.

11. $10032_4 \to x_3$.

Число 3 в четвірковій системі числення записують так само. Тоді

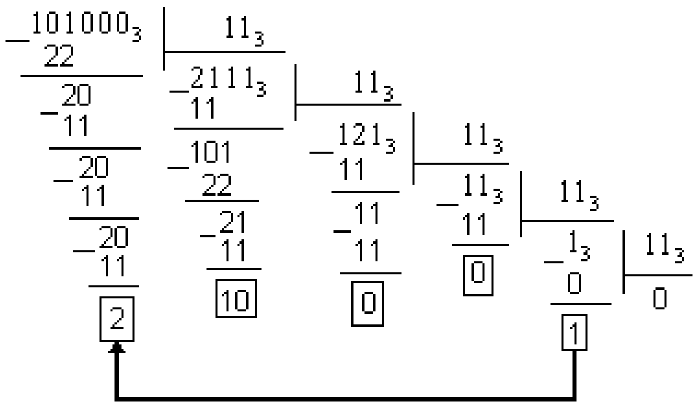



Отже, $10032_4 = 101000_3$.

*Перевірка:* Число 4 у трійковій системі числення записують як $11_3$. Використовуючи таблиці додавання і множення одноцифрових чисел у трійковій системі числення, матимемо

| + | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 10 |
| 2 | 2 | 10 | 11 |

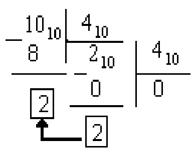
| × | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 11 |



Отже, $101000_3 = 100(10_3)2_4 = 10032_4$, оскільки $10_3 = 3_4$.

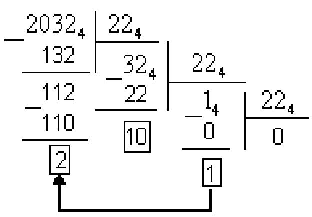
12. $2032_4 \to x_{10}$.

*1 спосіб.* Число 10 в четвірковій системі числення записують так:



$10_{10} = 22_4$.

Тоді



Отже, $2032_4 = 1(10_4)2_{10} = 142_{10}$.

*2 спосіб.* $2032_4 = 2 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 2 \cdot 64 + 0 + 12 + 2 = 142_{10}$

Як бачимо, результати однакові.

**Завдання 10.** Написати число 150 в системах числення з основами від 2 до 12.

**Завдання 11.** Які числа в шістковій системі числення закінчуються нулем? Двома нулями? Трьома нулями?

**Завдання 12.** Що більше, одиниця третього розряду п'ятеричної системи чи одиниця четвертого розряду четвіркової?

**Завдання 13.** Перевести з однієї системи в іншу:

1. $1110111000111_2 \to x_8$.
2. $3673401_8 \to x_2$.
3. $11000111_2 \to x_8$.
4. $2570245_8 \to x_2$.

► Застосуємо досить простий спосіб переведення з двійкової системи числення в вісімкову і навпаки (аналогічний спосіб використовують, коли $g$-кова і $s$-кова системи числення пов'язані співвідношенням $s = g^k$).

$$
\begin{aligned}
0_8 &= 000_2,\\
1_8 &= 001_2,\\
2_8 &= 010_2,\\
3_8 &= 011_2, && (*)\\
4_8 &= 100_2,\\
5_8 &= 101_2,\\
6_8 &= 110_2,\\
7_8 &= 111_2,
\end{aligned}
$$

Щоб перевести число з вісімкової системи числення в двійкову, треба кожну цифру цього числа замінити двійковою тріадою за формулами (*). В свою чергу, щоб перевести число з двійкової системи числення в вісімкову, треба розбити це число справа наліво на грані, кожна з яких містить по три цифри (якщо треба, то останню грань доповнюють до тріади нулями). Потім кожну з двійкових тріад замінюють вісімковою цифрою з формулами (*).

1. $1110111000111_2 \to x_8$.

$$(001)(110)(111)(000)(111)_2 = 16707_8.$$

2. $3673401_8 = 011110111011100000001_2 = 11110111011100000001_2.$

**Завдання 14.** Перевести з десяткової системи числення в інші системи:

1. $2042 \to x_2, y_3, z_5$.
2. $2786 \to x_2, y_3, z_5$.
3. $729 \to x_7$.
4. $231632 \to x_7$.
5. $23163 \to x_8$.
6. $17527 \to x_8$.

**Завдання 15.** Знайти *x*, якщо:

1. $201_x = 41_8$.
2. $203_x = 53_{10}$.
3. $106_x = 153_7$.
4. $324_x = 10022_3$.
5. $541_x = 2014_6$.
6. $364_x = 3001_4$.
7. $401_x = 265_7$.
8. $100_x = 34_7$.
9. $236_x = 1240_5$.

**Завдання 16.** Визначити основу системи числення, в якій виконуються такі рівності:

1. $12+13=30$.
2. $15+16=33$.
3. $35+40=115$.
4. $236-145=61$.
5. $216 \cdot 3=654$.
6. $656:5=124$.
7. $1520:12=123$.
8. $10 \cdot 10=100$.

**Завдання 17*.** Довести, що:

1. Число 144 є квадратом натурального числа в будь-якій $g$-ковій системі числення, $g > 4$.
2. Число 1331 є кубом натурального числа в будь-якій $g$-ковій системі числення, $g > 3$.

3. В $g$-ковій системі числення числа $2(g-1)$ і $(g-1^2)$ записуються такими самими цифрами, але у зворотному порядку.
4. Число $A=(a_n a_{n-1}..a_1 a_0)_{12}$ ділиться на 8 (на 9), якщо на 8 (на 9) ділиться число, утворене його останніми двома цифрами $(a_1 a_0)_{12}$.
5. Число $A=(a_n a_{n-1}..a_1 a_0)_g$ ділиться на $g-1$, якщо $...+a_1+a_0$ $...+a_1+a_0$ ділиться на $g-1$.
6. Натуральне число, десятковий запис якого є $3^n$ одиниць, ділиться на $3^n$.

**Завдання 16*.** Знайти таке найменше натуральне число $m$, яке в десятковій системі числення закінчується цифрою 6, причому, якщо цю цифру записати на початку числа, то воно збільшиться в 4 рази.

**Завдання 17.** Число $(42x4y)_{10}$ ділиться на $72_{10}$. Знайти цифри $x$ і $y$.

**Завдання 18*.** У десятковій системі числення знайти тризначне число $x$ таке, що добуток його цифр дорівнює $a$ і $x=a^2$.

**Завдання 19.** Довести, що сума цифр квадрата будь-якого натурального числа не може дорівнювати числу $1985_{10}$.

**Завдання 20.** Нехай $2\times(xyz)_{10}=(xyz)_g$. Знайти $(xyz)_{10}$ і $g$.

**Завдання 21*.** Знайти в десятковій системі числення таке двозначне число, яке у двійковій, четвірковій і вісімковій системах числення зображується однаковими цифрами, але різними для різних систем.

# СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


*Основна література*

1. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є. Дискретна математика. – К.: Вища школа, 2002. – 287 с.
2. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики / Под общ. ред.: С.В. Яблонского, О.Б. Лупанова. – Т. 1. – М.: Наука, 1974.
3. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – Саратов: Изд. Сар. ГУ, 1991.
4. Калбертсон Дж.Т. Математика и логика цифровых устройств. – М.: Просв., 1965. – 268 с.
5. Лиман Ф.М. Математична логіка і теорія алгоритмів. – Суми: Слобожанщина, 1998.
6. Нефедова В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.
7. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. – М.-СПб.-К.: Питер, 2003. – 304 с.
8. Швець М.М. Азбука математичної логіки. – К.: Рад. школа, 1965. – 154 с.
9. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1989. – 384 с.

*Збірники завдань*

1. Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокицький І.О. Алгебра і теорія чисел. – Ч. 1: Практикум. – К.: Вища школа, 1983. – 232 с.
2. Игошин В.И. Задачник-практикум по математической логике. – М.: Просв., 1986. – 160 с.
3. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1975. – 240 с.
4. Лиман Ф.М. Елементи теорії груп, кілець полів. – Суми: Вид. СумДПУ, 2005. – 107 с.

*Додаткова література*

1. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2001. – 744 с.
2. Беркли Э. Символическая логика и разумные машины. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
3. Брадис В.М. Теоретическая арифметика. – М.: Учпедгиз, 1954.
4. Вавилов Е.Н., Портной Т.П. Синтез схем электронных цифровых машин. – М.: Сов. радио, 1965. – 316 с.

5. Васильев Н.П., Гашковец И. Логические элементы в промышленной автоматике. – М.: Госэнергоиздат, 1962.
6. Вычислительные машины, системы и сети / Под ред. А.А. Пятибратова. – М.: Финансы и статистика, 1991.
7. Глушков В.М., Капитонова Ю.В., Мищенко А.Т. Логическое проектирование дискретных устройств. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с.
8. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. – М.: Высшая школа, 1986.
9. Джордж Ф. Основы кибернетики: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1984. – 212 с.
10. Ефремов Г.О. Математическая логика и машины. – М.: Знание, 1962.
11. Кемени Д., Снелл Д., Томпсон Д. Введение в конечную математику. – М.: Изд. ИЛ, 1963.
12. Ковальски Р. Логика в решении проблем: Пер. с англ. – М.: Наука, 1990. – 280 с.
13. Ковриженко Г.А. Системы счисления и двоичная арифметика. – К.: Рад. школа, 1984.
14. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. – М.: Энергия, 1980.
15. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергоатомиздат, 1988.
16. Лапа В.Г. Математические основы кибернетики. – К.: Вища школа, 1971. – 420 с.
17. Новиков П.С. Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973. – 399 с.
18. Папернов А.А. Логические основы цифровых машин и программирования. – М.: Наука, 1965.
19. Поспелов Д.А. Логические методы анализа и синтеза схем. – М.: Энергия, 1968.
20. Скобелев Г.М. Елементи дискретної математики. – К.: Рад. школа, 1970.
21. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. – М.: Просв., 1988.
22. Шоломов Л.А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. – М.: Наука, 1980.

## Додаток А
### *Варіанти комплексної контрольної роботи*

Нижче наведені три варіанти комплексної контрольної роботи з опрацьованих тем.

Завдання відповідних задач всіх варіантів мають єдине формулювання і наводяться на початку задачі. Далі, під буквами а), б), в) подаються варіанти вихідних даних.

**Завдання 1.** Довести теоретико-множинну рівність:
1. $(A\cup B\cup C)\setminus(C\setminus A)=A\cup(B\setminus C).$
2. $(CA\cup B)\cap A=A\cap B.$
3. $C(A\setminus B)=CA\cup B.$

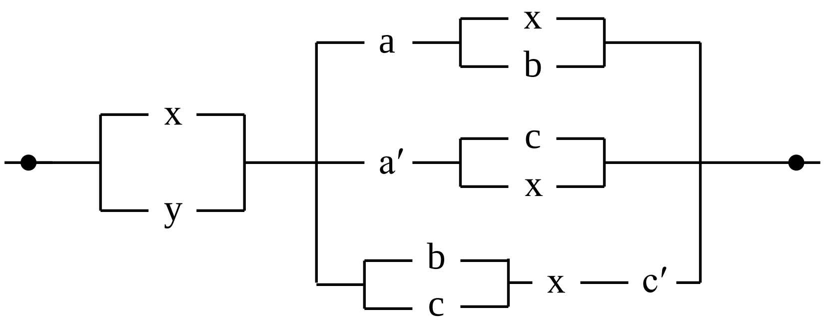
**Завдання 2.** Сформулювати дане твердження, використовуючи зв'язку “якщо..., то...”:
1. Необхідною умовою прямокутника є рівність його кутів.
2. В прямокутному трикутнику квадрат довжини гіпотенузи дорівнює сумі квадратів довжин катетів.
3. На 3 діляться ті цілі числа, сума цифр яких ділиться на 3.

**Завдання 3.** Для даної теореми сформулювати обернену, протилежну та обернену до протилежної.
1. Добуток послідовних натуральних чисел є числом парним.
2. Діагоналі ромба перпендикулярні і ділять його кути навпіл.
3. Рівності кутів – достатня умова подібності трикутників.

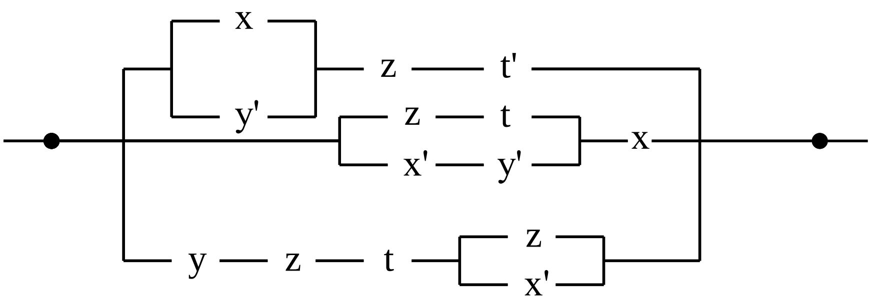
**Завдання 4.** Склавши таблиці істинності, встановити, чи є рівносильними формули $F$ і $G$. Кожну з формул звести до ДДНФ і ДКНФ методами тотожних перетворень та, виходячи з таблиць істинності.
1. $F(X,Y,Z)=((X\wedge Y)\Rightarrow Z)\wedge(((Y\vee Z)\wedge\overline{Y})\Rightarrow Z);$
   $G(X,Y,Z)=\neg(X\wedge\overline{Z})\vee\overline{Y}\vee\neg(Y\Rightarrow(Y\vee Z)).$
2. $F(X,Y,Z)=\neg(\neg X\Leftrightarrow((Y\vee\overline{Z})\Rightarrow\neg(X\vee\overline{Y})));$
   $G(X,Y,Z)=(((\overline{X}\wedge\overline{Z})\vee(X\wedge Z))\wedge\overline{Y}).$
3. $F(X,Y,Z)=((X\Rightarrow(Y\Rightarrow\overline{Z}))\vee((X\wedge Y)\Leftrightarrow Z);$
   $G(X,Y,Z)=\neg(X\wedge Y\wedge Z)\vee(((X\wedge Y)\Rightarrow Z)\wedge((X\wedge Y)\vee\overline{Z})).$

**Завдання 5.** Спростити релейно-контактні схеми, виконуючи рівносильні перетворення відповідної булевої функції.

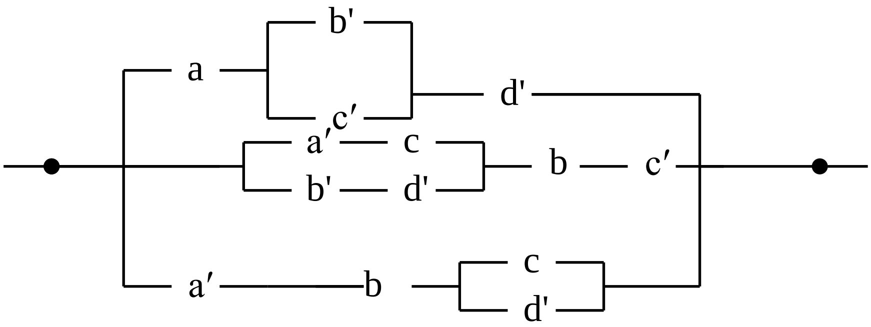
1.




2.




3.




**Завдання 6.** Скласти найбільш просту схему з заданою функцією провідності:

1. $\Pi(x,y,z,t)=\Pi(0,1,0,0)=\Pi(1,0,0,1)=\Pi(0,0,0,1)=1.$
2. $\Pi(a,b,c,d)=\Pi(0,1,1,1)=\Pi(1,1,0,0)=\Pi(1,1,0,1)=1.$
3. $\Pi(a,b,x,y)=\Pi(0,1,1,0)=\Pi(1,1,0,0)=\Pi(0,1,0,1)=0.$

# ЗМІСТ

*Навчальне видання*

*Ніколаєва Катерина Володимирівна*
*Койбічук Віталія Василівна*

# ДИСКРЕТНИЙ АНАЛІЗ
## Частина 1

Посібник

Редактори
*Н.І. Одарченко*
*І.О. Кругляк*
Комп'ютерна верстка
*В.А. Івакін*

Підписано до друку 27.12.2006. Формат 60x90/16. Гарнітура Times.
Обл.-вид. арк. 2,5. Умов. друк. арк. 6,2. Тираж 100 пр. Зам. № 646.

Інформаційно-видавничий відділ
Української академії банківської справи Національного банку України
Адреса: 40030, м. Суми, вул. Петропавлівська, 57.

Надруковано на обладнанні Української академії банківської справи
Національного банку України