

Державний вищий навчальний заклад  
“Українська академія банківської справи  
Національного банку України”  
Кафедра вищої математики та інформатики

**В.М. Долгіх, Т.І. Малютіна**

# **ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ**

Частина 1

## **Алгебра та математичний аналіз**

Навчальний посібник для самостійного вивчення дисципліни

У 2 частинах

Для студентів економічних спеціальностей  
вищих навчальних закладів

Суми  
ДВНЗ “УАБС НБУ”  
2009

УДК 512.64:514.124](075.8)  
Д64

Рекомендовано до видання вченою радою Державного вищого навчального закладу “Українська академія банківської справи Національного банку України”, протокол № 4 від 26.12.2008.

Рецензенти:

кандидат технічних наук, доцент

*В.В. Яценко;*

доктор фізико-математичних наук,  
професор кафедри математичного моделювання  
Львівського національного університету ім. І. Франка

*М.В. Заболоцький*

Відповідальний за випуск

кандидат технічних наук, доцент

*В.В. Яценко*

**Долгіх, В. М.**

Д64

Вища математика для економістів. Ч. 1. Алгебра та математичний аналіз [Текст] : навч. посібник для самостійного вивчення дисципліни : у 2 ч. / В. М. Долгіх, Т. І. Малютіна ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2009. – 97 с.

Навчальний посібник для самостійної роботи є складовою частиною комплексу навчальних посібників з курсу вищої математики для економістів. Перша частина посібника містить: навчальну програму курсу математики для економістів, індивідуальні завдання з алгебри та математичного аналізу, методичні рекомендації щодо вивчення теоретичного матеріалу, а також виконання та оформлення індивідуальних завдань, посилання на літературу.

Призначений для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

**УДК 512.64:514.124](075.8)**

© Долгіх В.М., Малютіна Т.І., 2009

© ДВНЗ “Українська академія банківської справи  
Національного банку України”, 2009

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	4
НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА КУРСУ .....	6
1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.....	12
1.1. Матриці й визначники .....	12
1.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь .....	15
1.3. Елементи векторної алгебри .....	20
1.4. Аналітична геометрія на площині .....	23
1.5. Аналітична геометрія у просторі.....	26
2. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ .....	28
2.1. Границя функції .....	28
2.2. Неперервність функції.....	38
3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ .....	41
3.1. Похідна функції.....	41
3.2. Правило Лопітала .....	49
4. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ І ПОБУДОВИ ГРАФІКІВ .....	52
5. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ .....	55
6. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.....	62
6.1. Застосування визначеного інтеграла для розв'язування задач геометрії.....	62
7. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ.....	66
8. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ .....	69
9. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ .....	73
9.1. Диференціальні рівняння першого порядку.....	73
9.2. Диференціальні рівняння другого та вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь .....	75
9.2.1. Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку .....	75
9.2.2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку.....	76
9.2.3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків.....	79
9.2.4. Системи звичайних диференціальних рівнянь .....	80
10. ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ.....	82
10.1. Числові ряди.....	82
10.1.1. Ряди з невід'ємними членами.....	82
10.1.2. Знакопочережні ряди .....	86
10.2. Степеневі ряди.....	87
11. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ .....	93
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ .....	96

## ВСТУП

Вища математика має важливе значення як під час навчання у вищому навчальному закладі, так і для подальшої діяльності спеціаліста. Вона необхідна для успішного засвоєння багатьох спеціальних дисциплін: мікро- й макроекономіки, розміщення виробничих сил, маркетингу, теорії прогнозування, економетрики, економічного й фінансового ризику. Дослідження багатьох процесів у промисловій технології й економіці пов'язане з розробкою математичної моделі даного явища. Для успішного дослідження математичних моделей у процесах економіки й планування майбутній спеціаліст повинен дотримуватися певної математичної культури.

Важливим фактором засвоєння математичних методів є самостійна робота студентів (СРС), яка включає такі етапи:

- вивчення теоретичного матеріалу за підручниками;
- відповіді на питання для самоперевірки;
- аналіз розв'язаних задач (вправ);
- виконання індивідуальних домашніх завдань (ІЗ) за кожним розділом курсу.

Результативність СРС забезпечується системою контролю, яка складається з опитування студентів за змістом лекцій, перевірки виконання поточних завдань, контрольних робіт, захисту ІЗ, теоретичних колоквиумів.

Опитування за змістом лекцій і перевірка виконання поточних завдань проводиться на кожному практичному занятті.

Даний посібник для СРС є доповненням навчальних посібників [7-9] і практикумів [10-12] і містить навчальну програму курсу математики для економістів і ІЗ за такими розділами:

1. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії.
2. Вступ до математичного аналізу.
3. Диференціальне числення функції однієї змінної.
4. Застосування похідної для дослідження функцій і побудови графіків.
5. Невизначений інтеграл.
6. Визначений інтеграл.
7. Невласні інтеграли.
8. Функції багатьох змінних.
9. Диференціальні рівняння.
10. Числові й функціональні ряди.
11. Кратні інтеграли.

На початку кожного ІЗ наводяться посилання на список літератури, з яким повинний ознайомитися студент перед розв'язуванням задач.

Кожне ІЗ містить 30 варіантів завдань за декількома темами. Для ІЗ прийнята нумерація за розділами (1-ше число – номер розділу, 2-ге – номер підрозділу).

Вимоги до оформлення ІЗ:

1. ІЗ виконується в окремому зошиті (у клітинку), на обкладинці якого вказуються прізвище й ініціали студента, шифр групи, номер варіанта (визначає викладач).
2. Задачі розміщуються в порядку номерів, зазначених у завданнях.
3. Перед розв'язуванням кожної задачі треба повністю переписати її умову.
4. Розв'язання задач необхідно подавати детально, акуратно, без скорочень слів, супроводжувати поясненнями, з наведенням необхідних формул і посилань на відповідні питання теорії.
5. Розв'язування кожної задачі повинне доводитися до відповіді, яку (по можливості) слід перевірити.
6. Розв'язування геометричних задач повинне супроводжуватися рисунками, виконаними акуратно.
7. ІЗ повинне виконуватися самостійно, в іншому разі робота не буде зарахована.
8. Студент зобов'язаний виправити усі відзначені викладачем помилки і недоліки та подати роботу на повторну перевірку.

Якщо в процесі роботи над вивченням теоретичного матеріалу чи при розв'язуванні задач у студента виникнуть питання, вирішити які самостійно не вдається, то він може звернутися до викладача за консультацією.

Контроль за виконанням ІЗ проводиться в 2 етапи:

- 1) попередня перевірка правильності розв'язування задач;
- 2) захист ІЗ (усно чи письмово).

# НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА КУРСУ

## I СЕМЕСТР

### Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Матриці. Дії над матрицями.

Визначники квадратної матриці, їх властивості, обчислення.

Обернена матриця. Ранг матриці. Теорема про базисний мінор.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь, методи їх розв'язку.

Однорідні системи.

Вектори. Лінійні операції над векторами. Лінійний векторний простір. Лінійно залежні й лінійно незалежні системи векторів. Базис і розмірність простору. Розклад вектора за базисними векторами. Координати вектора. Лінійні операції над векторами в координатній формі. Поділ відрізка в даному відношенні.

Скалярний добуток векторів. Векторний і мішаний добуток векторів, їх основні властивості, обчислення. Умови колінеарності та компланарності векторів.

Пряма лінія на площині.

Криві другого порядку, їх канонічні рівняння.

Система координат у просторі. Площина в просторі. Пряма лінія в просторі. Змішані задачі на пряму й площину у просторі.

### Вступ до математичного аналізу

Сталі й змінні величини. Функція, властивості функцій.

Числова послідовність. Границя послідовності. Основні теореми про границі послідовності.

Границя функції на нескінченності і в точці. Однобічні границі. Нескінченно малі та нескінченно великі функції, їх властивості. Порівняння нескінченно малих функцій. Основні теореми про границі.

Визначні границі. Невизначеності.

Неперервність функції в точці та на відрізку.

### Диференціальне числення функції однієї змінної

Поняття похідної. Правила диференціювання. Похідні елементарних функцій.

Похідна складної та оберненої функцій. Логарифмічне диференціювання. Похідна неявно заданої функції. Похідні вищих порядків.

Диференціал функції, інваріантність форми диференціала. Застосування диференціала для наближених обчислень. Диференціали вищих порядків.

Основні теореми диференціального числення (теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші). Правило Лопітала для розкриття невизначеностей.

### **Застосування похідної для дослідження функцій і побудови графіків**

Умови зростання й спадання функції. Локальні екстремуми функції, точки екстремуму. Необхідна й достатня умови існування екстремуму функції. Схема дослідження функції на екстремум.

Опуклість та вгнутість кривої. Точки перегину. Достатня ознака існування точки перегину. Асимптоти графіка функції.

Загальна схема дослідження функції та побудови її графіка.

### **Невизначений інтеграл**

Первісна. Невизначений інтеграл та його властивості. Таблиця основних інтегралів.

Метод безпосереднього інтегрування.

Методи підстановки й інтегрування частинами.

Інтегрування функцій, що містять квадратний тричлен. Інтегрування раціональних дробів.

Інтегрування тригонометричних функцій.

Інтегрування деяких ірраціональних функцій.

Приклади інтегралів, “що не беруться”.

### **Визначений інтеграл**

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла. Визначений інтеграл як границя інтегральної суми. Геометричний зміст визначеного інтеграла. Властивості визначеного інтеграла. Теорема про середнє значення визначеного інтеграла.

Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею. Похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею. Формула Ньютона-Лейбніца.

Заміна змінної й інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Геометричні застосування визначеного інтеграла.

### **Невласні інтеграли**

Невласні інтеграли 1-го, 2-го родів, їх збіжність. Теореми порівняння.

## II СЕМЕСТР

### Функції багатьох змінних

Поняття функції багатьох змінних. Границя, неперервність функції багатьох змінних. Частинні похідні.

Повний диференціал функції багатьох змінних і його застосування в наближених обчисленнях.

Диференціювання неявної й складної функцій багатьох змінних.

Похідна за даним напрямом. Градієнт. Частинні похідні й диференціали вищих порядків.

Екстремум функції багатьох змінних. Найбільше й найменше значення функції, неперервної у замкнутій обмеженій області.

Умовний екстремум.

### Диференціальні рівняння

Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Основні поняття й означення.

Диференціальні рівняння першого порядку: з відокремлюваними змінними, однорідні, лінійні, Бернуллі та методи їх розв'язання.

Розв'язання деяких диференціальних рівнянь другого порядку, що допускають зниження порядку.

Лінійні однорідні й неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального виду.

### Числові та функціональні ряди

Числові ряди. Поняття збіжності й розбіжності ряду. Сума ряду. Залишок ряду. Необхідна ознака збіжності ряду.

Ознаки збіжності рядів із додатними членами: інтегральна ознака Коші, ознаки порівняння, ознака Д'Аламбера, радикальна ознака Коші.

Знакозмінні ряди. Абсолютна й умовна збіжності. Знакопозаперечні ряди. Ознака Лейбніца.

Функціональні ряди. Область збіжності. Степеневі ряди. Радіус та інтервал збіжності. Властивості степеневих рядів.

Ряди Тейлора й Маклорена. Розвинення функцій у степеневі ряди. Застосування степеневих рядів для наближених обчислень.

### Кратні інтеграли

Задачі, що приводять до кратних інтегралів. Подвійний інтеграл і його обчислення. Деякі геометричні застосування подвійного інтеграла.



## **Основні поняття теорії ймовірностей**

Предмет курсу, його зміст. Роль і місце курсу як теоретичної бази ймовірнісно-статистичного моделювання. Класифікація подій на можливі, вірогідні та випадкові. Поняття елементарної та складної події. Простір елементарних подій; операції над подіями. Класичне означення ймовірності випадкової події та її властивості. Елементи комбінаторики у теорії ймовірностей, аксіоми теорії ймовірностей та її наслідки; геометрична ймовірність, статистична ймовірність.

### **Теореми додавання та множення ймовірностей**

Поняття сумісних і несумісних випадкових подій. Теореми додавання ймовірностей. Поняття залежності та незалежності випадкових подій. Умовна ймовірність та її властивості. Теореми множення ймовірностей для залежних і незалежних випадкових подій. Використання формул множення ймовірностей для оцінки надійності деяких систем. Формула повної ймовірності та формула Бейеса.

### **Схема повторних незалежних випробувань Бернуллі**

Означення повторних незалежних випробувань. Формула Бернуллі для обчислення ймовірності та найімовірнішого числа. Асимптотичні формули для формули Бернуллі (локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа). Використання інтегральної теореми. Формула Пуассона для малої ймовірності випадкових подій. Формула обчислення ймовірності відхилення відносної частоти від заданої ймовірності в незалежних випробуваннях.

### **Випадкові величини та їх числові характеристики**

Поняття випадкової величини. Дискретні та неперервні випадкові величини. Закон розподілу. Функція розподілу ймовірностей та її властивості. Ймовірність попадання випадкової величини в заданий проміжок. Числові характеристики випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія та їх властивості, середнє квадратичне відхилення, мода та медіана; початкові та центральні моменти, асиметрія та ексцес.

### **Основні закони розподілу випадкових величин**

Біноміальний, пуассонівський, рівномірний і показниковий закони розподілу. Числові характеристики. Нормальний закон розподілу та його значення у теорії ймовірностей. Числові характеристики.

## **Системи двох випадкових величин**

Визначення двовимірної випадкової величини та закон її розподілу. Система двох дискретних випадкових величин, числові характеристики системи; кореляційний момент, коефіцієнт кореляції та його властивості. Функція розподілу ймовірностей і щільність ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин, їх властивості. Числові характеристики системи двох неперервних випадкових величин. Умовні закони розподілу та їх числові характеристики. Визначення кореляційної залежності.

## **Закон великих чисел**

Нерівність Чебишова та її значення. Теорема Чебишова. Теорема Бернуллі. Центральна гранична теорема теорії ймовірностей (теорема Ляпунова) та її використання у математичній статистиці.

## **Елементи математичної статистики. Вибірковий метод**

Генеральна та вибірка сукупності. Статистичні розподіли вибірок. Емпірична функція розподілу та її властивості. Гістограма й полігон статистичних розподілів. Числові характеристики: вибірка середня, дисперсія вибірки, середньоквадратичне відхилення, мода й медіана для дискретних та інтервальних статистичних розподілів вибірки, емпіричні початкові та центральні моменти, асиметрія та ексцес.

## **Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності. Статистичні гіпотези**

Означення статистичної оцінки. Точкові статистичні оцінки: зміщені та незміщені, ефективні та спроможні. Точкові незміщені статистичні оцінки. Виправлена дисперсія. Інтервальні статистичні оцінки. Точність, надійність оцінки. Означення довірчого (надійного) інтервалу; побудова довірчих інтервалів для  $\bar{X}_G$  за відомого значення  $\sigma_G$  і невідомого  $\sigma_G$ . Побудова довірчих інтервалів для  $\sigma_G$ . Оцінка точності вимірів. Означення статистичної гіпотези. Нульова й альтернативна, проста та складна гіпотези. Помилки першого й другого родів. Статистичний критерій, спостережене значення критерію. Критична область, область прийняття нульової гіпотези, критична точка. Загальна методика побудови правосторонньої, лівосторонньої критичних областей. Перевірка правдивості статистичних гіпотез про рівність двох генеральних середніх і двох дисперсій, ознаки яких мають нормальні

закони розподілу. Перевірка правдивості нульової гіпотези про нормальний закон розподілу ознаки генеральної сукупності. Емпіричні та теоретичні частоти. Критерій узгодженості Пірсона.

### **Елементи теорії регресії та кореляції**

Функціональна, статистична і кореляційна залежності. Рівняння парної регресії. Властивості статистичних оцінок параметрів парної функції регресії. Вибірковий коефіцієнт кореляції та його властивості. Інтервал довіри для лінії регресії, коефіцієнт детермінації. Нелінійна регресія.

# 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

## 1.1. МАТРИЦІ Й ВИЗНАЧНИКИ

*Література:* [2, розділ 2, п. 2.2, 2.3]; [3, розділ 1, п. 1.1, 1.2]; [4, розділ 1, глава 1]; [5, глава 4, § 1-4]; [7, розділ 1]; [10, розділ 1]; [13, розділ 2, § 7]; [14, розділ 2, § 1-4]; [16, розділ 1, п. 1.1-1.3].

### Індивідуальне завдання 1.1

#### Задача 1

Обчислити визначник  $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$  трьома способами:

- розкладом за елементами будь-якого рядка;
- розкладом за елементами 1-го стовпця з утворенням додаткових нулів;
- зведенням елементарними перетвореннями до трикутного вигляду.

$$\begin{array}{l} 1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad 5) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 6) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 8) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 9) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$10) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$11) \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$12) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$13) \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$14) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$15) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$16) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$17) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$18) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$19) \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$20) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$21) \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$22) \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$23) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$24) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$25) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$26) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$27) \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$28) \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$29) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$30) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

## Задача 2

Обчислити обернену матрицю двома способами:

а) за допомогою формули: 
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де  $A_{ij}$  – алгебраїчне доповнення елемента  $a_{ij}$  матриці  $A$ ;

б) за допомогою елементарних перетворень матриці:

$$\Gamma_A = (A | E) \sim (E | A^{-1}).$$

Виконати перевірку:  $A^{-1}A = E$ .

- |   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| 1) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  | 2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  | 3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$   | 4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$    |
| 5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  | 6) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$   | 7) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  | 8) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$  |
| 9) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$  | 10) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ | 11) $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ | 12) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  |
| 13) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ | 14) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -3 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  | 15) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  | 16) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$   |
| 17) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ | 18) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ | 19) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$   | 20) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ |
| 21) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  | 22) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  | 23) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$  | 24) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$    |
| 25) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  | 26) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 6 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  | 27) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  | 28) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$   |
| 29) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$   | 30) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  |   |  |

## 1.2. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

*Література:* [1, розділ 3]; [2, розділ 2, п. 2.4]; [3, розділ 1, п. 1.4]; [4, розділ 1, глава 2]; [5, глава 4, § 5-7]; [7, розділ 2]; [10, розділ 2]; [13, розділ 2, § 7]; [14, розділ 2, § 5]; [16, розділ 1, п. 1.4].

### Індивідуальне завдання 1.2

#### Задача 1

Перевірити сумісність системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

і у випадку сумісності розв'язати її:

- а) за формулами Крамера;
- б) матричним методом;
- в) методом Гаусса.

Виконати перевірку.

У таблиці виписані елементи розширеної матриці  $\left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right)$ .

1а) $\left( \begin{array}{ccc c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$	2а) $\left( \begin{array}{ccc c} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -3 \end{array} \right)$	3а) $\left( \begin{array}{ccc c} 3 & -1 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$
1б) $\left( \begin{array}{ccc c} 3 & 2 & -4 & 8 \\ 2 & 4 & -5 & 11 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right)$	2б) $\left( \begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \end{array} \right)$	3б) $\left( \begin{array}{ccc c} 2 & -1 & 4 & 15 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right)$
4а) $\left( \begin{array}{ccc c} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 11 \\ 1 & -2 & 2 & -7 \end{array} \right)$	5а) $\left( \begin{array}{ccc c} 3 & -2 & 4 & 12 \\ 3 & 4 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & -9 \end{array} \right)$	6а) $\left( \begin{array}{ccc c} 8 & 3 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & -5 \end{array} \right)$
4б) $\left( \begin{array}{ccc c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \end{array} \right)$	5б) $\left( \begin{array}{ccc c} 3 & 2 & -4 & 8 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \\ 5 & 6 & -9 & 2 \end{array} \right)$	6б) $\left( \begin{array}{ccc c} 3 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \end{array} \right)$
7а) $\left( \begin{array}{ccc c} 4 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 8 & 3 & -6 & 12 \end{array} \right)$	8а) $\left( \begin{array}{ccc c} 2 & 3 & 4 & 33 \\ 7 & -5 & 0 & 24 \\ 4 & 0 & 11 & 39 \end{array} \right)$	9а) $\left( \begin{array}{ccc c} 2 & 3 & 4 & 12 \\ 7 & -5 & 1 & -33 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \end{array} \right)$

7б) $\begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	8б) $\begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 & 6 \\ 1 & -7 & -5 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	9б) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
10а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & 4 & -20 \\ 3 & -2 & 5 & -22 \end{pmatrix}$	11а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 21 \\ 3 & 4 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$	12а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
10б) $\begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & -4 & -9 & 0 \end{pmatrix}$	11б) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 & 2 \\ 6 & -4 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	12б) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
13а) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 19 \\ 2 & -1 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$	14а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	15а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & 1 & 4 & 22 \end{pmatrix}$
13б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	14б) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & -5 & 0 \\ 9 & 4 & -7 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	15б) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \\ 4 & -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$
16а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -9 \\ 1 & 5 & 1 & 20 \\ 3 & 4 & 2 & 15 \end{pmatrix}$	17а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	18а) $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 & -8 \\ 3 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & -2 & -9 \end{pmatrix}$
16б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$	17б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & 1 \\ 7 & -9 & -1 & 3 \\ 5 & -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	18б) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
19а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 6 & 36 \\ 1 & -4 & -2 & -19 \end{pmatrix}$	20а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -11 \\ 5 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$	21а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 2 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 19 \end{pmatrix}$
19б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 6 \\ 5 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$	20б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	21б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -8 & 4 \end{pmatrix}$
22а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	23а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 3 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	24а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 14 \\ 2 & 3 & -4 & -16 \\ 3 & -2 & -5 & -8 \end{pmatrix}$
22б) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & -6 & 2 \\ 4 & -9 & -8 & 1 \end{pmatrix}$	23б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	24б) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$



25a)	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 &   & 11 \\ 2 & -1 & -1 &   & 4 \\ 3 & -2 & 4 &   & 11 \end{pmatrix}$	26a)	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 &   & -15 \\ 3 & 1 & 4 &   & 13 \\ 2 & -3 & 1 &   & 9 \end{pmatrix}$	27a)	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 &   & -6 \\ 3 & 2 & 5 &   & -14 \\ 1 & -3 & 4 &   & -19 \end{pmatrix}$
25б)	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 &   & 6 \\ 2 & 3 & -4 &   & 2 \\ 3 & 1 & -1 &   & 5 \end{pmatrix}$	26б)	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 &   & 1 \\ 3 & -4 & 1 &   & 7 \\ 2 & 3 & -3 &   & 4 \end{pmatrix}$	27б)	$\begin{pmatrix} 2 & 8 & -7 &   & 0 \\ 2 & -5 & 6 &   & 1 \\ 4 & 3 & -1 &   & 7 \end{pmatrix}$
28a)	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 &   & -16 \\ 1 & 0 & 3 &   & -6 \\ 2 & -3 & 1 &   & 9 \end{pmatrix}$	29a)	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 &   & -9 \\ 4 & -1 & 5 &   & -2 \\ 0 & 3 & -7 &   & -6 \end{pmatrix}$	30a)	$\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 &   & 13 \\ 3 & 2 & 3 &   & 3 \\ 2 & -3 & 1 &   & -10 \end{pmatrix}$
28б)	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 &   & 2 \\ 1 & 5 & -3 &   & 4 \\ 2 & -1 & 4 &   & 5 \end{pmatrix}$	29б)	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 &   & 5 \\ 3 & 4 & -7 &   & 2 \\ 5 & 1 & -5 &   & 9 \end{pmatrix}$	30б)	$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 &   & 1 \\ 7 & -4 & 1 &   & 11 \\ 3 & 5 & -4 &   & 5 \end{pmatrix}$

### Задача 2

Розв'язати систему 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

- а) матричним способом;  
 б) методом Гаусса;  
 в) методом Жордана-Гаусса.

Виконати перевірку.

У таблиці вписані елементи розширеної матриці

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & | & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & | & b_4 \end{pmatrix}.$$

1)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & | & 9 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & | & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 1 & | & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -5 & | & 6 \end{pmatrix}$       2)  $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & | & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 1 & | & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & | & 1 \end{pmatrix}$       3)  $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 & | & 6 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & | & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & | & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & | & 2 \end{pmatrix}$

4)  $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 & 1 & | & 0 \\ 4 & 3 & -4 & 0 & | & 2 \\ 6 & 1 & -3 & 2 & | & -2 \\ -1 & 2 & 4 & 4 & | & 9 \end{pmatrix}$       5)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & | & 7 \\ -2 & 4 & 3 & -4 & | & 12 \\ 3 & 2 & -1 & 6 & | & -3 \\ 4 & -3 & 2 & 1 & | & -3 \end{pmatrix}$       6)  $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & 3 & | & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & | & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & | & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lll}
7) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 & | & 11 \\ 4 & 0 & 1 & -2 & | & -5 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & | & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & | & 9 \end{pmatrix} & 8) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 & | & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & | & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & | & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} & 9) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & | & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & | & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & | & 6 \end{pmatrix} \\
10) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & | & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & | & 9 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & | & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} & 11) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 6 & | & 6 \\ -1 & 4 & 0 & 3 & | & -5 \\ 2 & -2 & 1 & 5 & | & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & | & 6 \end{pmatrix} & 12) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & | & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & | & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & | & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \\
13) \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & | & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & | & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & | & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} & 14) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 & | & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 4 & | & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 6 & | & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} & 15) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 5 & | & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & | & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 5 & | & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \\
16) \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 4 & | & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & | & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & | & -3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} & 17) \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 1 & | & 2 \\ -3 & 2 & 3 & 2 & | & 3 \\ -4 & 2 & 2 & 1 & | & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} & 18) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & | & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & | & 5 \\ 3 & 6 & 3 & 5 & | & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \\
19) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & | & 4 \\ 4 & 1 & 4 & -1 & | & -3 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} & 20) \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 4 & | & 1 \\ 4 & -1 & 4 & 3 & | & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & | & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 4 & | & -1 \end{pmatrix} & 21) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & | & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & | & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & | & -1 \end{pmatrix} \\
22) \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & -1 & | & -4 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & | & 4 \\ -3 & 4 & 3 & 0 & | & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & | & -4 \end{pmatrix} & 23) \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 4 & | & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & | & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 5 & | & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} & 24) \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 4 & | & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & | & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & | & 1 \\ -1 & -3 & 4 & 4 & | & -1 \end{pmatrix} \\
25) \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 7 & | & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & | & 8 \\ 1 & 5 & -3 & 4 & | & -2 \\ 4 & 6 & -1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} & 26) \begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 & 4 & | & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & | & 5 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & | & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} & 27) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & | & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & | & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & | & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \\
28) \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & | & 6 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & | & 7 \\ 4 & 4 & 2 & 5 & | & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & | & -1 \end{pmatrix} & 29) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 2 & | & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 6 & | & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & | & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -2 & | & -2 \end{pmatrix} & 30) \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 & 5 & | & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & | & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 3 & | & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

### Задача 3

Знайти усі розв'язки системи

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + a_{14} \cdot x_4 = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + a_{24} \cdot x_4 = b_2, \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + a_{34} \cdot x_4 = b_3 \end{cases}$$

а) методом Гаусса;

б) методом Жордана-Гаусса.

У таблиці вписані елементи розширеної матриці системи.

1) $\left( \begin{array}{cccc c} 3 & -2 & 3 & -4 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 7 & 2 & 14 \end{array} \right)$	2) $\left( \begin{array}{cccc c} 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -3 & -3 & 1 \end{array} \right)$	3) $\left( \begin{array}{cccc c} 3 & 2 & 0 & 4 & 6 \\ -3 & -1 & 0 & 5 & 4 \\ -2 & -3 & 4 & 4 & 1 \end{array} \right)$
4) $\left( \begin{array}{cccc c} 3 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right)$	5) $\left( \begin{array}{cccc c} 4 & 4 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & 2 \end{array} \right)$	6) $\left( \begin{array}{cccc c} 1 & -3 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & -2 & -3 & 0 \\ 5 & -9 & -2 & -8 & 3 \end{array} \right)$
7) $\left( \begin{array}{cccc c} 2 & -1 & -3 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -5 & -7 & -6 \end{array} \right)$	8) $\left( \begin{array}{cccc c} 2 & -1 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 6 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right)$	9) $\left( \begin{array}{cccc c} 3 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & -1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 5 & 8 & 6 \end{array} \right)$
10) $\left( \begin{array}{cccc c} 7 & 1 & 8 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 5 \\ -3 & -4 & 1 & -4 & -3 \end{array} \right)$	11) $\left( \begin{array}{cccc c} 1 & -1 & -4 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -2 & -7 & -2 \end{array} \right)$	12) $\left( \begin{array}{cccc c} 3 & -2 & -2 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & -4 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -2 & -11 & -4 \end{array} \right)$
13) $\left( \begin{array}{cccc c} 1 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 2 & -5 & -3 \end{array} \right)$	14) $\left( \begin{array}{cccc c} 4 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right)$	15) $\left( \begin{array}{cccc c} 3 & -1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$
16) $\left( \begin{array}{cccc c} 3 & 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & -8 & 2 \end{array} \right)$	17) $\left( \begin{array}{cccc c} 5 & -3 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -3 & -1 & 2 \end{array} \right)$	18) $\left( \begin{array}{cccc c} -1 & 1 & 4 & 7 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & -3 & -1 & 3 \end{array} \right)$
19) $\left( \begin{array}{cccc c} 0 & 6 & -2 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 8 \\ -1 & -3 & 4 & 2 & 1 \end{array} \right)$	20) $\left( \begin{array}{cccc c} 6 & -2 & -4 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -5 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & -2 & -5 \end{array} \right)$	21) $\left( \begin{array}{cccc c} 3 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 1 & -3 \end{array} \right)$
22) $\left( \begin{array}{cccc c} 2 & 1 & -2 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right)$	23) $\left( \begin{array}{cccc c} 4 & 5 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & -6 & -4 \\ 4 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{array} \right)$	24) $\left( \begin{array}{cccc c} 3 & -3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 5 & 4 & 3 \end{array} \right)$

$$\begin{array}{lll}
25) \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right) & 26) \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 4 & 1 \end{array} \right) & 27) \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -5 & -4 \end{array} \right) \\
28) \left( \begin{array}{cccc|c} -2 & -2 & 3 & -3 & -5 \\ 4 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right) & 29) \left( \begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -4 & 2 & -8 \end{array} \right) & 30) \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 & 5 \end{array} \right)
\end{array}$$

### 1.3. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

*Література:* [1, розділ 2, п. 2.1-2.5]; [2, розділ 3, п. 3.2]; [3, розділ 2, п. 2.4]; [4, розділ 1, глава 3]; [5, глава 2]; [7, розділ 3]; [10, розділ 3]; [13, розділ 1, § 3]; [14, розділ 3]; [16, розділ 2].

#### Індивідуальне завдання 1.3

##### Задача 1

У декартовій прямокутній системі координат задано точки:

$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3), A_4(x_4, y_4, z_4)$ .

Знайти:

- 1) проєкцію вектора  $\overrightarrow{A_1A_2}$  на вектор  $\overrightarrow{A_1A_4}$ ;
- 2) кут між векторами  $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}$ ;
- 3) площу трикутника  $A_1A_2A_3$ ;
- 4) об'єм піраміди  $A_1A_2A_3A_4$ .

1.  $A_1(1, 4, 1), A_2(3, 2, 1), A_3(1, -1, -3), A_4(10, 7, 4)$ .
2.  $A_1(-2, 3, -2), A_2(-3, 5, 4), A_3(6, 5, 3), A_4(2, -3, 4)$ .
3.  $A_1(-3, -5, 6), A_2(2, 7, -2), A_3(9, 6, 3), A_4(7, 5, 3)$ .
4.  $A_1(6, -3, 2), A_2(4, 8, -3), A_3(3, 6, -4), A_4(5, 3, 3)$ .
5.  $A_1(4, 6, 3), A_2(-6, 2, 6), A_3(3, -2, 3), A_4(-5, 6, 4)$ .
6.  $A_1(2, 3, -4), A_2(8, -3, 2), A_3(6, 5, -3), A_4(-4, 2, 3)$ .
7.  $A_1(-2, 3, 4), A_2(5, 5, 6), A_3(2, 3, 4), A_4(4, -3, 2)$ .
8.  $A_1(8, 7, 5), A_2(4, -3, 2), A_3(6, 4, 1), A_4(-2, 5, 8)$ .
9.  $A_1(-5, 6, 4), A_2(8, 9, 10), A_3(4, 8, 7), A_4(-2, 1, 5)$ .
10.  $A_1(2, -1, 2), A_2(3, 2, -2), A_3(-3, 6, -2), A_4(4, -1, -3)$ .
11.  $A_1(1, -1, 3), A_2(8, 5, 3), A_3(9, 6, 3), A_4(3, 6, -4)$ .
12.  $A_1(-5, 6, 1), A_2(-1, 3, 0), A_3(1, -2, 2), A_4(-1, 1, 3)$ .
13.  $A_1(1, -7, 5), A_2(0, -9, 7), A_3(2, 3, -2), A_4(-3, 1, -1)$ .
14.  $A_1(5, 2, 3), A_2(7, 5, -6), A_3(-2, -5, -1), A_4(-1, -1, -1)$ .
15.  $A_1(-2, 4, 2), A_2(3, 7, 0), A_3(5, 4, 3), A_4(-1, -3, 2)$ .
16.  $A_1(6, 5, 4), A_2(9, -2, 7), A_3(6, 4, 1), A_4(8, 3, 2)$ .

17.  $A_1(3, 4, -1)$ ,  $A_2(5, -1, 1)$ ,  $A_3(-2, 0, 3)$ ,  $A_4(-3, -5, 5)$ .  
 18.  $A_1(2, 3, 4)$ ,  $A_2(11, 4, 7)$ ,  $A_3(6, 10, 12)$ ,  $A_4(4, -1, 5)$ .  
 19.  $A_1(1, 8, -3)$ ,  $A_2(9, -2, 4)$ ,  $A_3(12, 5, 4)$ ,  $A_4(8, -2, 4)$ .  
 20.  $A_1(4, -3, 5)$ ,  $A_2(6, 9, 0)$ ,  $A_3(7, 3, 4)$ ,  $A_4(2, 3, 5)$ .  
 21.  $A_1(1, 1, 1)$ ,  $A_2(2, -1, 1)$ ,  $A_3(4, -2, 3)$ ,  $A_4(8, -4, 5)$ .  
 22.  $A_1(6, -3, 2)$ ,  $A_2(5, 1, 4)$ ,  $A_3(2, 1, 1)$ ,  $A_4(4, 0, -2)$ .  
 23.  $A_1(0, -2, 1)$ ,  $A_2(4, -2, 1)$ ,  $A_3(-2, 0, -2)$ ,  $A_4(-10, 2, -3)$ .  
 24.  $A_1(9, 7, 4)$ ,  $A_2(3, -2, -5)$ ,  $A_3(4, 7, 6)$ ,  $A_4(8, 0, -4)$ .  
 25.  $A_1(1, 1, -3)$ ,  $A_2(-2, -1, 1)$ ,  $A_3(3, 1, -2)$ ,  $A_4(8, 2, -3)$ .  
 26.  $A_1(6, 4, -1)$ ,  $A_2(-2, 5, -2)$ ,  $A_3(3, 3, 5)$ ,  $A_4(4, -4, 3)$ .  
 27.  $A_1(4, -3, 3)$ ,  $A_2(5, 2, 6)$ ,  $A_3(2, 3, 2)$ ,  $A_4(5, 0, -2)$ .  
 28.  $A_1(5, 2, -4)$ ,  $A_2(8, -1, 7)$ ,  $A_3(5, 6, 3)$ ,  $A_4(-1, 4, 2)$ .  
 29.  $A_1(-1, 4, 4)$ ,  $A_2(7, 6, 3)$ ,  $A_3(2, 4, 7)$ ,  $A_4(7, -5, 3)$ .  
 30.  $A_1(6, 6, 4)$ ,  $A_2(5, -4, 1)$ ,  $A_3(7, 8, 3)$ ,  $A_4(-4, 6, 2)$ .

### Задача 2

У просторі  $R^3$  задано п'ять векторів:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix}, \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix}.$$

Потрібно:

- 1) знайти три вектори, що утворюють базис, і розкласти інші вектори в цьому базисі;
- 2) перейти до нового базису і знайти координати розкладу інших векторів у новому базисі.

№	$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{a}_4$	$\vec{a}_5$	№	$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{a}_4$	$\vec{a}_5$
<b>1</b>	2	3	-1	1	0	<b>2</b>	9	2	1	0	-4
	-1	-1	-1	-1	-1		-3	-1	-1	-1	3
	2	2	3	2	3		5	2	2	3	-8
<b>3</b>	0	3	2	1	3	<b>4</b>	0	3	2	-1	1
	-1	-3	-1	-1	1		-1	0	-1	1	-1
	3	8	2	2	-5		3	-2	2	-3	2
<b>5</b>	-1	1	0	-1	2	<b>6</b>	-1	-3	1	1	-1
	1	-1	-1	3	-1		3	8	-4	-2	1
	-3	2	3	-7	2		0	-2	-1	2	-3
<b>7</b>	-5	-1	1	-1	7	<b>8</b>	-1	-5	-1	1	3
	16	3	-2	1	-15		1	10	3	-2	-2
	1	0	2	-3	10		-3	-8	0	2	11

№	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	№	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$
9	-1	2	-1	3	1	10	3	1	-1	-3	-1
	1	-1	3	-6	-2		-6	-2	1	8	3
	-3	8	0	5	2		5	2	-3	-3	0
11	3	5	-9	1	-7	12	21	3	1	-7	7
	-2	-3	6	-1	5		-14	-2	-1	5	-6
	-5	-9	16	-1	12		-36	-5	-1	12	-11
13	-7	-9	3	1	25	14	-7	18	3	5	1
	5	7	-2	-1	-18		5	-13	-2	-4	-1
	12	15	-5	-1	-42		12	-30	-5	-8	-1
15	5	1	-7	7	3	16	-1	-3	5	1	3
	-4	-1	5	-4	-2		2	5	-7	-1	-4
	-8	-1	12	-14	-5		0	-2	7	2	5
17	-9	-1	1	3	-1	18	3	3	-1	1	-9
	15	2	-1	-4	0		-4	-3	2	-1	13
	-7	0	2	5	-6		5	8	0	2	-13
19	3	-6	-1	-1	1	20	-1	1	3	-7	-1
	-4	9	2	1	-1		1	-1	-4	9	2
	5	-8	0	-3	2		-3	2	5	-11	0
21	0	-1	0	1	-1	22	0	0	1	-1	4
	1	3	-2	-1	0		6	1	-1	0	-5
	-1	0	3	-2	4		-7	-1	-2	4	-9
23	-1	-3	0	1	4	24	-1	3	0	2	1
	0	3	1	-1	0		0	0	1	-2	-1
	4	8	-1	-2	-15		4	-11	-1	-5	-2
25	2	1	-1	-2	0	26	-1	-3	3	1	1
	-2	-1	0	4	1		0	-1	3	1	2
	-5	-2	4	1	-1		-3	-8	7	2	2
27	-7	-1	1	1	3	28	1	-1	-1	1	-3
	-3	0	1	2	-2		2	3	0	1	-5
	-19	-3	2	2	9		2	-4	-3	2	-7
29	1	-2	-1	1	1	30	1	1	1	-5	-1
	2	-3	0	-1	1		-1	1	2	-5	0
	2	-5	-3	3	2		3	2	2	-11	-3

## 1.4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

*Література:* [1, розділ 4, п. 4.1, 4.2, 4.4]; [2, розділ 3, п. 3.3]; [3, розділ 2, п. 2.1-2.3]; [4, розділ 1, глава 4]; [5, глава 3, § 1]; [7, розділ 4]; [10, розділ 4]; [13, розділ 2, § 5; розділ 3, § 8]; [14, розділ 4, § 1, 2, 6]; [16, розділ 3, п. 3.3, розділ 4, п. 4.1, 4.3].

### Індивідуальне завдання 1.4

Розв'язати задачі 1, 2 та зробити креслення.

#### Задача 1

1. У трикутнику з вершинами  $A(-3, -1)$ ,  $B(1, -5)$ ,  $C(9, 3)$  сторони  $AB$  і  $AC$  розділені у відношенні 3:1. Довести, що прями, які з'єднують точку ділення з протилежними вершинами, і медіана  $AM$  перетинаються в одній точці.
2. Дані рівняння сторони  $x + 3y - 8 = 0$  і діагоналі  $2x + y + 4 = 0$  ромба. Записати рівняння інших сторін і діагоналі ромба, знаючи, що точка  $A(-9, -1)$  лежить на стороні, паралельній даній.
3. Дано дві точки  $A(-3, 8)$  і  $B(2, 2)$ . На осі  $Ox$  знайти координати такої точки  $C$ , щоб периметр трикутника  $ABC$  був найменшим.
4. Дано вершини  $A(-3, -2)$ ,  $B(4, -1)$ ,  $C(1, 3)$  трапеції  $ABCD$  ( $AD \parallel CB$ ). Діагоналі трапеції перпендикулярні. Знайти координати точки  $D$ .
5. Дано рівняння двох сторін  $2x - 5y - 1 = 0$ ,  $2x - 5y - 7 = 0$  і рівняння діагоналі  $x + 3y - 6 = 0$  ромба. Знайти рівняння інших сторін і діагоналі ромба.
6. Дано рівняння двох медіан трикутника  $x - 2y + 1 = 0$ ,  $y - 1 = 0$  і одну з його вершин  $A(1, 3)$ . Скласти рівняння сторін трикутника.
7. Дано вершини  $A(2, -2)$ ,  $B(3, -1)$  і точку  $P(1, 0)$  перетину медіан трикутника  $ABC$ . Скласти рівняння його висоти, проведеної через вершину  $C$ .
8. Дано точки  $A(3, 5)$  і  $B(-1, 4)$ . На осі  $Ox$  знайти координати такої точки  $C$ , щоб периметр трикутника  $ABC$  був найменшим.
9. У трикутнику  $ABC$  дано координати точки  $A(2, 6)$  та рівняння висоти  $x + 7y + 15 = 0$  і бісектриси  $6x - 42y - 85 = 0$ , проведених з однієї вершини. Скласти рівняння сторін трикутника.
10. У трикутнику дано вершину  $A(2, -7)$ , рівняння висоти  $3x + y + 11 = 0$  і медіани  $x + 2y + 7 = 0$ , проведених із різних вершин. Скласти рівняння сторін.
11. Дано рівняння двох сторін трикутника  $5x - 4y + 15 = 0$ ,  $4x + y - 9 = 0$  і точку  $P(0, 2)$  перетину медіан. Знайти рівняння третьої сторони трикутника.

12. Дано рівняння висот  $2x - 3y + 1 = 0$ ,  $x + 2y + 1 = 0$  і вершину  $A(2, 3)$  трикутника. Знайти рівняння сторін трикутника.
13. Дано рівняння сторони  $4x + y - 12 = 0$  і висот  $5x - 4y - 12 = 0$ ,  $x + y - 6 = 0$  трикутника. Знайти рівняння інших сторін і висоти.
14. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку  $M(-6, 8)$  та відтинає від координатного кута трикутник площею  $12 \text{ од}^2$ .
15. Дано рівняння однієї діагоналі  $x - 2 = 0$  і двох сторін паралелограма  $x + 2y + 2 = 0$ ,  $x + y - 4 = 0$ . Знайти координати його вершин.
16. Дано рівняння двох сторін  $2x + 3y - 6 = 0$  ( $AB$ ),  $x + 2y - 5 = 0$  ( $AC$ ) трикутника  $ABC$  і кут при вершині  $B$ , що дорівнює  $45^\circ$ . Знайти рівняння висоти, опущеної з вершини  $A$ .
17. Дано дві вершини трикутника  $A(-3, 3)$ ,  $B(5, -1)$  і точку перетину його висот  $P(4, 3)$ . Знайти рівняння сторін трикутника.
18. Скласти рівняння бісектрис кутів між прямими  $7x - y = 19$  і  $2x + y = 5$ .
19. Скласти рівняння бісектриси кута  $A$  трикутника  $ABC$  з вершинами:  $A(1, 1)$ ,  $B(10, 13)$ ,  $C(13, 6)$ .
20. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку  $A(5, 1)$  і утворюють із прямою  $2x + y = 4$  кут  $45^\circ$ .
21. При якому значенні параметра  $P$  перетинаються в одній точці прямі  $x + 7y - 8 = 0$ ,  $7x - 2y - 5 = 0$ ,  $Px + Py - 8 = 0$ ?
22. Точки  $A(1, 2)$  і  $C(3, 6)$  – протилежні вершини квадрата. Скласти рівняння його сторін.
23. Показати, що трикутник із сторонами, заданими рівняннями  $x + 3y + 1 = 0$ ,  $3x + y + 1 = 0$  і  $x - y = 10$ , рівнобедрений. Знайти кут при його вершині.
24. Дано вершини паралелограма:  $A(0, 0)$ ,  $B(1, -3)$ ,  $C(7, -1)$ . Знайти кут між його діагоналями і показати, що паралелограм є прямокутником.
25. Довести, що трикутник із вершинами:  $A(1, 1)$ ,  $B(2, 1 + \sqrt{3})$ ,  $C(3, 1)$  є рівностороннім і знайти його площу.
26. Дві вершини квадрата створені перетином прямої  $4x + 3y = 12$  з осями координат. Знайти координати двох інших його вершин.
27. Скласти рівняння тих прямих, що проходять через точку  $M(2, 7)$  і утворюють кут  $45^\circ$  із прямою  $AB$ , де  $A(-1, 7)$ ,  $B(8, -2)$ .
28. На осі абсцис знайти точку, відстань від якої до прямої  $8x + 15y + 10 = 0$  дорівнює 1.
29. Дано середини сторін трикутника  $M(-1, -1)$ ,  $N(1, 9)$  і  $P(9, 1)$ . Скласти рівняння серединних перпендикулярів до сторін трикутника.
30. Дано рівняння двох висот трикутника  $y = 2x$ ,  $y + 3x + 5 = 0$  і одну з його вершин  $A(8, 1)$ . Скласти рівняння сторін трикутника.



## Задача 2

1. Скласти рівняння лінії, сума відстаней кожної точки якої до двох даних точок  $A(-3,0)$ ,  $B(3, 0)$  дорівнює 10.
2. Скласти рівняння лінії, для кожної точки якої найкоротші відстані до двох даних кіл  $(x + 3)^2 + y^2 = 1$ ,  $(x - 3)^2 + y^2 = 81$  рівні між собою.
3. Скласти рівняння лінії, сума квадратів відстаней кожної точки якої до точок  $A(-5, -1)$ ,  $B(3, 2)$  дорівнює 40,5.
4. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точки  $A(2, 6)$  та від прямої  $y + 2 = 0$ .
5. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від осі ординат і від кола  $x^2 + y^2 = 4x$ .
6. Скласти рівняння лінії, модуль різниці відстаней кожної точки якої до двох даних точок  $A(-5, 0)$  і  $B(5, 0)$  дорівнює 6.
7. Скласти рівняння лінії, відстань кожної точки якої до точки  $A(3, 0)$  удвічі менша відстані до точки  $B(26, 0)$ .
8. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої віддалена від прямої  $x + 6 = 0$  на відстань вдвічі більшу, ніж від точки  $A(1, 3)$ .
9. Скласти рівняння лінії, відстані кожної точки якої до точки  $A(2, 0)$  і до прямої  $2x + 5 = 0$  відносяться як 4/5.
10. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться вдвічі далі від точки  $A(4, 0)$ , ніж від точки  $B(1, 0)$ .
11. Скласти рівняння лінії, сума відстаней кожної точки якої до точок  $A(-2, 0)$  і  $B(2, 0)$  дорівнює  $2\sqrt{5}$ .
12. Скласти рівняння кола, що проходить через фокуси еліпса  $4x^2 + y^2 = 4$  і має центр у його правій вершині.
13. Дано рівняння кола  $x^2 + y^2 = 25$ . Скласти рівняння геометричних місць середин тих хорд цього кола, довжина яких дорівнює 8.
14. Скласти рівняння лінії, відстані кожної точки якої до початку координат і до точки  $A(5, 0)$  відносяться як 2/1.
15. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої віддалена від прямої  $x - 14 = 0$  на відстань вдвічі меншу, ніж від точки  $A(2, 3)$ .
16. Скласти рівняння лінії, для кожної точки якої відношення відстаней до точки  $A(-4, 0)$  і до прямої  $4x + 25 = 0$  дорівнює 4/5.
17. Скласти рівняння лінії, для кожної точки якої найкоротші відстані до даного кола  $(x - 5)^2 + y^2 = 9$  і до прямої  $x + 2 = 0$  рівні між собою.
18. Скласти рівняння кола, описаного навколо трикутника, сторони якого задані рівняннями:  $9x - 2y - 41 = 0$ ,  $x - 3y + 1 = 0$ ,  $7x + 4y + 7 = 0$ .
19. Скласти рівняння хорди кола  $x^2 + y^2 = 49$ , що ділиться в точці  $A(1, 2)$  навпіл.

20. Скласти рівняння кола, симетричного колу  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$  відносно прямої  $x - y - 3 = 0$ .
21. Скласти рівняння лінії, що проходить через середини хорд кола  $x^2 + y^2 - 4y = 4$ , проведених через початок координат.
22. Скласти рівняння кола, що проходить через точки:  $A(1, 2)$ ,  $B(0, -1)$ ,  $C(-3, 0)$ .
23. Скласти рівняння кола, що проходить через точки  $A(7, 7)$ ,  $B(-2, 4)$  і центр якого лежить на прямій  $2x - y - 4 = 0$ .
24. На прямій  $x + 5 = 0$  знайти точку, рівновіддалену від лівого фокуса і верхньої вершини еліпса  $x^2 / 20 + y^2 / 4 = 1$ .
25. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої віддалена від прямої  $y - 4 = 0$  удвічі далі, ніж від точки  $A(0, 1)$ .
26. На правій гілці гіперболи  $x^2 / 16 - y^2 / 9 = 1$  знайти точку, відстань якої до правого фокуса вдвічі менша від її відстані до лівого фокуса.
27. Дано точки  $A(-1, 0)$  і  $B(2, 0)$ . Точка  $M$  рухається так, що в трикутнику  $AMB$  кут  $B$  вдвічі більший за кут  $A$ . Скласти рівняння траєкторії точки  $M$ .
28. Скласти рівняння гіперболи, вершини й фокуси якої розташовані у відповідних фокусах і вершинах еліпса  $x^2 / 8 + y^2 / 5 = 1$ .
29. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точки  $A(2, 0)$  і від кола  $x^2 + y^2 = -4x$ .
30. На параболі  $y^2 = 32x$  знайти точку, відстань якої до прямої  $4x + 3y + 10 = 0$  дорівнює 2.

## 1.5. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРИ

*Література:* [1, розділ 4, п. 4.3]; [2, розділ 3, п. 3.5, 3.6]; [3, розділ 2, п. 2.5]; [5, глава 3, § 1, 2]; [7, розділ 5]; [10, розділ 5]; [13, розділ 2, § 6; розділ 3, § 9]; [14, розділ 4, § 3-5, 7]; [16, розділ 3, п. 3.1, 3.2; розділ 4, п. 4.2].

### Індивідуальне завдання 1.5

#### Задача 1

У декартовій прямокутній системі координат задано п'ять точок:  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3, z_3)$ ,  $A_4(x_4, y_4, z_4)$ ,  $A_5(x_5, y_5, z_5)$ .

Знайти:

- 1) рівняння прямих  $A_1A_2$ ,  $A_1A_3$ ;
- 2) кут між прямими  $A_1A_2$ ,  $A_1A_3$ ;
- 3) рівняння площин  $A_1A_2A_3$ ,  $A_1A_4A_5$ ;
- 4) кут між прямою  $A_1A_2$  й площиною  $A_1A_4A_5$ ;

- 5) кут між площинами  $A_1A_2A_3$ ,  $A_1A_4A_5$ ;  
 6) канонічні рівняння лінії перетину площин  $A_1A_2A_3$ ,  $A_1A_4A_5$ ;  
 7) відстань від точки  $A_4$  до площини  $A_1A_2A_3$ ;  
 8) рівняння висоти піраміди, опущеної з точки  $A_4$  на площину  $A_1A_2A_3$ .

1.  $A_1(1, 4, 1)$ ,  $A_2(3, 2, 1)$ ,  $A_3(1, -1, -3)$ ,  $A_4(10, 7, 4)$ ,  $A_5(2, 2, 3)$ .
2.  $A_1(-2, 3, -2)$ ,  $A_2(-3, 5, 4)$ ,  $A_3(6, 5, 3)$ ,  $A_4(2, -3, 4)$ ,  $A_5(1, 4, 2)$ .
3.  $A_1(-3, -5, 6)$ ,  $A_2(2, 7, -2)$ ,  $A_3(9, 6, 3)$ ,  $A_4(7, 5, 3)$ ,  $A_5(-2, 8, -4)$ .
4.  $A_1(6, -3, 2)$ ,  $A_2(4, 8, -3)$ ,  $A_3(3, 6, -4)$ ,  $A_4(5, 3, 3)$ ,  $A_5(3, 0, -2)$ .
5.  $A_1(4, 6, 3)$ ,  $A_2(-6, 2, 6)$ ,  $A_3(3, -2, 3)$ ,  $A_4(-5, 6, 4)$ ,  $A_5(4, 6, 5)$ .
6.  $A_1(2, 3, -4)$ ,  $A_2(8, -3, 2)$ ,  $A_3(6, 5, -3)$ ,  $A_4(-4, 2, 3)$ ,  $A_5(2, -3, 4)$ .
7.  $A_1(-2, 3, 4)$ ,  $A_2(5, 5, 6)$ ,  $A_3(2, 3, 4)$ ,  $A_4(4, -3, 2)$ ,  $A_5(2, 2, 4)$ .
8.  $A_1(8, 7, 5)$ ,  $A_2(4, -3, 2)$ ,  $A_3(6, 4, 1)$ ,  $A_4(-2, 5, 8)$ ,  $A_5(4, 3, 2)$ .
9.  $A_1(-5, 6, 4)$ ,  $A_2(8, 9, 10)$ ,  $A_3(4, 8, 7)$ ,  $A_4(-2, 1, 5)$ ,  $A_5(9, 6, 3)$ .
10.  $A_1(2, -1, 2)$ ,  $A_2(3, 2, -2)$ ,  $A_3(-3, 6, -2)$ ,  $A_4(4, -1, -3)$ ,  $A_5(5, -2, 1)$ .
11.  $A_1(1, -1, 3)$ ,  $A_2(8, 5, 3)$ ,  $A_3(9, 6, 3)$ ,  $A_4(3, 6, -4)$ ,  $A_5(3, -2, 3)$ .
12.  $A_1(-5, 6, 1)$ ,  $A_2(-1, 3, 0)$ ,  $A_3(1, -2, 2)$ ,  $A_4(-1, 1, 3)$ ,  $A_5(2, -4, 4)$ .
13.  $A_1(1, -7, 5)$ ,  $A_2(0, -9, 7)$ ,  $A_3(2, 3, -2)$ ,  $A_4(-3, 1, -1)$ ,  $A_5(2, 5, -8)$ .
14.  $A_1(5, 2, 3)$ ,  $A_2(7, 5, -6)$ ,  $A_3(-2, -5, -1)$ ,  $A_4(-1, -1, -1)$ ,  $A_5(-8, -4, 1)$ .
15.  $A_1(-2, 4, 2)$ ,  $A_2(3, 7, 0)$ ,  $A_3(5, 4, 3)$ ,  $A_4(-1, -3, 2)$ ,  $A_5(4, 4, 3)$ .
16.  $A_1(6, 5, 4)$ ,  $A_2(9, -2, 7)$ ,  $A_3(6, 4, 1)$ ,  $A_4(8, 3, 2)$ ,  $A_5(3, 2, 6)$ .
17.  $A_1(3, 4, -1)$ ,  $A_2(5, -1, 1)$ ,  $A_3(-2, 0, 3)$ ,  $A_4(-3, -5, 5)$ ,  $A_5(4, 8, 1)$ .
18.  $A_1(2, 3, 4)$ ,  $A_2(11, 4, 7)$ ,  $A_3(6, 10, 12)$ ,  $A_4(4, -1, 5)$ ,  $A_5(3, -1, -3)$ .
19.  $A_1(1, 8, -3)$ ,  $A_2(9, -2, 4)$ ,  $A_3(12, 5, 4)$ ,  $A_4(8, -2, 4)$ ,  $A_5(1, 6, 4)$ .
20.  $A_1(4, -3, 5)$ ,  $A_2(6, 9, 0)$ ,  $A_3(7, 3, 4)$ ,  $A_4(2, 3, 5)$ ,  $A_5(-2, -3, 7)$ .
21.  $A_1(1, 1, 1)$ ,  $A_2(2, -1, 1)$ ,  $A_3(4, -2, 3)$ ,  $A_4(8, -4, 5)$ ,  $A_5(-1, 4, -1)$ .
22.  $A_1(6, -3, 2)$ ,  $A_2(5, 1, 4)$ ,  $A_3(2, 1, 1)$ ,  $A_4(4, 0, -2)$ ,  $A_5(3, -2, 1)$ .
23.  $A_1(0, -2, 1)$ ,  $A_2(4, -2, 1)$ ,  $A_3(-2, 0, -2)$ ,  $A_4(-10, 2, -3)$ ,  $A_5(4, -6, 2)$ .
24.  $A_1(9, 7, 4)$ ,  $A_2(3, -2, -5)$ ,  $A_3(4, 7, 6)$ ,  $A_4(8, 0, -4)$ ,  $A_5(3, -5, 2)$ .
25.  $A_1(1, 1, -3)$ ,  $A_2(-2, -1, 1)$ ,  $A_3(3, 1, -2)$ ,  $A_4(8, 2, -3)$ ,  $A_5(0, 0, 3)$ .
26.  $A_1(6, 4, -1)$ ,  $A_2(-2, 5, -2)$ ,  $A_3(3, 3, 5)$ ,  $A_4(4, -4, 3)$ ,  $A_5(1, 4, 2)$ .
27.  $A_1(4, -3, 3)$ ,  $A_2(5, 2, 6)$ ,  $A_3(2, 3, 2)$ ,  $A_4(5, 0, -2)$ ,  $A_5(3, -3, 1)$ .
28.  $A_1(5, 2, -4)$ ,  $A_2(8, -1, 7)$ ,  $A_3(5, 6, 3)$ ,  $A_4(-1, 4, 2)$ ,  $A_5(3, -3, 2)$ .
29.  $A_1(-1, 4, 4)$ ,  $A_2(7, 6, 3)$ ,  $A_3(2, 4, 7)$ ,  $A_4(7, -5, 3)$ ,  $A_5(3, -4, -6)$ .
30.  $A_1(6, 6, 4)$ ,  $A_2(5, -4, 1)$ ,  $A_3(7, 8, 3)$ ,  $A_4(-4, 6, 2)$ ,  $A_5(5, 2, 5)$ .

## 2. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

### 2.1. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

*Література:* [1, розділ 5]; [2, розділ 4, п. 4.1, 4.2]; [3, розділ 3, п. 3.3, 3.4]; [4, розділ 2, глава 6, п. 6.1-6.6]; [5, глава 6, § 4, 5]; [8, розділ 1, п. 1.1-1.3]; [11, розділ 1, п. 1.1-1.7]; [13, розділ 4, § 11, 12]; [15, розділ 1; розділ 2, § 1-3]; [16, розділ 5].

#### Індивідуальне завдання 2.1

У задачах 1-9 знайти границі не користуючись правилом Лопіталя.

#### Задача 1 [16]

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27}$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 5x + 6}$ .

7.  $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1}$ .

9.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}$ .

11.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$ .

13.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}$ .

15.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3}$ .

17.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2}$ .

19.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 3x + 1}$ .

21.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x^2 + 3x - 10}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 - x - x^2}{x^3 - 27}$ .

8.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}$ .

10.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$ .

12.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$ .

14.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 2x - 3}$ .

16.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x - 4}$ .

18.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 + 2x - 1}$ .

20.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - x - 12}$ .

22.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{2x^2 - 3x + 1}$ .

$$23. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2 + 11x - 2}{3x^2 - x - 10}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 6x - 45}{2x^2 - 3x - 35}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 + 11x + 5}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 3x - 4}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 - 9x - 35}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 3x - 15}{x^2 - 6x - 27}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{3x^2 + 25x + 8}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3}.$$

### Задача 2

$$1. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^3 + 17x^2 + 48x + 45}{3x^3 + 14x^2 + 3x - 36}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 + x^2 - x - 1}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{3x^3 - 10x^2 + 4x + 8}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{4x^3 + 39x^2 + 90x - 25}{2x^3 + 21x^2 + 60x + 25}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{2x^3 - 9x^2 + 12x - 5}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{9x^3 + 35x^2 + 32x - 4}{x^3 + 4x^2 + 4x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^3 - 7x^2 + 15x - 9}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 2x^2 - 39x + 72}{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - x^2 - 40x + 112}{x^4 - 4x^3 - 64x + 256}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - x^2 - 40x + 112}{x^3 - 8x^2 + 16x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 12x + 7}{x^4 - x^3 - x + 1}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + 5x^2 + x - 1}{x^4 + x^3 + x + 1}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^3 + 15x^2 + 24x - 16}{x^4 + 4x^3 + 64x + 256}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 - 8x + 16}{2x^3 - 13x^2 + 28x - 20}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^3 + 4x^2 - 35x - 150}{x^4 + 5x^3 + 125x + 625}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 4x^2 - 2x + 1}{16x^4 - 8x^3 - 2x + 1}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^3 + 17x^2 + 32x + 20}{x^3 - 3x^2 - 24x - 28}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{3x^3 + 7x^2 - 8x - 20}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{2x^3 + 3x^2 - 12x + 7}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^3 - 13x^2 + 40x - 36}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^3 - 23x^2 + 60x + 36}{3x^3 - 38x^2 + 132x - 72}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^3 + 8x^2 - 12x - 144}{2x^3 + 27x^2 + 108x + 108}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x^3 - 8x^2 + 16x}.$$

### Задача 3

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{2x^3 + 4x^2 - 3x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^2 + 1}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{3x^3 + x^2 + x - 1}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3x}{2x^3 + 3x^2 - 2}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + x + 1}{2x^2 + x - 3}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 6x - 9}{2x^2 - 3x + 10}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x + 1}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4x^2 - 2x}{3x^3 - x^2 - 4}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2x + 1}{3x^4 + 2x^2 - 3x}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 + 3}{2x^4 + x - 1}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x - 3}{x^3 - x + 2}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{5x^3 - 4x + 1}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^2 + x^4}{2 + x^2 - 3x^4}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x + 1}{2x^3 - 4x^2 + 5}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 2x + 3}{x^3 - x^2 + 2}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + 5x - 3}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x + 3}{2x^2 + 3x + 4}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x^2 + 1}{4x^3 + x + 1}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^3 + 1}{2x^4 - x^2 + x}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 8x - 3}{3x^2 + x + 2}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 3x}{2 - x - 3x^2}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 3x + 2}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{3x^2 + 2x + 1}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + x^3 - x^4}{2x^4 + 3x + 1}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 4x^2}{1 + x + 3x^2}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - x^2 - 5}{3x^4 + x^3 + 2}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^2 - 4x^5}{3x^5 + 6x^3 + x}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 + 2x - 4}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x^2 + 1}{1 + 2x - 4x^3}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 3x - 4}$$

#### Задача 4

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 3x^2 + 4}{x^4 + x^2 + 2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{3x^5 + x - 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x - 3}{2x^4 + x^2 + 5x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6 - 3x^2 + 1}{x^3 + 4x^2 - 3}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x + 3}{1 + 4x - x^3}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^4 - x^2 + 1}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^4 + 3x^2 + 2}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{3x^2 - x + 2}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{2x^2 - x + 1}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 4x^2 - 5}{x^2 - 2x + 4}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - x^2 + 3x}{2x^3 + x^2 - 5}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - x^3 + 1}{x^2 + x - 3}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - x^3 + 1}{3x^3 - 2x^2 + 5}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 + x - 1}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 + 7x - 1}{3x^4 - x^2 + 5}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^3 - 1}{x^3 + x^2 + 3}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^3}{x^2 - x + 4}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 1}{x^4 + 2x^2 + 3x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 2x^4 - 3x}{2x^2 + x - 1}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^3 - 3}{x^2 + 2x + 1}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - 7x}{2x^4 + x^2 - 3}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{2 + 3x - x^3}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{3x^3 + 2x^2 - 5}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 3x + 4}{2x^3 - x^2 + 2}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x - 5}{3x^4 - x^3 + x}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x + 2}{2x^3 + x^2 - 2}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 4}{2x^2 - 3x + 1}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^3 - 1}{3x^3 - x^2 + 1}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 + 3x - 1}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 3x^2 - 2}{3x^2 - 6x + 1}$$

### Задача 5

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{3x^3 - x^2 + 2}$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - x^3 + 2}{x^2 - x + 1}$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{2x^2 - 3x + 1}$ .

7.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^4 + x^2 - 1}$ .

9.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 2}{2x^2 + x + 1}$ .

11.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 + x^4 - x}{x^2 + 3x + 1}$ .

13.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - x^4}{x^3 + x^2 - 1}$ .

15.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 7x - 5}{2 - x^2 + 4x^3}$ .

17.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 - 5}{2x^4 + x^3 + 1}$ .

19.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x - 3}{x^3 - x^2 + 1}$ .

21.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{3x^4 - x^2 + 6}$ .

23.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{3x^3 - 2x^2 + 4}$ .

25.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 3}{2x^3 - x^4}$ .

27.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x^2 - 5}{x^4 - x^2 - 4x}$ .

29.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 8}{2x^2 + x + 1}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{x^3 + x^2 - 1}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^3 - x^2 + 5}$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x + 1}{2x^3 + x^2 - 3}$ .

8.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^3 + 2x^2 - 3}$ .

10.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 3}{2x^4 - x^3 + 1}$ .

12.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^2 - 2x^4}{x^3 + x^2 - 4}$ .

14.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - x^3 - 1}{x^2 - x + 1}$ .

16.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + x}{2x^2 + 3}$ .

18.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - x^3}{1 + x + x^2}$ .

20.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + x^2}{2x^3 - x^2 - 1}$ .

22.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - x^4 + x - 1}{4x^4 + x^2 - 3}$ .

24.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 2x - x^2}{3x^3 - x + 3}$ .

26.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{3x^4 + 4x^2 - 6}$ .

28.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^3 + x^2 + 5}$ .

30.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 4x - 5}{2x^3 - 4x^2 + 1}$ .



**Задача 6 [16]**

- |  |   |
|--|---|
| <p>1. <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}</math>.</p>          | <p>2. <math>\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8}</math>.</p>   |
| <p>3. <math>\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}</math>.</p>       | <p>4. <math>\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}</math>.</p>     |
| <p>5. <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+2} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}</math>.</p>        | <p>6. <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}</math>.</p>     |
| <p>7. <math>\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}</math>.</p>       | <p>8. <math>\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}</math>.</p>    |
| <p>9. <math>\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}</math>.</p>    | <p>10. <math>\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}</math>.</p> |
| <p>11. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}</math>.</p> | <p>12. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}{2x}</math>.</p>              |
| <p>13. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}</math>.</p>                   | <p>14. <math>\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}</math>.</p>   |
| <p>15. <math>\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{\sqrt{8-x} - 3}</math>.</p>               | <p>16. <math>\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}</math>.</p>           |
| <p>17. <math>\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3}</math>.</p>                | <p>18. <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9}</math>.</p>                 |
| <p>19. <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15}</math>.</p>                | <p>20. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2}</math>.</p>                 |
| <p>21. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}</math>.</p>       | <p>22. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}</math>.</p>              |
| <p>23. <math>\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{3 - \sqrt{x}}</math>.</p>                 | <p>24. <math>\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}</math>.</p>            |
| <p>25. <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x-x}}</math>.</p>                         | <p>26. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^3 + x^2}</math>.</p>             |
| <p>27. <math>\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^3 + 64}</math>.</p>                    | <p>28. <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{8+x} - 3}</math>.</p>                 |
| <p>29. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x}</math>.</p>                       | <p>30. <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^3 - 8}</math>.</p>                 |

### Задача 7

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-3} \right)^{2-3x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3-2x}{1-2x} \right)^{1-4x}$

5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+4}{3x+2} \right)^{2x-4}$

7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x}$

9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^{1-3x}$

11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{3x+2} \right)^{x+2}$

13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x+2}{4x+1} \right)^{1-5x}$

15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-4}{x+2} \right)^{1-2x}$

17.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-4}{3x-1} \right)^{4-3x}$

19.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-5}{2x+1} \right)^{7x-2}$

21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2-x}{5-x} \right)^{3x+5}$

23.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+2}{5x-1} \right)^{2x-3}$

25.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x} \right)^{3-4x}$

27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1-2x}{3-2x} \right)^{5-3x}$

29.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{3x-2} \right)^{4-3x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-4}{x+1} \right)^{4x-3}$

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^{2-x}$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x-6} \right)^{3-5x}$

8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{x+2} \right)^{3x-4}$

10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x-6} \right)^{2-x}$

12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x} \right)^{4x+1}$

14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{2x-4} \right)^{3x-5}$

16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{3x+2} \right)^{2x-1}$

18.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+5}{3x} \right)^{x+4}$

20.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+1}{5x} \right)^{3-5x}$

22.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1-2x}{3-2x} \right)^{2x-5}$

24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+4}{3x-2} \right)^{4-2x}$

26.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{3x+1} \right)^{2x+1}$

28.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-5}{3x+4} \right)^{2x-2}$

30.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2-3x}{1-3x} \right)^{4x+1}$

### Задача 8

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{3x+2} \right)^{2x+1}$  .
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)^{2-5x}$  .
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{3x-1} \right)^{4x-3}$  .
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{4x+1} \right)^{2x-1}$  .
5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+5}{x-2} \right)^{1-x}$  .
6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{2x-1} \right)^{x+1}$  .
7.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x+1}{4x-1} \right)^{3x-6}$  .
8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x+1}{2x-1} \right)^{3x-5}$  .
9.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x+3}{3x-4} \right)^{-x+2}$  .
10.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x+1}{3x-1} \right)^{5x-1}$  .
11.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x-1}{2x+4} \right)^{4x+3}$  .
12.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x-2}{6x+5} \right)^{2x-4}$  .
13.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x-4}{3x+4} \right)^{3x-7}$  .
14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{4x-5} \right)^{-3x}$  .
15.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{5x-2}{3x+1} \right)^{3x-2}$  .
16.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x-4}{x+6} \right)^{2x-1}$  .
17.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-2}{3x+10} \right)^{-3x}$  .
18.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x-3}{4x+1} \right)^{5x+1}$  .
19.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+3}{5x-1} \right)^{7x+3}$  .
20.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+5}{x-8} \right)^{-2x}$  .
21.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x+7}{4x+1} \right)^{4x-3}$  .
22.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{2x+5} \right)^{-3x}$  .
23.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x-7}{x+6} \right)^{2x-4}$  .
24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1-3x}{2-x} \right)^{-6x}$  .
25.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1-2x}{3-4x} \right)^{1-5x}$  .
26.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4-3x}{5-x} \right)^{4x-3}$  .
27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{2x+5} \right)^{2x-1}$  .
28.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1-2x}{1-4x} \right)^{3x}$  .
29.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3+x}{2x-4} \right)^{-4x}$  .
30.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{4x-2} \right)^{2x-5}$  .

### Задача 9

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x^2}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{4x^2}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 3x}$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{4x^2}$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin 3x}$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ .
8.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}$ .
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{x^2}$ .
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 4x}{3x \operatorname{tg} 4x}$ .
11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} - \frac{1}{\sin 2x} \right)$ .
12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x - \sin^2 6x}{3x^2}$ .
13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin 3x}{x \sin x}$ .
14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3x^2}$ .
15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 8x}{2x^2}$ .
16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{\operatorname{tg} 5x}$ .
17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x - \sin 4x}{x^2}$ .
18.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}$ .
19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{4x^2}$ .
20.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin 4x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 4x} \right)$ .
21.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x - \cos^2 5x}{3x^2}$ .
22.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{x^2 - 2x}$ .
23.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 4x}{x \arcsin 2x}$ .
24.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 3x}$ .
25.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{2x^2}$ .
26.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin x}{\arcsin 2x}$ .
27.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(\pi - x)^2}$ .
28.  $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{ctg} x$ .
29.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x + \sin 3x}$ .
30.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{x^2}$ .

### Задача 10

Знайти границі за допомогою еквівалентних нескінченно малих функцій.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3 - 2x^2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{x^2 - 2x}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{arctg} 3x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 7x}{x^2}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\ln(1+x)}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 5x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^3 - 8}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\operatorname{tg}(x-4)}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x^3)}{x^3}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\ln(1+2x)}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\operatorname{tg} 4x}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^3 - 27}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{5x^2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x^3 + 2x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 5x}{2x^2}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x^2)}{\sin^2 3x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 5x + 6}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3x^2}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2 - 4}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg} 4x}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{4x^2}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 7x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 4x}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x^2)}{\sin^2 5x}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\operatorname{tg}(x-5)}{x^2 - 25}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}.$$

## 2.2. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

*Література:* [1, розділ 5, п. 5.3]; [2, розділ 4, п. 4.3]; [3, розділ 3, п. 3.5]; [4, розділ 2, глава 6, п. 6.7, 6.8]; [5, глава 6, § 6]; [8, розділ 1, п. 1.9]; [11, розділ 1, п. 1.8]; [13, розділ 4, § 13]; [15, розділ 2, § 4, 5]; [16, розділ 5].

### Індивідуальне завдання 2.2

У задачах 1, 2 дослідити функції на неперервність і побудувати графіки [16].

#### Задача 1

1.  $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$
2.  $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0, \\ (x + 1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ -x + 4, & x > 2. \end{cases}$
3.  $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -1, \\ x^2 + 1, & -1 < x \leq 1, \\ -x + 3, & x > 1. \end{cases}$
4.  $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x - 1)^2, & 0 < x < 2, \\ x - 3, & x \geq 2. \end{cases}$
5.  $f(x) = \begin{cases} -2(x + 1), & x \leq -1, \\ (x + 3)^3, & -1 < x \leq 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$
6.  $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x + 1, & x > 2. \end{cases}$
7.  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 3, \\ x + 2, & x > 3. \end{cases}$
8.  $f(x) = \begin{cases} x - 3, & x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 4, \\ 3 + x, & x > 4. \end{cases}$
9.  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \\ x - 2, & x > 2. \end{cases}$
10.  $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 2 + x, & x > 1. \end{cases}$
11.  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$
12.  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x \leq \pi, \\ 2, & x > \pi. \end{cases}$

$$13. f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x^2-1, & 0 \leq x < 1, \\ -x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$15. f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2+1, & 0 \leq x < 2, \\ x+1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$16. f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 2, \\ x^2-2, & x > 2. \end{cases}$$

$$17. f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ x^2-2, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$18. f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < -1, \\ x^2+1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

$$19. f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x \leq 2, \\ x+3, & x > 2. \end{cases}$$

$$20. f(x) = \begin{cases} -x+2, & x \leq -2, \\ x^3, & -2 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

$$21. f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \leq -1, \\ x^2-2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$22. f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x < 3, \\ -x+6, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$23. f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1, \\ x^2+2, & 1 \leq x \leq 2, \\ -2x, & x > 2. \end{cases}$$

$$24. f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1, \\ x-1, & -1 \leq x \leq 3, \\ -x+5, & x > 3. \end{cases}$$

$$25. f(x) = \begin{cases} x, & x < -2, \\ -x+1, & -2 \leq x \leq 1, \\ x^2-1, & x > 1. \end{cases}$$

$$26. f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0, \\ -x^2+4, & 0 < x < 2, \\ x-2, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$27. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ x^2-1, & -1 < x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

$$28. f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \cos, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1-x, & x > \pi. \end{cases}$$

$$29. f(x) = \begin{cases} 2, & x < -1, \\ 1-x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

$$30. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 2, \\ x+4, & x > 2. \end{cases}$$

## Задача 2

1.  $f(x) = 2^{1/(x-2)} + 1.$

3.  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}.$

5.  $f(x) = 4^{1/(x-2)} + 3.$

7.  $f(x) = 2^{1/(x-4)} + 1.$

9.  $f(x) = 6^{1/(x-3)} + 3.$

11.  $f(x) = \frac{x-4}{x+3}.$

13.  $f(x) = 5^{2/(x-1)} + 1.$

15.  $f(x) = 2^{4/(x-2)} - 1.$

17.  $f(x) = 5^{4/(3-x)} + 1.$

19.  $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}.$

21.  $f(x) = 4^{5/(x-2)} + 2.$

23.  $f(x) = 5^{3/(x-4)} + 1.$

25.  $f(x) = \frac{x+3}{x+4}.$

27.  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}.$

29.  $f(x) = 6^{2/(x+4)}.$

2.  $f(x) = 5^{1/(3-x)} - 1.$

4.  $f(x) = \frac{x-3}{x+4}.$

6.  $f(x) = 9^{1/(x-2)} - 2.$

8.  $f(x) = 5^{1/(3-x)} - 2.$

10.  $f(x) = 7^{1/(2-x)} + 1.$

12.  $f(x) = \frac{x+2}{x+5}.$

14.  $f(x) = 4^{2/(1-x)} - 3.$

16.  $f(x) = 8^{3/(2-x)} - 1.$

18.  $f(x) = 2^{3/(x+2)} + 1.$

20.  $f(x) = \frac{4x}{x-2}.$

22.  $f(x) = 3^{2/(1-x)} - 2.$

24.  $f(x) = 3^{4/(x-3)} + 1.$

26.  $f(x) = \frac{x+5}{x-2}.$

28.  $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}.$

30.  $f(x) = 6^{2/(1-x)} - 1.$



### 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

#### 3.1. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

*Література:* [1, розділ 6, п. 6.1-6.5]; [2, розділ 5, п. 5.1-5.3]; [3, розділ 4, п. 4.1-4.2]; [4, розділ 3, глава 7]; [5, глава 7, § 1]; [8, розділ 2, п. 2.1-2.11]; [11, розділ 2, п. 2.1-2.11]; [13, розділ 6, § 16-18]; [15, розділ 3, § 1-4, 8]; [16, розділ 6, п. 6.1-6.4].

#### Індивідуальне завдання 3.1

У задачах 1-8 знайти похідну  $y'$  [16].

##### Задача 1

$$1. \quad y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}.$$

$$2. \quad y = \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 4x^3 + \frac{4}{x^2}.$$

$$3. \quad y = 3x^4 + \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}.$$

$$4. \quad y = 7\sqrt{x} - \frac{2}{x^5} - 3x^3 + \frac{4}{x}.$$

$$5. \quad y = 7x + \frac{5}{x^2} - \sqrt[7]{x^4} + \frac{6}{x}.$$

$$6. \quad y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x}.$$

$$7. \quad y = 3x^5 - \frac{3}{x} - \sqrt{x^3} + \frac{10}{x^5}.$$

$$8. \quad y = \sqrt[3]{x^7} + \frac{3}{x} - 4x^6 + \frac{4}{x^5}.$$

$$9. \quad y = 8x^2 + \sqrt[3]{x^4} - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^3}.$$

$$10. \quad y = 4x^6 + \frac{5}{x} - \sqrt[3]{x^7} - \frac{7}{x^4}.$$

$$11. \quad y = 2\sqrt{x^3} - \frac{7}{x} + 3x^2 - \frac{2}{x^5}.$$

$$12. \quad y = 4x^3 - \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^2} + \frac{6}{x^2}.$$

$$13. \quad y = 5x^3 - \frac{8}{x^2} + 4\sqrt{x} + \frac{1}{x}.$$

$$14. \quad y = \frac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{x} + 5x^4.$$

$$15. \quad y = \frac{4}{x^5} - \frac{9}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 7x^3.$$

$$16. \quad y = \frac{8}{x^3} + \frac{3}{x} + 4\sqrt{x^3} - 2x^7.$$

$$17. \quad y = 5x^2 + \frac{4}{x} - \sqrt[3]{x^7} - 2x^6.$$

$$18. \quad y = 10x^2 + 3\sqrt{x^5} - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^4}.$$

$$19. \quad y = \sqrt{x^5} - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3} - 3x^3.$$

$$20. \quad y = 9x^3 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^7}.$$

$$21. \quad y = 3\sqrt{x} + \frac{4}{x^5} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{7}{x}.$$

$$22. \quad y = \sqrt{x^3} + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^5} - 5x^3.$$

$$23. y = 7x^2 + \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^4} + \frac{8}{x^3}.$$

$$25. y = 8x - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x} - \sqrt[5]{x^4}.$$

$$27. y = 4x^3 + \frac{3}{x} - \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^4}.$$

$$29. y = \frac{7}{x} + \frac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} - 2x^6.$$

$$24. y = 8x^3 - \frac{4}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[7]{x^2}.$$

$$26. y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^5} + 3x.$$

$$28. y = 4x^5 - \frac{5}{x} - \sqrt{x^3} + \frac{2}{x^3}.$$

$$30. y = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}.$$

### Задача 2

$$1. y = \sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5} + \frac{4}{(x-2)^5}.$$

$$2. y = \sqrt[3]{(x-3)^4} - \frac{3}{2x^3 3x + 1}.$$

$$3. y = \sqrt{(x-4)^5} + \frac{5}{(2x^2 + x - 1)^2}.$$

$$4. y = \sqrt[5]{7x^2 - 3x + 5} - \frac{5}{(x-1)^3}.$$

$$5. y = \sqrt[4]{3x^2 - x + 5} - \frac{3}{(x-5)^4}.$$

$$6. y = \sqrt{3x^4 - 2x^3 + x} - \frac{4}{(x+2)^3}.$$

$$7. y = \sqrt[3]{(x-7)^5} + \frac{5}{4x^2 + 3x - 5}.$$

$$8. y = \sqrt[5]{(x+4)^6} - \frac{2}{2x^2 - 3x + 7}.$$

$$9. y = \frac{3}{(x-4)^7} - \sqrt{5x^2 - 4x + 3}.$$

$$10. y = \sqrt[3]{4x^2 - 3x - 4} - \frac{2}{(x-3)^5}.$$

$$11. y = \frac{7}{(x-1)^3} + \sqrt{8x - 3 + x^2}.$$

$$12. y = \sqrt[5]{3x^2 + 4x - 5} + \frac{4}{(x-4)^4}.$$

$$13. y = \sqrt[3]{5x^4 - 2x - 1} + \frac{8}{(x-5)^2}.$$

$$14. y = \frac{3}{(x+2)^5} - \sqrt[7]{5x - 7x^2 - 3}.$$

$$15. y = \sqrt[4]{(x-1)^5} - \frac{4}{7x^2 - 3x + 2}.$$

$$16. y = \sqrt[5]{(x-2)^6} - \frac{3}{7x^3 - x^2 - 4}.$$

$$17. y = \frac{3}{(x+4)^2} - \sqrt[3]{4 + 3x - x^4}.$$

$$18. y = \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{8}{6x^2 + 3x - 7}.$$

$$19. y = \sqrt{1 + 5x - 2x^2} + \frac{3}{(x-3)^4}.$$

$$20. y = \sqrt[3]{5 + 4x - x^2} - \frac{5}{(x+1)^3}.$$

$$21. y = \sqrt[4]{5x^2 - 4x + 1} - \frac{7}{(x-5)^2}.$$

$$22. y = \sqrt[5]{3 - 7x + x^2} - \frac{4}{(x-7)^5}.$$

$$23. y = \sqrt{(x-3)^7} + \frac{9}{7x^2 - 5x - 8}.$$

$$24. y = \sqrt[3]{(x-8)^4} - \frac{2}{1 + 3x - 4x^2}.$$

$$25. y = \frac{3}{4x - 3x^2 + 1} - \sqrt{(x+1)^5}.$$

$$26. y = \frac{3}{x-4} + \sqrt[6]{(2x^2 - 3x + 1)^5}.$$

$$27. y = \frac{4}{(x-7)^3} - \sqrt[3]{(3x^2 - x + 1)^4}.$$

$$28. y = \sqrt{(x-4)^7} - \frac{10}{(3x^2 - 5x + 1)}.$$

$$29. y = \frac{7}{(x+2)^5} - \sqrt{8 - 5x + 2x^2}.$$

$$30. y = \sqrt[3]{(x-1)^5} + \frac{5}{2x^2 4x + 7}.$$

### Задача 3

$$1. y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x^5.$$

$$2. y = \cos^5 3x \cdot \operatorname{tg}(4x + 1)^3.$$

$$3. y = \operatorname{tg}^4 x \cdot \arcsin 4x^5.$$

$$4. y = \arcsin^3 2x \cdot \operatorname{ctg} 7x^4.$$

$$5. y = \operatorname{ctg} 3x \cdot \arccos 3x^2.$$

$$6. y = \arccos^2 4x \cdot \ln(x - 3).$$

$$7. y = \ln^5 x \cdot \operatorname{arctg} 7x^4.$$

$$8. y = \operatorname{arctg}^3 4x \cdot 3^{\sin x}.$$

$$9. y = 2^{\cos x} \cdot \operatorname{arcctg} 5x^3.$$

$$10. y = 4^{-x} \cdot \ln^5(x + 2).$$

$$11. y = 3^{\operatorname{tg} 2x} \cdot \arcsin 7x^4.$$

$$12. y = 5x^2 \cdot \arccos 2x^5.$$

$$13. y = \sin^4 3x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3.$$

$$14. y = \cos^3 4x \cdot \operatorname{arcctg} \sqrt{x}.$$

$$15. y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \arcsin x^5.$$

$$16. y = \operatorname{ctg}^7 x \cdot \arccos 2x^3.$$

$$17. y = e^{-\sin x} \operatorname{tg} 7x^6.$$

$$18. y = e^{\cos x} \operatorname{ctg} 8x^3.$$

$$19. y = \cos^5 x \cdot \arccos 4x.$$

$$20. y = \sin^3 7x \cdot \operatorname{arcctg} 5x^2.$$

$$21. y = \sin^2 3x \cdot \operatorname{arcctg} 3x^5.$$

$$22. y = \cos^5 \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x^4.$$

$$23. y = \operatorname{tg}^6 2x \cdot \cos 7x^2.$$

$$24. y = \operatorname{ctg}^3 4x \cdot \arcsin \sqrt{x}.$$

$$25. y = \operatorname{ctg}(1/x) \cdot \arccos x^4.$$

$$26. y = \operatorname{tg} \sqrt{x} \cdot \operatorname{arcctg} 3x^5.$$

$$27. y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \arccos 2x^3.$$

$$28. y = 2^{\operatorname{tg} x} \operatorname{arctg}^5 3x.$$

$$29. y = \sin^5 3x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$30. y = \cos^4 3x \cdot \arcsin 3x^2.$$

### Задача 4

$$1. y = \operatorname{arcctg}^2 5x \cdot \ln(x - 4).$$

$$2. y = \operatorname{arctg}^3 2x \cdot \ln(x + 5).$$

$$3. y = \arccos^4 x \cdot \ln(x^2 + x - 1).$$

$$4. y = \sqrt{\arccos 2x} \cdot 3^{-x}.$$

$$5. y = \operatorname{tg}^4 3x \cdot \operatorname{arctg} 7x^2.$$

$$6. y = 5^{-x^2} \arcsin 3x^3.$$

$$7. y = \operatorname{arctg}^5 x \cdot \log_2(x - 3).$$

$$8. y = \log_3(x + 5) \cdot \arccos 3x.$$

$$9. y = e^{-x} \cdot \arcsin^2 5x.$$

$$10. y = \log_4(x - 1) \cdot \arcsin^4 x.$$

$$11. y = (x - 4)^5 \cdot \operatorname{arcctg} 3x^2.$$

$$12. y = \operatorname{ctg}^3 4x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3.$$

$$13. y = e^{-\cos x} \operatorname{arctg} 7x^5.$$

$$14. y = (x + 1)^2 \arccos 3x^4.$$

15.  $y = 2^{\sin x} \operatorname{arctg} x^4$ .
17.  $y = 3^{\cos x} \arcsin^2 3x$ .
19.  $y = \lg(x-2) \cdot \arcsin^5 x$
21.  $y = \ln(x+9) \cdot \operatorname{arctg}^3 2x$ .
23.  $y = 4^{-\sin x} \operatorname{arctg} 3x$ .
25.  $y = \lg(x-3) \cdot \arcsin^2 5x$ .
27.  $y = 2^{-x} \operatorname{arctg}^3 4x$ .
29.  $y = \lg(x+3) \cdot \operatorname{arctg}^4 3x$ .
16.  $y = 3^{-x^3} \operatorname{arctg} 2x^5$ .
18.  $y = \ln(x-10) \cdot \arccos^2 4x$ .
20.  $y = \log_3(x+1) \cdot \operatorname{arctg}^5 7x$ .
22.  $y = \lg(x+2) \cdot \arcsin^2 3x$ .
24.  $y = 2^{\cos x} \operatorname{arctg}^3 x$ .
26.  $y = \log_2(x+3) \cdot \arccos^2 x$ .
28.  $y = \ln(x-4) \cdot \operatorname{arctg}^4 3x$ .
30.  $y = \log_5(x+1) \cdot \operatorname{arctg}^2 x^3$ .

### Задача 5

1.  $y = \operatorname{tg}^4 3x \cdot \arcsin 2x^3$ .
3.  $y = 2^{-x^3} \cdot \operatorname{arctg} 7x^4$ .
5.  $y = 3^{\cos x} \ln(x^2 - 3x + 7)$ .
7.  $y = \arccos^3 5x \cdot \operatorname{tg} x^4$ .
9.  $y = \arccos x^2 \cdot \operatorname{ctg} 7x^3$ .
11.  $y = \operatorname{arctg}^4 x \cdot \cos 7x^4$ .
13.  $y = (x+5)^2 \arccos^3 5x$ .
15.  $y = (x+2)^7 \arccos \sqrt{x}$ .
17.  $y = \ln(x-3) \cdot \arccos 3x^4$ .
19.  $y = (x-7)^4 \operatorname{arctg}^2 7x$ .
21.  $y = \sqrt[3]{x-4} \arcsin^4 5x$ .
23.  $y = \sqrt{(x+3)^5} \arcsin 2x^3$ .
25.  $y = \operatorname{tg}^3 x \cdot \operatorname{arctg} 3x$ .
27.  $y = \sqrt[5]{(x+4)^2} \arcsin 7x^2$ .
29.  $y = e^{-\cos x} \arcsin 2x$ .
2.  $y = (x-2)^4 \arcsin 5x^4$ .
4.  $y = (x+6)^5 \operatorname{arctg} 3x^5$ .
6.  $y = \log_2(x-7) \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ .
8.  $y = (x-5)^7 \operatorname{arctg} 7x^3$ .
10.  $y = 5^{-x^2} \arccos 5x^4$ .
12.  $y = 4(x-7)^6 \arcsin 3x^5$ .
14.  $y = 2^{-\sin x} \arcsin^3 2x$ .
16.  $y = (x-7)^5 \arcsin 7x^4$ .
18.  $y = \log_2(x-4) \cdot \operatorname{arctg}^3 4x$ .
20.  $y = \sqrt[3]{x-3} \arccos^4 2x$ .
22.  $y = (x-3)^5 \arccos 3x^6$ .
24.  $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} \arccos 3x$ .
26.  $y = \sqrt{(x-2)^3} \operatorname{arctg}(7x-1)$ .
28.  $y = \arcsin^3 4x \cdot \operatorname{ctg} 3x$ .
30.  $y = \sqrt{(x+5)^3} \arccos^4 x$ .

### Задача 6

1.  $y = (\operatorname{ctg} 3x)^{\arcsin x}$ .
3.  $y = (\sin 3x)^{\arccos x}$ .
5.  $y = (\sin(x+2))^{\arcsin 2x}$ .
2.  $y = (\cos(x+2))^{\ln x}$ .
4.  $y = (\operatorname{tg} 5x)^{\arcsin(x+1)}$ .
6.  $y = (\cos 5x)^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$ .

7.  $y = (\sqrt{3x+2})^{\operatorname{arctg} 3x}$ .
9.  $y = (\log_2(x+4))^{\operatorname{ctg} 7x}$ .
11.  $y = (\cos 3x)^{\operatorname{ctg}(1/x)}$ .
13.  $y = (\arccos 5x)^{\ln x}$ .
15.  $y = (\ln(x+7))^{\operatorname{ctg} 2x}$ .
17.  $y = (\operatorname{tg} \sqrt{x+1})^{\operatorname{arctg} 2x}$ .
19.  $y = (\cos(x+5))^{\operatorname{arcsin} 3x}$ .
21.  $y = (\sin 4x)^{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$ .
23.  $y = (\operatorname{ctg} 2x^3)^{\sin \sqrt{x}}$ .
25.  $y = (\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$ .
27.  $y = (\sin 5x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}$ .
29.  $y = (\operatorname{ctg} \sqrt{x})^{\sin(x+3)}$ .
8.  $y = (\ln(x+3))^{\sin \sqrt{x}}$ .
10.  $y = (\sin 3x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}$ .
12.  $y = (\arcsin 5x)^{\operatorname{tg} \sqrt{x}}$ .
14.  $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin x}$ .
16.  $y = (\operatorname{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$ .
18.  $y = (\operatorname{ctg}(1/x))^{\operatorname{arcsin} 7x}$ .
20.  $y = (\sqrt{x+5})^{\operatorname{arccos} 3x}$ .
22.  $y = (\operatorname{tg} 3x^4)^{\sqrt{x+3}}$ .
24.  $y = (\operatorname{tg} 7x^5)^{\sqrt{x+2}}$ .
26.  $y = (\operatorname{ctg} 7x)^{\sin(x+3)}$ .
28.  $y = (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{tg}(3x+1)}$ .
30.  $y = (\sin 3x)^{\operatorname{arctg} 2x}$ .

### Задача 7

1.  $y = (\arccos(x+2))^{\operatorname{tg} 3x}$ .
3.  $y = (\operatorname{arctg}(x+7))^{\cos 2x}$ .
5.  $y = (\operatorname{ctg}(3x-2))^{\operatorname{arcsin} 3x}$ .
7.  $y = (\cos(2x-5))^{\operatorname{arctg} 5x}$ .
9.  $y = (\arcsin 2x)^{\ln(x+3)}$ .
11.  $y = (\operatorname{arctg} 5x)^{\log_2(x+4)}$ .
13.  $y = (\log_4(2x+4))^{\operatorname{arcsin} x}$ .
15.  $y = (\lg(7x-5))^{\operatorname{arctg} 2x}$ .
17.  $y = (\log_2(6x+5))^{\operatorname{arcsin} 2x}$ .
19.  $y = (\ln(7x-3))^{\operatorname{arctg} 5x}$ .
21.  $y = (\sin(8x-7))^{\operatorname{ctg}(x+3)}$ .
23.  $y = (\operatorname{tg}(9x+2))^{\cos(2x-1)}$ .
25.  $y = (\sin(3x-7))^{\cos(x+4)}$ .
27.  $y = (\operatorname{tg}(7x-5))^{\sin(x+2)}$ .
29.  $y = (\ln(7x+4))^{\operatorname{tg} x}$ .
2.  $y = (\arcsin 2x)^{\operatorname{ctg}(x+1)}$ .
4.  $y = (\operatorname{arctg}(x-3))^{\sin 4x}$ .
6.  $y = (\operatorname{tg}(4x-3))^{\operatorname{arccos} 2x}$ .
8.  $y = (\sin(7x+4))^{\operatorname{arctg} x}$ .
10.  $y = (\arccos 3x)^{\lg(5x-1)}$ .
12.  $y = (\operatorname{arctg} 7x)^{\lg(x+1)}$ .
14.  $y = (\log_5(3x+2))^{\operatorname{arccos} x}$ .
16.  $y = (\ln(5x-4))^{\operatorname{arctg} x}$ .
18.  $y = (\lg(4x-3))^{\operatorname{arccos} 4x}$ .
20.  $y = (\log_5(2x+5))^{\operatorname{arctg} x}$ .
22.  $y = (\cos(3x+8))^{\operatorname{tg}(x-7)}$ .
24.  $y = (\operatorname{ctg}(7x+5))^{\sin 3x}$ .
26.  $y = (\cos(2x-3))^{\operatorname{tg}(x+5)}$ .
28.  $y = (\cos(3x+2))^{\cos(x+4)}$ .
30.  $y = (\lg(8x+3))^{\operatorname{tg} 5x}$ .

### Задача 8

$$1. y = \frac{\sqrt{3x+7} (2x-3)^4}{(5x+2)^5}.$$

$$2. y = \frac{(x-3)^5 (3x+2)^3}{\sqrt{(4x-1)^3}}.$$

$$3. y = \frac{(3x-2)^3 \sqrt{(2x+1)^5}}{(5x-4)^2}.$$

$$4. y = \frac{(2x+3)^5 \sqrt{(5x-2)^2}}{(3x+1)^7}.$$

$$5. y = \frac{(3x+2)^7 (4x-3)^3}{\sqrt{(5x+1)^5}}.$$

$$6. y = \frac{(2x-1)^4 (7x+2)^5}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}}.$$

$$7. y = \frac{(2x-3)^2 \sqrt{3x+4}}{(5x+2)^7}.$$

$$8. y = \frac{(2x-7)^{10} \sqrt{3x-1}}{(4x+3)^5}.$$

$$9. y = \frac{(3x+1)^8 (2x-3)^2}{\sqrt{(5x+2)^5}}.$$

$$10. y = \frac{(5x+2)(4x-7)^4}{\sqrt[3]{(2x-1)^4}}.$$

$$11. y = \frac{\sqrt[5]{(3x+4)^3}}{(2x-1)^2 (4x+3)^5}.$$

$$12. y = \frac{\sqrt[3]{(2x-1)^7}}{(3x+1)^5 (4x-5)^3}.$$

$$13. y = \frac{\sqrt{(3x+2)^3} (2x-1)^4}{(5x+2)^7}.$$

$$14. y = \frac{\sqrt[3]{(3x-2)^5} (4x+3)^2}{(2x-7)^3}.$$

$$15. y = \frac{\sqrt[4]{3x-8} (5x+2)^6}{(2x-1)^5}.$$

$$16. y = \frac{\sqrt[5]{3x+1} (4x-3)^7}{(5x+8)^3}.$$

$$17. y = \frac{\sqrt[7]{(3x-2)^4}}{(4x+1)^2 (7x-6)^5}.$$

$$18. y = \frac{\sqrt[5]{(3x+1)^2}}{(2x-3)^4 (5x-4)^3}.$$

$$19. y = \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(2x+3)^7 (5x-4)^2}.$$

$$20. y = \frac{\sqrt[3]{(x^2-2)^4}}{(2x-5)(4x+1)^7}.$$

$$21. y = \frac{(3x^2+4)^3 (5x-2)^4}{\sqrt[3]{(x^2-2)^5}}.$$

$$22. y = \frac{(2x-1)^6 (x^5+2)^3}{\sqrt[5]{(4x^3+3)^2}}.$$

$$23. y = \frac{(2x^2-x+1)^4 (2x-7)^2}{\sqrt[3]{(3x+2)^5}}.$$

$$24. y = \frac{(3x^2+7)^2 (2x-3)^5}{\sqrt{x^2+3x-1}}.$$

$$25. y = \frac{\sqrt[3]{7x-3} (3x^2+7)^5}{(5x-4)^2}.$$

$$26. y = \frac{\sqrt{3x^2+10} (3x-8)^3}{(4x-1)^5}.$$

$$27. y = \frac{\sqrt[5]{(x^2 - 2)^3 (2x - 1)^7}}{(5x^2 + 3)^4}.$$

$$28. y = \frac{\sqrt[4]{(2x + 1)^3 (x^3 - 2)^5}}{(5x^2 - 3)^2}.$$

$$29. y = \frac{\sqrt[6]{(3x - 1)^5}}{(x^3 + 2)^4 (2x^4 - 5)^7}.$$

$$30. y = \frac{\sqrt[5]{(3x^4 + 2)^3}}{(2x - 1)^4 (5x^3 - 3)^5}.$$

### Задача 9

Знайти  $y'$  і  $y''$ .

$$1. y^2 = 8xy.$$

$$2. x^2 + y^2 = 4.$$

$$3. y + x = \operatorname{arctg} y.$$

$$4. x^3 + xy + y^3 = 1.$$

$$5. y^2 - x = y \cos 2x.$$

$$6. \operatorname{arctg} y = 2x^2 + y.$$

$$7. \operatorname{tg} y = x + y^2.$$

$$8. 2x + 3y = \sin y.$$

$$9. y = e^{2y} + x^2.$$

$$10. \ln y - y/x = 2.$$

$$11. x^2 y^2 + 2x + 3y = 0.$$

$$12. xy^2 + y^4 = 2x + 1.$$

$$13. \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3}.$$

$$14. y^2 = \frac{x + y}{x - y}.$$

$$15. \sin^2(x + y^2) = 1.$$

$$16. \operatorname{ctg}(x - y) = 2x.$$

$$17. x/y = \cos^2(x + y).$$

$$18. x^4 + xy^2 + y^3 = 1.$$

$$19. e^y = 2x + 4y.$$

$$20. \operatorname{tg}^2(x + 2y) = 4x + 3y.$$

$$21. x^3 + y^3 = xy.$$

$$22. y^2 = 4y - x/y^2.$$

$$23. 2^{x/y} = x^2 + y^2.$$

$$24. \ln(y + x^2) = y/x.$$

$$25. \operatorname{arcsin}(x + y) = 2x + 3y.$$

$$26. \cos^2(2x + 5y) = x^2 - y.$$

$$27. x^2 + \sin(x/y) = y^2.$$

$$28. x \cos(x - y) = 2xy.$$

$$29. \sqrt{x + y} = x^2 - y^2.$$

$$30. y \operatorname{tg}(x + y) = 2.$$

### Задача 10

Знайти  $y'$  і  $y''$ .

$$1. \begin{cases} x = (t + 1) \cos t, \\ y = 4t^2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = 4 \cos^2 t, \\ y = 2 \sin^2 t. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = 1/(t + 1), \\ y = [2t/(t + 1)]^2. \end{cases}$$

5.  $\begin{cases} x = 2^{-4t}, \\ y = 2^{3t}. \end{cases}$
7.  $\begin{cases} x = t/(t^3 + 1), \\ y = 2t^2/(t^2 + 1). \end{cases}$
9.  $\begin{cases} x = t + t^2, \\ y = 2t^3 + t^2. \end{cases}$
11.  $\begin{cases} x = 4e^t \cos t, \\ y = 2e^t \sin t. \end{cases}$
13.  $\begin{cases} x = 5 \cos 2t, \\ y = 3 \sin 2t. \end{cases}$
15.  $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = 2 \ln(t^2 + 1). \end{cases}$
17.  $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t). \end{cases}$
19.  $\begin{cases} x = 3 \sin 2t, \\ y = 2 \cos^2 t. \end{cases}$
21.  $\begin{cases} x = (\ln t)/t, \\ y = 3t^2 \ln t. \end{cases}$
23.  $\begin{cases} x = \arcsin 3t, \\ y = \sqrt{1 - 9t^2}. \end{cases}$
25.  $\begin{cases} x = \sqrt{(t-1)^3}, \\ y = \sqrt{t-1}. \end{cases}$
27.  $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$
29.  $\begin{cases} x = \sqrt{t+1}, \\ y = 4\sqrt[5]{t+1}. \end{cases}$
6.  $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$
8.  $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1}, \\ y = (t+1)\sqrt{t^2 - 1}. \end{cases}$
10.  $\begin{cases} x = (\ln t)/t, \\ y = 4t \ln t. \end{cases}$
12.  $\begin{cases} x = t^4, \\ y = 2t \ln t. \end{cases}$
14.  $\begin{cases} x = 3 \sin^2 t, \\ y = 2 \cos^2 t. \end{cases}$
16.  $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$
18.  $\begin{cases} x = 2(\sin t - t \cos t), \\ y = 2(\cos t + t \sin t). \end{cases}$
20.  $\begin{cases} x = e^{4t}, \\ y = e^{-5t}. \end{cases}$
22.  $\begin{cases} x = \sqrt{1 - 4t^2}, \\ y = \arccos 2t. \end{cases}$
24.  $\begin{cases} x = te^{2t}, \\ y = t/e^{3t}. \end{cases}$
26.  $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = 4(t + \ln t). \end{cases}$
28.  $\begin{cases} x = \ln(t^2 + 1), \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$
30.  $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$



## 3.2. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

*Література:* [1, розділ 6, п. 6.8]; [2, розділ 5, п. 5.4]; [3, розділ 3, п. 3.4.4]; [4, розділ 3, глава 8, п. 8.1, 8.2]; [8, розділ 2, п. 2.13]; [11, розділ 2, п. 2.13]; [13, розділ 6, § 19]; [15, розділ 3, § 6, 7]; [16, розділ 6, п. 6.5].

### Індивідуальне завдання 3.2

У задачах 1-3 [16] знайти границі, використовуючи правило Лопіталя.

#### Задача 1

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - x}{x-1}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - x}{x - \sin x}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2(\pi x/6)}{1 - x^2}$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (a^{1/x} - 1)x$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x$ .
- $\lim_{x \rightarrow a} \arcsin \frac{x-a}{a} \cdot \operatorname{ctg}(x-a)$ .
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 - \sin x^2}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{2 \sin x + x}$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x^2} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1 - \sin(\pi x/2)}$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}$ .
- $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{(1/\cos^2 x) - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}$ .
- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \cos x) \cdot \operatorname{ctg} x$ .
- $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg}(\pi x/2)$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(3/x)$ .
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x+1}}{\sqrt{2+x+x}}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ .

$$27. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sin(\pi x/2)}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{4x - \sin x}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}.$$

### Задача 2

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg}^2 2x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right).$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right).$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{c^x - 1}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x^n - a^n}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right).$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \cdot \operatorname{ctg} x.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x^3}{\sin^2 2x}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 2x) \cdot \operatorname{ctg} 4x.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \sin\left(\frac{a}{x}\right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \pi/(2a)} \frac{1 - \sin ax}{(2ax - \pi)^2}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+2x)}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x^3}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(5x/2)}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^2 \sin \frac{b}{x} \right).$$

### Задача 3

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{5 - 5e^{-3x}}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1 - (x^2/2)}{\cos x - 1 - (x^2/2)}$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{tg} x - x}$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-x) + \operatorname{tg}(\pi x/2)}{\operatorname{ctg} \pi x}$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x \cdot \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$ .
8.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos(\pi x/2) \cdot \ln(1-x)}$ .
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(e^{x^2} - 1)}{\cos x - 1}$ .
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - \cos ax}{e^{bx} - \cos bx}$ .
11.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$ .
12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{a}{6x}$ .
13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} 4x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}$ .
14.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$ .
15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$ .
16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}$ .
17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$ .
18.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ .
19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$ .
20.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$ .
21.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ .
22.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-0,01x}$ .
23.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + xe^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}$ .
24.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\log_2 x}$ .
25.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{4/x^2} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi}$ .
26.  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \ln 2x \cdot \ln(2x - 1)$ .
27.  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \left( \frac{x}{3x-1} - \frac{1}{\ln 3x} \right)$ .
28.  $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{tg} x$ .
29.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x}$ .
30.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{x-1}$ .

## 4. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ І ПОБУДОВИ ГРАФІКІВ

*Література:* [1, розділ 6, п. 6.6, 6.7]; [2, розділ 5, п. 5.5-5.8]; [3, розділ 4, п. 4.3]; [5, глава 7, § 2]; [8, розділ 2, п. 2.12, 2.16]; [11, розділ 2, п. 2.12, 2.16]; [13, розділ 6, § 20, 21]; [4, розділ 3, глава 8]; [15, розділ 3, § 5, 9, 11]; [16, розділ 6, п. 6.6-6.8].

### Індивідуальне завдання 4.1

У задачах 1, 2 провести повне дослідження функцій і побудувати їх графіки [16].

#### Задача 1

$$1. \quad y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$

$$3. \quad y = e^{\frac{1}{3+x}}.$$

$$5. \quad y = \frac{4x - x^2 - 4}{x}.$$

$$7. \quad y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

$$9. \quad y = x - \ln(1 + x^2).$$

$$11. \quad y = x^2 - 2 \ln x.$$

$$13. \quad y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}.$$

$$15. \quad y = -\ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$17. \quad y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1}.$$

$$19. \quad y = (x - 1)e^{3x+1}.$$

$$21. \quad y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

$$2. \quad y = \frac{x + 1}{(x - 1)^2}.$$

$$4. \quad y = \frac{x}{(9 - x)}.$$

$$6. \quad y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}.$$

$$8. \quad y = x + \frac{\ln x}{x}.$$

$$10. \quad y = \frac{x^2}{x^2 - x + 1}.$$

$$12. \quad y = x^3 e^{-x^2/2}.$$

$$14. \quad y = \frac{(x - 2)^2}{x + 1}.$$

$$16. \quad y = \ln(x^2 + 1).$$

$$18. \quad y = x \ln x.$$

$$20. \quad y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}.$$

$$22. \quad y = \frac{x^5}{x^4 - 1}.$$

23.  $y = \frac{(x^3 + 4)}{x^2}$ .

25.  $y = \frac{x^3}{(x^4 - 1)}$ .

27.  $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

29.  $y = \frac{4 - 2x}{1 - x^2}$ .

24.  $y = \frac{1}{3} \sqrt[3]{x^2} (x - 5)$ .

26.  $y = \frac{(x^{2x} + 1)}{e^x}$ .

28.  $y = \frac{5x^4 + 3}{x}$ .

30.  $y = \frac{5x}{4 - x^2}$ .

**Задача 2**

1.  $y = e^{2x-x^2}$ .

3.  $y = \frac{2(x+1)^2}{x-2}$ .

5.  $y = \frac{4e^{x^2} - 1}{e^{x^2}}$ .

7.  $y = xe^{1/x}$ .

9.  $y = \frac{(1-x)^3}{(x-2)^2}$ .

11.  $y = x^2 e^{1/x}$ .

13.  $y = (x+2)e^{1-x}$ .

15.  $y = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$ .

17.  $y = (x+1)e^{2x}$ .

19.  $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$ .

21.  $y = \ln(1 - 1/x^2)$ .

23.  $y = x - \ln(1 + x^2)$ .

25.  $y = (x-1)e^{4x+2}$ .

27.  $y = -x \ln^2 x$ .

29.  $y = e^{1/(2-x)}$ .

2.  $y = x + \ln(x^2 - 4)$ .

4.  $y = x \ln^2 x$ .

6.  $y = x^2 e^{-x^2/2}$ .

8.  $y = \frac{2+x}{(x+1)^2}$ .

10.  $y = xe^x$ .

12.  $y = x^2 / (x+2)^2$ .

14.  $y = \frac{\ln x}{x}$ .

16.  $y = \frac{x^3}{9 - x^2}$ .

18.  $y = 4x / (4 + x^2)$ .

20.  $y = \ln(x^2 - 2x + 6)$ .

22.  $y = x^3 e^{x+1}$ .

24.  $y = 1 - \ln^3 x$ .

26.  $y = \frac{2x^2 + 2 + 4x}{2 - x}$ .

28.  $y = x^2 - 2 \ln x$ .

30.  $y = \ln(4 - x^2)$ .

### Задача 3

Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = f(x)$  на відріжку  $[a; b]$  [16].

1.  $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$ ,  $[0; 3]$ .
2.  $y = 3x/(x^2 + 1)$ ,  $[0; 5]$ .
3.  $y = (2x - 1)/(x - 1)^2$ ,  $[-1/2; 0]$ .
4.  $y = (x + 2)e^{1-x}$ ,  $[-2; 2]$ .
5.  $y = \ln(x^2 - 2x + 4)$ ,  $[-1; 3/2]$ .
6.  $y = x^3/(x^2 - x + 1)$ ,  $[-1; 1]$ .
7.  $y = ((x + 1)/x)^3$ ,  $[1; 2]$ .
8.  $y = \sqrt{x - x^3}$ ,  $[0; 1]$ .
9.  $y = 4 - e^{-x}$ ,  $[0; 1]$ .
10.  $y = (x^3 + 4)/x^2$ ,  $[1; 2]$ .
11.  $y = xe^x$ ,  $[-2; 0]$ .
12.  $y = (x - 2)e^x$ ,  $[-2; 1]$ .
13.  $y = (x - 1)e^{-x}$ ,  $[0; 3]$ .
14.  $y = x/(9 - x^2)$ ,  $[-2; 2]$ .
15.  $y = (1 + \ln x)/x$ ,  $[1/e; e]$ .
16.  $y = e^{4x-x^2}$ ,  $[1; 3]$ .
17.  $y = (x^5 - 8)/x^4$ ,  $[-3; -1]$ .
18.  $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$ ,  $[-1; 2]$ .
19.  $y = x \ln x$ ,  $[1/e^2; 1]$ .
20.  $y = x^3 e^{x+1}$ ,  $[-4; 0]$ .
21.  $y = (x^2 - 2x + 2)/(x + 1)$ ,  $[1; 3]$ .
22.  $y = (x + 1)\sqrt[3]{x^2}$ ,  $[-4/5; 3]$ .
23.  $y = e^{6x-x^2}$ ,  $[-3; 3]$ .
24.  $y = (\ln x)/x$ ,  $[1; 4]$ .
25.  $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$ ,  $[-3; 1]$ .
26.  $y = x^5 - 5x^4 + 5x + 1$ ,  $[-1; 2]$ .
27.  $y = (3 - x)e^{-x}$ ,  $[0; 5]$ .
28.  $y = \sqrt{3}/2 + \cos x$ ,  $[0; \pi/2]$ .
29.  $y = 108x - x^4$ ,  $[-1; 4]$ .
30.  $y = x^2/4 - 6x^3 + 7$ ,  $[16; 20]$ .

## 5. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

*Література:* [1, розділ 8, п. 8.1, 8.2]; [3, розділ 6, п. 6.1]; [4, розділ 4, глава 10]; [5, глава 9]; [8, розділ 1]; [11, розділ 1]; [13, розділ 7, § 22]; [15, розділ 4]; [17, розділ 8].

### Індивідуальне завдання 5.1

У задачах 1-7 обчислити невизначені інтеграли [17].

#### Задача 1

1.  $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$ .
2.  $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{x-1} dx$ .
3.  $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$ .
4.  $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}$ .
5.  $\int \frac{\ln^3(1-x)}{x-1} dx$ .
6.  $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1} dx$ .
7.  $\int \frac{\cos x dx}{\sin x + 2}$ .
8.  $\int \frac{\cos x dx}{3 - \sin^2 x}$ .
9.  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x + 3}}$ .
10.  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos x + 1}}$ .
11.  $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{(\sin x - 4)^3}}$ .
12.  $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx$ .
13.  $\int \frac{\operatorname{ctg}^5 6x}{\sin^2 6x} dx$ .
14.  $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 4x}}{\cos^2 4x} dx$ .
15.  $\int \frac{\operatorname{ctg}^4 3x}{\sin^2 3x} dx$ .
16.  $\int \frac{dx}{\cos^2 4x \sqrt{\operatorname{tg} 4x}}$ .
17.  $\int \frac{dx}{\sin^2 3x \operatorname{ctg}^3 3x}$ .
18.  $\int \frac{\operatorname{tg} 6x}{\cos^2 6x} dx$ .
19.  $\int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}} dx$ .
20.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2} \arccos 5x}$ .
21.  $\int \frac{\operatorname{arctg}^8 3x}{1+9x^2} dx$ .
22.  $\int \frac{\arccos^2 7x}{\sqrt{1-49x^2}} dx$ .
23.  $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2} dx$ .
24.  $\int \frac{\operatorname{arcctg}^4 8x}{1+64x^2} dx$ .

25.  $\int e^{3\cos 2x+1} \sin 2x dx.$

27.  $\int e^{2x^3+1} x^2 dx.$

29.  $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx.$

26.  $\int e^{1-6x^2} x dx.$

28.  $\int e^{3x^3} x^2 dx.$

30.  $\int \frac{x^4 dx}{e^{2x^5+1}}.$

**Задача 2**

1.  $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4} dx.$

3.  $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6} dx.$

5.  $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx.$

7.  $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8} dx.$

9.  $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2} dx.$

11.  $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1} dx.$

13.  $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13} dx.$

15.  $\int \frac{x}{2x^2+2x+5} dx.$

17.  $\int \frac{2x-1}{2x^2+8x-6} dx.$

19.  $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x-9} dx.$

21.  $\int \frac{x-4}{3x^2+x-1} dx.$

23.  $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4} dx.$

25.  $\int \frac{x-3}{4x^2+2x-3} dx.$

27.  $\int \frac{3x-2}{x^2+5x-1} dx.$

29.  $\int \frac{2x+1}{5x^2+2x+10} dx.$

2.  $\int \frac{x+6}{3x^2+x+1} dx.$

4.  $\int \frac{x}{2x^2+x+5} dx.$

6.  $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2} dx.$

8.  $\int \frac{x+4}{2x^2-7x+1} dx.$

10.  $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5} dx.$

12.  $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3} dx.$

14.  $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1} dx.$

16.  $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4} dx.$

18.  $\int \frac{2-x}{4x^2+16x-12} dx.$

20.  $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2} dx.$

22.  $\int \frac{3x+1}{x^2-4x-2} dx.$

24.  $\int \frac{2x+3}{3x^2+2x-7} dx.$

26.  $\int \frac{x+2}{3x^2-x+5} dx.$

28.  $\int \frac{x-7}{4x^2+3x-1} dx.$

30.  $\int \frac{x-4}{5x^2-x+7} dx.$



### Задача 3

1.  $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}} dx.$
2.  $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}} dx.$
3.  $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx.$
4.  $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}} dx.$
5.  $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}} dx.$
6.  $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx.$
7.  $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}} dx.$
8.  $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx.$
9.  $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}} dx.$
10.  $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx.$
11.  $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}} dx.$
12.  $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}} dx.$
13.  $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx.$
14.  $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}} dx.$
15.  $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx.$
16.  $\int \frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}} dx.$
17.  $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}} dx.$
18.  $\int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}} dx.$
19.  $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}} dx.$
20.  $\int \frac{x-8}{\sqrt{4x^2+x-5}} dx.$
21.  $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2+3x-x^2}} dx.$
22.  $\int \frac{x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx.$
23.  $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}} dx.$
24.  $\int \frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx.$
25.  $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}} dx.$
26.  $\int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}} dx.$
27.  $\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}} dx.$
28.  $\int \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2-x+5}} dx.$
29.  $\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-5x+1}} dx.$
30.  $\int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}} dx.$

#### Задача 4

- $\int (x^2 - x + 1) \ln x dx.$
- $\int x \ln(x^2 + 1) dx.$
- $\int x \ln^2 x dx.$
- $\int (x^2 - 4) \sin 5x dx.$
- $\int \ln \frac{2-x}{2+x} dx.$
- $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx.$
- $\int x \operatorname{arctg} 2x dx.$
- $\int \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} dx.$
- $\int x \operatorname{arctg} x dx.$
- $\int x \operatorname{arccot} x dx.$
- $\int \frac{x \arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$
- $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$
- $\int \operatorname{arctg} x dx.$
- $\int \arccos 2x dx.$
- $\int x^2 \cos 2x dx.$
- $\int x \sin^2 x dx.$
- $\int x \sin x \cos x dx.$
- $\int x^2 (\sin 2x - 3) dx.$
- $\int (x^2 + x) e^{-x} dx.$
- $\int (x^2 - x + 1) e^{-2x} dx.$
- $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$
- $\int (x^2 + x) \sin^2 x dx.$
- $\int (x^3 + 3) \sin x dx.$
- $\int \arcsin 9x dx.$
- $\int \ln(x-5) dx.$
- $\int \operatorname{arctg} 2x dx.$
- $\int \arcsin 5x dx.$
- $\int \arccos x dx.$
- $\int x \sin(x+3) dx.$
- $\int x \cos(x+4) dx.$

#### Задача 5

- $\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx.$
- $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8} dx.$
- $\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx.$
- $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx.$
- $\int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx.$
- $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1} dx.$
- $\int \frac{36}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx.$
- $\int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx.$
- $\int \frac{7x-10}{x^3+8} dx.$
- $\int \frac{4x^2+3x+17}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx.$

11.  $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2} dx.$
12.  $\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx.$
13.  $\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8} dx.$
14.  $\int \frac{x^2-13x+40}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx.$
15.  $\int \frac{3-9x}{x^3-1} dx.$
16.  $\int \frac{6-9x}{x^3+8} dx.$
17.  $\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx.$
18.  $\int \frac{x^2+23}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx.$
19.  $\int \frac{2x^2+7x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx.$
20.  $\int \frac{19x-x^2-34}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx.$
21.  $\int \frac{4x^2+38}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx.$
22.  $\int \frac{8dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}.$
23.  $\int \frac{2x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx.$
24.  $\int \frac{5x+13}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx.$
25.  $\int \frac{4x^2+x+10}{x^3+8} dx.$
26.  $\int \frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx.$
27.  $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1} dx.$
28.  $\int \frac{6xdx}{x^3-1}.$
29.  $\int \frac{5x^2+17x+36}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx.$
30.  $\int \frac{2x+22}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx.$

### Задача 6

1.  $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}} dx.$
2.  $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx.$
3.  $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} dx.$
4.  $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}} dx.$
5.  $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx.$
6.  $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx.$
7.  $\int \frac{\sqrt{x-1}dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}.$
8.  $\int \frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}} dx.$
9.  $\int \frac{\sqrt{x+3}dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}}.$
10.  $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}.$

11.  $\int \frac{\sqrt{x+3} dx}{1+\sqrt[3]{x+3}}$ .
12.  $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} dx$ .
13.  $\int \frac{\sqrt[6]{x+3} dx}{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt{x+3}}$ .
14.  $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[6]{x+1}}{(x+1)(1+\sqrt[3]{x+1})} dx$ .
15.  $\int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x}} dx$ .
16.  $\int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}} dx$ .
17.  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}$ .
18.  $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 1} dx$ .
19.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1-\sqrt[4]{x}}$ .
20.  $\int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1} - \sqrt[3]{3x+1}} dx$ .
21.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x - 4\sqrt[3]{x^2}}$ .
22.  $\int \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$ .
23.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x - \sqrt[3]{x^2}}$ .
24.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{3x + \sqrt[3]{x^2}}$ .
25.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1 - \sqrt[3]{x}}$ .
26.  $\int \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x(1 + \sqrt[6]{x})} dx$ .
27.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt[4]{x}}$ .
28.  $\int \frac{\sqrt{3x+1} - 1}{\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt{3x+1}} dx$ .
29.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{4x - \sqrt[3]{x^2}}$ .
30.  $\int \frac{\sqrt{x+1} - 1}{(\sqrt[3]{x+1} + 1)\sqrt{x+1}} dx$ .

### Задача 7

1.  $\int \frac{dx}{5 + 2\sin x + 3\cos x}$ .
2.  $\int \frac{3\sin x - 2\cos x}{1 + \cos x} dx$ .
3.  $\int \frac{dx}{5\cos x + 10\sin x}$ .
4.  $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$ .
5.  $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 3}$ .
6.  $\int \frac{2 - \sin x + 3\cos x}{1 + \cos x} dx$ .
7.  $\int \frac{dx}{8\sin^2 x - 16\sin x \cos x}$ .
8.  $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$ .
9.  $\int \frac{2\operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$ .
10.  $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ .
11.  $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$ .
12.  $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 2}$ .

13.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - \cos^2 x}$ .
14.  $\int \cos^4 3x \sin^2 3x dx$ .
15.  $\int \sqrt[5]{\sin^4 x} \cos^3 x dx$ .
16.  $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$ .
17.  $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$ .
18.  $\int \sin^3 x \cos^8 x dx$ .
19.  $\int \frac{3 \sin^3 x dx}{\cos^4 x}$ .
20.  $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}$ .
21.  $\int \sin^3 6x dx$ .
22.  $\int \sin^4 2x dx$ .
23.  $\int \cos^3 4x dx$ .
24.  $\int \operatorname{tg}^4 3x dx$ .
25.  $\int \operatorname{tg}^3 x dx$ .
26.  $\int x \operatorname{tg}^2 x^2 dx$ .
27.  $\int \sin 3x \cos x dx$ .
28.  $\int \cos 2x \cos 3x dx$ .
29.  $\int \sin 5x \sin 7x dx$ .
30.  $\int \sin^2 2x \cos x dx$ .

## 6. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

*Література:* [1, розділ 8, п. 8.2, 8.3]; [3, розділ 6, п. 6.2]; [5, глава 10, § 1-5]; [8, розділ 2, п. 2.1-2.7]; [11, розділ 2, п. 2.1-2.7]; [13, розділ 7, § 23, 24]; [4, розділ 4, глава 11, п. 11.1-11.6]; [15, розділ 5, § 1-4]; [17, розділ 9].

### Індивідуальне завдання 6.1

#### 6.1. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРІЇ

У задачах 1, 2 обчислити площу фігури, обмеженої вказаними лініями.

##### Задача 1

1.  $y = x^2$ ,  $y^2 = x$ .
2.  $y = x^2$ ,  $y = 3 - x$ .
3.  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^3$ .
4.  $y = \sqrt{x}$ ,  $x + y = 2$ ,  $y = 0$ .
5.  $x^2 = 2py$ ,  $y^2 = 2px$ .
6.  $y = 2 - x^2$ ,  $y^3 = x^2$ .
7.  $y = \ln x$ ,  $x = e$ ,  $x = e^2$ ,  $y = 0$ .
8.  $y = x^2$ ,  $y = 3 - 2x$ .
9.  $y = 2x - x^2$ ,  $y = -x$ .
10.  $y = x^2$ ,  $y = x^2/2$ ,  $y = 2x$ .
11.  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ ,  $x = 1$ .
12.  $xy = 2$ ,  $y = 2x$ ,  $y = x/2$ .
13.  $y = 1/(1 + x^2)$ ,  $y = x^2/2$ .
14.  $y^2 = x + 1$ ,  $y^2 = 9 - x$ .
15.  $y^2 = x^3$ ,  $x = 0$ ,  $y = 4$ .
16.  $y = x^2/4$ ,  $y = 3x - x^2/2$ .
17.  $y = 2x + x^2$ ,  $y = x + 2$ .
18.  $y^2 = 9x$ ,  $y = 3x$ .
19.  $y = 4 - (x - 1)^2$ ,  $y = 3x/2$ ,  $x = 0$ .
20.  $y^2 = 4x$ ,  $x^2 = 4y$ .
21.  $y^2 = x^3$ ,  $x = 2$ .
22.  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x^2$ .
23.  $y^2 = (4 - x^3)$ ,  $x = 0$ .
24.  $y = 4 - x^2$ ,  $3x - 2y = 6$ .
25.  $y = x^3$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$ .
26.  $xy = 6$ ,  $x + y - 7 = 0$ .
27.  $y = 2^x$ ,  $y = 2x - x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ .
28.  $x^2 = 4y$ ,  $y = 8/(x^2 + 4)$ .
29.  $y = \arcsin x$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi/4$ .
30.  $y = x + 1$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = 0$ .

### Задача 2

1.  $\rho = 3\sqrt{\cos 2\varphi}$ .
2.  $\rho = a\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .
3.  $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ .
4.  $x = 7 \cos^3 t, y = 7 \sin^3 t$ .
5.  $\rho = 4 \cos 3\varphi$ .
6.  $\rho = 3 \cos 2\varphi$ .
7.  $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$ .
8.  $\rho^2 = 2 \sin 2\varphi$ .
9.  $x = 4(t - \sin t), y = 4(1 - \cos t)$ .
10.  $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$ .
11.  $\rho = 2 \sin 3\varphi$ .
12.  $\rho = 2 + \cos \varphi$ .
13.  $\rho = 2 \cos 4\varphi$ .
14.  $\rho = 2 \sin 5\varphi$ .
15.  $x = 2 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$ .
16.  $\rho = 4 \sin^2 \varphi$ .
17.  $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t$ .
18.  $\rho = 2 \cos 5\varphi$ .
19.  $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t$ .
20.  $\rho = a \sin k\varphi$ .
21.  $\rho = a \sin k\varphi$ .
22.  $\rho = 4 \sin \varphi$ .
23.  $\rho = 2 \cos \varphi$ .
24.  $\rho = 3 \sin 4\varphi$ .
25.  $\rho = 4 \cos \varphi, \rho = 2 \cos \varphi$ .
26.  $\rho = 2 + \sin \varphi$ .
27.  $\rho = 2 \cos \varphi, \rho = 2 \sin \varphi$ .
28.  $\rho = 4 \cos 3\varphi, \rho \geq 2$ .
29. 
$$\begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$
 $(0 \leq t \leq \pi), \quad y = 0.$
30. 
$$\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$$
 $(0 \leq t \leq \pi), \quad y = 0.$

### Задача 3

Обчислити довжину дуги лінії.

1.  $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t$ .
2.  $x = 2(\cos t + t \sin t), y = 2(\sin t - t \cos t) \quad (0 \leq t \leq \pi)$ .
3.  $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) \quad (0 \leq x \leq a)$ .
4.  $y = \ln \sin x$  від  $x = \pi/3$  до  $x = \pi/2$ .
5.  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{9}$ .
6.  $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$ .
7.  $y^2 = (x+1)^3, x = 4$ .
8.  $y = 1 - \ln \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi/6)$ .
9.  $\rho = 6 \cos^3(\varphi/3) \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$ .
10.  $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$ .
11.  $y^2 = (x-1)^3$  від точки  $A(1; 0)$  до точки  $B(6; \sqrt{125})$ .

12.  $y^2 = x^3$ , що відтинається прямою  $x = 5$ .
13.  $\rho = 3 \cos \varphi$ .
14.  $\rho = 3(1 - \cos \varphi)$ .
15.  $y = \ln x$  від точки  $A(1; 0)$  до точки  $B(e; 1)$ .
16.  $x = 5 \cos^2 t$ ,  $y = 5 \sin^2 t$  ( $0 \leq t \leq \pi/2$ ).
17.  $9y^2 = 4(3 - x)^3$  між точками перетину з віссю  $Oy$ .
18.  $\rho = 3 \sin \varphi$ .
19.  $y = \ln \sin x$  ( $\pi/3 \leq x \leq \pi/2$ ).
20.  $x = 9(t - \sin t)$ ,  $y = 9(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ).
21.  $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$ .
22.  $y^2 = (x - 1)^3$  від точки  $A(2; -1)$  до точки  $B(5; -8)$ .
23.  $x = 7(t - \sin t)$ ,  $y = 7(1 - \cos t)$  ( $2\pi \leq t \leq 4\pi$ ).
24.  $y = e^{x/2} + e^{-x/2}$  ( $0 \leq x \leq 2$ ).
25.  $x = 4 \cos^3 t$ ,  $y = 4 \sin^3 t$ .
26.  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$  від  $t = 0$  до  $t = 1$ .
27.  $\rho = 5 \sin \varphi$ .
28.  $\rho = 4 \cos \varphi$ .
29.  $\rho = 5(1 + \cos \varphi)$ .
30.  $y^2 = x^3$  від точки  $A(0; 0)$  до точки  $B(4; 8)$ .

#### Задача 4

Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням плоскої фігури  $\Phi$  навколо вказаної осі координат.

1.  $\Phi$ :  $y^2 = 4 - x$ ,  $x = 0$ ,  $Oy$ .
2.  $\Phi$ :  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $Ox$ .
3.  $\Phi$ :  $x^2/9 + y^2/4 = 1$ ,  $Oy$ .
4.  $\Phi$ :  $y^3 = x^2$ ,  $y = 1$ ,  $Ox$ .
5.  $\Phi$ :  $x = 6(t - \sin t)$ ,  $y = 6(1 - \cos t)$ ,  $Ox$ .
6.  $\Phi$ :  $x = 3 \cos^2 t$ ,  $y = 4 \sin^2 t$  ( $0 \leq t \leq \pi/2$ ),  $Oy$ .
7.  $\Phi$ :  $y^2 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $Ox$ .
8.  $\Phi$ :  $y^2 = (x - 1)^3$ ,  $x = 2$ ,  $Ox$ .
9.  $\Phi$ :  $x = \sqrt{1 - y^2}$ ,  $y = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ ,  $y = 0$ ,  $Ox$ .



10.  $\Phi$ :  $y = \sin x, y = 0 (0 \leq x \leq \pi), Ox$ .
11.  $\Phi$ :  $y^2 = 4x, x^2 = 4y, Ox$ .
12.  $\Phi$ :  $x = 2 \cos t, y = 5 \sin t, Oy$ .
13.  $\Phi$ :  $y = x^2, 8x = y^2, Oy$ .
14.  $\Phi$ :  $y = e^x, x = 0, x = 1, Ox$ .
15.  $\Phi$ :  $y^2 = 4x/3, x = 3, Ox$ .
16.  $\Phi$ :  $y = 2x - x^2, y = 0, Ox$ .
17.  $\Phi$ :  $y = \sqrt{1 - x^2}, y = x, x = 0, Ox$ .
18.  $\Phi$ :  $x = 7 \cos^3 t, y = 7 \sin^3 t, Oy$ .
19.  $\Phi$ :  $x^2/16 + y^2/1 = 1, Ox$ .
20.  $\Phi$ :  $x^3 = (y - 1)^2, x = 0, y = 0, Ox$ .
21.  $\Phi$ :  $xy = 4, 2x + y - 6 = 0, Ox$ .
22.  $\Phi$ :  $x = \sqrt{3} \cos t, y = 2 \sin t, Oy$ .
23.  $\Phi$ :  $y = 2 - x^2, y = x^2, Ox$ .
24.  $\Phi$ :  $y = 8 - x^2, y = x^2, Ox$ .
25.  $\Phi$ :  $y^2 = (x + 4)^3, x = 0, Ox$ .
26.  $\Phi$ :  $y = x^3, x = 0, y = 8, Oy$ .
27.  $\Phi$ :  $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, Ox$ .
28.  $\Phi$ :  $2y = x^2, 2x + 2y - 3 = 0, Ox$ .
29.  $\Phi$ :  $y = x - x^2, y = 0, Ox$ .
30.  $\Phi$ :  $y = 2 - x^2/2, x + y = 2, Oy$ .

## 7. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

*Література:* [1, розділ 8, п. 8.5]; [3, розділ 6, п. 6.4]; [4, розділ 4, глава 11, п. 11.7]; [5, глава 10, § 2]; [8, розділ 2, п. 2.8]; [11, розділ 2, п. 2.8]; [13, розділ 7, § 23]; [15, розділ 5, § 6]; [17, розділ 9, п. 9.2].

### Індивідуальне завдання 7.1

#### Задача 1

Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність [17].

1. а)  $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{16x^4 + 1}$ ;

б)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$ .

2. а)  $\int_1^{\infty} \frac{16xdx}{16x^4 - 1}$ ;

б)  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$ .

3. а)  $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}$ ;

б)  $\int_0^{1/3} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ .

4. а)  $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{16x^4 - 1}}$ ;

б)  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$ .

5. а)  $\int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$ ;

б)  $\int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx$ .

6. а)  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}}$ ;

б)  $\int_{1/4}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}$ .

7. а)  $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$ ;

б)  $\int_{1/2}^1 \frac{\ln 2 dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}$ .

8. а)  $\int_4^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$ ;

б)  $\int_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx$ .

9. а)  $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)}$ ;

б)  $\int_0^1 \frac{xdx}{1-x^4}$ .

10. а)  $\int_{-1}^{\infty} \frac{xdx}{x^2 + 4x + 5}$ ;

б)  $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}} dx$ .

$$\begin{array}{ll}
11. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)} dx; & \text{б) } \int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}. \\
12. \text{ a) } \int_{1/2}^{\infty} \frac{16 dx}{\pi(4x^2+4x+5)}; & \text{б) } \int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}. \\
13. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{4x^2+4x+5}; & \text{б) } \int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}. \\
14. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{(x+2) dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}; & \text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx. \\
15. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4} dx; & \text{б) } \int_0^1 \frac{2e^{1-\frac{2}{\pi} \arcsin x}}{\pi \sqrt{1-x^2}} dx. \\
16. \text{ a) } \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx; & \text{б) } \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}. \\
17. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{4 dx}{x(1+\ln^2 x)}; & \text{б) } \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}. \\
18. \text{ a) } \int_0^{\infty} x \sin x dx; & \text{б) } \int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}. \\
19. \text{ a) } \int_{-\infty}^{-1} \frac{7 dx}{(x^2-4x) \ln 5}; & \text{б) } \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-1)^3 \ln 2}}. \\
20. \text{ a) } \int_{1/3}^{\infty} \frac{\pi dx}{(1+9x^2) \operatorname{arctg}^2 3x}; & \text{б) } \int_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2-9x+2}. \\
21. \text{ a) } \int_2^{\infty} \frac{dx}{(4+x^2) \sqrt{\pi \operatorname{arctg}(x/2)}}; & \text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}. \\
22. \text{ a) } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}; & \text{б) } \int_0^3 \frac{\sqrt[3]{9x} dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}. \\
23. \text{ a) } \int_0^{\infty} e^{-3x} x dx; & \text{б) } \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}. \\
24. \text{ a) } \int_{-\infty}^0 \left( \frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx; & \text{б) } \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}. \\
25. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}; & \text{б) } \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}.
\end{array}$$

$$26. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)};$$

$$27. \text{ a) } \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2};$$

$$28. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{(6x^2 - 5x + 1) \ln \frac{3}{4}};$$

$$29. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2};$$

$$30. \text{ a) } \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2};$$

$$\text{б) } \int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3 - 1)}}.$$

$$\text{б) } \int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2} - 2}.$$

$$\text{б) } \int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16 - x^2)^3}}.$$

$$\text{б) } \int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - 4x}}.$$

$$\text{б) } \int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x - 1)^2}.$$

## 8. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

*Література:* [1, розділ 7]; [3, розділ 5]; [4, розділ 6, глава 15, 15.1-15.7]; [5, глава 8]; [8, розділ 3]; [11, розділ 3]; [13, розділ 6, § 16-18, 20]; [15, розділ 6, § 1-8]; [17, розділ 10].

### Індивідуальне завдання 8.1

#### Задача 1

Знайти частинні похідні й повний диференціал функції.

1.  $z = \ln(y^2 - x)$ .
2.  $z = \arcsin \sqrt{xy^3}$ .
3.  $z = \operatorname{arctg}(x + y^2)$ .
4.  $z = \sin(x^4 - xy^2)$ .
5.  $z = \cos(\sqrt{x} + y)$ .
6.  $z = \operatorname{tg}(x^2 + y^3)$ .
7.  $z = \operatorname{ctg} \sqrt{x/y^3}$ .
8.  $z = 2^{y^2 - xy}$ .
9.  $z = \ln(x^2 - y^3)$ .
10.  $z = \arccos(x/y^2)$ .
11.  $z = \operatorname{arcctg}(x/y^2)$ .
12.  $z = \cos(\sqrt{xy^3})$ .
13.  $z = \sin(\sqrt{x - y^2})$ .
14.  $z = \operatorname{tg}(x^2 y^3)$ .
15.  $z = \operatorname{ctg}(3x^2 + 2y^3)$ .
16.  $z = e^{2y^3 + xy}$ .
17.  $z = \ln(\sqrt{xy} + 1)$ .
18.  $z = \arcsin(xy^2)$ .
19.  $z = \operatorname{arctg}(x^2 / y^3)$ .
20.  $z = \cos(x^2 + \sqrt{xy^3})$ .
21.  $z = \operatorname{tg} \frac{x + y}{x - y}$ .
22.  $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{x + y}$ .
23.  $z = \operatorname{ctg} \sqrt{x/(x - y)}$ .
24.  $z = e^{\sqrt{y^2 + x}}$ .
25.  $z = \ln(3x^2 / y^3)$ .
26.  $z = \sin \frac{x - y}{x^2 + y^2}$ .
27.  $z = \operatorname{arcctg}(x^2 / y)$ .
28.  $z = \sin \sqrt{x - y^3}$ .
29.  $z = e^{-y^3 / x}$ .
30.  $z = \operatorname{tg}[(2x + y^3) / x^2]$ .

## Задача 2

Обчислити частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  функції  $z = f(x, y)$ , заданої

неявно.

1.  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4 - x - y^2$ .
2.  $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 4$ .
3.  $2x + 3y + z - xz = 1$ .
4.  $e^z + x + 3y - z - xy = 1$ .
5.  $x^2 + y^2 + z^2 - z + y = 2$ .
6.  $z^3 - 3xy - z = 4 - x^2$ .
7.  $\cos x^2 + \sin y^2 + z^2 + z + y = 1$ .
8.  $e^z + \cos x + 3 \sin y = 1$ .
9.  $x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 3y = 4$ .
10.  $2x + 3y + z^2 - xy = 1$ .
11.  $x^3 + y^2 + z - x + yz = 1$ .
12.  $e^y + \cos(xy) + 3 \sin z = 1$ .
13.  $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$ .
14.  $x^2 y + y^2 z + z^2 x - xy = 2$ .
15.  $x^2 - 2y^3 + 3z^2 - xyz = 4 + x + y$ .
16.  $xyz = 1 - x - y^2 + z^3$ .
17.  $x^2 + xy^2 + yz^2 - 2xyz = 2$ .
18.  $z^2 + \ln(x^2 + yz + y^2) = 2$ .
19.  $z / \sqrt{x^2 + y^2} - 2xyz^3 + \sin(xz) = 0$ .
20.  $z = \operatorname{arctg}(z/(xy))$ .
21.  $z^2 + \ln(x + y^2) + \sqrt{yz} = 0$ .
22.  $z^2 x + y^2 z + x^2 y - xyz = 2$ .
23.  $\frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} = 1$ .
24.  $\frac{x}{y^2} + \frac{z}{x^2} + \frac{y}{z^2} = 1$ .
25.  $\frac{(x-y)^2}{z} + \frac{(y-z)^2}{x} + \frac{(z-x)^2}{y} = 4$ .
26.  $\frac{(xy)^2}{z} + \frac{(yz)^2}{x} + \frac{(zx)^2}{y} = 1$ .
27.  $\frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} = 1$ .
28.  $\frac{x^2}{y^3} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{y^3}{z^2} = z$ .
29.  $x^2 \cos y + y^2 \cos z + z^2 \cos x = 1$ .
30.  $x \cos^2 y + y \cos^2 z + z \cos^2 x = z$ .

## Задача 3

Знайти екстремуми функції [17].

1.  $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$ .
2.  $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ .
3.  $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$ .
4.  $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$ .
5.  $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y$ .
6.  $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$ .
7.  $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$ .
8.  $z = x^2 + y^2 + xy + x - y + 1$ .
9.  $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ .
10.  $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$ .
11.  $z = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y$ .
12.  $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$ .
13.  $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$ .
14.  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ .

15.  $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$ .                      16.  $z = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$ .  
 17.  $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$ .                18.  $z = xy(12 - x - y)$ .  
 19.  $z = xy - x^2 - y^2 + 9$ .                    20.  $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$ .  
 21.  $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ .                22.  $z = x^2 + y^2 - xy + 3x - 2y + 1$ .  
 23.  $z = x^2 + y^2 - xy + 9x - 6y + 20$ .    24.  $z = xy(6 - x - y)$ .  
 25.  $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ .            26.  $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$ .  
 27.  $z = (x-1)^2 + 2y^2$ .                    28.  $z = xy - 3x^2 - 2y^2$ .  
 29.  $z = x^2 + 3(y+2)^2$ .                    30.  $z = 2(x+y) - x^2 - y^2$ .

#### Задача 4

Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = f(x, y)$  в області  $D$ , обмеженої заданими лініями [17].

1.  $z = 3x + y - xy$ ,  $D: y = x, y = 4, x = 0$ .
2.  $z = xy - x - 2y$ ,  $D: y = x, y = 0, x = 3$ .
3.  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ ,  $D: y = 2, y = 0, x = 0, x = 1$ .
4.  $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ ,  $D: y = 1, y = 0, x = 0, x = 1$ .
5.  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ ,  $D: y = x + 1, y = 0, x = 3$ .
6.  $z = x^2 - 2x - 2y + y^2 + 8$ ,  $D: y = 0, x = 0, x + y = 1$ .
7.  $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$ ,  $D: y = 6, y = 0, x = 0, x = 1$ .
8.  $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ ,  $D: y = 1, y = 0, x = 0, x = 1$ .
9.  $z = x^2 + 4xy - 2y^2 - 6x - 1$ ,  $D: y = 0, x = 0, x + y = 3$ .
10.  $z = x^2 + 2xy - 10$ ,  $D: y = 0, y = x^2 - 4$ .
11.  $z = xy - 2x - y$ ,  $D: y = 4, y = 0, x = 0, x = 3$ .
12.  $z = x^2 / 2 - xy$ ,  $D: y = 8, y = 2x^2$ .
13.  $z = 3x^2 - 2x - 2y + 3y^2 + 2$ ,  $D: y = 0, x = 0, x + y = 1$ .
14.  $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$ ,  $D: y = 0, y = \sqrt{9 - 9x^2} / 4$ .
15.  $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ ,  $D: y = 0, x = -3, x + y + 1 = 0$ .
16.  $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$ ,  $D: y = 0, x = 5, x - y - 1 = 0$ .
17.  $z = 2x^2 + 2xy - (y^2 / 2) - 4x$ ,  $D: y = 2x, y = 2, x = 0$ .
18.  $z = x^2 - 2xy - (5y^2 / 2) - 2x$ ,  $D: y = 0, y = 2, x = 0, x = 2$ .
19.  $z = xy - 2y - 3x$ ,  $D: y = 0, y = 4, x = 0, x = 4$ .

20.  $z = x^2 + xy - 2$ ,  $D: y = 0, y = 4x^2 - 4$ .
21.  $z = x^2y(4 - x - y)$ ,  $D: y = 0, x = 0, x + y = 6$ .
22.  $z = x^3 - 3xy + y^3$ ,  $D: y = -1, y = 2, x = 0, x = 2$ .
23.  $z = 4x - 4y - x^2 - y^2$ ,  $D: x + 2y = 4, x - 2y = 4$ .
24.  $z = xy - y^2 + 3x + 4y$ ,  $D: y + x = 1, y = 0, x = 0$ .
25.  $z = 4x + 4y - 9x^2 + 6xy - 9y^2$ ,  $D: y = 2, y = 0, x = 0, x = 1$ .
26.  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$ ,  $D: y = 0, x = 2, x - y + 2 = 0$ .
27.  $z = 4 - 2x^2 - y^2$ ,  $D: y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}$ .
28.  $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ ,  $D: y = 1, y = -1, x = 1, x = -1$ .
29.  $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$ ,  $D: y = 0, x = 0, x + y + 2 = 0$ .
30.  $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$ ,  $D: y = 0, x = 0, x + y = 6$ .



## 9. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

### 9.1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

*Література:* [1, розділ 10, п. 10.1-10.5]; [3, розділ 7, п. 7.1-7.2]; [4, розділ 4, глава 12, п. 12.1-12.6]; [6, глава 4, § 1]; [9, розділ 3, п. 3.1]; [12, розділ 3, п. 3.1]; [13, розділ 8, § 25]; [15, розділ 8, § 1-4]; [17, розділ 11, п. 11.1-11.3].

#### Індивідуальне завдання 9.1

##### Задача 1

Розв'язати диференціальне рівняння [17].

- $y - xy' = x \sec(y/x).$
- $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0.$
- $(x + 2y)dx - xdy = 0.$
- $(x - y)dx + (x + y)dy = 0.$
- $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0.$
- $y^2 + x^2y' = xy y'.$
- $xy' - y = x \operatorname{tg}(y/x).$
- $xy' = y - x e^{y/x}.$
- $xy' - y = (x + y) \ln((x + y)/x).$
- $xy' = y \cos \ln(y/x).$
- $(y + \sqrt{xy})dx = xdy.$
- $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$
- $y = x(y' - \sqrt[3]{e^y}).$
- $y' = y/x - 1.$
- $y'x + x + y = 0.$
- $(x - y)y' = x + y.$
- $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx.$
- $(x - 2y)y' = 2x - y.$
- $(x - y)y dx - x^2 dy = 0.$
- $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$
- $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2.$
- $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0.$
- $xy' + y(\ln \frac{y}{x} - 1) = 0.$
- $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0.$
- $(y^2 - 2xy)dx - x^2dy = 0.$
- $(x + 2y)dx + xdy = 0.$
- $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0.$
- $2x^3y' = y(2x^2 - y^2).$
- $x^2y' = y(x + y).$
- $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$

### Задача 2

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкову умову [17].

1.  $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$ ,  $y(0) = 0$ .
2.  $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$ ,  $y(0) = 0$ .
3.  $xy' - 2y = 2x^4$ ,  $y(1) = 0$ .
4.  $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$ ,  $y(0) = 0$ .
5.  $y' = 2x(x^2 + y)$ ,  $y(0) = 0$ .
6.  $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$ ,  $y(1) = 1/(2e)$ .
7.  $y' - y = e^x$ ,  $y(0) = 1$ .
8.  $\cos y = (x + 2 \cos y) \sin yy'$ ,  $y(0) = \frac{\pi}{4}$ .
9.  $x^2 y' + xy + 1 = 0$ ,  $y(1) = 0$ .
10.  $yx' + x = 4y^3 + 3y^2$ ,  $y(2) = 1$ .
11.  $y' = y/(3x - y^2)$ ,  $y(0) = 1$ .
12.  $(2x + y)dy = ydx + 4 \ln y dy$ ,  $y(0) = 1$ .
13.  $x(y' - y) = e^x$ ,  $y(1) = 0$ .
14.  $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$ ,  $y(0) = 1$ .
15.  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ ,  $y(0) = 0$ .
16.  $xy' + y = \sin x$ ,  $y(\pi/2) = 2/\pi$ .
17.  $(2e^y - x)y' = 1$ ,  $y(0) = 0$ .
18.  $xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}$ ,  $y(1) = 0$ .
19.  $(x + y^2)dy = ydx$ ,  $y(0) = 1$ .
20.  $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$ ,  $y(0) = \pi/2$ .
21.  $xy' - 2y + x^2 = 0$ ,  $y(1) = 0$ .
22.  $(x + 1)y' + y = x^3 + x^2$ ,  $y(0) = 0$ .
23.  $(xy' - 1) \ln x = 2y$ ,  $y(e) = 0$ .
24.  $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$ ,  $y(\sqrt{2}) = 1$ .
25.  $(1 - x^2)y' + xy = 1$ ,  $y(0) = 1$ .
26.  $y' \operatorname{ctg} x - y = 2 \cos^2 x \operatorname{ctg} x$ ,  $y(0) = 0$ .
27.  $x^2 y' = 2xy + 3$ ,  $y(1) = -1$ .
28.  $y = x(y' - x \cos x)$ ,  $y(\pi/2) = 0$ .
29.  $xy' + y = \ln x + 1$ ,  $y(1) = 0$ .
30.  $y' - 3x^2 y - x^2 e^{x^3} = 0$ ,  $y(0) = 0$ .

### Задача 3

Розв'язати диференціальне рівняння [17].

1.  $y' + y = x\sqrt{y}$ .
2.  $ydx + 2xdy = 2y\sqrt{x} \sec^2 y dy$ .
3.  $y' + 2y = y^2 e^x$ .
4.  $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$ .
5.  $xydy = (y^2 + x)dx$ .
6.  $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$ .
7.  $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$ .
8.  $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$ .
9.  $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$ .
10.  $xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y$ .
11.  $xy^2 y' = x^2 + y^3$ .
12.  $(x + 1)(y' + y^2) = -y$ .
13.  $y'x + y = -xy^2$ .
14.  $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$ .
15.  $xy' - 2\sqrt{x^3} y = y$ .
16.  $y' + xy = x^3 y^3$ .

17.  $y' = \frac{x}{y} e^{2x} + y.$

18.  $yx' + x = -yx^2.$

19.  $x(x-1)y' + y^3 = xy.$

20.  $2x^3 yy' + 3x^2 y^2 + 1 = 0.$

21.  $\frac{dx}{x} = \left( \frac{1}{y} - 2x \right) dy.$

22.  $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y.$

23.  $xy' + y = y^2 \ln x.$

24.  $x dx = (x^2/y - y^3) dy.$

25.  $y' + 2xy = 2x^3 y^3.$

26.  $y' + y = x/y^2.$

27.  $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0.$

28.  $y' - y + y^2 \cos x = 0.$

29.  $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$

30.  $y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2 - 1}.$

## 9.2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ТА ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

*Література:* [1, розділ 10, п. 10.6]; [3, розділ 7, п. 7.3, 7.4]; [4, розділ 4, глава 12, п. 12.7, 12.8]; [6, глава 4, § 2, 3, 5]; [9, розділ 3, п. 3.2, 3.3]; [12, розділ 3, п. 3.2, 3.3]; [13, розділ 8, § 26]; [15, розділ 8, § 5-7]; [17, розділ 11, п. 11.5-11.7].

### Індивідуальне завдання 9.2

#### 9.2.1. Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку

##### Задача 1

Розв'язати диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку [17].

1.  $(1 - x^2)y'' - xy' = 2.$

2.  $2xy'y'' = y'^2 - 1.$

3.  $x^3 y'' + x^2 y' = 1.$

4.  $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$

5.  $y'' x \ln x = y'.$

6.  $xy'' - y' = x^2 e^x.$

7.  $y'' x \ln x = 2y'.$

8.  $x^2 y'' + xy' = 1.$

9.  $y'' = -x/y'.$

10.  $xy'' = y'.$

11.  $y'' = y' + x.$

12.  $xy'' = y' + x^2.$

13.  $xy'' = y' \ln(y'/x).$

14.  $xy'' + y' = \ln x.$

15.  $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1.$

16.  $y'' + 2xy'^2 = 0.$

17.  $2xy'y'' = y'^2 + 1$ .  
 18.  $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$ .  
 19.  $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sec x$ .  
 20.  $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$ .  
 21.  $y'' + 4y' = 2x^2$ .  
 22.  $xy'' - y' = 2x^2 e^x$ .  
 23.  $x(y'' + 1) + y' = 0$ .  
 24.  $y'' + 4y' = \cos 2x$ .  
 25.  $y'' + y' = \sin x$ .  
 26.  $x^2 y'' = y'^2$ .  
 27.  $2xy''y' = y'^2 - 4$ .  
 28.  $y''' x \ln x = y''$ .  
 29.  $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2$ .  
 30.  $(1 + x^2)y'' = 2xy'$ .

### 9.2.2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

#### Задача 2

Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами [17].

- |                               |                             |                            |
|-------------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 1. а) $y'' + 4y = 0$ ;        | б) $y'' - 10y' + 25y = 0$ ; | в) $y'' + 3y' + 2y = 0$ .  |
| 2. а) $y'' - y' - 2y = 0$ ;   | б) $y'' + 9y = 0$ ;         | в) $y'' + 4y' + 4y = 0$ .  |
| 3. а) $y'' - 4y' = 0$ ;       | б) $y'' - 4y' + 13y = 0$ ;  | в) $y'' - 3y' + 9y = 0$ .  |
| 4. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$ ;  | б) $y'' + 16y = 0$ ;        | в) $y'' + 2y' + 5y = 0$ .  |
| 5. а) $y'' + y' - 2y = 0$ ;   | б) $y'' - 2y' + 10y = 0$ ;  | в) $y'' - 2y' = 0$ .       |
| 6. а) $y'' - 4y = 0$ ;        | б) $y'' + 2y' + 17y = 0$ ;  | в) $y'' - y' - 12y = 0$ .  |
| 7. а) $y'' + y' - 6y = 0$ ;   | б) $y'' + 9y' = 0$ ;        | в) $y'' - 4y' + 20y = 0$ . |
| 8. а) $y'' - 49y = 0$ ;       | б) $y'' - 4y' + 5y = 0$ ;   | в) $y'' + 2y' - 3y = 0$ .  |
| 9. а) $y'' + 7y' = 0$ ;       | б) $y'' - 5y' + 4y = 0$ ;   | в) $y'' + 16y = 0$ .       |
| 10. а) $y'' - 6y' + 8y = 0$ ; | б) $y'' + 4y' + 5y = 0$ ;   | в) $y'' + 5y' = 0$ .       |
| 11. а) $y'' - 3y' = 0$ ;      | б) $4y'' - 8y' + 3y = 0$ ;  | в) $y'' - 2y' + 10y = 0$ . |
| 12. а) $y'' - 16y = 0$ ;      | б) $y'' - 3y' - 10y = 0$ ;  | в) $y'' + 4y' + 20y = 0$ . |
| 13. а) $y'' + y = 0$ ;        | б) $y'' - 4y' - 21y = 0$ ;  | в) $9y'' + 6y' + y = 0$ .  |
| 14. а) $2y'' + 3y' + y = 0$ ; | б) $y'' + 4y' + 8y = 0$ ;   | в) $y'' - 6y' + 9y = 0$ .  |
| 15. а) $y'' - 2y' + 2y = 0$ ; | б) $y'' - 10y' + 21y = 0$ ; | в) $y'' + 4y' = 0$ .       |
| 16. а) $y'' + 6y' = 0$ ;      | б) $y'' + 10y' + 29y = 0$ ; | в) $y'' - 8y' + 7y = 0$ .  |
| 17. а) $y'' + 25y = 0$ ;      | б) $y'' + 6y' + 9y = 0$ ;   | в) $y'' + 2y' + 2y = 0$ .  |
| 18. а) $y'' - 3y' = 0$ ;      | б) $y'' - 7y' - 8y = 0$ ;   | в) $y'' + 4y' + 13y = 0$ . |
| 19. а) $y'' - 3y' - 4y = 0$ ; | б) $y'' + 6y' + 13y = 0$ ;  | в) $y'' + 2y' = 0$ .       |
| 20. а) $y'' + 25y' = 0$ ;     | б) $y'' - 10y' + 16y = 0$ ; | в) $y'' - 8y' + 16y = 0$ . |
| 21. а) $y'' - 6y' = 0$ ;      | б) $y'' - 3y' - 18y = 0$ ;  | в) $y'' + 2y' + 5y = 0$ .  |

22. а)  $y'' - 8y' = 0$ ;      б)  $y'' - 2y' - 15 = 0$ ;      в)  $y'' - 6y' + 13y = 0$ .  
 23. а)  $y'' + 2y' + y = 0$ ;      б)  $y'' + 6y' + 25y = 0$ ;      в)  $y'' - 4y' = 0$ .  
 24. а)  $y'' + 10y' = 0$ ;      б)  $y'' - 6y' + 8y = 0$ ;      в)  $4y'' + 4y' + y = 0$ .  
 25. а)  $y'' + 5y = 0$ ;      б)  $9y'' - 6y' + y = 0$ ;      в)  $y'' + 6y' + 8y = 0$ .  
 26. а)  $y'' - 5y' + 4y = 0$ ;      б)  $y'' + 6y' + 10y = 0$ ;      в)  $y'' - 4y' + 4y = 0$ .  
 27. а)  $y'' - y = 0$ ;      б)  $4y'' + 8y' - 5y = 0$ ;      в)  $y'' - 6y' + 10y = 0$ .  
 28. а)  $y'' + 9y' = 0$ ;      б)  $y'' + 8y' + 25y = 0$ ;      в)  $9y'' + 3y' - 2y = 0$ .  
 29. а)  $y'' + 16y = 0$ ;      б)  $6y'' + 7y' - 3y = 0$ ;      в)  $4y'' - 4y' + y = 0$ .  
 30. а)  $y'' - 2y' = 0$ ;      б)  $y'' + 12y' + 36y = 0$ ;      в)  $9y'' - 6y' + y = 0$ .

### Задача 3

Методом невизначених коефіцієнтів знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння [17].

- $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$ .
- $y'' + y' - 6y = (6x + 1)e^{3x}$ .
- $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$ .
- $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2$ .
- $y'' - 6y' + 34y = 18\cos 5x + 60\sin 5x$ .
- $y'' - 2y' = (4x + 4)e^{2x}$ .
- $y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4$ .
- $y'' - 4y' = 8 - 16x$ .
- $y'' - 8y' + 20y = 16(\sin 2x - \cos 2x)$ .
- $y'' - 2y' + y = 4e^x$ .
- $y'' + 2y' - 3y = (12x^2 + 6x - 4)e^x$ .
- $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$ .
- $y'' - 6y' + 13y = 34e^{-3x} \sin 2x$ .
- $y'' + 3y' = 10 - 6x$ .
- $y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x - 240x^2$ .
- $y'' + 16y = 80e^{2x}$ .
- $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$ .
- $y'' - 4y = (-24x - 10)e^{2x}$ .
- $y'' + 2y' + y = (12x - 10)e^{-x}$ .
- $y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}$ .
- $y'' + 4y' + 20y = -4\cos 4x - 52\sin 4x$ .
- $y'' + 4y' = 15e^x$ .
- $y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x$ .
- $y'' + 2y' + y = (18x + 8)e^{-x}$ .
- $y'' - 14y' + 49y = 144\sin 7x$ .
- $y'' + 9y = 10e^{3x}$ .
- $3y'' - 5y' - 2y = 6\cos 2x + 38\sin 2x$ .
- $4y'' - 4y' + y = -25\cos x$ .
- $4y'' + 3y' - y = 11\cos x - 7\sin x$ .
- $y'' + 4y' + 29y = 26e^{-x}$ .

### Задача 4

Знайти структуру частинних розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння [17].

- $y'' - 7y' + 3y = f(x)$ : а)  $f(x) = (2x + 1)e^{3x}$ ; б)  $f(x) = \cos 3x$ .
- $y'' - 7y' + 2y = f(x)$ : а)  $f(x) = 3xe^{2x}$ ; б)  $f(x) = \sin 2x - 3\cos 2x$ .

3.  $2y'' + y' - y = f(x)$ : а)  $f(x) = (x^2 - 5)e^{-x}$ ; б)  $f(x) = x \sin x$ .
4.  $2y'' - 9y' + 4y = f(x)$ : а)  $f(x) = -2e^{4x}$ ; б)  $f(x) = e^x \cos 4x$ .
5.  $y'' + 49y = f(x)$ : а)  $f(x) = x^3 + 4x$ ; б)  $f(x) = 3 \sin 7x$ .
6.  $3y'' + 10y' + 3y = f(x)$ : а)  $f(x) = e^{-3x}$ ; б)  $f(x) = 2 \cos 3x - \sin 3x$ .
7.  $y'' - 3y' + 2y = f(x)$ : а)  $f(x) = x + 2e^x$ ; б)  $f(x) = 3 \cos 4x$ .
8.  $y'' - 4y' + 4y = f(x)$ : а)  $f(x) = \sin 2x + 2e^x$ ; б)  $f(x) = x^2 - 4$ .
9.  $y'' - y' + y = f(x)$ : а)  $f(x) = e^x \cos x$ ; б)  $f(x) = 7x + 2$ .
10.  $y'' - 3y' = f(x)$ : а)  $f(x) = 2x^2 - 5x$ ; б)  $f(x) = e^{-x} \sin 2x$ .
11.  $y'' + 3y' - 4y = f(x)$ : а)  $f(x) = 3xe^{-4x}$ ; б)  $f(x) = x \sin x$ .
12.  $y'' + 36y = f(x)$ : а)  $f(x) = 4xe^{-x}$ ; б)  $f(x) = 2 \sin 6x$ .
13.  $y'' - 6y' + 9y = f(x)$ : а)  $f(x) = (x - 2)e^{3x}$ ; б)  $f(x) = 4 \cos x$ .
14.  $4y'' - 5y' + y = f(x)$ : а)  $f(x) = (4x + 2)e^x$ ; б)  $f(x) = e^x \sin 3x$ .
15.  $4y'' + 7y' - 2y = f(x)$ : а)  $f(x) = 3e^{-2x}$ ; б)  $f(x) = (x - 1) \cos 2x$ .
16.  $y'' - y' - 6y = f(x)$ : а)  $f(x) = 2xe^{3x}$ ; б)  $f(x) = 9 \cos x - \sin x$ .
17.  $y'' - 16y = f(x)$ : а)  $f(x) = -3e^{4x}$ ; б)  $f(x) = \cos x - 4 \sin x$ .
18.  $y'' - 4y' = f(x)$ : а)  $f(x) = (x - 2)e^{4x}$ ; б)  $f(x) = 3 \cos 4x$ .
19.  $y'' - 2y' + 2y = f(x)$ : а)  $f(x) = (2x - 3)e^{4x}$ ; б)  $f(x) = e^x \sin x$ .
20.  $5y'' - 6y' + y = f(x)$ : а)  $f(x) = x^2 e^x$ ; б)  $f(x) = \cos x - \sin x$ .
21.  $5y'' + 9y' - 2y = f(x)$ : а)  $f(x) = x^3 - 2x$ ; б)  $f(x) = 3 \sin 2x$ .
22.  $y'' - 2y' - 15y = f(x)$ : а)  $f(x) = 4xe^{3x}$ ; б)  $f(x) = x \sin 5x$ .
23.  $y'' - 3y' = f(x)$ : а)  $f(x) = 2x^3 - 4x$ ; б)  $f(x) = 2e^{3x} \cos x$ .
24.  $y'' - 7y' + 12y = f(x)$ : а)  $f(x) = xe^{3x} + 2e^3$ ; б)  $f(x) = 3x \sin 2x$ .
25.  $y'' + 9y' = f(x)$ : а)  $f(x) = x^2 + 4x - 3$ ; б)  $f(x) = xe^{2x} \sin x$ .
26.  $y'' - 4y' + 5y = f(x)$ : а)  $f(x) = -2xe^x$ ; б)  $f(x) = x \cos 2x - \sin 2x$ .
27.  $y'' + 3y' + 2y = f(x)$ : а)  $f(x) = 3xe^{-x}$ ; б)  $f(x) = \cos x - 3 \sin x$ .
28.  $y'' - 8y' + 16y = f(x)$ : а)  $f(x) = 2xe^{4x}$ ; б)  $f(x) = \cos 4x + 2 \sin 4x$ .
29.  $y'' + y' - 2y = f(x)$ : а)  $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$ ; б)  $f(x) = 3 \cos 2x$ .
30.  $y'' + 3y' - 4y = f(x)$ : а)  $f(x) = 6xe^{-x}$ ; б)  $f(x) = x^2 \sin 2x$ .

### Задача 5

Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння [17].

1.  $y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ .
2.  $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$ .
3.  $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$ .
4.  $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$ .
5.  $y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}$ .
6.  $y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}$ .
7.  $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos x}$ .
8.  $y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin^2 x}$ .
9.  $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \operatorname{ctgx}$ .
10.  $y'' - 2y' + 2y = e^x / \sin x$ .
11.  $y'' - 2y' + y = e^x / x^2$ .
12.  $y'' + y = \operatorname{tg} x$ .
13.  $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$ .
14.  $y'' + y = \operatorname{ctg} x$ .
15.  $y'' - 2y' + y = e^x / x$ .
16.  $y'' + 2y' + y = e^{-x} / x$ .
17.  $y'' + y = 1 / \cos x$ .
18.  $y'' + y = 1 / \sin x$ .
19.  $y'' + 4y = 1 / \sin 2x$ .
20.  $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$ .
21.  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} / x^3$ .
22.  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} / x^3$ .
23.  $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}$ .
24.  $y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$ .
25.  $y'' - y' = e^{2x} \cos(e^x)$ .
26.  $y'' - y' = e^{2x} \sin(e^x)$ .
27.  $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$ .
28.  $y'' + y = 2 / \sin^2 x$ .
29.  $y'' + 2y' + 5y = \frac{e^{-x}}{\sin 2x}$ .
30.  $y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}$ .

### 9.2.3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

#### Задача 6

Знайти частинний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови [17].

1.  $y''' - 7y'' + 6y' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 30$ .
2.  $y^{IV} - 9y''' = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y''(0) = 0$ ,  $y'''(0) = 0$ ,  $y^{IV}(0) = 0$ .
3.  $y''' - y'' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = -1$ .
4.  $y''' - 4y' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = 4$ .
5.  $y''' + y' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 1$ .
6.  $y''' - y' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = 4$ .

7.  $y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 8.$
8.  $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -14.$
9.  $y''' + y'' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1.$
10.  $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 0.$
11.  $y''' + 3y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2.$
12.  $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$
13.  $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0, \quad y(0) = -2,5, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$
14.  $y''' + 9y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 9, \quad y''(0) = -18.$
15.  $y''' - 13y'' + 12y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 133.$
16.  $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 0.$
17.  $y^{IV} - 10y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 8, \quad y'''(0) = 24.$
18.  $y''' - y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0.$
19.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 4.$
20.  $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -6.$
21.  $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 2.$
22.  $y^{IV} - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -4.$
23.  $y^{IV} - 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -8.$
24.  $y''' + y'' - 4y' - 4 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 12.$
25.  $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3, \quad y''(0) = -9.$
26.  $y^{IV} - 6y^{IV} + 9y''' = 0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, \quad y^{IV}(0) = 27.$
27.  $y''' + 2y'' + y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = -3.$
28.  $y''' - y'' - y' + y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$
29.  $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = -16.$
30.  $y^{IV} + 10y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = -9, \quad y'''(0) = -27.$

#### 9.2.4. Системи звичайних диференціальних рівнянь

##### Задача 7

Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами [17].

1.  $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$
2.  $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$
3.  $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$
4.  $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x. \end{cases}$



5.  $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$
7.  $\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$
9.  $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$
11.  $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = y. \end{cases}$
13.  $\begin{cases} x' = 8x - 3y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$
15.  $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 5x + 4y. \end{cases}$
17.  $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$
19.  $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$
21.  $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$
23.  $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$
25.  $\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y. \end{cases}$
27.  $\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$
29.  $\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$
6.  $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$
8.  $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$
10.  $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$
12.  $\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 4x + 6y. \end{cases}$
14.  $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$
16.  $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$
18.  $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y. \end{cases}$
20.  $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$
22.  $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y. \end{cases}$
24.  $\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$
26.  $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y. \end{cases}$
28.  $\begin{cases} x' = -5x + 2y, \\ y' = x - 6y. \end{cases}$
30.  $\begin{cases} x' = 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y. \end{cases}$

## 10. ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

### 10.1. ЧИСЛОВІ РЯДИ

*Література:* [1, розділ 9, п. 9.1]; [3, розділ 8, п. 8.1-8.3]; [6, глава 3, § 1]; [9, розділ 4, п. 4.1-4.3]; [12, розділ 4, п. 4.1-4.3]; [13, розділ 5, § 14]; [4, розділ 5, глава 13, п. 13.1-13.5]; [15, розділ 9, § 1-3]; [18, розділ 12, п. 12.1].

#### Індивідуальне завдання 10.1

##### 10.1.1. Ряди з невід'ємними членами

##### Задача 1

Дослідити збіжність ряду двома способами:

- 1) за інтегральною ознакою Коші;
- 2) за ознакою порівняння.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{5n^4 - 3}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^3 + 2)^4}}$$

$$3. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 - 1}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3 + 1)^2}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{(n^2 + 1)^3}}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt[4]{(n^4 + 3)^5}}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{\sqrt[5]{(n^5 + 1)^6}}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3 + 1)^3}$$

$$9. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^4}{n^5 - 1}$$

$$10. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n^3}{4n^4 - 5}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{\sqrt[5]{(n^5 + 2)^7}}$$

$$12. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{(n^2 + 3)^3}}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3 + 2)^3}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{(n^7 + 6)^2}$$

$$15. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{(n^2 - 1)^2}}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4n^4 - 1}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{(n^2+5)^3}}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^4}{\sqrt[5]{(3n^5+2)^7}}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^3+1)^4}}$$

$$20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{(n^2-3)^2}}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+2)^2}$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2n^5+5}$$

$$23. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n}{\sqrt[3]{(2n^2-1)^2}}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3n^2-5}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt[4]{(n^4+1)^5}}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+3)^2}$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{\sqrt[5]{(n^5+1)^7}}$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n^6-5}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n^2+5n+6}$$

$$30. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt[3]{1-n^3}}$$

## Задача 2

Дослідити на збіжність ряди.

$$1. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{2n-1} \right)^n.$$

$$2. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{n+2} \right)^n.$$

$$3. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{4n-6} \right)^n.$$

$$4. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}.$$

$$5. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(3n)!};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{2n-3} \right)^{3n-1}.$$

$$6. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{4^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n (n+1)^n}.$$

$$7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(n+1)!};$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

8. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{1+2n};$	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}.$
9. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n!};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2+n^3};$	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^{4n}.$
10. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(3n)!};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n}};$	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+4n-1}{2n^2+5}\right)^{2-n}.$
11. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{2^n};$	б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3};$	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-n^2}{3+n-2n^2}\right)^n.$
12. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{9^n};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}};$	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n(\ln 10)^n}.$
13. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n+2)!};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2n};$	В) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$
14. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{4^n};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n};$	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}.$
15. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{(n+1)^2}};$	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}.$
16. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{2^n};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4\sqrt{(2n-3)^n}};$	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}.$
17. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{(n+2)!};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2+1}};$	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)^{2n}}{(n^2+4n+4)^n}.$
18. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n+2)!};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2}{1+n^3};$	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{3n^2-n+4}\right)^{n-3}.$
19. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2n!};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{1+5n}};$	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{2n} 4^n}{(n^2+2n+1)^n}.$
20. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\sqrt[3]{2+n}};$	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{n^3}.$
21. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}};$	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{2n-1}}.$
22. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n(n+1)^n};$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3+n^5};$	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}.$

23. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$ ;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3-n^6}$ ;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ .
24. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{\sqrt[7]{n}}$ ;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{1+n^3}}$ ;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-4}{n+2}\right)^{n^2}$ .
25. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n}{1+n}\right)^n$ ;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3}{\sqrt[3]{(2-n^4)^2}}$ ;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ .
26. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{6^n}$ ;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\sqrt[3]{(3n^3-1)^2}}$ ;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+4}\right)^{n^2}$ .
27. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{2+n}\right)^n$ ;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^3}}$ ;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ .
28. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n+3)!}$ ;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^6}$ ;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{3^n n^{2n}}$ .
29. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{(2n+1)!}$ ;	б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n^2-4}$ ;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{(n^2+4)^n}{(n+1)^{2n}}$ .
30. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{2n-1}}$ ;	б) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3}{n^2-9}$ ;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}$ .

### Задача 3

Дослідити на збіжність ряд.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n!)^2}{(2n-1)!}$ .	2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n n!(n+1)!}{(2n)!}$ .
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}$ .	4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ .
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n-1)!}{(2n)!}$ .	6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(n+1)! n! 3^n}$ .
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!}{(n!)^2 (n+1)!}$ .	8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}$ .
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$ .	10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-4)!}{(n!)^2}$ .
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!}{((n+1)!)^3}$ .	12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{(n+2)^n}$ .
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+1)!}{(2n+4)!}$ .	14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)!}{(n+1)! n! 5^n}$ .

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!5^n}.$$

$$17. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{(n-1)!}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n-1)!}{(2n+3)!}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(n+1)!n!3^n}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2ne)^n}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)!)^3}{(3n-1)!}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n)!}{(3n)!}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{((n+1)!)^2}.$$

$$16. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)n}{3^n}.$$

$$20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!2^n}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)n^3}{3^n}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(3e)^n n!}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n-1)!n^3}{(2n)!}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!4^n}.$$

### 10.1.2. Знакопозережні ряди

#### Задача 4

Дослідити на збіжність знакопозережний ряд. У випадку збіжності ряду вказати тип збіжності (абсолютна чи умовна).

$$1. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n}.$$

$$3. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3 - 1}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{-n}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{3^n}.$$

$$4. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

$$6. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4 - 1}.$$

$$8. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3 - 4}}.$$

$$10. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3n-1}}.$$

$$12. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3 - 1}.$$

$$14. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^5 - 7}}.$$

15.  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3n^2 + 2}$ .
16.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ .
17.  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{8^n}{9^n}$ .
18.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n-1)^3}$ .
19.  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \pi n$ .
20.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{3n+2}$ .
21.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^{-n}$ .
22.  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$ .
23.  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 3}{n^3 - 2}$ .
24.  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)^2}{3^n}$ .
25.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{3n+1}$ .
26.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2n^3 - 1}$ .
27.  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{5n^2 - 1}$ .
28.  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ .
29.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n$ .
30.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n$ .

## 10.2. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

*Література:* [1, розділ 9, п. 9.2-9.4]; [3, розділ 8, п. 8.4-8.7]; [6, глава 3, § 2-6]; [9, розділ 4, п. 4.4, 4.5]; [12, розділ 4, п. 4.4, 4.5]; [13, розділ 5, § 15]; [4, розділ 5, глава 14]; [15, розділ 9, § 4-7]; [18, розділ 12, п. 12.2-12.4].

### Індивідуальне завдання 10.2

У задачах 1, 2 знайти інтервал збіжності степеневого ряду та дослідити його збіжність на кінцях інтервалу збіжності.

#### Задача 1

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-3)^n}{2^{n+1}}$ .
2.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$ .
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}$ .
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$ .
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^{n+1}}$ .
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n\sqrt{n}}$ .

7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^3}$ .
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n+2}$ .
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n+2}}$ .
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n(n+3)}$ .
11.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ .
12.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n+1}$ .
13.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^3 \sqrt[3]{n}}$ .
14.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ .
15.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ .
16.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1} x^n}{n+3}$ .
17.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n+1}$ .
18.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n6^n}$ .
19.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{5^n n}$ .
20.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{3n+2}$ .
21.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n3^n}$ .
22.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 2^n}$ .
23.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n2^n}$ .
24.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n(n+5)}$ .
25.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$ .
26.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n-1}$ .
27.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}$ .
28.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{n}}$ .
29.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^n(n+5)(n+3)}$ .
30.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x+4)^n}{(2n+1)(n+4)}$ .

### Задача 2

1. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{5^n \sqrt[3]{n}}$ .
2. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n \sqrt{n}}$ .
3. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)2^{n-1}}$ .



4. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{\sqrt{n}}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(n+2)4^n}$ .
5. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n!}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n \sqrt[5]{n}}$ .
6. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{4^n \sqrt{n}}$ .
7. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)3^{n-1}}$ .
8. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{2^n n^2}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n (n+1)(n+2)}$ .
9. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n x^n}{5^n \sqrt{n}}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n}$ .
10. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3^n \sqrt[3]{n}}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$ .
11. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} x^n}{\sqrt[3]{n+1}}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)^2 2^n}$ .
12. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2} x^{n+1}}{2^n (n+1)}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n6^n}$ .
13. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{(n+1)!}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^{n+1} \sqrt{n}}$ .
14. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^n}{n(n+1)}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{n+1}}{2^n \sqrt{n+1}}$ .
15. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} x^n}{2^{n+1} n^3}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^{n+1} (n+2)}$ .
16. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n x^n}{7^{n+1} \sqrt{n}}$ ; б)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^{n+1}}{6^{n-1} (n-1)}$ .
17. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1} x^n}{6^n \sqrt[3]{n}}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{5^n (n+1)}$ .
18. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2} x^{n+2}}{n! \sqrt{n}}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n n}{3^{n-1} (n+2)}$ .
19. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{7^n \sqrt[4]{n}}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n (n+1)}{5^n (n+2)}$ .

- |   |  |
|---|--|
| 20. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{2^n \sqrt{n}}$ ;             | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n 3^n}{5^{n+1} n!}$ .          |
| 21. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n x^n}{6^{n+1} n!}$ ;               | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n+1} n}{3^n (n+1)}$ .         |
| 22. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1} x^n}{6^{n+1} (n+1)!}$ ;       | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{5^n \sqrt{n+1}}$ .          |
| 23. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n x^n}{5^n (n+2)!}$ ;               | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n} (n+1)}{3^n \sqrt{n+2}}$ . |
| 24. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{(n+1)!}$ ;                   | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{3^n (n+2)}$ .            |
| 25. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^n}{5^n \sqrt[3]{n}}$ ;          | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n (n+1)}{5^n n!}$ .            |
| 26. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+2)!}$ ;                  | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n \sqrt{2n+1}}{3^n (n+1)n}$ .  |
| 27. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)x^{n+1}}{n!}$ ;                  | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n \sqrt{n}}{3^{n-2} (n+2)}$ .  |
| 28. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{(n+1)!}$ ;              | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+7)^n n!}{(n+2)!}$ .               |
| 29. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)x^n}{3^{n+1} \sqrt{n}}$ ;       | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n-1}}{2^n (n+3)}$ .          |
| 30. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} x^{n+1}}{2^{n-1} (n+2)}$ ; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{3n-1}}{3^n \sqrt{2n+2}}$ .    |

### Задача 3

Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,0001.

1.  $\int_0^2 \sqrt{x} e^{-x} dx.$

2.  $\int_0^{0.5} \frac{\sin x^2}{x} dx.$

3.  $\int_0^{0.5} \frac{\sin 2x}{x} dx.$

4.  $\int_0^{0.5} \frac{\arctg x}{x} dx.$

5.  $\int_0^{0.4} x \ln(1+x^3) dx.$

6.  $\int_0^1 \sqrt{x} \sin^2 x dx.$

7.  $\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^4}.$

8.  $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx.$

$$9. \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} dx.$$

$$11. \int_0^{0,4} \sqrt{1+x^2} dx.$$

$$13. \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}.$$

$$15. \int_0^{0,5} \arctg x^2 dx.$$

$$17. \int_0^{0,5} \frac{1}{x} \ln(1+x^2) dx.$$

$$19. \int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} dx.$$

$$21. \int_{0,25}^{0,5} \frac{\cos(x^2/2)}{x^2} dx.$$

$$23. \int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx.$$

$$25. \int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x}) dx.$$

$$27. \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$29. \int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} dx.$$

$$10. \int_0^{1/2} \frac{e^{-x} - 1}{x} dx.$$

$$12. \int_0^1 \cos \sqrt[3]{x} dx.$$

$$14. \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx.$$

$$16. \int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx.$$

$$18. \int_{0,2}^{0,5} \frac{e^{-x}}{x^2} dx.$$

$$20. \int_0^{0,5} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$22. \int_0^{0,25} e^{-x^2} dx.$$

$$24. \int_0^{0,5} x^{10} \sin x dx.$$

$$26. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

$$28. \int_0^{0,5} x^2 \cos 3x dx.$$

$$30. \int_0^{0,5} \arctg x^2 dx.$$

#### Задача 4

Знайти п'ять членів розвинення у степеневий ряд частинного розв'язку диференціального рівняння, що задовольняє дані початкові умови.

$$1. y'' = y'y - x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$$2. y' = xy + \ln(x+y), \quad y(1) = 1.$$

$$3. y' = e^y + xy, \quad y(0) = 0.$$

$$4. y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$5. y'' = y \cos y' + x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{\pi}{3}.$$

$$6. y'' = y'^2 + xy, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2.$$

7.  $y' = 2y + x - 1, \quad y(1) = 3.$
8.  $y' = x^2 y^2 - 1, \quad y(0) = 1.$
9.  $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$
10.  $y' = yx + \sqrt{x}, \quad y(4) = 0.$
11.  $y'' = y \cos x + x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
12.  $y'' - \frac{1}{x} y' + y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$
13.  $y' = xy + x^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$
14.  $y' = x^2 y^2 + y \sin x, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$
15.  $y' = e^{3x} + 2xy^2, \quad y(0) = 1.$
16.  $y' = e^{\sin x} + x, \quad y(0) = 0.$
17.  $y' = y \cos x + 2 \cos y, \quad y(0) = 0.$
18.  $y'' = e^y \sin y', \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = \frac{\pi}{2}.$
19.  $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$
20.  $y''' = ye^x - xy'^2, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1.$
21.  $y' = x + y^{-1}, \quad y(1) = 1.$
22.  $y' + y \cos x - 3e^x y^2 - \sin x = 0, \quad y(0) = 1.$
23.  $y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$
24.  $y' = \sin y \sin x, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$
25.  $\frac{1}{x} y'' = yy', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$
26.  $y'' + y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
27.  $y'' = -\frac{y}{x}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$
28.  $y' = \frac{1-x^2}{y} + 1, \quad y(0) = 1.$
29.  $y'' = x^2 + y^2, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = \frac{1}{2}.$
30.  $y' = \arcsin y + x, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

## 11. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

*Література:* [3, розділ 6, п. 6.5-8.3]; [6, глава 3, § 1]; [9, розділ 2, п. 2.10]; [12, розділ 2, п. 2.10]; [13, розділ 7, § 23]; [4, розділ 6, глава 15, п. 15.9]; [15, розділ 7, § 1-3]; [18, розділ 13, п. 13.1, 13.3].

### Індивідуальне завдання 11.1

#### Задача 1

За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу області  $D$ , обмеженої заданими лініями [18].

1.  $y^2 = 4x$ ,  $x + y = 3$ ,  $y \geq 0$ .
2.  $y = 6x^2$ ,  $x + y = 2$ ,  $x \geq 0$ .
3.  $y^2 = x + 2$ ,  $x = 2$ .
4.  $x = -2y^2$ ,  $x = 1 - 3y^2$ ,  $x \leq 0$ ,  $y \geq 0$ .
5.  $y = 8/(x^2 + 4)$ ,  $x^2 = 4y$ .
6.  $y = x^2 + 1$ ,  $x + y = 3$ .
7.  $y^2 = 4x$ ,  $x^2 = 4y$ .
8.  $y = \cos x$ ,  $y \leq x + 1$ ,  $y \geq 0$ .
9.  $x = \sqrt{4 - y^2}$ ,  $y = \sqrt{3x}$ ,  $x \geq 0$ .
10.  $y = x^2 + 2$ ,  $y = x$ ,  $x = 2$ ,  $x \geq 0$ .
11.  $y = 4x^2$ ,  $9y = x^2$ ,  $y \leq 2$ .
12.  $y = x^2$ ,  $y = -x$ .
13.  $x = y^2$ ,  $x = 1 + 3y^2/4$ .
14.  $y = \sqrt{2 - x^2}$ ,  $y = x^2$ .
15.  $y = x^2 + 4x$ ,  $y = x + 4$ .
16.  $2y = \sqrt{x}$ ,  $x + y = 5$ ,  $x \geq 0$ .
17.  $y = 2 - 2x^2$ ,  $y \geq -6$ .
18.  $y = 2^x$ ,  $y = 2x - x^2$ ,  $x = 2$ ,  $x = 0$ .
19.  $x = 8/(y^2 + 4)$ ,  $y^2 = 4x$ .
20.  $y = 4 - x^2$ ,  $y = x^2 - 2x$ .
21.  $x = y^2 + 1$ ,  $x + y = 3$ .
22.  $y^2 = 3x$ ,  $x^2 = 3y$ .
23.  $x = \cos y$ ,  $x \leq y + 1$ ,  $x \geq 0$ .
24.  $x = 4 - y^2$ ,  $x - y + 2 = 0$ .
25.  $x = \sqrt{2 - y^2}$ ,  $x = y^2$ .
26.  $y^2 = 4 - x$ ,  $y = x + 2$ ,  $y = 2$ ,  $y = -2$ .
27.  $y = x^2$ ,  $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$ .
28.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ ,  $y \leq x/2$ ,  $y \geq 0$ .
29.  $y = x^2$ ,  $y^2 = 4 - x$ .
30.  $xy = 1$ ,  $y = x^2$ ,  $y = 2$ ,  $x = 0$ .

## Задача 2

Обчислити подвійний інтеграл по області  $D$ , обмеженої вказаними лініями [18].

1.  $\iint_D (x^2 + y) dx dy$ ,  $D: y = x^2, x = y^2$ .
2.  $\iint_D xy^2 dx dy$ ,  $D: y = x^2, y = 2x$ .
3.  $\iint_D (x + y) dx dy$ ,  $D: y = x, x = y^2$ .
4.  $\iint_D x^2 y dx dy$ ,  $D: y = x, y = 2 - x, x \geq 0$ .
5.  $\iint_D (x^3 - 2y) dx dy$ ,  $D: y = x^2 - 1, y \leq 0, x \geq 0$ .
6.  $\iint_D (y - x) dx dy$ ,  $D: y = x^2, y = x$ .
7.  $\iint_D (1 + y) dx dy$ ,  $D: 5y = x, x = y^2$ .
8.  $\iint_D (x + y) dx dy$ ,  $D: y = x^2 - 1, y = 1 - x^2$ .
9.  $\iint_D x(y - 1) dx dy$ ,  $D: y = 5x, y = x, x = 3$ .
10.  $\iint_D (x - 2)y dx dy$ ,  $D: y = x/2, y = x, x = 2$ .
11.  $\iint_D (x - y^2) dx dy$ ,  $D: y = x^2, y = 1$ .
12.  $\iint_D x^2 y dx dy$ ,  $D: y = 2x^3, y = 0, x = 1$ .
13.  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ ,  $D: x = 1, x = y^2$ .
14.  $\iint_D xy dx dy$ ,  $D: y = x^3, y = 0, x \leq 2$ .
15.  $\iint_D (x + y) dx dy$ ,  $D: y = x^3, y = 8, y = 0, x = 3$ .
16.  $\iint_D x(2x + y) dx dy$ ,  $D: y = 1 - x^2, y \geq 0$ .
17.  $\iint_D y(1 - x) dx dy$ ,  $D: y^3 = x, y = x$ .
18.  $\iint_D xy^3 dx dy$ ,  $D: y^2 = 1 - x, x \geq 0$ .
19.  $\iint_D x(5 + y) dx dy$ ,  $D: y = x + 5, x + y + 5 = 0, x \leq 0$ .

20.  $\iint_D (x - y) dx dy,$   $D: y = x^2 - 1, y = 3.$
21.  $\iint_D (x + 1)y^2 dx dy,$   $D: y = 3x^2, y = 3.$
22.  $\iint_D xy^2 dx dy,$   $D: y = x, y = 0, x = 1.$
23.  $\iint_D (x^3 + y) dx dy,$   $D: x + y = 1, x + y = 2, x \leq 1, x \geq 0.$
24.  $\iint_D xy^3 dx dy,$   $D: y = x^3, y = 4x, y \geq 0.$
25.  $\iint_D (x^3 + 3y) dx dy,$   $D: x + y = 1, y = x^2 - 1, x \geq 0.$
26.  $\iint_D xy dx dy,$   $D: x + y = 2, y = \sqrt{x}, y = 0.$
27.  $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy,$   $D: y = x, y = 2, xy = 1.$
28.  $\iint_D (x^2 + 1)y dx dy,$   $D: y = x^3, y = 3x, y \geq 0.$
29.  $\iint_D (2x + 1)y^2 dx dy,$   $D: x = 2 - y^2, x = 0.$
30.  $\iint_D e^y dx dy,$   $D: y = \ln x, y = 0, x = 2.$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бугір, М. К. Математика для економістів [Текст] : посібник / М. К. Бугір. – К. : Академія, 2003. – 520 с.
2. Валєєв, К. Г. Вища математика [Текст] : навч. посібник : у 2-х ч. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2001. – Ч. 1. – 546 с.
3. Валєєв, К. Г. Математичний практикум [Текст] : навч. посібник / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2004. – 682 с.
4. Высшая математика для экономистов [Текст] / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.
5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд., испр. – М. : Высшая школа, 1997. – Ч. 1. – 304 с.
6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд., испр. – М. : Высшая школа, 1997. – Ч. 2. – 416 с.
7. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів. Ч. 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія [Текст] : навч. посібник : у 4-х ч. / В. М. Долгіх ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2008. – 103 с.
8. Долгіх, В. М., Вища математика для економістів. Ч. 2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення [Текст] : навч. посібник : у 4 ч. / В. М. Долгіх, К. А. Дахер ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2008. – 76 с.
9. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів Ч. 3 : Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди [Текст] : навч. посібник у 4 ч. / В. М. Долгіх, К. А. Дахер, Т. І. Малютіна ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2008. – 135 с.
10. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів Ч. 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія [Текст] : практикум : у 4-х ч. / В. М. Долгіх ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2009. – 124 с.
11. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів Ч. 2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення [Текст] : практикум :



- у 4 ч. / В. М. Долгіх, К. А. Дахер ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2009. – 78 с.
12. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів Ч. 3. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди [Текст] : практикум : у 4 ч. / В. М. Долгіх, К. А. Дахер, Т. І. Малютіна ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2009. – 129 с.
13. Дюженкова, Л. І. Вища математика. Приклади і задачі [Текст] : посібник / Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін. – К. : Академія, 2002. – 624 с.
14. Лиман, Ф. М. Вища математика [Текст] : навч. посібник / Ф. М. Лиман, С. В. Петренко, О. О. Одинцова. – Суми : СумДПУ, 2002. – Ч. 1. – 224 с.
15. Лиман, Ф. М. Вища математика [Текст] : навч. посібник / Ф. М. Лиман, В. Ф. Власенко, С. В. Петренко, О. В. Семеніхіна. – Суми : СумДПУ, 2003. – Ч. 2. – 392 с.
16. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст] : учебн. пособие : в 3-х ч. / под общей редакцией А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 1. – 270 с.
17. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст] : учеб. пособие : в 3-х ч. / под общей редакцией А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 1991. – Ч. 2. – 352 с.
18. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст] : учеб. пособие : в 3-х ч. / под общей редакцией А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 1991. – Ч. 3. – 288 с.

### *Збірники задач*

31. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов [Текст] / под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1978. – 470 с.
32. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії [Текст] / В. І. Діскант, Л. Р. Береза, О. П. Грижук, Л. М. Захаренко. – К. : Вища школа, 2001. – 303 с.
33. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст] / Д. В. Клетеник. – М. : Наука, 1972. – 240 с.
34. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике [Текст] / В. П. Минорский. – М. : Наука, 1987.
35. Тевяшов, А. Д. Высшая математика. Общий курс [Текст] : сборник задач и упражнений / А. Д. Тевяшов, А. Г. Литвин. – Харьков : ХТУРЭ, 1997. – 192 с.
36. Цубербиллер, О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии [Текст] : / О. Н. Цубербиллер. – М. : Наука, 1970.

*Навчальне видання*

**Долгіх Володимир Миколайович**  
**Малютіна Таїсія Іванівна**

## **ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ**

Частина 1  
**Алгебра та математичний аналіз**

Навчальний посібник для самостійного вивчення дисципліни

У 2 частинах

Редактор *І.О. Кругляк*

Комп'ютерна верстка *Н.А. Височанська*

Підписано до друку 21.05.2009. Формат 60x90/16. Гарнітура Times.  
Обл.-вид. арк. 3,25. Умов. друк. арк. 6,25. Тираж 100 пр. Зам. № 874

Державний вищий навчальний заклад  
“Українська академія банківської справи Національного банку України”  
40030, м. Суми, вул. Петропавлівська, 57  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників  
і розповсюджувачів видавничої продукції: серія ДК, № 3160 від 10.04.2008

Надруковано на обладнанні Державного вищого навчального закладу  
“Українська академія банківської справи Національного банку України”  
40030, м. Суми, вул. Петропавлівська, 57