

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів напрямку 050201 «Системна інженерія»
спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики»
заочної форми навчання
У п'яти частинах

Частина 1

Лінійні електричні кола постійного струму

Затверджено
на засіданні кафедри системотехніки та
інформаційних технологій як конспект
лекцій з дисципліни «Теорія електричних
та магнітних кіл».
Протокол № 1 від 31.08.2009 р.

Суми
Видавництво СумДУ
2010

Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій. У п'яти частинах. – Частина 1: Лінійні електричні кола постійного струму / Укладач А.В. Булашенко. - Суми:Вид-во СумДУ, 2010. – 180с.

Кафедра системотехніки та інформаційних технологій

Зміст

	С.
Вступ	6
1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАКОНИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ.....	7
1.1 Електричне коло та його елементи	7
1.2 Структура електричного кола.....	14
1.3 Закони Кірхгофа.....	16
1.4 Перетворення лінійних пасивних електричних кіл.....	17
1.5 Узагальнений закон Ома	23
1.6 Баланс потужності	25
2 РОЗРАХУНКИ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ	28
2.1 Розрахунки нерозгалужених кіл.....	28
2.2 Розрахунки розгалужених кіл з одним джерелом	29
2.3 Розрахунки розгалужених кіл з декількома джерелами ...	32
2.3.1 Метод рівнянь Кірхгофа	33
2.3.2 Метод контурних струмів	36
2.3.3 Метод вузлових потенціалів.....	41
2.3.4 Метод накладання.....	49
2.3.5 Метод еквівалентного джерела напруги (генератора).....	52
2.3.6 Приклад розрахунку	57
3 КОЛА ІЗ ДЖЕРЕЛАМИ ГАРМОНІЧНОГО ВПЛИВУ	67
3.1 Основні характеристики гармонічних сигналів.....	67
3.2 Елементи кіл гармонічного струму.....	71
3.2.1 Гармонічний струм в опорі.....	71
3.2.2 Гармонічний струм в індуктивності	73
3.2.3 Гармонічний струм у ємності.....	76
3.2.4. Послідовне з'єднання R, L, C	78
3.2.5 Паралельне з'єднання R, L, C	80
3.3 Символічний метод розрахунків кіл з гармонічними впливами.....	84
3.3.1 Поняття про комплексні числа.....	85
3.3.2 Теореми символічного методу	89

3.3.3	Закони Ома та Кірхгофа.....	90
3.3.4	Послідовне з'єднання R, L, C	92
3.3.5	Паралельне з'єднання R, L, C	94
3.4	Методи розрахунків кіл синусоїдального струму та напруги	96
3.4.1	Еквівалентне перетворення пасивних кіл	97
3.4.2	Узагальнений закон Ома в символічній формі	100
3.4.3	Рівняння потужності в символічній формі.....	100
3.4.4	Баланс потужності	103
3.4.5	Метод контурних струмів	106
3.4.6	Метод вузлових потенціалів	108
3.4.7	Метод накладання.....	109
3.4.8	Метод еквівалентного генератора.....	109
4	РЕЗОНАНСНИЙ РЕЖИМ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА	111
4.1	Резонанс напруг	112
4.1.1	Загальні співвідношення у послідовному RLC - контурі	112
4.1.2	Енергетичні процеси	114
4.1.3	Частотні та резонансні характеристики послідовного RLC -контурі	115
4.1.4	Залежності I, U_L, U_C від L та C	118
4.2	Резонанс струмів.....	121
4.2.1	Загальні співвідношення у паралельному LC - контурі	121
4.2.2	Частотні та резонансні характеристики у паралельному LC - контурі	124
4.3	Резонанси у складних колах	125
5	ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ІЗ ВЗАЄМОІНДУКЦІЄЮ	127
5.1	Напруга на індуктивно зв'язаних елементах кола	127
5.2	Однйменні затискачі котушок.....	129
5.3	Розрахунки гармонічних кіл із взаємоіндукцією.....	130
5.3.1	Послідовне з'єднання індуктивно зв'язаних кіл.....	130
5.3.2	Експериментальне визначення полярності взаємної індуктивності індуктивно зв'язаних елементів	134
5.4	Розрахунки паралельних кіл із взаємною індукцією	135

5.5 Розрахунки розгалужених кіл із взаємоіндукцією	137
5.6 Еквівалентна заміна індуктивних зв'язків	139
5.7 Трансформатори	141
5.7.1 Рівняння трансформатора без феромагнітного осердя	141
5.7.2 Вхідний опір трансформатора	142
5.7.3 Вхідний опір ідеального трансформатора.....	143
5.7.4 Схема заміщення трансформатора.....	144
5.7.5 Енергетичні процеси в індуктивно зв'язаних котушках	145
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	146
ДОДАТОК А	149
ДОДАТОК Б.....	162

Вступ

Метою конспекта лекцій на тему «Лінійні електричні кола постійного та змінного струму» з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» є розгляд теоретичних питань щодо аналізу простих та складних електричних кіл постійного та змінного струму за законами Ома і Кірхгофа, еквівалентних перетворень, наведені найбільш поширені методи розрахунку складних електричних кіл постійного та змінного струму, подаються найбільш поширені методи розрахунку складних електричних кіл, розрахунок резонансних режимів, розрахунок кіл із індуктивними зв'язками.

Опрацювання конспекта лекцій і виконання розрахункового завдання сприяють набуттю навичок практичного застосування розрахункових методів.

Конспект лекцій містить методи розрахунку складних електричних кіл постійного та змінного струму за допомогою законів Ома та Кірхгофа, розрахунку методів контурних струмів, вузлових напруг, накладання, еквівалентного генератора, а також методу еквівалентних перетворень електричних кіл.

Для полегшення сприйняття студентами матеріалу кожен розділ після відповідних теоретичних викладок супроводжується прикладами.

Конспект лекцій може бути використаний як допоміжний засіб для проведення лекційних та практичних занять.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАКОНИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

1.1 Електричне коло та його елементи

Реальним електричним колом називається сукупність пристроїв, призначених для передачі, розподілу та перетворення енергії.

У загальному випадку електричне коло містить джерела електричної енергії, приймачі електричної енергії, вимірювальні прилади, комутаційну апаратуру, сполучні лінії та провід.

Електричне коло являє собою сукупність зв'язаних певним чином джерел, споживачів (або відповідно активних і пасивних елементів) і перетворювачів електричної енергії.

Коло називають *пасивним*, якщо воно складається тільки з пасивних елементів, і *активним*, якщо в ньому також містяться активні елементи.

Джерелом електричної енергії називають елемент електричного кола, що здійснює перетворення енергії неелектричного вигляду в електричний.

Наприклад: гальванічні елементи й акумулятори перетворюють хімічну енергію, термоелементи – теплову, електромеханічні генератори – механічну.

Споживачем електричної енергії називають елемент електричного кола, що перетворює електричну енергію в неелектричну.

Наприклад: лампи розжарювання – у світлову та теплову, нагрівальні прилади – у теплову, електродвигун – у механічну.

Перетворювачем електричної енергії називають пристрій, що змінює величину та форму електричної енергії.

Наприклад: трансформатори, інвертори перетворення постійного струму у змінний, випрямлячі – змінний струм у постійний, пристрої для перетворення частоти.

Для того щоб виконати розрахунки, необхідно кожен електротехнічний пристрій представити *схемою заміщення*. Схема заміщення електричного кола складається із сукупності ідеалізованих елементів, що відображають окремі властивості фізично існуючих пристроїв. Так, ідеалізований резистор (опір R) урахує перетворення електромагнітної енергії в тепло, механічну роботу або її випромінювання. Ідеалізований конденсатор (ємність C) і котушка індуктивності (індуктивність L) характеризуються здатністю накопичувати енергію відповідно електричного та магнітного полів.

Об'єднання джерел, споживачів і сполучуваних проводів утворює електричне коло, на кожній ділянці якого може діяти *електрична напруга* та проходити *електричний струм*. Ці напруги та струми у загальному випадку можуть бути постійними та змінними у часі і залежати від властивостей елементів кола. У даному розділі будуть розглядатися постійні струми та напруги.

Реальні електричні кола вивчаються на моделях, які зображуються за допомогою умовних позначень у вигляді *електричних схем*.

Напруга U на елементі електричного кола позначається на схемі (рис. 1.1) знаками «+» і «-», що мають сенс тільки при спільному розгляді, тому що знак «+» указує на точку з відносно більш високим потенціалом.

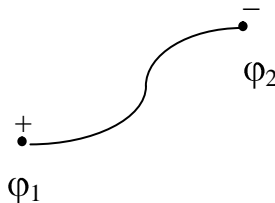


Рисунок 1.1

Напруга визначається за формулою

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (1.1)$$
$$U \equiv V(\text{Вольти}).$$

Струм I в елементі електричного кола позначається стрілкою на схемі (рис. 1.2).

Струм вказує напрямок упорядкованого переміщення позитивних електричних зарядів, якщо струм I виражається позитивним числом.

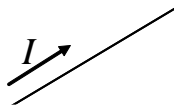


Рисунок 1.2

$$I = \frac{q}{t} \equiv A(\text{Ампер}). \quad (1.2)$$

Залежність між струмом і напругою на елементі кола називається **вольт-амперною характеристикою (ВАХ)** елемента, яка звичайно зображується графічно.

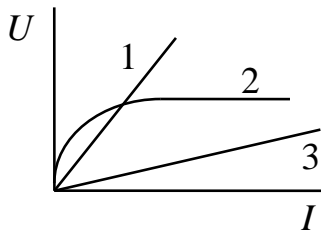


Рисунок 1.3

На рис. 1.3. показані ВАХ споживачів різного типу. Прямолінійні ВАХ (1) і (3) відповідають лінійним елементам, а кривольнійна ВАХ (2) – нелінійним елементам. Ми вивчаємо в рамках цього конспекта тільки лінійні кола, для яких відношення

$\frac{U}{I} = \text{const} = k$ або його відхилення від постійної величини невелике. У цьому випадку, коли ВАХ зображується лінією, близькою до прямої, вважають, що споживач підпорядковується *закону Ома*, згідно з яким напруга та струм пропорційні один одному.

Цей коефіцієнт пропорційності k називають *електричним опором* елемента R , яке вимірюється в омах (Ом).

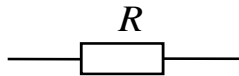


Рисунок 1.4

Як споживач у теорії електричних кіл постійного струму виступає резистор, що характеризується опором (R), для якого виконується закон Ома:

$$\frac{U}{I} = R, \text{ або } U = I \cdot R, I = \frac{U}{R}. \quad (1.3)$$

Позначення резистора на електричних схемах зображене на мал. 1.4.

Величину, зворотну опору $G = \frac{1}{R}$, називають *провідністю*, яка вимірюється в сіменсах (См).

Закон Ома можна записати через провідність:

$$\frac{I}{U} = G, U = \frac{I}{G}, I = U \cdot G \quad (1.4)$$

У пасивних елементах струм проходить від точок з відносно більшим потенціалом до крапок, що мають відносно менший потенціал.

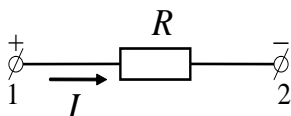


Рисунок 1.5

Тому на рис. 1.5. стрілка струму спрямована від «+» до «-», що відповідає закону Ома у формі:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = I \cdot R. \quad (1.5)$$

Для позначень, прийнятих на рис. 1.6., закон Ома повинен бути записаний у такій формі: $U_{12} = -I \cdot R$.

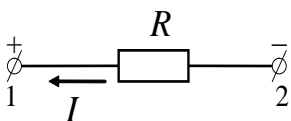


Рисунок 1.6

Таким чином, у ТЕМК споживач моделюється ідеальним споживачем, властивості якого визначаються значенням єдиного параметра (R або G).

Джерела енергії моделюються за допомогою джерела ЕРС (E) або джерела напруги і джерела струму (J). ВАХ джерел енергії – це зовнішні характеристики, що звичайно мають спадний характер, тому що в більшості випадків зі збільшенням струму напруга джерела зменшується.

Ідеалізоване джерело напруги – це елемент кола, напруга якого не залежить від струму і є заданою постійною величиною.

Йому відповідає на рис. 1.7 суцільна ВАХ. У дійсності, ми маємо справу з реальними джерелами напруги, які відрізняються від ідеальних джерел тим, що їх напруга із зростанням споживаного струму зменшується. ВАХ реального джерела напруги подана на рис. 1.7 пунктирною лінією, тангенс кута нахилу якої дорівнює внутрішньому опору джерела напруги R_0 .

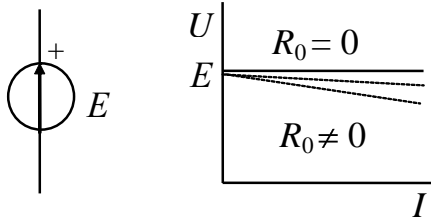


Рисунок 1.7

Будь-яке реальне джерело при опорі навантаження $R \gg R_0$ може бути наведений до ідеалізованого у такий спосіб (рис. 1.8):

$$\begin{aligned} U_{12} &= I \cdot R - E, \\ E_p &= E - I \cdot R. \end{aligned} \quad (1.6)$$

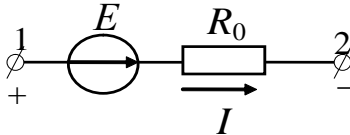


Рисунок 1.8

Таким чином, властивості джерела ЕРС або реального джерела напруги визначаються двома параметрами – виробленою ЕРС E та внутрішнім опором R_0 .

Ідеалізоване джерело струму – це елемент кола, струм якого не залежить від напруги і є заданою постійною величиною, йому відповідає суцільна ВАХ на рис. 1.9.

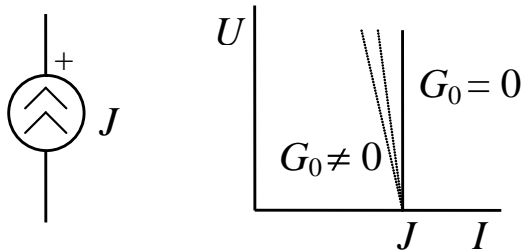


Рисунок 1.9

У реального джерела струму із зростанням напруги вироблений струм зменшується. ВАХ реального джерела напруги наведена на рис. 1.9 пунктирною лінією, тангенс кута нахилу якої дорівнює внутрішній провідності джерела струму G_0 . Будь-яке реальне джерело струму може бути зведене до ідеалізованого у такий спосіб (рис. 1.10):

$$J_p = J - U_{12} \cdot G_0, \quad (1.7)$$

де J, G_0 – постійні параметри.

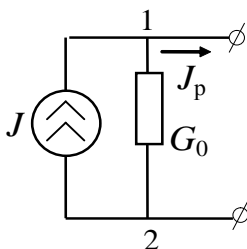


Рисунок 1.10

Таким чином, властивості джерела, що задає струм, визначаються двома параметрами: струмом, що задає J , і внутрішньою провідністю G_0 . Чим менше G_0 , тим ближче характеристика реального джерела струму до ідеалізованого.

Оскільки внутрішні опори реальних джерел завжди можна віднести до споживачів кола, далі розглядаються тільки ідеалізовані джерела напруги та струму.

Провід, що зв'язує споживачі та джерела, за своєю сутністю також відносять до споживачів енергії. Однак часто проводи мають лише сполучні функції та вважають, що вони є лише для того, щоб показати, як зв'язані між собою окремі елементи кола. Опір проводів, якщо ним не можна знехтувати, ураховуються включенням у відповідних місцях кола додаткових споживачів.

Таким чином, у теорії лінійних електричних кіл об'єктом вивчення є *розрахункова модель*, що складається зі споживачів і ідеалізованих джерел, конфігурація та властивості елементів якої визначені умовами завдання.

При розв'язанні завдань велике значення надається *структурі електричного кола (топології)*, обумовленого характером зв'язків між елементами.

1.2 Структура електричного кола

До структурних або топологічних властивостей кола відносять такі її особливості, які не пов'язані з характеристиками вхідних до неї активних і пасивних елементів. До них відносять такі поняття: гілка, вузол, контур.

Гілкою електричного кола називають ділянку, елементи якої увімкнені послідовно один за одним і по них проходить один і той самий струм.

Вузлом електричного кола називають місце з'єднання декількох гілок.

Вузол зв'язує не менше трьох гілок і є точкою розгалуження.

Гілки вважаються з'єднаними *послідовно*, якщо по них проходить той самий струм. Гілки вважаються з'єднаними *паралельно*, якщо вони приєднані до однієї тієї пари вузлів. Таким чином, при послідовному з'єднанні елементів загальним параметром для них є струм, при паралельному – напруга між вузлами.

Контуром електричного кола називається сукупність гілок, що йдуть одна за одною.

Вузли, у яких ці гілки з'єднуються, є точками розгалуження. При обході замкнутого контуру початкова та кінцева точки збігаються. Надалі під контуром розуміється замкнений контур.

Коло, у якому відсутні розгалуження, називають *одноконтурним*, за наявності розгалужень – *багатоконтурним*. Багатоконтурне коло характеризується кількістю незалежних контурів. Сукупність незалежних контурів визначається тим, що кожний із подальших контурів, починаючи від елементарного, відрізняється щонайменше однією новою гілкою. Кількість незалежних контурів може бути визначене за формулою Ейлера:

$$p = m - n + 1, \quad (1.8)$$

де m – кількість гілок, n – кількість вузлів, причому $m > n$ завжди.

Приклад 1.1 У колі, що зображене на рис. 1.11, чотири вузли: a, b, c, d; шість гілок: ab, bd, bc, ad, dc, ac.

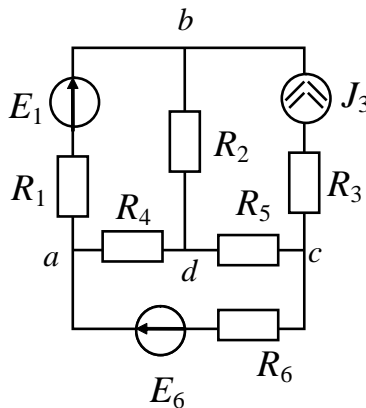


Рисунок 1.11

Розв'язання

Таким чином, кількість незалежних контурів за формулою Ейлера визначається у такий спосіб:

$$p = 6 - 4 + 1 = 3.$$

Це можуть бути такі контури: abcd, dbc, adc або abd, dbca, adc та інші.

1.3 Закони Кірхгофа

Закони Кірхгофа є основою теорії лінійних кіл і являють собою так само, як і закон Ома, узагальнення дослідних даних.

I закон Кірхгофа (для струмів):

Алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю або сума струмів, що входять, і сума струмів, що виходить, однакові.

Як правило, при додаванні струми, що входять, беруться зі знаком «+», а ті, що виходять, – зі знаком «-».

$$\sum I = 0 \text{ або } \sum I_{\text{ВХ.}} = \sum I_{\text{ВИХ.}} \quad (1.9)$$

II закон Кірхгофа (для напруг):

Алгебраїчна сума ЕРС усіх джерел, що трапляються при обході контуру, дорівнює алгебраїчній сумі напруг на всіх споживачах.

У алгебраїчній формі

$$\sum U_{\text{СПОЖИВАЧІ}} = \sum E_{\text{ДЖЕРЕЛА}} \quad (1.10)$$

У суму зі знаком «+» входять ЕРС сприяючих джерел (тобто тих джерел, які діють у напрямку, що збігається з обходом контуру) і зі знаком «-» ЕРС протидіючих джерел. При додаванні напруг споживачів зі знаком «+» беруться напруги на всіх споживачах, струми яких спрямовані згідно з обходом контуру, і зі знаком «-» беруться напруги всіх інших споживачів. Напрямок обходу контуру вибирається довільно.

1.4 Перетворення лінійних пасивних електричних кіл

Еквівалентне перетворення частини пасивного електричного кола полягає у такій його заміні іншим пасивним колом, при якому залишаються незмінними струми та напруги кола, що залишаються, не піддається перетворенню.

До найпростіших перетворень відносять заміну послідовно та паралельно з'єднаних споживачів еквівалентним споживачем.

При *послідовному* з'єднанні роль еквівалентного опору (або опору еквівалентного споживача) відіграє сума опорів усіх споживачів (рис. 1.12)

$$R_{EKB} = \sum_{i=1}^n R_i, \quad \text{чи} \quad \frac{1}{G_{EKB}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{G_i}. \quad (1.11)$$

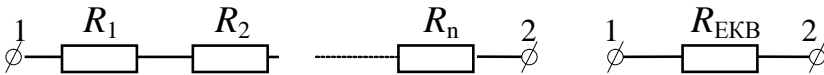


Рисунок 1.12

Це впливає з II закону Кірхгофа:

$$U_{12} = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \dots + I \cdot R_n = I \cdot \sum_{i=1}^n R_i = I \cdot R_{EKB}. \quad (1.12)$$

При двох послідовно з'єднаних споживачах опір визначається так:

$$R_{EKB} = R_1 + R_2. \quad (1.13)$$

Провідність визначається із виразу

$$\frac{1}{G_{EKB}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}.$$

Остаточно одержимо

$$G_{EKB} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2}. \quad (1.14)$$

При *паралельному* з'єднанні роль еквівалентної провідності (або провідності еквівалентного споживача) відіграє сума провідностей усіх споживачів (рис. 1.13):

$$G_{EKB} = \sum_{i=1}^n G_i \quad \text{чи} \quad \frac{1}{R_{EKB}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}.$$

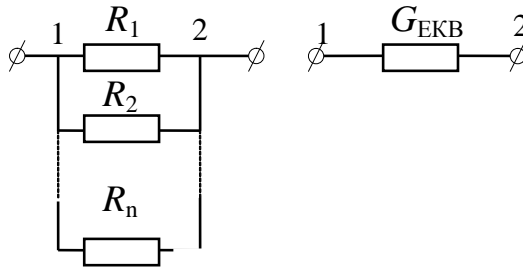


Рисунок 1.13

Це випливає з I закону Кірхгофа:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \dots + I_n = U_{12} \cdot G_1 + U_{12} \cdot G_2 + \dots + \\ &+ U_{12} \cdot G_n = U_{12} \cdot \sum_{i=1}^n G_i = U_{12} \cdot G_{EKB}. \end{aligned}$$

При двох паралельно з'єднаних споживачах провідність визначається так:

$$G_{EKB} = G_1 + G_2. \quad (1.15)$$

Еквівалентний опір визначається із співвідношення

$$\frac{1}{R_{EKB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

звідки одержуємо

$$R_{EKB} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (1.16)$$

Таким чином, для розрахунків кіл з послідовним вмиканнями споживачів доцільно їх властивості виражати значеннями опорів, а для паралельно увімкнених – значеннями провідностей.

Визначення еквівалентного опору при змішаному з'єднанні споживачів виконується шляхом поступового спрощення (згортання) вихідного кола.

Розглянемо змішане з'єднання елементів на прикладі кола, що зображене на рис. 1.14.

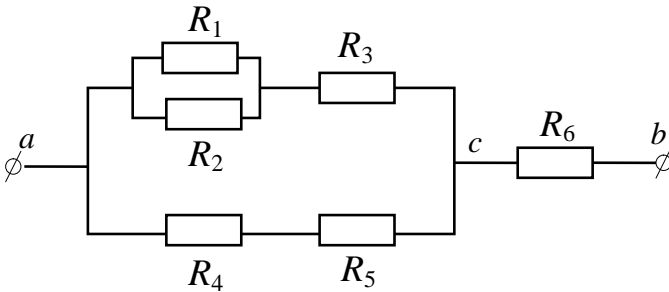


Рисунок 1.14

1. Паралельне з'єднання R_1 і R_2 :

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

2. Послідовне з'єднання R_{12} і R_3 : $R_{123} = R_{12} + R_3$.

3. Послідовне з'єднання R_4 і R_5 : $R_{45} = R_4 + R_5$.

4. Паралельне з'єднання R_{123} і R_{45} :

$$R_{ac} = \frac{R_{123} \cdot R_{45}}{R_{123} + R_{45}}.$$

5. Послідовне з'єднання R_{ac} і R_6 : $R_{ab} = R_{ac} + R_6$.

Таким чином, еквівалентний опір

$$R_{ab} = \frac{\left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right) \cdot (R_4 + R_5)}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_4 + R_5} + R_6.$$

Більш складними є взаємні перетворення споживачів, з'єднаних зіркою або трикутником. До таких перетворень слід звертатися в тих випадках, коли в колі, що підлягає спрощенню, не можна виділити паралельне або послідовне з'єднання споживачів.

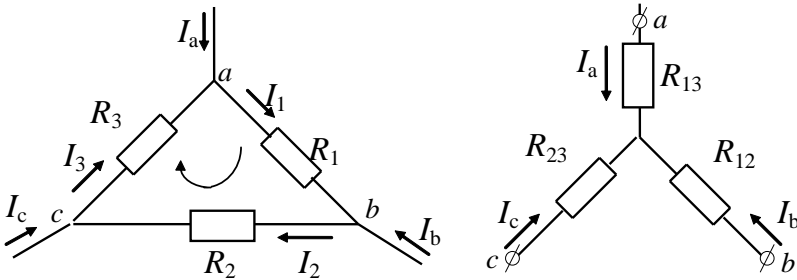


Рисунок 1.15

У вузлах a , b , c і трикутник, і зірка на рис. 1.15 з'єднуються з іншою частиною схеми. Перетворення трикутника в зірку повинне бути таким, щоб при однакових значеннях потенціалів однойменних точок трикутника й зірки, що приходять до цих точок, струми були однаковими, тоді вся зовнішня схема «не помітить» зробленої заміни.

Виразимо U_{ab} трикутника через параметри споживачів, що входять до цих вузлів струми. Запишемо рівняння Кірхгофа для контуру та вузлів а і b:

$$I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 = 0,$$

$$\text{вузла } a : I_a - I_1 + I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = I_1 - I_a,$$

$$\text{вузла } b : I_b + I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = I_b + I_1.$$

Замінімо у першому рівнянні струми I_3 та I_2 на відповідні вирази:

$$I_1 \cdot R_1 + I_b \cdot R_2 + I_1 \cdot R_2 + I_1 \cdot R_3 - I_a \cdot R_3 = 0,$$

$$I_1 \cdot (R_1 + R_2 + R_3) + I_b \cdot R_2 - I_a \cdot R_3 = 0.$$

Звідки одержуємо

$$I_1 = \frac{I_a \cdot R_3 - I_b \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

За законом Ома напруга U_{ab} для з'єднання споживачів трикутником:

$$U_{ab} = I_1 \cdot R_1 = I_a \cdot \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - I_b \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (1.17)$$

Тепер одержимо вираз для цієї ж напруги при з'єднанні споживачів зіркою:

$$U_{ab} = I_a \cdot R_{13} - I_b \cdot R_{12}. \quad (1.18)$$

Для еквівалентності даних кіл при довільних значеннях струмів I_a і I_b необхідна рівність напруг U_{ab} для з'єднання споживачів трикутником і зіркою. Це можливо тільки при однакових коефіцієнтах рівнянь (1.17) і (1.18), тобто

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_{13} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (1.19)$$

Аналогічно можна одержати вираз для визначення R_{23} :

$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (1.20)$$

Таким чином, *опір променя зірки дорівнює добутку опорів прилеглих сторін трикутника, діленому на суму опорів трьох сторін трикутника.*

Формули зворотного перетворення можна вивести незалежно, або, як наслідок, співвідношень (1.19) і (1.20) через провідності:

$$G_1 = \frac{G_{12} \cdot G_{13}}{G_{21} + G_{23} + G_{13}}, \quad G_2 = \frac{G_{12} \cdot G_{23}}{G_{12} + G_{23} + G_{13}}, \quad (1.21)$$

$$G_3 = \frac{G_{13} \cdot G_{23}}{G_{12} + G_{23} + G_{13}}.$$

або через опори:

$$R_1 = R_{12} + R_{13} + \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{23}}, \quad R_2 = R_{12} + R_{23} + \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{13}}, \quad (1.22)$$

$$R_3 = R_{13} + R_{23} + \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12}}.$$

Отже, *опір сторони трикутника дорівнює сумі опорів прилеглих променів зірки та добутку їх, діленого на опір третього променя.*

1.5 Узагальнений закон Ома

Розглянемо закон Ома для ділянки кола, що містить активні та пасивні елементи. Нехай на нерозгалуженій ділянці 1-3 складного кола (рис. 1.16), що містить джерело та споживач енергії, проходить струм I .

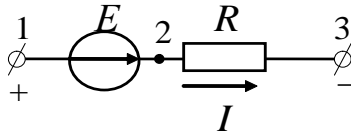


Рисунок 1.16

Для визначення потенціалу будь-якої точки електричного кола необхідно довільно задати потенціал якої-небудь однієї точки. Нехай для розглянутої схеми $\varphi_1 = const$. Потенціал точки 2 більший потенціалу точки 1 на значення ЕРС: $\varphi_2 = \varphi_1 + E$. Струм I у будь-якому пасивному елементі кола спрямований від точки з більш високим потенціалом до точки з більш низьким потенціалом. Тому потенціал точки 3 менше потенціалу точки 2, тобто

$$\varphi_3 = \varphi_2 - I \cdot R.$$

Об'єднавши ці дві формули, одержуємо

$$\varphi_3 = \varphi_1 + E - I \cdot R.$$

Звідки напруга визначається так:

$$U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = I \cdot R - E. \quad (1.23)$$

Звідси струм

$$I = \frac{U_{13} + E}{R}. \quad (1.24)$$

Міркуючи аналогічним чином, можна одержати вираз узагальненого закону Ома для випадку протидіючого джерела ЕРС (рис. 1.17):

$$U_{13} = I \cdot R + E \Rightarrow I = \frac{U_{13} - E}{R}. \quad (1.25)$$

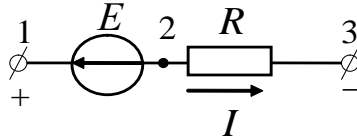


Рисунок 1.17

Об'єднавши ці дві формули в одну, одержимо:

$$U_{13} = I \cdot R \mp E \Rightarrow I = \frac{U_{12} \pm E}{R}, \quad (1.26)$$

де верхній знак відповідає гілкам із сприяючим джерелом ЕРС (однаково направлені із струмом), а нижній – із протидіючим. Виведена формула являє собою закон Ома для ділянки кола з ЕРС або *узагальнений закон Ома*.

Якщо у результаті розрахунків за формулою (1.26) струм набуває негативного значення, це означає, що дійсний напрямок струму протилежним обраному напрямку.

Узагальнений закон Ома можна вивести для гілки, що містить джерело струму (рис. 1.17).

Для сприяючого (рис. 1.18, а) джерела струму

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \varphi_1 + U_J - J \cdot R, \\ U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 &= J \cdot R - U_J \Rightarrow U_J = J \cdot R - U_{13}. \end{aligned}$$

Для протидіючого (рис. 1.18, б) джерела струму

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \varphi_1 - U_J - J \cdot R, \\ U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 &= U_J + J \cdot R \Rightarrow U_J = U_{13} - J \cdot R. \end{aligned}$$

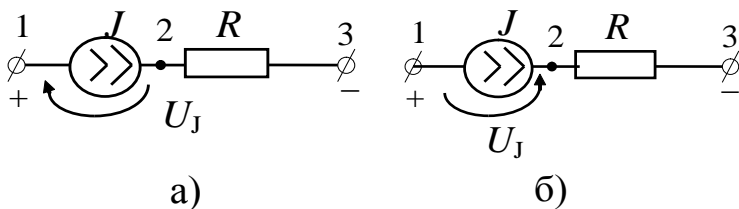


Рисунок 1.18

Об'єднана форма узагальненого закону Ома для гілок, що містять джерело струму:

$$U_{13} = J \cdot R \pm U_J \text{ чи } U_J = \pm(U_{13} - J \cdot R). \quad (1.27)$$

де верхні знак відповідають схемі, на якій U_J та J однаково на-
правлені.

1. 6 Баланс потужності

Проходження електричного струму по провідникові супроводжується виділенням тепла. Згідно із законом Джоуля-Ленца, уся електрична енергія, що передається провідникові у результаті роботи сил електричного поля, перетворюється в теплову енергію. За допомогою закону Ома можна записати для споживача з опором R :

$$W_{\text{тепл}} = UI t = U^2 G t = I^2 R t, \quad (1.28)$$

Звичайно під законом Джоуля-Ленца розуміють рівняння, що визначає не енергію, а потужність теплових втрат:

$$P_{\text{тепл}} = UI = U^2 G = I^2 R. \quad (1.29)$$

У наведених виразах тепла енергія та потужність виражаються у *джоулях* [Дж] та *ватах* [Вт] відповідно.

Сформульований закон поширюється на гілки, що містять як пасивні, так і активні елементи. Із цією метою користуються узагальненим законом Ома (1.26):

$$\begin{aligned}
 W &= U_{ab} I t = \underbrace{E}_{\text{r}} \mp \underbrace{I}_{\text{E}} \underbrace{t}_{\text{I}} = I^2 R t \mp E I t, \\
 P &= \frac{W}{t} = U_{ab} I = \underbrace{E}_{\text{r}} \mp \underbrace{I}_{\text{E}} = I^2 R \mp E I.
 \end{aligned}
 \tag{1.30}$$

Вирази (1.30), записані для гілок із джерелом напруги, справедливі і для гілок із джерелом струму, якщо зробити підстановку $J^2 R$ замість $I^2 R$ та $U_J J$ замість $E I$.

Звідси випливає закон збереження енергії, згідно з яким алгебраїчна сума потужностей, що проводяться до всіх гілок розгалуженого електричного кола, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^m P_k = \sum I_k^2 \cdot R_k \mp \sum E_k \cdot I_k = 0.
 \tag{1.31}$$

Існує ще одна форма запису закону збереження енергії, який називають балансом потужності:

$$P_{дж} = P_{СПОЖ} \text{ чи } \pm \sum E \cdot I \pm \sum U_J \cdot J = \sum I^2 \cdot R.
 \tag{1.32}$$

У лівій частині додаються потужності джерел енергії, а в правій – потужності, перетворені у споживачах у тепло. Потужності джерел, що віддають енергію, беруться зі знаком «+», а працюючих у режимі споживачів, – зі знаком «-» (рис. 1.19).

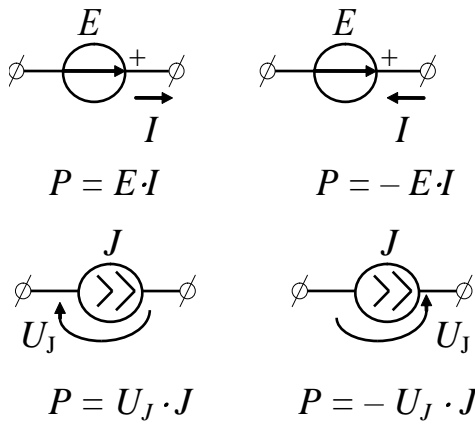


Рисунок 1.19

Іноді користуються рівнянням балансу потужності в арифметичній формі

$$\underbrace{\sum E \cdot I + \sum U_J \cdot J}_{\text{СПРІЯЮЧІ}} = \sum I^2 \cdot R + \underbrace{\sum E \cdot I + \sum U_J \cdot J}_{\text{ПРОТИДІЮЧІ}}$$

Тут потужності протидіючих джерел вважаються позитивними, але при балансі враховуються як потужності споживачів.

2 РОЗРАХУНКИ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

2.1 Розрахунки нерозгалужених кіл

Основою розрахунків одноконтурних (нерозгалужених) електричних кіл, що містять джерела обох видів і споживачі, служать розглянуті раніше закони Ома та Кірхгофа.

Якщо в колі немає джерел струму, а параметри споживачів (R) і джерел напруги (E) задані, то завдання звичайно полягає у визначенні струму контуру. Позитивний напрямок шуканого струму вибирається довільно й складається таке рівняння:

$$I = \frac{\sum E}{\sum R}. \quad (2.1)$$

При цьому необхідно пам'ятати, що зі знаком «+» беруться ЕРС джерел, які діють у напрямку обраного струму. Дійсний напрямок збігається з обраним, якщо у результаті розрахунків струм виявляється позитивною величиною, і протилежно обраному, якщо струм виявляється негативним.

Якщо в колі, крім споживачів (R) і джерел ЕРС (E), є джерело струму (J), то завдання звичайно зводиться до визначення напруги на джерелі струму U_J , тому що струм контуру I збігається із заданим струмом джерела J . Позитивна полярність U_J вибирається довільно, але переважно на початку стрілки ставити знак «+» (такій полярності відповідає формула: $U_J = J \cdot \sum R - \sum E$). Дійсна полярність U_J збігається з обраною, якщо при розрахунках U_J виражається позитивним числом, і протилежна обраній, якщо $U_J < 0$. Шуканий спад напруги на джерелі струму U_J за відсутності джерел ЕРС визначається за формулою

$$U_J = J \cdot \sum R.$$

2.1 Розрахунки розгалужених кіл з одним джерелом

Розгалужене коло з одним джерелом звичайно спрощують, перетворюючи в нерозгалужене (рис. 2.1.), і вирішують методами, викладеними вище. Основна проблема полягає у знаходженні струмів і напруг гілок вихідної схеми, оскільки у результаті перетворення такі гілки не зберігаються.

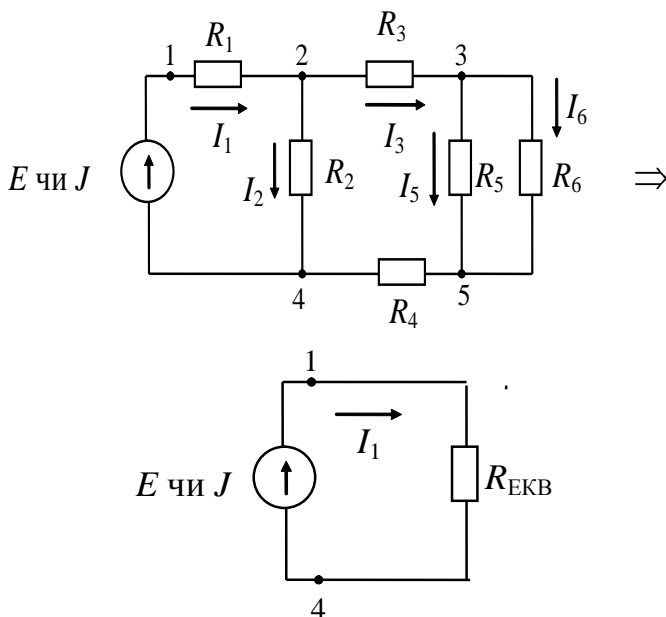


Рисунок 2.1

Для визначення струмів і напруг у схемі, що зображена на рис. 2.1, спочатку визначається $R_{\text{ЕКВ}}$ змішаного з'єднання споживачів щодо затискачів джерела (точки 1 і 4 на рис. 2.1.). Потім якщо коло живиться джерелом напруги, то визначається струм за формулою

$$I = \frac{E}{R_{\text{ЕКВ}}}.$$

Якщо коло живиться джерелом струму, то визначається напруга

$$U_J = J \cdot R_{EKB}.$$

Порядок подальшого розрахунку однаковий для обох випадків, тому що відомі E або U_J та I або J нерозгалуженої частини схеми. Розглянемо порядок розрахунків для наведеного на рис. 2.1 кола.

Струм у споживачі R_1 збігається зі знайденим струмом нерозгалуженої частини I , а напруга $U_1 = I \cdot R_1$, тоді

$$U_{24} = E - I_1 \cdot R_1; I_2 = \frac{U_{24}}{R_2} = U_{24} \cdot G_2.$$

Струм I_3 визначається за законом Кірхгофа: $I_3 = I_1 - I_2$.

Визначимо всі інші струми та напруги:

$$U_{35} = U_{24} - I_3 \cdot (R_3 + R_4);$$

$$I_5 = \frac{U_{35}}{R_5} = U_{35} \cdot G_5; I_6 = \frac{U_{35}}{R_6} = U_{35} \cdot G_6.$$

Зазначене припущення використовується і у тих випадках, коли для спрощення кола доводиться вдаватися до перетворення «трикутник \rightarrow зірка» або «зірка \rightarrow трикутник». Недолік полягає у тому, що коло доводиться розраховувати двічі – перетворене та вихідне.

При розрахунках зручно користуватися *формулою щодо струмів у двох паралельних пасивних гілках*. Виведемо її на прикладі схеми, що зображена на рис. 2.1. Напруга U_{35} за законом Ома визначається за формулою

$$U_{35} = I_3 R_{56} = I_3 \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}.$$

Тоді струм I_5 можна визначити так:

$$I_5 = \frac{U_{35}}{R_5} = I_3 \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} = I_3 \frac{R_6}{R_5 + R_6}. \quad (2.2)$$

Аналогічно можна визначити струм

$$I_6 = I_3 \frac{R_5}{R_5 + R_6}. \quad (2.3)$$

Таким чином, струм у одній із двох паралельних гілок дорівнює струму нерозгалуженої частини (загальної гілки), помноженому на опір протилежної гілки, діленому на суму опорів обох гілок.

Відомий ще один метод розрахунків таких кіл – *метод пропорційних величин*. Він застосовується до «подовжених» кіл (з'єднанням кіл).

Суть цього методу полягає у такому: у гілці, найбільш віддаленій від джерела (R_6), задаються деяким значенням струму або напруги. Для зручності розрахунків звичайно це 1А або 1В. Потім, переміщуючись до початку кола, визначають по черзі струми та напруги всіх гілок аж до гілки, що містить джерело. Тим самим визначають, яку напругу $U_{вх}$ та струм $I_{вх}$ повинно мати джерело для того, щоб викликати у всіх гілках струми та напруги обчислених значень. Якщо ЕРС (E) або струм, що задає (J), із цими значеннями не збігається, то необхідно пропорційно змінити обчислені значення струмів і напруг гілок шляхом множення їх на відношення $\frac{E}{U_{вх}}$ або $\frac{J}{J_{вх}}$.

Для схеми, що подана на рис. 2.1, нехай $I_6 = I$. Тоді

$$U_{35} = I_6 \cdot R_6 \quad I_5 = \frac{U_{35}}{R_5}.$$

I_3 можна визначити за I законом Кірхгофа:

$$I_3 = I_5 + I_6.$$

U_{24} визначаємо за II законом Кірхгофа:

$$U_{24} = I_3 \cdot (R_3 + R_4) + U_{35}.$$

За законом Ома

$$I_2 = \frac{U_{24}}{R_2},$$

за I законом Кірхгофа

$$I = I_2 + I_3.$$

Вхідна напруга визначається так:

$$U_{ex} = U_{24} + I_1 \cdot R_1.$$

Коефіцієнт перерахування визначається у такий спосіб:

$$k = \frac{E}{U_{ex}}.$$

Усі розраховані значення струмів і напруг необхідно домножити на коефіцієнт k .

2.3 Розрахунки розгалужених кіл з декількома джерелами

Якщо відома конфігурація складного електричного кола та задані властивості всіх складових її елементів, то розрахунки такого кола звичайно зводяться до визначення струмів у гілках і потенціалів вузлів. На відміну від розглянутих вище випадків розгалужене коло з декількома джерелами вимагає спеціальних методів розрахунків. Слід зазначити, що розгалужені кола з одним джерелом так само можна розраховувати розглянутими нижче методами.

Кількість невідомих струмів збігається із кількістю m гілок. Якщо в деяких гілках міститься джерела струму, то невідомими для цих гілок є відповідні U_j . Таким чином, для розрахун-

ків кола у загальному випадку слід скласти систему з m незалежних рівнянь.

2.3.1 Метод рівнянь Кірхгофа

Відшукування невідомих величин пов'язане зі складанням і спільним розв'язанням системи рівнянь, записаних за I та II законами Кірхгофа. Для того, щоб записати ці рівняння, необхідно попередньо пронумерувати вузли, призначивши кожному з них відповідне значення потенціалу ($\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$), і гілки, призначивши кожній із них значення струму (I_1, I_2, \dots, I_m).

Перш ніж скласти рівняння за законами Кірхгофа, необхідно встановити, скільки незалежних рівнянь складається за кожним із цих законів. Рівняння за I законом Кірхгофа, що зв'язують m невідомих струмів, можуть бути записані для кожного з вузлів кола. Однак використовувати для спільного розв'язання можна тільки $n-1$ рівнянь, тому що рівняння, записане для останнього вузла, виявиться наслідком усіх попередніх рівнянь. За II законом Кірхгофа складають кількість рівнянь, що дорівнює кількості гілок m , за винятком кількості рівнянь, складених за I законом Кірхгофа ($n-1$), тобто $p = m - (n-1) = m - n + 1$, де p – кількість незалежних контурів.

Усі ці міркування справедливі для випадку, коли у колі містяться джерела струму. У цьому випадку зменшується кількість невідомих струмів, але з'являються відповідні числа напруг U_j , які ввійдуть у рівняння як невідомі величини.

Таким чином, методика розрахунків розгалуженого кола, що не містить джерел струму, методом рівнянь Кірхгофа така:

1. Позначити струми гілок і довільно вибрати їх позитивний напрямок.

2. Довільно вибрати опорний вузол і сукупність $p = m - n + 1$ незалежних контурів.

3. Для всіх вузлів, крім опорного, скласти рівняння за I законом Кірхгофа. Таких рівнянь повинно бути $(n - 1)$.

4. Для кожного обраного контуру скласти рівняння за II законом Кірхгофа. Таких рівнянь повинно бути p .

5. Система m рівнянь Кірхгофа з m невідомими струмами розв'язується спільно та визначаються числові значення струмів.

6. Якщо необхідно, розрахувати за допомогою узагальненого закону Ома напруги гілок або різницю потенціалів вузлів.

7. Перевірити правильність розрахунків за допомогою балансу потужності.

Якщо у колі є q джерел струму, то при правильному виборі сукупності незалежних контурів кількість спільно розв'язуваних рівнянь у системі можна скоротити на q . Якщо контури вибирати таким чином, щоб кожне джерело струму ввійшло тільки в один контур, що відповідає U_J , увійде тільки в одне рівняння за II законом Кірхгофа. Оскільки невідомими є тільки струми в $(m - q)$ гілках, кількість рівнянь за II законом Кірхгофа можна зменшити до $m - n + 1 - q$. У результаті, разом з $(n - 1)$ рівнянням I закону Кірхгофа, вийде система з $m - q$ рівнянь щодо невідомих струмів, після спільного розв'язання яких q рівнянь, що залишилися, використовуються для визначення U_J .

Приклад 2.2 Для схеми, наведеної на рис. 2.2, записати рівняння за законами Кірхгофа.

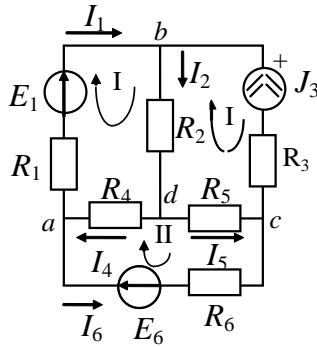


Рисунок 2.2

Розв'язання

1. Позначимо струми гілок.
2. Вибираємо сукупність незалежних контурів (I, II, III) і опорний вузол c.
3. Рівняння за I законом Кірхгофа:

$$\text{вузол } a: -I_1 + I_4 - I_6 = 0,$$

$$\text{вузол } b: I_1 - I_2 + J_3 = 0,$$

$$\text{вузол } d: I_2 - I_4 - I_5 = 0.$$

4. Рівняння за II законом Кірхгофа:

$$I \text{ контур: } I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_4 = E_1,$$

$$II \text{ контур: } -I_2 \cdot R_2 - I_5 \cdot R_5 - J_3 \cdot R_3 = -U_J,$$

$$III \text{ контур: } -I_4 \cdot R_4 + I_5 \cdot R_5 - I_6 \cdot R_6 = E_6.$$

5. Спільно розв'язуємо систему з $m - q = 5$ рівнянь щодо невідомих струмів I_1, I_2, I_4, I_5, I_6 , у яку не ввійде рівняння, складене для II контуру.

6. Визначаємо U_J .

7. Правильність розрахунків перевіряємо за допомогою балансу потужності:

$$\begin{aligned} P_{дж} &= P_{спож} \Rightarrow \\ E_1 \cdot I_1 - E_6 \cdot I_6 + U_J \cdot J_3 &= \\ &= I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + J_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6. \end{aligned}$$

2.3.2 Метод контурних струмів

Метод контурних струмів є одним із основних методів розрахунків складних електричних кіл, яким широко користуються на практиці.

При розрахунках методом контурних струмів вважають, що у кожному незалежному контурі проходить свій контурний струм. Рівняння складають щодо контурних струмів, після чого визначають струми гілок через контурні струми.

Таким чином, метод контурних струмів можна визначити як метод розрахунків, у якому за шукані вважають контурні струми. Число невідомих у цьому методі дорівнює кількості рівнянь, які необхідно було б скласти для схеми за II законом Кірхгофа, тобто $p = m - n + 1$. Отже, цей метод більш економічний при обчисленнях, ніж метод рівнянь Кірхгофа.

Розробимо алгоритм розрахунків кіл методом контурних струмів на прикладі наведеної на рис. 2.3 схеми, у якій три незалежні контури. Припустимо, що у кожному контурі проходить свій контурний струм у зазначеному напрямку. Для кожного з контурів складемо рівняння за II законом Кірхгофа. При цьому врахуємо, що по суміжних гілках для контурних струмів I_{11} та I_{22} (гілки bd , що містять опір R_2) проходить струм $I_{11} - I_{22}$, по суміжній гілці для контурних струмів I_{33} та I_{22} (гілки dc , що містить опір R_5) проходить струм $I_{33} - I_{22}$, по суміжній гілці

для контурних струмів I_{11} та I_{33} (гілки ad , що містить опір R_4) проходить струм $I_{11} - I_{33}$.

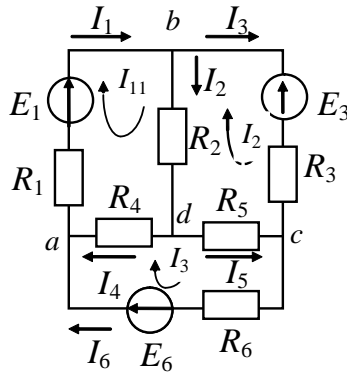


Рисунок 2.3

Тоді рівняння за II законом Кірхгофа для кожного контуру наберуть такого вигляду:

$$\begin{cases} R_1 I_{11} + R_2 (I_{11} - I_{22}) + R_4 (I_{11} - I_{33}) = E_1, \\ -R_2 (I_{11} - I_{22}) + R_3 I_{22} - R_5 (I_{33} - I_{22}) = -E_3, \\ -R_4 (I_{11} - I_{33}) + R_5 (I_{33} - I_{22}) + R_6 I_{33} = E_6. \end{cases} \quad (2.4)$$

Згрупуємо доданки при однойменних струмах:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot (R_1 + R_2 + R_4) + I_{22} \cdot (-R_2) + I_{33} \cdot (-R_4) = E_1, \\ I_{11} \cdot (-R_2) + I_{22} \cdot (R_2 + R_3 + R_6) + I_{33} \cdot (-R_5) = -E_3, \\ I_{11} \cdot (-R_4) + I_{22} \cdot (-R_5) + I_{33} \cdot (R_4 + R_5 + R_6) = E_6. \end{cases} \quad (2.5)$$

Введемо позначення:

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_2 + R_4 \\ R_{22} &= R_2 + R_3 + R_6 \\ R_{33} &= R_4 + R_5 + R_6 \end{aligned} \right\} - \text{власні опори контурів,}$$

$$\left. \begin{aligned} R_{12} = R_{21} = -R_2 \\ R_{13} = R_{31} = -R_4 \\ R_{23} = R_{32} = -R_6 \end{aligned} \right\} - \text{загальні опори контурів},$$

$$\left. \begin{aligned} E_{11} = E_1 \\ E_{22} = -E_3 \\ E_{33} = E_6 \end{aligned} \right\} - \text{контурні ЕРС}.$$

В остаточній формі система рівнянь для контурних струмів набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_{11} + I_{22} \cdot R_{12} + I_{33} \cdot R_{13} = E_{11}, \\ I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} + I_{33} \cdot R_{23} = E_{22}, \\ I_{11} \cdot R_{31} + I_{22} \cdot R_{32} + I_{33} \cdot R_{33} = E_{33}, \end{cases} \quad (2.6)$$

у матричній формі

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Власний опір контуру (R_{ii}) являє собою арифметичну суму опорів усіх споживачів, що перебувають у i -му контурі.

Загальний опір контуру ($R_{ij} = R_{ji}$) являє собою алгебраїчну суму опорів споживачів гілки (декількох гілок), що одночасно належать i -му та j -му контурам. У цю суму опір входить зі знаком «+», якщо контурні струми проходять через даний опір у одному напрямку (узгоджено), і знак «-», якщо вони проходять зустрічно.

Контурні ЕРС являють собою алгебраїчну суму ЕРС джерел, що входять у контур. Зі знаком «+» у цю суму входять ЕРС джерел, що діють згідно з обходом контуру, зі знаком «-» входять ЕРС джерел, що діють зустрічно.

Розв'язання отриманої системи зручно виконати методом Крамера:

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (2.8)$$

де $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, – відповідно визначники матриць:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} E_{11} & R_{12} & R_{13} \\ E_{22} & R_{22} & R_{23} \\ E_{33} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} R_{11} & E_{11} & R_{13} \\ R_{21} & E_{22} & R_{23} \\ R_{31} & E_{33} & R_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E_{11} \\ R_{21} & R_{22} & E_{22} \\ R_{31} & R_{32} & E_{33} \end{vmatrix}.$$

За знайденими контурними струмами за допомогою I закону Кірхгофа визначаються струми гілок.

Таким чином, методика розрахунків кіл постійного струму методом контурних струмів така:

1. Позначити всі струми гілок та їх позитивний напрямок.
2. Довільно вибрати сукупність p незалежних контурів, нанести на схему позитивний напрямок контурних струмів, що проходять у обраних контурах.
3. Визначити власні, загальні опори та контурні ЕРС і підставити їх у систему рівнянь вигляду (2.3).
4. Розв'язати отриману систему рівнянь щодо контурних струмів, використовуючи метод Крамера.
5. Визначити струми гілок через контурні струми за I законом Кірхгофа.
6. Якщо буде потреба, за допомогою узагальненого закону Ома визначити потенціали вузлів.
7. Перевірити правильність розрахунків за допомогою балансу потужності.

Якщо в колі є q джерел струму, та кількість спільно розглянутих рівнянь скорочується на q і дорівнює $p - q$, оскільки струми у таких гілках відомі (для контурів з $I_{ii} = J$ рівняння можна не записувати). У цьому випадку слід вибирати таку сукуп-

ність незалежних контурних струмів, щоб частина з них стали відомими. Для цього необхідно, щоб кожне джерело струму входило тільки в один контур. Напруги U_J джерел увійдуть як невідомі у праві частини рівнянь, тобто до складу контурних ЕРС.

Приклад 2.3. Для кола, що подане на рис. 2.4, записати систему рівнянь на основі методу контурних струмів. Перевірити баланс потужності.

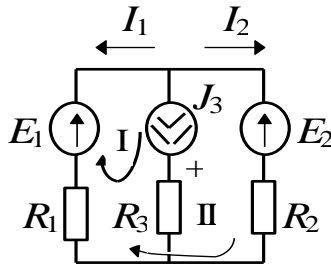


Рисунок 2.4

Розв'язання

Оберемо напрямки проходження струмів у гілках. Виберемо додатні напрямки проходження контурних струмів.

Тоді система рівнянь за методом контурних струмів набере такого вигляду:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) I_{11} + R_1 \cdot I_{22} = E_1 - E_2, \\ R_1 \cdot I_{11} + (R_1 + R_3) I_{22} = E_1 + U_J. \end{cases}$$

Причому $I_{11} = J$, розв'язавши перше рівняння, можна одержати I_{22} . Далі

$$I_1 = -I_{11} + I_{22} = I_{22}.$$

U_J можна визначити із другого рівняння системи, склавши рівняння за II законом Кірхгофа для будь-якого контуру, у який входить джерело струму.

Баланс потужності обчислюємо так:

$$P_{дж} = -E_1 \cdot I_1 - E_2 \cdot I_2 + J_2 \cdot U_J,$$

$$P_{спож} = I_1^2 \cdot R_1 + J_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3.$$

2.3.3 Метод вузлових потенціалів

Струм у будь-якій гілці схеми можна знайти за узагальненим законом Ома. Для того щоб можна було застосовувати закон Ома, необхідно знати значення потенціалів вузлів схеми. Метод розрахунків електричних кіл, у якому за невідомі вибирають потенціали вузлів схеми, називають методом вузлових потенціалів. Кількість невідомих у методі вузлових потенціалів дорівнює кількості рівнянь, які необхідно скласти для схеми за І законом Кірхгофа. Метод вузлових потенціалів, як і метод контурних струмів, – один з основних розрахункових методів. У тому випадку, коли $n-1 < p$ (n – кількість вузлів, p – кількість незалежних контурів), даний метод більш економічний, ніж метод контурних струмів.

Проілюструємо на простому прикладі методику розрахунків електричного кола методом вузлових потенціалів (рис. 2.5).

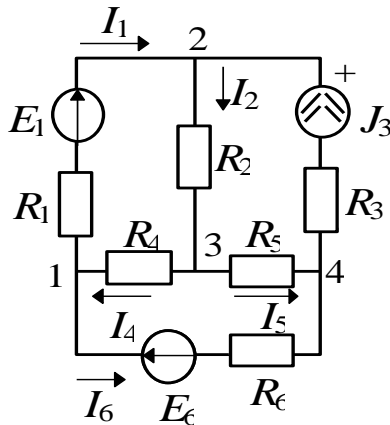


Рисунок 2.5

1. Запишемо $(n - 1)$ рівняння за I законом Кірхгофа (при обраному опорному вузлі 4, потенціал якого умовно вважаємо таким, що дорівнює нулю):

$$\text{вузол 1: } -I_1 + I_4 - I_6 = 0,$$

$$\text{вузол 2: } I_1 - I_2 + J_3 = 0,$$

$$\text{вузол 3: } I_2 - I_4 + I_5 = 0.$$

4. Для кожного з m струмів запишемо вирази за узагальненим законом Ома через потенціали вузлів з урахуванням, що потенціал $\varphi_4 = 0$:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_1}{R_1}, \quad I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_2}, \quad I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_4},$$

$$I_5 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{R_5} = \frac{\varphi_3}{R_5},$$

$$I_6 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4 - E_6}{R_6} = \frac{\varphi_1 - E_6}{R_6}.$$

3. Отримані в п. 2 вирази підставимо у рівняння, складені за I законом Кірхгофа:

$$\begin{cases} -\left[\frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_1}{R_1} \right] + \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_4} + \frac{\varphi_1 - E_6}{R_6} = 0, \\ \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_1}{R_1} - \left[\frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_2} \right] + J_3 = 0, \\ \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_2} - \left[\frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_4} \right] + \frac{\varphi_3}{R_5} = 0. \end{cases}$$

Наведемо подібні доданки при різних потенціалах і одержимо канонічну систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 \cdot \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right] + \varphi_2 \cdot \left[-\frac{1}{R_1} \right] + \varphi_3 \cdot \left[-\frac{1}{R_4} \right] = -\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_6}{R_6}, \\ \varphi_1 \cdot \left[-\frac{1}{R_1} \right] + \varphi_2 \cdot \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] + \varphi_3 \cdot \left[-\frac{1}{R_2} \right] = \frac{E_1}{R_1} + J_3, \\ \varphi_1 \cdot \left[-\frac{1}{R_4} \right] + \varphi_2 \cdot \left[-\frac{1}{R_2} \right] + \varphi_3 \cdot \left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right] = 0. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Введемо позначення:

$$\left. \begin{array}{l} G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6}, \\ G_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \\ G_{33} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}. \end{array} \right\} - \text{власні провідності},$$

$$\left. \begin{array}{l} G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{R_1}, \\ G_{13} = G_{31} = -\frac{1}{R_4}, \\ G_{23} = G_{32} = -\frac{1}{R_2}. \end{array} \right\} - \text{загальні провідності},$$

$$\left. \begin{array}{l} J_{11} = -\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_6}{R_6}, \\ J_{22} = \frac{E_1}{R_1} + J_3, \\ J_{33} = 0 \end{array} \right\} - \text{вузлові струми}.$$

В остаточному вигляді система рівнянь для контурних струмів набере такого вигляду:

$$\begin{cases} G_{11} \cdot \varphi_1 + G_{12} \cdot \varphi_2 + G_{13} \cdot \varphi_3 = J_{11}, \\ G_{21} \cdot \varphi_1 + G_{22} \cdot \varphi_2 + G_{23} \cdot \varphi_3 = J_{22}, \\ G_{31} \cdot \varphi_1 + G_{32} \cdot \varphi_2 + G_{33} \cdot \varphi_3 = J_{33}. \end{cases} \quad (2.10)$$

У матричній формі

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ J_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Власна провідність вузла (G_{ii}) являє собою арифметичну суму провідностей усіх гілок, з'єднаних в i -му вузлі.

Загальна провідність i -го та j -го вузлів ($G_{ij} = G_{ji}$) являє собою взяту зі знаком « $-$ » суму провідностей гілок, приєднаних одночасно до i -го та j -го вузлів.

Провідності гілок із джерелами струму беруться такими, що дорівнюють нулю, і у власні та загальні провідності не входять!

Вузловий струм (J_{ii}) складається із двох алгебраїчних сум: перша містить струми джерел струму, що втримуються у гілках, з'єднаних в i -му вузлі; друга являє собою добуток ЕРС джерел напруги на провідності відповідних гілок, з'єднаних в i -му вузлі. Зі знаком « $+$ » у цю суму входять E і J джерела, дія яких спрямована до вузла, зі знаком « $-$ » – інші.

Розв'язання системи рівнянь за методом вузлових потенціалів у загальному випадку виконується методом Крамера за допомогою визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} J_{11} & G_{12} & G_{13} \\ J_{22} & G_{22} & G_{23} \\ J_{33} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} G_{11} & J_{11} & G_{13} \\ G_{21} & J_{22} & G_{23} \\ G_{31} & J_{33} & G_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & J_{11} \\ G_{21} & G_{22} & J_{22} \\ G_{31} & G_{32} & J_{33} \end{vmatrix}.$$

Тоді невідомі потенціали можуть обчислені у такий спосіб:

$$\varphi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \varphi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \varphi_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (2.12)$$

Неважко, показати, що аналогічну систему рівнянь можна побудувати для випадку n вузлів у колі. Тоді необхідно скласти для $(n-1)$ вузлів відповідні рівняння, поклавши потенціал n -го вузла таким, що дорівнює нулю.

Таким чином, методика розрахунків кіл постійного струму методом вузлових потенціалів така:

1. Позначити всі струми гілок та їх позитивний напрямок.
2. Довільно вибрати опорний вузол (φ_n) і пронумерувати всі інші $(n-1)$ -е вузли.
3. Визначити власні та загальні провідності вузлів, а також вузлові струми, тобто розрахувати коефіцієнти у системі рівнянь.
4. Записати систему рівнянь у такому вигляді:

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{k1} & G_{k2} & \cdots & G_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} \\ \vdots \\ J_{kk} \end{pmatrix} - \text{матрична форма}$$

або в розгорнутому вигляді в алгебраїчній формі:

$$\begin{cases} G_{11}\varphi_1 + G_{12}\varphi_2 + \dots + G_{1k}\varphi_k = J_{11} \\ G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 + \dots + G_{2k}\varphi_k = J_{22} \\ \vdots \\ G_{k1}\varphi_1 + G_{k2}\varphi_2 + \dots + G_{kk}\varphi_k = J_{kk} \end{cases} \begin{cases} \text{для } 1\text{-го вузла,} \\ \text{для } 2\text{-го вузла,} \\ \vdots \\ \text{для } n\text{-го вузла.} \end{cases}$$

У цій системі кожному вузлу відповідає окреме рівняння.

5. Отриману систему рівнянь розв'язати щодо невідомих $(n - 1)$ потенціалів за допомогою методу Крамера.

6. За допомогою узагальненого закону Ома розрахувати невідомі струми.

7. Перевірити правильність розрахунків за допомогою балансу потужності.

Порядок розрахунків не залежить від вигляду джерел, що діють у колі. Однак, розрахунки спрощуються у випадку, коли між однією або декількома парами вузлів увімкнені ідеалізовані джерела ЕРС. Тоді напруги між цими парами вузлів стають відомими величинами, визначеними умовами завдання. Для успішного розв'язання подібних завдань необхідно правильно позначити опорний вузол, яким може бути обраний тільки один з вузлів, до якого приєднана гілки з ідеалізованим джерелом ЕРС.

Якщо таких гілок q , то кількість рівнянь у системі скоротиться до

$$k = n - 1 - q.$$

Якщо в даній схемі (рис. 2.6) як опорний вузол вибрати вузол 1 ($\varphi_1=0$), то потенціали другого та третього вузлів можна вважати відомими та таким, що дорівнює відповідно $\varphi_2=E_1$ і $\varphi_3=E_1-E_2$. Тоді невідомим залишається тільки потенціал четвертого вузла, для якого складемо рівняння за методом вузлових потенціалів:

$$\varphi_2 \cdot G_{24} + \varphi_3 \cdot G_{34} + \varphi_4 \cdot G_{44} = J_{44}.$$

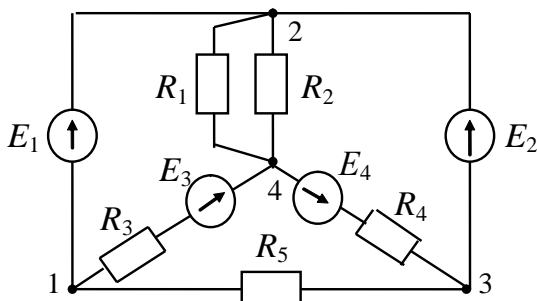


Рисунок 2.6

Слід зазначити, що рівняння для 2-го і 3-го вузлів скласти не виявляється можливим через невизначеності, що з'являються, $\frac{1}{0}$ виду, тому що опір гілок, що містить ідеалізований джерело ЕРС, дорівнює нулю, а провідність відповідно $\frac{1}{0}$.

Підставимо відомі значення:

$$E_1 \cdot \left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + E_1 - E_2 \cdot \left(-\frac{1}{R_4} \right) + \varphi_4 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = \frac{E_3}{R_3} - \frac{E_4}{R_4}.$$

З отриманого рівняння знайдемо невідомий φ_4 , а далі й усі струми.

Для розгалуженого кола, що має тільки два вузли та довільну кількість гілок, метод вузлових потенціалів перетворюється у *метод двох вузлів*. Розв'язання зводиться до відшукування значення потенціалу одного з вузлів, тому що потенціал іншого вузла може бути взяти таким, що дорівнює нулю.

Система рівнянь перетворюється в одне рівняння:

$$\varphi_1 \cdot G_{11} = J_{11} \Rightarrow U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{J_{11}}{G_{11}} = \frac{\pm \sum E \cdot G \pm \sum J}{\sum G}, \quad (2.13)$$

за умови, що $\varphi_2 = 0$.

Після визначення U_{12} струми гілок і напруги джерел струму знаходять за допомогою узагальненого закону Ома.

Розглянемо схему, що зображена на рис. 2.7.

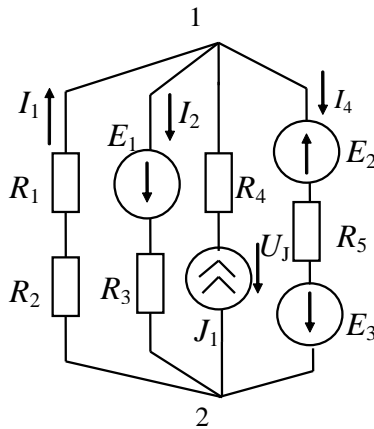


Рисунок 2.7

Нехай $\varphi_2 = 0$, тоді

$$U_{12} = \varphi_1 = \frac{-\frac{E_1}{R_3} + J + \frac{E_2 - E_3}{R_5}}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}}.$$

За узагальненим законом Ома

$$I_1 = \frac{U_{21}}{R_1 + R_2} = \frac{-U_{12}}{R_1 + R_2} I_2 = \frac{U_{12} + E_1}{R_3},$$

$$I_4 = \frac{U_{12} - E_2 + E_3}{R_5} U_J = U_{12} + J \cdot R_4.$$

2.3.4 Метод накладання

Лінійне електричне коло описується системою лінійних рівнянь Кірхгофа. Це означає, що вона підпорядковується *принципу накладання (суперпозиції)*:

Спільна дія всіх джерел в електричному колі збігається із сумою дій кожного з них окремо.

Оскільки принцип накладання впливає із загальних властивостей лінійних рівнянь, то його можна застосовувати для визначення будь-яких фізичних величин, які зв'язані між собою лінійною залежністю. У застосуванні до електричних кіл можна визначити не тільки струми при заданих опорах, ЕРС і струмах джерел, але й напруги при заданих струмах і відомих опорах. Методом не можна користуватися для визначення потужності, тому що потужність *квадратичної* функції струму або напруги і принципу суперпозиції не підпорядковується.

Метод накладення опирається на принцип накладення і полягає в наступному: струм або напруга довільної гілки або ділянки розгалуженого електричного кола постійного струму визначається як алгебраїчна сума струмів або напруг, викликаних кожним із джерел окремо.

При використанні цього методу завдання розрахунків розгалуженого електричного кола з n джерелами зводиться до спільного розв'язку з n кіл з одним джерелом.

Методика розрахунків лінійного електричного кола методом накладання:

1. Довільно задати напрямки струмів у гілках досліджуваного кола.

2. Вихідне коло, що містить n джерел, перетворити в n підсхем, кожна з яких містить тільки одне із джерел, інші джерела вимикаються у такий спосіб: у джерелі напруги відбувається коротке замикання, а гілки із джерелами струму обриваються. При цьому необхідно пам'ятати, що внутрішні опори реальних джерел відіграють роль споживачів, і тому вони повинні залишатися в підсхемах.

3. Визначити струми кожної з підсхем, задавшись їх напрямком відповідно до полярності джерела, кожним з відомих методів. У більшості випадків розрахунки проводяться за законом Ома з використанням методу еквівалентних перетворень пасивних кіл.

4. Повний струм у будь-якій гілці вихідного кола визначається як алгебраїчна сума струмів допоміжних підсхем, причому при додаванні зі знаком «+» беруться струми підсхем, напрямком яких збігається з напрямком струму у вихідному колі, зі знаком «-» – інші.

До переваг методу відносять ту обставину, що розрахунки проводяться частинами, де складові струми та напруги визначаються досить просто. Однак оскільки розв'язання припускає велику кількість перетворень, метод не рекомендується застосовувати для схем, що містять велику кількість джерел.

Приклад 2.3. Визначити струм I_2 у колі, зображеної на рис. 2.8, а.

Розв'язання

Для даного кола повинні бути зображені дві розрахункові підсхеми (рис. 2.8 б та в). За допомогою підсхеми 1 (рис. 2.8 б) знайдемо складову I_2^J за формулою про струми у двох паралельних гілках:

$$I_2^J = J \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}}.$$

Напрямок струму у підсхемі 1 збігається з напрямком шуканого струму.

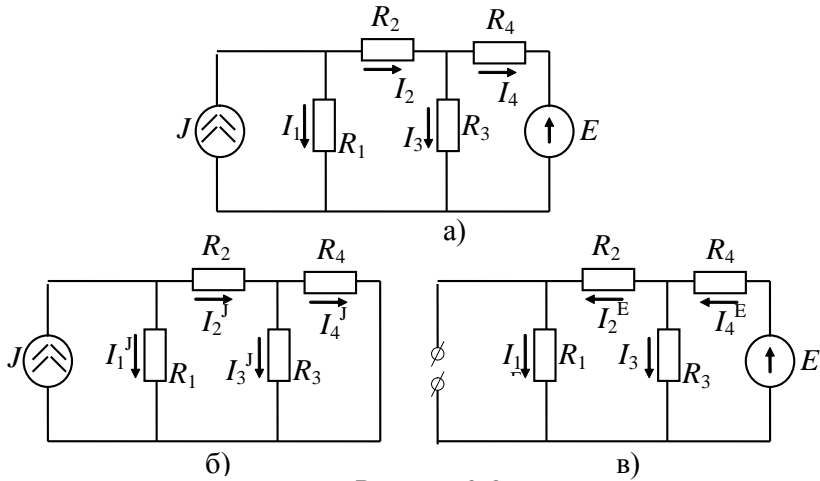


Рисунок 2.8

За допомогою підсхеми 2 (рис. 2.8 в) знайдемо складову I_2^E :

$$I_2^E = \frac{E}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4} \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Напрямок струму у підсхемі 2 протилежний напрямку шуканого струму. Струм у вихідному колі визначиться у такий спосіб: $I_2 = I_2^J - I_2^E$.

2.3.5 Метод еквівалентного джерела напруги (генератора)

При розрахунках струму в одній з гілок розгалуженого кола, що містить довільну кількість джерел і споживачів, зручно розглядати коло, що складається із двох частин: шуканої гілок та іншої частини. Стосовно розглянутих гілок уся інша частина кола є активним двополюсником (рис. 2.9), і завдання полягає у визначенні струму або напруги на затискачах активного двополюсника при підключенні до нього споживача з опором R .

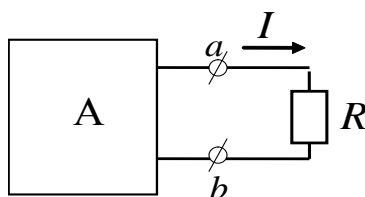


Рисунок 2.9

Згідно з II законом Кірхгофа струм не зміниться, якщо коло, утворене активним двополюсником і споживачем, увімкнути послідовно два ідеалізовані зустрічно спрямовані джерела з однаковими ЕРС (рис. 2.10).

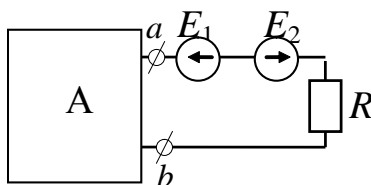


Рисунок 2.10

Величину кожної з них вибираємо співпадаючою з напругою U_{XX} на затискачах активного двополюсника у режимі холостого ходу, який має місце при вимкненому споживачі:

$$E_1 = E_2 = U_{XX}. \quad (2.14)$$

Струм I у колі із двома джерелами визначимо методом накладання. Із цією метою джерела розбиваємо на дві групи (рис. 2.11 та рис. 2.12).

1. Джерела активного двополюсника та E_1 , які зберігаються в підсхемі рис. 2.11.

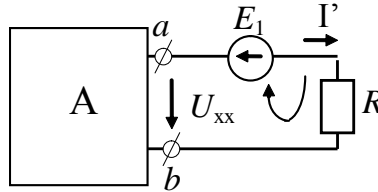


Рисунок 2.11

Згідно з II законом Кірхгофа

$$I' \cdot R - U_{XX} = -E_1 \Rightarrow I' = \frac{-E_1 + U_{XX}}{R} = 0,$$

оскільки $E_1 = U_{XX}$.

2. Усі споживачі активного двополюсника і E_2 зберігаються в підсхемі на рис. 2.12.

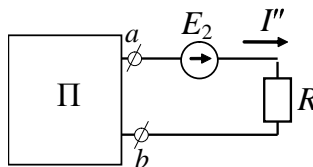


Рисунок 2.12

Оскільки $I' = 0$, повний струм $I = I''$.

Якщо еквівалентний опір пасивного двополюсника, утвореного коротким замиканням джерел ЕРС і обривом гілок, що містять джерела струму, позначити через $R_{вх}$, одержимо просту

одноконтурну схему (рис. 2.13), яку можна розрахувати за законом Ома:

$$I = I'' = \frac{E_2}{R_{\text{вх}} + R} = \frac{U_{\text{xx}}}{R_{\text{вх}} + R}. \quad (2.15)$$

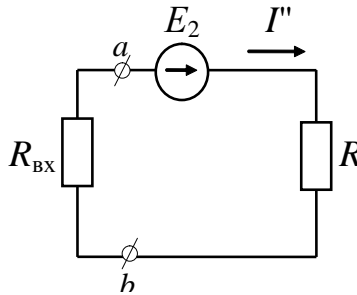


Рисунок 2.13

Ця формула відображає теорему про активний двополюсник або про еквівалентне джерело напруги:

Щодо будь-якої гілки розгалуженого електричного кола вся інша частина схеми може бути представлена як джерело напруги, ЕРС якого дорівнює U_{xx} , а внутрішній опір дорівнює $R_{\text{ЕКВ}}$.

При короткому замиканні гілок із навантаженням $R = 0$ струм перетворюється у струм короткого замикання:

$$I_{\text{кз}} = \frac{U_{\text{xx}}}{R_{\text{вх}}} = U_{\text{xx}} \cdot G_{\text{вх}} \Rightarrow R_{\text{вх}} = \frac{U_{\text{xx}}}{I_{\text{кз}}}. \quad (2.16)$$

Параметри активного двополюсника можна визначити дослідним шляхом. Для цього необхідно розімкнути i -му гілку та виміряти напругу U_{xx} , потім зробити коротке замикання R_i і виміряти $I_{\text{кз}}$:

$$I_1 = \frac{U_{xx}}{\frac{U_{xx}}{I_{кз}} + R_1}. \quad (2.17)$$

$R_{вх}$ можна знайти розрахунковим шляхом, якщо відома конфігурація кола та величини опорів.

Методика розрахунків лінійного електричного кола методом еквівалентного генератора:

1. Відключається споживач у гілці із шуканим струмом і на затискачах позначається U_{xx} за напрямком струму.

2. У більш простому колі, що утворювався, *знаходимо* U_{xx} за допомогою II закону Кірхгофа, записаного для будь-якого контуру, що *містить* U_{xx} . Струми у гілках спрощеної схеми визначаються будь-яким відомим методом.

3. Визначається $R_{вх}$ на затискачах розімкненої гілки за умови $E=0$ і $J=0$. В отриманому пасивному колі користуються правилами еквівалентних перетворень для споживачів.

4. За знайденими U_{xx} і $R_{вх}$ визначається струм у шуканій гілці, значення якого може бути й негативним.

Зауваження : $R_{вх}$ можна знайти за формулою $R_{вх} = \frac{U_{xx}}{I_{кз}}$,

де $I_{кз}$ за умови $Ri=0$ знаходять будь-яким відомим методом.

Зауваження 2: Якщо гілка, у якій визначається струм, містить джерело ЕРС, треба це джерело віднести до активного двополюсника, вимкнувши тільки опір Ri . Тоді величина E увійде у розрахунки U_{xx} .

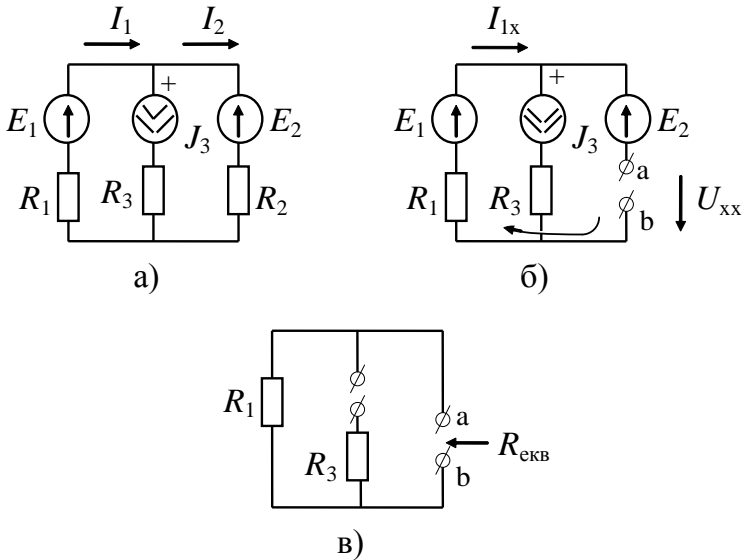


Рисунок 2.14

Приклад 2.4. Визначити струм I_2 у колі, зображеному на рис. 2.14 а.

Розв'язання

Запишемо II закон Кірхгофа для кола, у якому вимкнений споживач R_2 (рис. 2.14 б):

$$U_{xx} + I_{1x} \cdot R_1 = E_1 - E_2. \quad I_{1x} = J_3.$$

Отже,

$$U_{xx} = E_1 - E_2 - J_3 \cdot R_1.$$

$R_{вх}$ визначимо за колом (рис. 2.14 в), з якого вимкнені всі джерела, як

$$R_{вх} = R_{ЕКВab} = R_1.$$

Тоді шуканий струм

$$I_2 = \frac{U_{XX}}{R_{BX} + R_2} = \frac{E_1 - E_2 - J_3 \cdot R_3}{R_1 + R_2}.$$

2.3.6 Приклад розрахунку

Приклад 2.5. У колі, що зображене на рис. 2.15 задані наступні параметри елементів: $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 30 \text{ Ом}$, $R_4 = 10 \text{ Ом}$, $R_5 = 10 \text{ Ом}$, $R_6 = 10 \text{ Ом}$. $E_1 = 10 \text{ В}$, $E_2 = 10 \text{ В}$, $E_3 = 10 \text{ В}$, $E_4 = 10 \text{ В}$. Знайти всі струми у гілках кола на основі законів Кірхгофа, методу контурних струмів, методу вузлових напруг. Знайти струм I_6 методом еквівалентного генератора. Розрахувати баланс потужності.

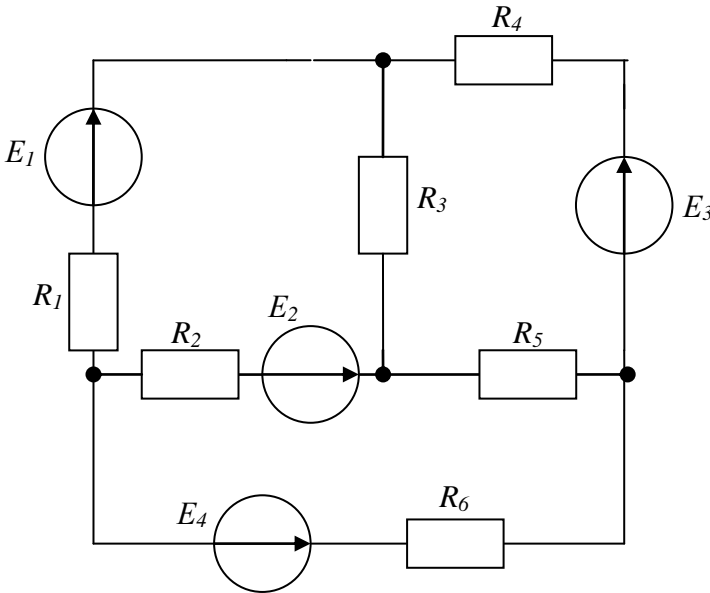


Рисунок 2.15

Розв'язання

Розрахуємо коло на основі законів Кірхгофа. Для цього виберемо додатні напрямки проходження струмів у гілках кола та напрямки обходу контурів (рис. 2.16).

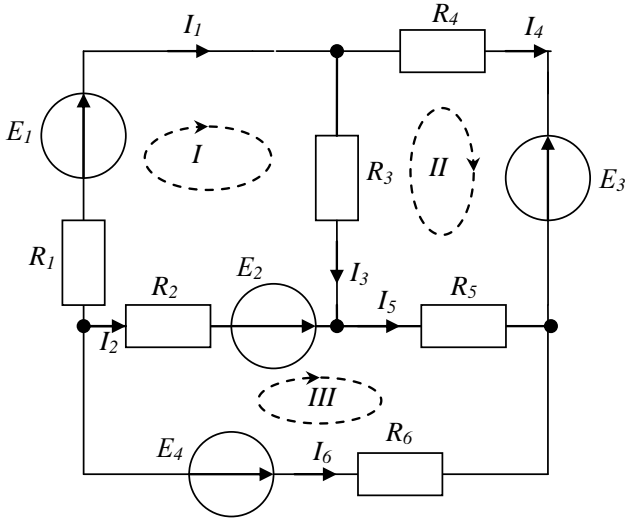


Рисунок 2.16

Запишемо систему рівнянь на основі законів Кірхгофа:

$$\begin{cases} I_1 R_1 + I_3 R_3 - I_2 R_2 = E_1 - E_2, \\ I_4 R_4 - I_5 R_5 - I_3 R_3 = -E_3, \\ I_5 R_5 - I_6 R_6 + I_2 R_2 = E_2 - E_4, \\ I_1 = I_3 + I_4, \\ I_5 = I_2 + I_3, \\ I_1 + I_2 + I_6 = 0. \end{cases}$$

Підставимо числові значення:

$$\begin{cases} I_1 \cdot 10 + I_3 \cdot 30 - I_2 \cdot 20 = 10 - 10, \\ I_4 \cdot 10 - I_5 \cdot 10 - I_3 \cdot 30 = -10, \\ I_5 \cdot 10 - I_6 \cdot 10 + I_2 \cdot 20 = 10 - 10, \\ I_1 = I_3 + I_4, \\ I_5 = I_2 + I_3, \\ I_1 + I_2 + I_6 = 0. \end{cases}$$

Після розв'язання системи рівнянь одержимо такі значення:

$$I_1 = -0.304 \text{ A}, \quad I_2 = 0.043 \text{ A}, \quad I_3 = 0.13 \text{ A}, \quad I_4 = -0.435 \text{ A}, \\ I_5 = 0.174 \text{ A}, \quad I_6 = 0.261 \text{ A}.$$

Струми не можуть бути від'ємними, тому там, де одержали від'ємні значення струму, просто не вгадали напрям проходження струмів у гілках, тому треба просто змінити напрям проходження струмів у гілках:

$$I_1 = 0.304 \text{ A}, \quad I_2 = 0.043 \text{ A}, \quad I_3 = 0.13 \text{ A}, \quad I_4 = 0.435 \text{ A}, \\ I_5 = 0.174 \text{ A}, \quad I_6 = 0.261 \text{ A}.$$

Розрахуємо коло на основі методу контурних струмів. Для цього виберемо напрями проходження струмів у гілках (рис. 2.17).

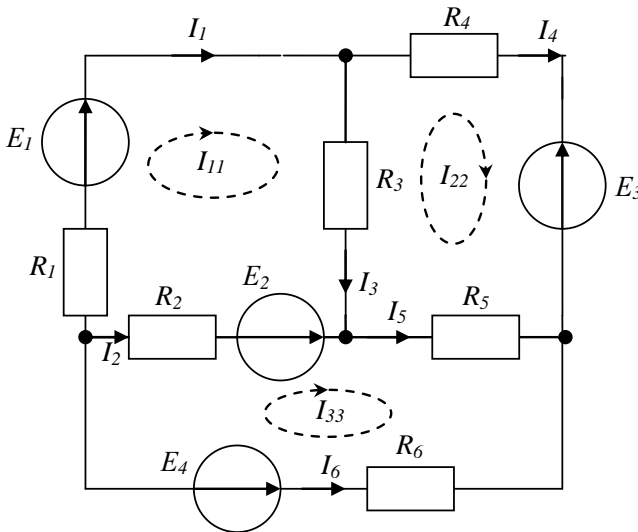


Рисунок 2.17

Складемо систему рівнянь на основі методу контурних струмів:

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_2 + R_3) - I_{22}R_3 - I_{33}R_2 = E_1 - E_2, \\ -I_{11}R_3 + I_{22}(R_3 + R_4 + R_5) - I_{33}R_5 = -E_3, \\ -I_{11}R_2 - I_{22}R_5 + I_{33}(R_2 + R_5 + R_6) = E_2 - E_4. \end{cases}$$

Підставимо числові значення:

$$\begin{cases} I_{11}(10 + 20 + 30) - I_{22} \cdot 30 - I_{33} \cdot 20 = 10 - 10, \\ -I_{11} \cdot 30 + I_{22}(30 + 10 + 10) - I_{33} \cdot 10 = -10, \\ -I_{11} \cdot 20 - I_{22} \cdot 10 + I_{33}(20 + 10 + 10) = 10 - 10. \end{cases}$$

Після розв'язання системи рівнянь одержимо такі значення: $I_{11} = -0.304$ А, $I_{22} = -0.435$ А, $I_{33} = -0.261$ А.

Розрахуємо значення струмів у гілках:

$$I_1 = I_{11} = -0.304 \text{ А},$$

$$I_2 = I_{33} - I_{11} = -0.261 - (-0.304) = 0.043 \text{ А},$$

$$I_3 = I_{11} - I_{22} = -0.304 - (-0.435) = 0.13 \text{ А},$$

$$I_4 = I_{22} = -0.435 \text{ А},$$

$$I_5 = I_{33} - I_{22} = -0.261 - (-0.435) = 0.174 \text{ А},$$

$$I_6 = -I_{33} = 0.261 \text{ А}.$$

Струми не можуть бути від'ємними, тому там, де одержали від'ємні значення струму, просто не вгадали напрямок проходження струмів у гілках, тому треба просто змінити напрям проходження струмів у гілках:

$$I_1 = 0.304 \text{ А}, \quad I_2 = 0.043 \text{ А}, \quad I_3 = 0.13 \text{ А}, \quad I_4 = 0.435 \text{ А}, \\ I_5 = 0.174 \text{ А}, \quad I_6 = 0.261 \text{ А}.$$

Розрахуємо коло на основі методу вузлових потенціалів (рис. 2.18).

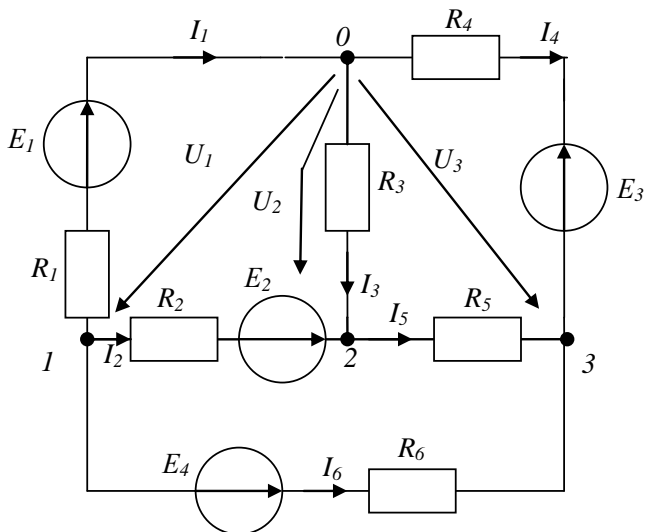


Рисунок 2.18

Пронумеруємо вузли у схемі і прийнемо напругу нульового вузла за нуль. Складемо систему рівнянь на основі методу вузлових напруг:

$$\begin{cases} U_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} \right) - \frac{U_2}{R_2} - \frac{U_3}{R_6} = -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_4}{R_6}, \\ -\frac{U_1}{R_2} + U_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) - \frac{U_3}{R_5} = \frac{E_2}{R_2}, \\ -\frac{U_1}{R_6} - \frac{U_3}{R_6} + U_3 \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) = \frac{E_4}{R_6} - \frac{E_3}{R_4}. \end{cases}$$

Підставимо числові значення:

$$\begin{cases} U_1 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} \right) - \frac{U_2}{20} - \frac{U_3}{10} = -\frac{10}{10} - \frac{10}{20} - \frac{10}{10}, \\ -\frac{U_1}{20} + U_2 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{10} \right) - \frac{U_3}{10} = \frac{10}{10}, \\ -\frac{U_1}{10} - \frac{U_3}{10} + U_3 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right) = \frac{10}{10} - \frac{10}{10}. \end{cases}$$

Після розв'язання системи рівнянь одержимо такі значення: $U_1 = -13.043$ В, $U_2 = -3.913$ В, $U_3 = -5.652$ В.

Розрахуємо струми у гілках:

$$I_1 = \frac{U_1 + E_2}{R_1} = \frac{-13.043 + 10}{10} = -0.304 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{-U_1 + U_2 - E_2}{R_2} = \frac{-13.043 - 3.913 - 10}{20} = -0.043 \text{ А},$$

$$I_3 = \frac{U_2}{R_3} = \frac{-3.913}{30} = -0.13 \text{ А},$$

$$I_4 = \frac{U_3 + E_3}{R_4} = \frac{-5.652 + 10}{10} = 0.435 \text{ А},$$

$$I_5 = \frac{U_3 - U_2}{R_5} = \frac{-5.652 + 3.913}{10} = -0.174 \text{ А},$$

$$I_6 = \frac{U_3 - U_1 - E_4}{R_6} = \frac{-5.652 + 13.043 - 10}{10} = -0.261 \text{ А}.$$

Струми не можуть бути від'ємними, тому там, де одержали від'ємні значення струму, там просто не вгадали напрямок протікання струмів у гілках, тому треба просто змінити напрям проходження струмів у гілках:

$$I_1 = 0.304 \text{ А}, \quad I_2 = 0.043 \text{ А}, \quad I_3 = 0.13 \text{ А}, \quad I_4 = 0.435 \text{ А}, \\ I_5 = 0.174 \text{ А}, \quad I_6 = 0.261 \text{ А}.$$

Розрахуємо струм у гілці, де стоїть резистор R_6 , методом еквівалентного генератора (рис. 2.19).

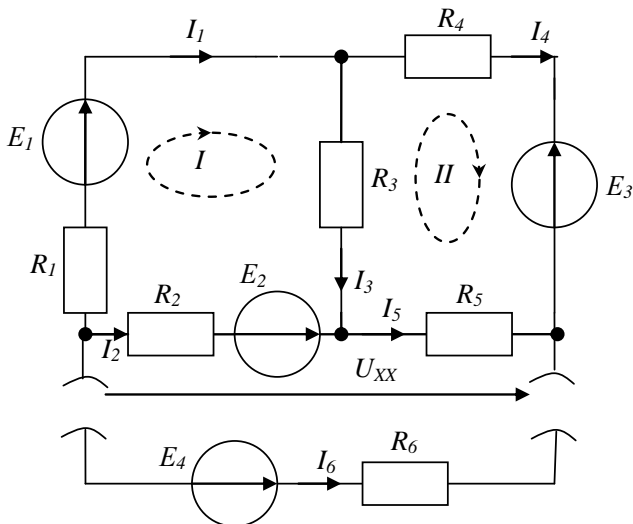


Рисунок 2.19

Для цього розірвемо гілку, в якій стоїть резистор R_6 . Тоді треба знайти напругу U_{XX} та вхідний опір кола R_{BX} .

Для знаходження напруги U_{XX} треба знайти струми I_2 та I_5 . Для цього складемо систему рівнянь на основі методу контурних струмів для схеми, що утворилася після розриву:

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_2 + R_3) - I_{22}R_3 = E_1 - E_2, \\ -I_{11}R_3 + I_{22}(R_3 + R_4 + R_5) = -E_3. \end{cases}$$

Підставимо числові значення:

$$\begin{cases} I_{11}(10 + 20 + 30) - I_{22} \cdot 30 = 10 - 10, \\ -I_{11} \cdot 30 + I_{22}(30 + 10 + 10) = -10. \end{cases}$$

Після розв'язання системи одержимо такі значення

$$I_{11} = -0.143 \text{ A}, \quad I_{22} = -0.286 \text{ A}.$$

Таким чином, $I_2 = I_{11} = -0.143 \text{ A}$, $I_5 = I_{22} = -0.286 \text{ A}$.

Запишемо вираз для розрахунку напруги U_{XX}

$$U_{XX} = I_2 R_2 - E_2 + I_5 R_5 = (-0.143) \cdot 20 - 10 + (-0.286) \cdot 10 = -15.714 \text{ В}.$$

Знайдемо вхідний опір кола. Для цього зобразимо коло, коли всі джерела напруги замкнені (рис. 2.20).

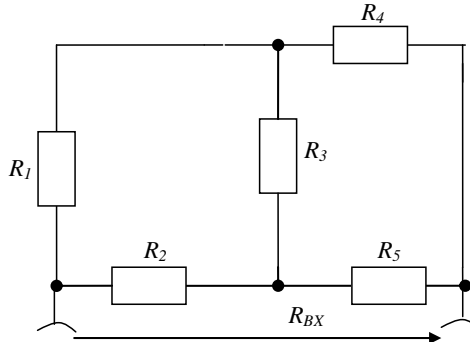


Рисунок 2.20

Перетворимо трикутник, що утворюють резистори R_2 , R_3 та R_5 , у зірку та розрахуємо значення елементів (рис. 2.21):

$$R_{25} = R_2 + R_5 + \frac{R_2 R_5}{R_3} = 20 + 10 + \frac{20 \cdot 10}{30} = 36.667 \text{ Ом,}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_5} = 20 + 30 + \frac{20 \cdot 30}{10} = 110 \text{ Ом,}$$

$$R_{35} = R_3 + R_5 + \frac{R_3 R_5}{R_2} = 30 + 10 + \frac{30 \cdot 10}{20} = 55 \text{ Ом.}$$

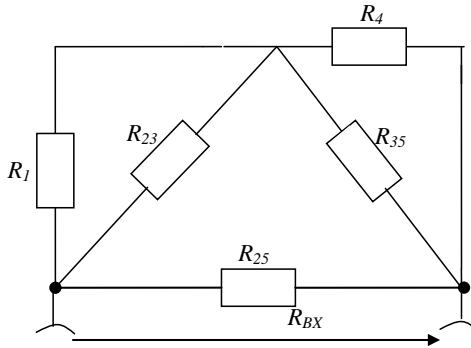


Рисунок 2.21

Замінімо паралельне з'єднання резисторів їх еквівалентним значеннями (рис. 2.22), які розрахуємо за формулами:

$$R_{11} = \frac{R_1 R_{23}}{R_1 + R_{23}} = \frac{10 \cdot 110}{10 + 110} = 9.167 \text{ Ом},$$

$$R_{22} = \frac{R_4 R_{35}}{R_4 + R_{35}} = \frac{10 \cdot 55}{10 + 55} = 8.462 \text{ Ом}.$$

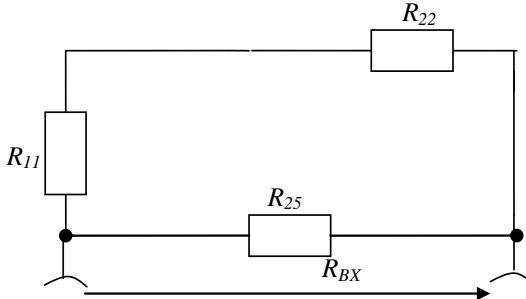


Рисунок 2.22

Знайдемо вхідний опір кола:

$$R_{BX} = \frac{(R_{11} + R_{22})R_{25}}{R_{11} + R_{22} + R_{25}} = \frac{(9.167 + 8.462) \cdot 36.667}{9.167 + 8.462 + 36.667} = 11.905 \text{ Ом}.$$

Знайдемо струм, що проходить через резистор R_6 із одержаної схеми (рис. 2.23):

$$I_6 = \frac{U_{XX} + E_4}{R_{BX} + R_6} = \frac{-15.714 + 10}{11.905 + 10} = -0.261 \text{ А}.$$

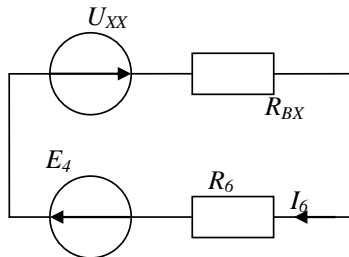


Рисунок 2.23

Оскільки струм отримали від'ємним, то ми не вгадали з напрямком струму у гілці, тому замінимо напрям струму на протилежний:

$$I_6 = 0.261\text{A}.$$

При розрахунках кола різними методами бачимо, що одержуємо одні й ті самі значення струму.

Розрахуємо баланс потужності.

Потужність споживача

$$P_R = \sum_{i=1}^6 I_i^2 R_i = 4.384\text{Вт}.$$

Потужність джерела

$$P_E = -E_1 I_1 - E_2 I_2 - E_3 I_4 - E_4 I_6 = 4.384\text{Вт}.$$

Оскільки баланс потужності збігся, то розрахунки здійснено правильно.

3 КОЛА ІЗ ДЖЕРЕЛАМИ ГАРМОНІЧНОГО ВПЛИВУ

3.1 Основні характеристики гармонічних сигналів

Змінним струмом $i(t)$ і напругою $u(t)$ називають струми та напруги, що змінюються у часі.

Сигнали, миттєві значення яких повторюються через певний фіксований проміжок часу, називаються *періодичними*, а цей проміжок часу – *періодом*. Такі сигнали описуються у такий спосіб:

$$i = F(t) = F(t \pm T), \quad (3.1)$$

де T – період, с.

Величина, зворотна періоду, називається *частотою* f :

$$f = \frac{1}{T} \quad \mathbf{f}^- = \text{Гц}. \quad (3.2)$$

Також існує поняття *кутової (циклічної) частоти*:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad \mathbf{\omega}^- = \text{рад/с}. \quad (3.3)$$

У електроенергетиці набули широкого застосування синусоїдальні сигнали, які найбільш економічні. Для передачі інформації в техніці зв'язку та радіотехніці використовують різні модуляції синусоїдальних сигналів: амплітудну, частотну, фазову. У загальному випадку будь-який несинусоїдальний сигнал може бути поданий у вигляді суми синусоїдальних сигналів різної частоти за допомогою розкладання в ряд Фур'є. І, таким чином, розрахунки подібних кіл можуть бути зведені до розрахунків кіл синусоїдального струму та напруги:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (3.4)$$

де $u(t)$, $i(t)$ – миттєве значення;

U_m, I_m – амплітуда змінного сигналу – максимальна за модулем його величина;

$\omega t + \psi_u, \omega t + \psi_i$ – фаза гармонічного сигналу – аргумент при синусі в кожний момент часу;

ψ_u, ψ_i – початкова фаза – значення аргументу в початковий момент часу ($t = 0$). Фаза вимірюється в радіанах або градусах.

Надалі під змінним сигналом будемо розуміти гармонічний (синусоїдальний) сигнал (рис. 3.1).

Про значення періодичних струмів та напруг звичайно роблять висновки за їх середньоквадратичними значеннями за період, який називають *діючим значенням* струму та напруги і позначають I, U :

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}, \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (3.5)$$

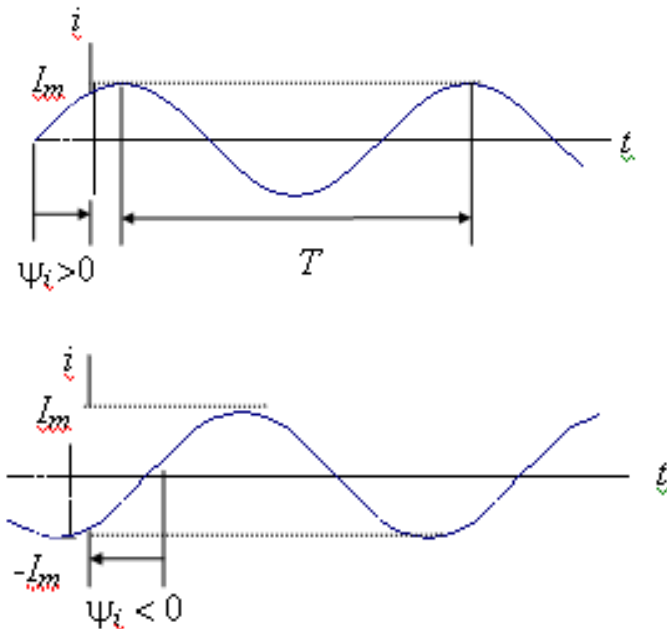


Рисунок 3.1

За період T на резисторі з опором R при синусоїдальній зміні струму виділиться теплова енергія:

$$W_T = \int_0^T Ri^2 dt = R \int_0^T i^2 dt = RT \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = RI^2 T. \quad (3.6)$$

Таким чином струм, що діє, чисельно дорівнює такому постійному струму, який за час $t = T$ виділяє на тому ж опорі таку саму кількість тепла, що і змінний.

У діючих величинах градууються амперметри та вольтметри електродинамічної та електромагнітної системи. Прилади магнітоелектричної системи показують *постійну складову* струму або напруги, або середнє значення за період:

$$U_{\text{сп}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, \quad I_{\text{сп}} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt. \quad (3.7)$$

Встановимо зв'язок між діючим і амплітудним значенням гармонічного сигналу на прикладі струму. Якщо струм змінюється за законом $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, то

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi) dt = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \psi) dt = \\ &= \frac{I_m^2}{2T} \int_0^T (1 - \cos(2\omega t + 2\psi)) dt = \frac{I_m^2}{2T} \int_0^T dt - \underbrace{\frac{I_m^2}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + 2\psi) dt}_0 = \\ &= \frac{I_m^2}{2T} T = \frac{I_m^2}{2}, \end{aligned}$$

звідки

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.8)$$

Зробивши аналогічні дії для сигналу напруги, одержимо

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.9)$$

Уведемо поняття *потужності змінного струму*. Миттєва потужність обчислюється як добуток миттєвих значень напруги та струму:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t).$$

Тоді,

$$\begin{aligned} p(t) &= I_m U_m \sin(\omega t + \psi_u) \sin(\omega t + \psi_i) = \\ &= I_m U_m \frac{1}{2} [\cos(\omega t + \psi_u - \omega t - \psi_i) - \cos(\omega t + \psi_u + \omega t + \psi_i)] = \\ &= \frac{I_m U_m \cos \varphi}{2} - \frac{I_m U_m \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)}{2} = \\ &= IU \cos \varphi - IU \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) \end{aligned}$$

де φ – зсув фази струму стосовно напруги, $\varphi = \psi_u - \psi_i$;

$IU \cos \varphi$ – постійна складова миттєвої потужності;

$IU \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$ – гармонічна складова, яка змінюється з подвійною кутовою частотою.

Середня потужність за період називається *активною потужністю*:

$$P = P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos \varphi. \quad (3.10)$$

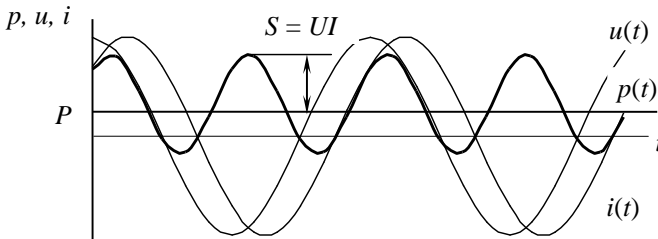


Рисунок 3.2

3.2 Елементи кіл гармонічного струму

Електричне коло синусоїдального струму, крім електротехнічних пристроїв, призначення яких збігається із призначенням функціонально аналогічних пристроїв кола постійного струму (джерела енергії, вимірювальні прилади, комутаційні апарати та ін.), містять також пристрої, властиві тільки колам синусоїдального струму: конденсатори та котушки індуктивності.

Для розрахунку режиму роботи електротехнічних пристроїв необхідно перейти від принципової схеми кола до її схеми заміщення (математичної моделі).

Елементами схем заміщення кіл синусоїдального струму є джерела синусоїдального струму і ЕРС ($j(t)$, $e(t)$), резистивні (R), індуктивні (L) і ємнісні (C) елементи.

Розглянемо картину розподілу струму та напруги на реальних елементах.

3.2.1 Гармонічний струм в опорі

Нехай на опорі діє напруга

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

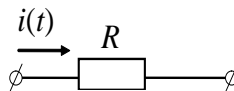


Рисунок 3.3

Тоді струм у опорі R (рис. 3.3) можна визначити за законом Ома:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R},$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = e(t),$$

$$i(t) = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

Звідси,

$$I_m = \frac{U_m}{R}; \quad \psi_i = \psi_u = \psi.$$

Зсув фаз між напругою та струмом $\psi_u - \psi_i = \varphi = 0$, тобто струм і напруга на опорі збігаються за фазою.

Оскільки, $U_m = U\sqrt{2}$, то для діючих значень справедливо

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U\sqrt{2}}{I\sqrt{2}} = \frac{U}{I} = Z, \quad (3.11)$$

де Z – повний опір кола (імпеданс), що дорівнює відношенню діючих значень напруги та струму.

Для кола, наведеного на рис. 3.3, повний опір $Z = R$.

Для визначення миттєвої потужності, що надходить у опір, скористаємося отриманим вище співвідношенням для миттєвої потужності:

$$\begin{aligned} p(t) &= UI \cos\varphi - UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) = \\ &= UI \cos 0 - UI \cos(2\omega t + 2\psi) = I^2 R - I^2 R \cos(2\omega t + 2\psi). \end{aligned}$$

Активна потужність дорівнює середній потужності за період

$$P = P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = I^2 R. \quad (3.12)$$

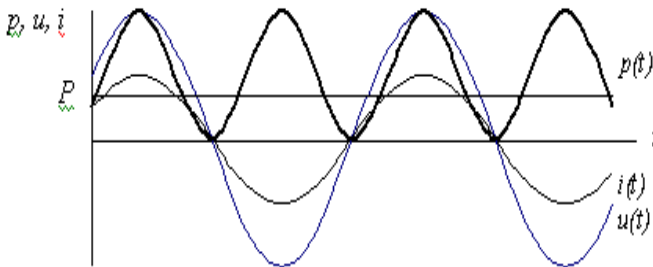


Рисунок 3.4

Таким чином, у резистивному елементі з опором R електромагнітна енергія перетвориться в теплову при потужності пе-

ретворення $P_{cp} = I^2 R$. Резистивні елементи вводять у схему також і для врахування незворотного перетворення електромагнітної енергії в інші форми енергії (наприклад, у механічну) і для врахування випромінюваної енергії.

3.2.2 Гармонічний струм в індуктивності

Індуктивність – елемент кола, який ураховує енергію магнітного поля $W_M = \frac{Li^2}{2}$.

При збільшенні (зменшенні) струму енергія магнітного поля збільшується (зменшується). Отже, індуктивні елементи можна розглядати як акумулятори (накопичувачі енергії).

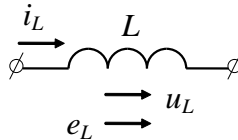


Рисунок 3.5

При зміні струму в індуктивності виникає ЕРС самоіндукції e_L . За законом Ленца e_L перешкоджає зміні струму. Тому при традиційному виборі однакових позитивних напрямків для струму i_L і ЕРС e_L , як показано на рис. 3.5, знаки e_L і $\frac{di}{dt}$ протилежні та $e_L = -L \frac{di}{dt}$. Щоб через індуктивність проходив змінний струм, до її виводів треба прикласти напругу u_L , що дорівнює за величиною та протилежна за напрямком ЕРС e_L :

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt} = Li', \quad (3.13)$$

де L – коефіцієнт пропорційності, називаний *індуктивністю*. Одиниця виміру індуктивності – *генрі* (Гн).

Оскільки електричний струм завжди супроводжує магнітне поле, будь-яка об'їтна струмом ділянка кола, що являє собою електротехнічний пристрій, повинен характеризуватися індуктивністю.

Якщо $i_L = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, тоді

$$u_L = Li' = L\omega I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \underbrace{L\omega I_m}_{U_m} \sin\left(\omega t + \psi_i + \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\psi_u}\right) = \quad (3.14)$$

$$= U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

Закон Ома для кола з індуктивним елементом

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \omega L = X_L,$$

де $\omega L = X_L$ – індуктивний опір, має розмірність опору. Повний опір Z також дорівнює X_L .

Початкова фаза напруги $\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}$, зсуву фаз

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, можна зробити такі висновки:

1. Амплітудне та діюче значення напруги та струму на індуктивності зв'язані законом Ома.

2. Напруга u_L випереджає за фазою струм i_L на $\frac{\pi}{2}$.

Миттєва потужність

$$\begin{aligned}
p(t) &= i(t) \cdot u(t) = U_m I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \sin \omega t = \\
&= \frac{1}{2} U_m I_m \left[\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \omega t\right) - \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \omega t\right) \right] = \\
&= -\frac{1}{2} U_m I_m \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} U_m I_m \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t = \\
&= \omega L I^2 \sin 2\omega t = X_L I^2 \sin 2\omega t. \\
p(t) &= i(t) \cdot u(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t = \\
&= \omega L I^2 \sin 2\omega t = X_L I^2 \sin 2\omega t.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

З виразу (3.15) випливає, що середня потужність за період, а отже, і активна потужність, дорівнюють нулю. Індуктивність – реактивний елемент.

Миттєва потужність може бути додатною, від’ємною та дорівнювати нулю (рис 3.6). Якщо $p(t) > 0$, індуктивність заряджається енергією у вигляді енергії магнітного поля; якщо $p(t) < 0$, індуктивність повертає енергію джерелу. Середня потужність за період $P_{cp} = 0$ (миттєва потужність коливається щодо нуля, рис. 3.6).

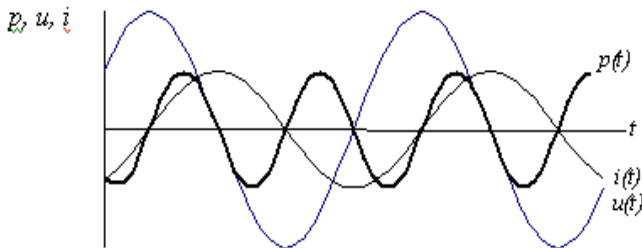


Рисунок 3.6

Індуктивна провідність

$$B_L = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U} = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{X_L}. \tag{3.16}$$

3.2.3 Гармонічний струм у ємності

Ємнісний елемент кола урахує енергію електричного поля

$$W_E = \frac{Cu_c^2}{2}.$$

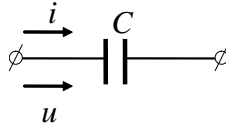


Рисунок 3.7

Струм у гілці із ємністю дорівнює швидкості зміни заряду на електродах, і при зазначеному додатному напрямку струму знак струму збігається зі знаком похідної за часом від заряду q :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = Cu'_c. \quad (3.17)$$

Одиниця виміру ємності – *фарада* (Ф).

Нехай напруга на ємності визначається

$$u_c \overset{\curvearrowright}{=} U_m \sin \overset{\curvearrowright}{\omega} t + \psi_u \overset{\curvearrowright}{\angle}$$

тоді

$$i_c = Cu'_c = CU_m \omega \cos \overset{\curvearrowright}{\omega} t + \psi_u \overset{\curvearrowright}{=} \underbrace{U_m C \omega}_{I_m} \sin \left(\overset{\curvearrowright}{\omega} t + \underbrace{\psi_u + \frac{\pi}{2}}_{\psi_i} \right).$$

Звідси

$$I_m = U_m C \omega. \quad (3.18)$$

Ємнісний опір

$$X_C = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{U_m C \omega} = \frac{1}{\omega C}. \quad (3.19)$$

Повний опір Z також дорівнює X_C .

Фаза струму $\psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2}$, а зсув фаз $\varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}$.

Таким чином, можна зробити такі висновки:

1. Амплітуда та діюче значення напруги і струму на ємності зв'язані законом Ома.

2. Напруга u_c відстає за фазою від струму i_c на $\frac{\pi}{2}$.

Миттєва потужність

$$p(t) = u_c i_c = I_m U_m \sin \omega t \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \quad (3.20)$$

$$= UI \sin 2\omega t = \omega C U^2 \sin 2\omega t.$$

Миттєва потужність може бути додатною, від'ємною та дорівнювати нулю (рис. 3.8). Якщо $p(t) > 0$, ємність заряджається енергією у вигляді енергії електричного поля; якщо $p(t) < 0$, ємність повертає енергію джерелу. Середня потужність за період $P_{cp} = 0$, а отже, і активна потужність дорівнює нулю, що означає, що відбувається обмін енергією без втрат, ємність – реактивний елемент.

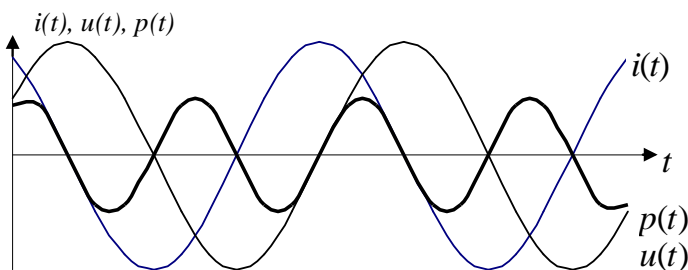


Рисунок 3.8

Ємнісна провідність

$$B_c = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U} = \omega C = \frac{1}{X_c}. \quad (3.21)$$

3.2.4. Послідовне з'єднання R, L, C

Для миттєвих значень струмів і напруг виконуються I і II закони Кірхгофа.

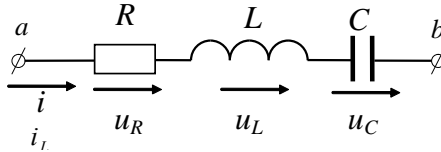


Рисунок 3.9

При проходженні синусоїдального струму $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ через електричне коло, що складається з послідовно з'єднаних елементів R, L, C (рис. 3.9), на виводах $a - b$ цього кола створюється синусоїдальна напруга, що дорівнює за II законом Кірхгофа алгебраїчній сумі синусоїдальних напруг на окремих елементах:

$$u_{ab}(t) = u_R + u_L + u_C,$$

де

$$u_R = iR, \quad u_C = \frac{1}{C} \int i dt, \quad u_L = Li',$$

$$u_{ab} = I_m R \sin(\omega t + \psi_i) + I_m X_L \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ I_m X_C \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right) = I_m R \sin(\omega t + \psi_i) +$$

$$+ I_m X_L \cos(\omega t + \psi_i) - I_m X_C \cos(\omega t + \psi_i) =$$

$$= I_m \left(R \sin(\omega t + \psi_i) + (X_L - X_C) \cos(\omega t + \psi_i) \right)$$

Остаточно одержуємо

$$u_{ab} = I_m \left(R \sin(\omega t + \psi_i) + (X_L - X_C) \cos(\omega t + \psi_i) \right). \quad (3.22)$$

Із тригонометрії відомо, що

$$m \sin \alpha + n \cos \alpha = \sqrt{m^2 + n^2} \sin\left(\alpha + \arctg \frac{n}{m}\right). \quad (3.23)$$

Застосуємо формулу (3.23) до виразу (3.22):

$$u_{ab} = I_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \sin\left(\omega t + \psi_i + \arctg \frac{X_L - X_C}{R}\right) =$$

$$= I_m Z \sin\left(\omega t + \psi_i + \arctg \frac{X_L - X_C}{R}\right) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

Реактивний опір послідовному RLC – кола

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \quad (3.24)$$

може набувати таких значень:

$X = 0$ – коло має чисто активний характер (у колі резонанс);

$X > 0$ – коло має індуктивний характер, тобто $\omega L > \frac{1}{\omega C}$;

$X < 0$ – коло має ємнісний характер, тобто $\omega L < \frac{1}{\omega C}$.

Повний опір кола

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad (3.25)$$

кут різниці фаз

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} \quad (3.26)$$

визначається за віссю ωt від кривої напруги до кривої струму і може бути гострим або прямим: $\varphi < 0$ при ємнісному характері кола (струм випереджає напругу), $\varphi > 0$ при індуктивному характері кола (струм відстає за фазою від напруги), $\varphi = 0$ при резистивному характері кола (індуктивний та ємнісний опори рівні) – такий режим кола називають *резонансом напруги*.

З виразів $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$ та $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ випливає, що зв'язок активного та реактивного опорів з повним опором виражається такими формулами:

$$R = Z \cos \varphi; \quad X = Z \sin \varphi, \quad (3.27)$$

що зручно подавати за допомогою трикутника опорів (рис. 3.10).

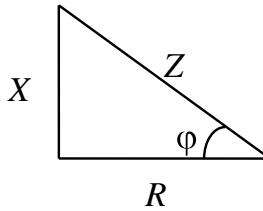


Рисунок 3.10

Помноживши ліві та праві частини виразів для опорів (3.27) на діюче значення струму I , одержимо відповідно діючі значення напруг на активному та реактивному опорах, які називають *активною та реактивною складовими напруги*:

$$U_a = IR = IZ \cos \varphi = U \cos \varphi, \quad U_p = IX = IZ \sin \varphi = U \sin \varphi.$$

Тоді діюче значення сумарної напруги можна визначити як

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}.$$

Для напруг також можна побудувати прямокутний трикутник напруг.

3.2.5 Паралельне з'єднання R, L, C

Якщо до виводів електричного кола, що складається з паралельно з'єднаних R, L, C (рис. 3.11), прикладена синусоїдальна напруга

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

то за I законом Кірхгофа синусоїдальний струм у нерозгалуженій частині дорівнює алгебраїчній сумі синусоїдальних струмів у паралельних гілках

$$i(t) = i_R + i_L + i_C,$$

де

$$i_R(t) = \frac{1}{R} U_m \sin(\omega t + \psi_u) - \text{збігається за фазою з напругою}$$

$u(t)$;

$$i_L(t) = \frac{1}{\omega L} U_m \sin \left(\omega t + \psi_u - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\omega L} U_m \cos \left(\omega t + \psi_u \right) -$$

відстає за фазою від напруги $u(t)$ на $\frac{\pi}{2}$;

$$i_C(t) = CU'_C = C \omega U_m \sin \left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2} \right) = C \omega U_m \cos \left(\omega t + \psi_u \right) -$$

випереджає за фазою напругу $u(t)$ на $\frac{\pi}{2}$.

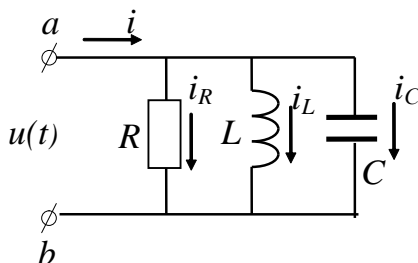


Рисунок 3.11

Просумуємо

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{R} U_m \sin \left(\omega t + \psi_u \right) - \frac{1}{\omega L} U_m \cos \left(\omega t + \psi_u \right) + \\ &+ \omega C U_m \cos \left(\omega t + \psi_u \right) = \\ &= U_m \left[\frac{1}{R} \sin \left(\omega t + \psi_u \right) - \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \cos \left(\omega t + \psi_u \right) \right] = \\ &= U_m \left[G \sin \left(\omega t + \psi_u \right) - B \cos \left(\omega t + \psi_u \right) \right] \end{aligned}$$

Одержаний вираз є тригонометричною формою запису І закону Кірхгофа для миттєвих значень.

Активна провідність кола $G = \frac{1}{R}$, завжди додатна.

Реактивна провідність кола $B = B_L - B_C$, залежно від знака може мати індуктивний ($B > 0$) або ємнісний ($B < 0$) характер. Якщо $B = 0$, коло має активний характер.

Для знаходження I_m та φ скористаємося співвідношеннями, наведеними у попередньому розділі:

$$i(t) = \underbrace{U_m \sqrt{G^2 + B^2}}_{I_m} \sin \left(\omega t + \underbrace{\psi_u + \gamma}_{\psi_i} \right) = U_m Y \sin (\omega t + \psi_u - \varphi),$$

тобто струм відстає від напруги на кут φ .

Тут ψ_u – початкова фаза напруги;

$\psi_u + \gamma$ – початкова фаза струму;

$\psi_u - \psi_i = -\gamma = \varphi$ – різниця фаз;

$I_m = U_m \sqrt{G^2 + B^2} = U_m Y$ – амплітудне значення

струму;

$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ – повна провідність кола – величина,

зворотна повному опору $Y = \frac{1}{Z}$;

$\varphi = \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{G}$ – кут різниці фаз визначається

за віссю ωt у напрямку від напруги до струму і є гострим або прямим $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$;

$\varphi > 0$ – при індуктивному характері кола, тобто при $B > 0$; при цьому струм випереджає за фазою напругу;

$\varphi < 0$ – при ємнісному характері кола, тобто при $B < 0$; при цьому напруга випереджає за фазою струму;

$\varphi = 0$ – при резистивному характері кола, тобто при рівності індуктивної та ємнісної провідностей $B = B_L - B_C = 0$; при цьому струм збігається за фазою з напругою. Такий режим роботи електричного кола називають *резонансом струмів*.

Активна та реактивна провідності кола пов'язані з повною провідністю формулами

$$G = Y \cos \varphi; \quad B = Y \sin \varphi. \quad (3.28)$$

Для провідностей також можна побудувати трикутник провідностей.

Активна та реактивна складові струму визначаються у такий спосіб:

$$\begin{aligned} GU &= YU \cos \varphi = I \cos \varphi = I_a, \\ BU &= YU \sin \varphi = I \sin \varphi = I_p. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Активна й реактивна складові струму пов'язані з діючим значенням сумарного струму формулою $I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}$. Для струмів також можна побудувати трикутник струмів.

Слід зазначити, що описувати електричні кола синусоїдального струму, оперуючи поняттями миттєвого значення струму та напруги, досить складно і застосовується тільки для найпростіших електричних кіл, що не містять великої кількості контурів і джерел. З ускладненням електричних кіл така форма розрахунків стає вкрай складною та потрібен метод, що дозволяє розраховувати електричні кола змінного струму алгебраїчно аналогічно колам постійного струму. Таким зручним розрахунковим методом є *символічний метод*.

3.3 Символічний метод розрахунків кіл з гармонічними впливами

Відомо кілька способів подання синусоїдально змінних величин: у вигляді тригонометричних функцій, у вигляді графіків зміни у часі, у вигляді обертових векторів і у вигляді комплексних чисел.

Розрахунки кіл періодичного синусоїдального струму можна полегшити, якщо зображувати синусоїдально змінні струми, напруг та ЕРС векторами або комплексними числами. Установимо дане співвідношення.

Нехай деяка електрична величина (струм, напруга, ЕРС і т.д.) змінюється за синусоїдальним законом $v = V_m \sin(\omega t + \psi)$. У прямокутній системі координат (рис. 3.12) розмістимо під кутом ψ вектор, довжина якого у обраному масштабі дорівнює амплітуді V_m (причому $\psi > 0$, якщо відлічується проти годинникової стрілки).

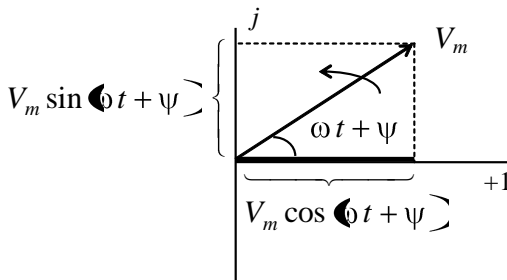


Рисунок 3.12

Уявимо собі, що вектор з моменту $t = 0$ починає обертатися навколо початку координат у додатному напрямку з постійною кутовою швидкістю, що дорівнює кутовій частоті ω . У момент часу $t \neq 0$ вектор утворює із віссю абсцис кут $\omega t + \psi$. А його проекція на вісь ординат буде дорівнює миттєвому значенню величини v . Таким чином, між миттєвим значенням $v(t)$ і векто-

ром V_m можна встановити однозначна відповідність. На цій підставі будемо називати вектор V_m *вектором, що зображують функцію часу*, і позначати \dot{V} . Звичайно, ці вектори, мають сенс, відмінний від сенсу векторів, що визначають фізичні величини в просторі (швидкість, силу та ін.). Тому такі зображення функції часу називають *символічними*.

Якщо вважати вісь абсцис віссю дійсних величин, а вісь ординат – віссю уявних величин на комплексній площині, то вектор \dot{V} відповідає комплексному числу з модулем V_m і аргументом ψ . Це комплексне число називають *комплексною амплітудою*. Інакше кажучи, це комплексна величина, що не залежить від часу, модуль і аргумент якої дорівнюють відповідно амплітуді та початковій фазі заданої синусоїдальної функції.

3.3.1 Поняття про комплексні числа

Уявна одиниця – це число, що дає у квадраті -1 : $j = \sqrt{-1}$. Введення уявної одиниці дає можливість перейти до *комплексного числа* (рис. 1.13).

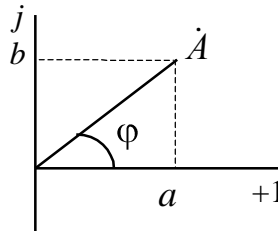


Рисунок 3.13

Застосовується чотири форми запису комплексного значення синусоїдальної величини: *полярна, показова, тригонометрична та алгебраїчна*:

$$\dot{A} = A \angle \varphi = A e^{j\varphi} = A \cos \varphi + j A \sin \varphi = a + jb, \quad (3.30)$$

де $a = \text{Re}(\dot{A}) = A \cos \varphi$ й $b = \text{Im}(\dot{A}) = A \sin \varphi$ – відповідно дійсна та уявна складові комплексного числа; $A = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$.

Перехід від показової форми до тригонометричної виконується за допомогою формули Ейлера:

$$\dot{A} = Ae^{j\varphi} = A \cos \varphi + jA \sin \varphi. \quad (3.31)$$

При значенні кута $\varphi = \frac{\pi}{2}$ та $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ з формули Ейлера випливають два співвідношення, що часто зустрічаються застосовуються:

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j \text{ та } e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j = \frac{1}{j}.$$

Операції над комплексними числами:

$$\dot{A} \pm \dot{B} = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(a_1 \pm b_2),$$

$$\dot{A} \cdot \dot{B} = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + b_1 a_2),$$

$$\frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$

$$\dot{A} \cdot \dot{B} = Ae^{j\varphi_1} \cdot Be^{j\varphi_2} = ABe^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Спряженим комплексним числом $\dot{I} = a + jb = Ae^{j\varphi}$ називають число, що має протилежний знак фази або уявної частини $I^* = a - jb = Ae^{-j\varphi}$.

Якщо $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, то $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ – комплексна амплітуда, а $\dot{I} = \dot{I}_m e^{j\omega t} = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)}$ – комплексне зображення миттєвого значення, де $e^{j\psi_i}$ називають фактором повороту, множення на який означає поворот на кут ψ_i у комплексній площині; $e^{j\omega t}$ називають фактором обертання, множення на який означає обертання вектора з постійною частотою ω у додатному напрямку навколо початку координат.

Тому слід зазначити, що множення комплексного числа на «-1» означає поворот вектора на π ($e^{\pm j\pi}$), множення на $\pm j$ – поворот на $\pm \frac{\pi}{2}$ ($e^{\pm j\pi/2}$).

Комплексне миттєве значення може бути представлено за допомогою формули Ейлера в тригонометричній формі

$$\dot{I}_m = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Функція часу, що описує зміну струму у колі, є уявною частиною миттєвого комплексного \dot{I} значення $\text{Im}(\dot{I}) = i(t)$ струму. Саме це співвідношення дозволяє стверджувати, що між миттєвим значенням синусоїдальної величини та її символічним зображенням існує однозначна відповідність.

При аналізі кіл синусоїдального струму застосовують головним чином *комплексні діючі значення*, скорочено їх називають *комплексними значеннями*, а відповідні їм вектори на комплексній площині – *векторами комплексних значень*. Зв'язок між комплексом амплітуди та комплексом діючого значення встановлюється за формулою

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i}; \quad I_m = \sqrt{2} \dot{I}. \quad (3.32)$$

Приклад 3.1 Подати символічно функцію часу $i = 10 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання

$$\dot{I}_m = 10 e^{j\frac{\pi}{3}} \text{ – комплекс амплітуди;}$$

$$\dot{I}(t) = 10 e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)} \text{ – комплекс миттєвого значення;}$$

$$\dot{I} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{3}} \text{ – комплекс діючого значення або комплекс.}$$

Сукупність векторів комплексних значень синусоїдальних величин однієї частоти, зображених на комплексній площині, називають *векторною діаграмою*. Користуючись векторною діа-

грамою, додавання та віднімання комплексних значень можна замінити додаванням і відніманням відповідних векторів. Векторні діаграми, як правило, використовуються для якісної оцінки розрахунків та їх наочності. Вони є графічним відображенням математичних співвідношень і розрахунків електричного кола.

Взаємне розміщення векторів комплексних значень на векторній діаграмі не зміниться, якщо початкові фази ψ усіх комплексних значень зменшити або збільшити на ту саму величину. Це означає лише одночасний поворот усіх векторів на той самий кут. Часто при аналізі кіл векторну діаграму будують так, щоб вектор одного комплексного значення був спрямований уздовж осі дійсних величин. Такий вектор називають *вихідним вектором*.

Напрямки синусоїдальних величин (струм, напруга та ін.) у колі періодично змінюються, але один із двох напрямків вибирається позитивним. Цей напрямок вибирається довільно та позначається стрілкою на схемі відповідної ділянки кола (рис. 3.14).

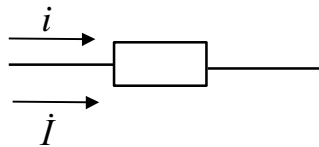


Рисунок 3.14

При обраному додатному напрямку синусоїдальна величина представляється миттєвим значенням $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ і відповідним комплексним значенням $\dot{I} = I e^{j\psi_i}$. Отже, взаємно однозначним представленням синусоїдальних струмів, напруг і інших величин у вигляді миттєвих і комплексних значень відповідають їхні однакові додатні напрямки.

3.3.2 Теорема символічного методу

1. Про однозначну відповідність символічного зображення даної тригонометричної функції:

$$u(t) \leftrightarrow \dot{U}.$$

Це було показано вище

$$u(t) = \text{Im}(\dot{U}_s), \text{ де } \dot{U}_s = U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}.$$

2. Про лінійне перетворення:

$$\text{якщо } u_k(t) = \text{Im}(U_{m_k} e^{j\psi_{u_k}} e^{j\omega t}), \text{ то } \lambda_k u_k(t) = \text{Im}(\lambda_k U_{m_k} e^{j\psi_{u_k}} e^{j\omega t}),$$

$$\text{тобто } \lambda_k u_k(t) \rightarrow \lambda_k \dot{U}_k.$$

3. Про суму амплітуд: якщо $u_1 \rightarrow \dot{U}_1, u_2 \rightarrow \dot{U}_2$, то $u_1 + u_2 \rightarrow \dot{U}_1 + \dot{U}_2$.

Наслідок:

$$\sum \lambda_k u_k(t) \rightarrow \sum \lambda_k \dot{U}_k.$$

Слід зазначити, що в правій частині складаються вектори за правилами векторної алгебри.

4. Про похідну:

$$\text{якщо } u(t) \rightarrow \dot{U}, \text{ а}$$

$$u(t) = \text{Im}(U_m e^{j\omega t} e^{j\psi_u}),$$

тоді

$$u'(t) = \text{Im}(j\omega U_m e^{j\omega t} e^{j\psi_u}) = \text{Im}(j\omega U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t}),$$

тобто взяття похідної у часовій області означає множення вектора на $j\omega$ у комплексній області або поворот вектора на $\frac{\pi}{2}$:

$$u'(t) \rightarrow j\omega \dot{U}.$$

5. Про інтегрування:

$$\text{якщо } u(t) \rightarrow \dot{U}, \text{ а}$$

$$u(t) = \text{Im}(U_m e^{j\omega t} e^{j\psi_u}),$$

то

$$\int_{-\infty}^t u(t) dt = \int_{-\infty}^t \operatorname{Im} \left(U_m e^{j\omega t} e^{j\psi_u} \right) dt = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{j\omega} U_m e^{j\omega t} e^{j\psi_u} \right) \rightarrow \frac{\dot{U}}{j\omega},$$

тобто інтегралу функції в часовій області відповідає ділення вектора на $j\omega$ у комплексній області або поворот вектора на кут $-\frac{\pi}{2}$.

Таким чином, символічний метод дозволяє звести диференціальні рівняння, якими описуються кола змінного струму, до виду алгебраїчних рівнянь. Отриманий у такий спосіб розв'язок можна потім перевести у часову область.

3.3.3 Закони Ома та Кірхгофа

За I законом Кірхгофа алгебраїчна сума миттєвих значень струмів, що сходяться в будь-якому вузлі електричного кола, дорівнює нулю, тобто

$$\sum i_k = 0.$$

Відповідно до теореми про суму I закон Кірхгофа в символічній або комплексній формі записується у вигляді

$$\sum \dot{I}_k = 0. \quad (3.33)$$

За II законом Кірхгофа алгебраїчна сума миттєвих значень падінь напруг у замкненому контурі дорівнює нулю, тобто

$$\begin{aligned} \sum u_k = 0 \text{ або } \sum u_k = \sum e_k, \text{ або} \\ \sum \left(i_k R_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt \right) = \sum e_k. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Але відповідно до теорем символічного методу II закон Кірхгофа у символічній або комплексній формі запису має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sum u_k = 0 \text{ або } \sum u_k = \sum e_k, \text{ або} \\ \sum \left(\dot{I}_k R_k + j\omega L \dot{I}_k + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_k \right) = \sum \dot{E}_k, \text{ або } \sum \dot{U}_k = \sum \dot{E}_k. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Розглянемо закон Ома в символічній формі запису для елементів кола гармонічного струму (рис. 3.15).

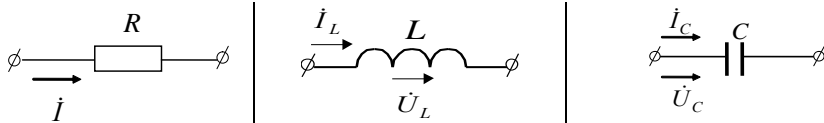


Рисунок 3.15

Якщо $u(t) \rightarrow \dot{U}$,
 $i(t) \rightarrow \dot{I}$

(за теоремою про лінійне перетворення), то

$$\dot{U} = \dot{I}R.$$

Це закон Ома в символічній формі.

$u_L = Li'_L \rightarrow$
 $\dot{U}_L = j\omega Li_L = jX_L \dot{I}_L.$

(за теоремою про похідну)

Закон Ома:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = jX_L.$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_C =$$

$$= -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_C = -jX_C \dot{I}_C.$$

(за теоремою про інтегрування)

Закон Ома: $\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = -jX_C.$

На рис. 3.16 наведені векторні діаграми напруг і струмів відповідно для опору, індуктивності та ємності.

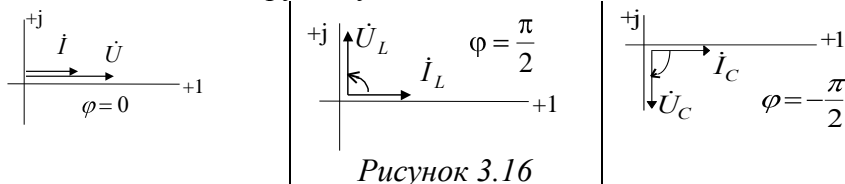


Рисунок 3.16

3.3.4 Послідовне з'єднання R, L, C

Послідовне з'єднання R, L, C елементів зображене на рис.

3.17.

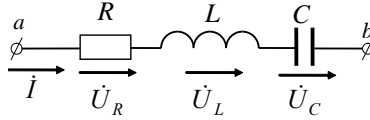


Рисунок 3.17

За II законом Кірхгофа

$$u_{ab}(t) = u_R + u_L + u_C.$$

Представимо напруги у вигляді комплексних амплітуд:

$$u_R \rightarrow \dot{U}_R = \dot{i}R; \quad u_L \rightarrow \dot{U}_L = \dot{i}jX_L,$$

$$u_C \rightarrow \dot{U}_C = -j\dot{i}X_C.$$

На підставі теореми про суму

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{i}R + jX_L - jX_C \stackrel{\text{---}}{=} \\ &= \dot{i}(R + jX_L - jX_C) \stackrel{\text{---}}{=} \dot{i}\underline{Z}, \end{aligned}$$

де \underline{Z} – комплексний опір кола.

На підставі теореми Ейлера

$$\dot{U}_{ab} = \dot{i}Ze^{j\varphi} = \dot{i}\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} e^{j\arctg \frac{X_L - X_C}{R}}.$$

Повний опір дорівнює модулю повного комплексного опору:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

аргумент повного комплексного опору дорівнює різниці фаз напруги й струму $\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$.

Комплексний опір можна подати у вигляді

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = Z \cos\varphi + jZ \sin\varphi = R + jX,$$

де R – дійсна частина комплексного опору, називається *активним опором*, $R = Z \cos\varphi$;

X – уявна частина комплексного опору, називається *реактивним опором*, $X = Z \sin \varphi = X_L - X_C$.

Таким чином, закон Ома у загальному вигляді

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}, \quad (3.36)$$

де \underline{Z} може представляти, зокрема, що впливає для опору $\underline{Z} = R$, для індуктивності $\underline{Z} = jX_L = X_L e^{j90^\circ}$, для ємності $\underline{Z} = -jX_C = X_C e^{-j90^\circ}$.

Уведемо поняття *комплексної провідності*

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \underline{Y}. \quad (3.37)$$

Для розглянутого кола побудуємо векторну діаграму струмів і напруг. Оскільки для всіх елементів загальним є струм, вектор струму виберемо як вихідний вектор, направивши його за дійсною віссю (рис. 3.18).

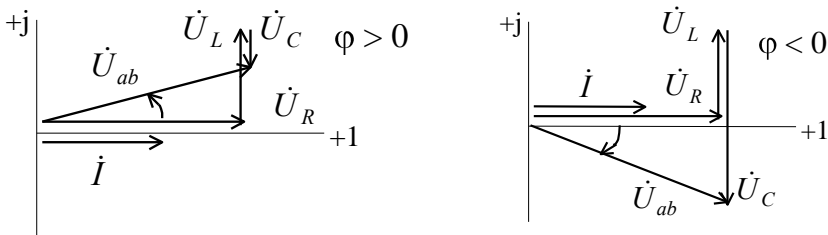


Рисунок 3.18

Можливі три режими роботи такого кола:

- $X_L > X_C$ – індуктивний режим, $\varphi > 0$;
- $X_L = X_C$ – резонанс напруг, $\varphi = 0$;
- $X_L < X_C$ – ємнісний режим, $\varphi < 0$.

Кут φ (різниця початкових фаз напруги та струму) визначається кутом повороту вектора струму до вектора напруги за найкоротшим шляхом: якщо поворот визначається проти годинникової стрілки, то $\varphi > 0$ (відстаючий струм), інакше – $\varphi < 0$

(випереджальний струм). Як бачимо з наведених вище формул, характер кола визначає більший реактивний опір.

3.3.5 Паралельне з'єднання R, L, C

Нехай до кола, що складається з паралельного з'єднання R, L, C елементів (рис. 3.19), прикладена напруга $u_{ab} = U_m \sin \omega t$, якій відповідає \dot{U}_{ab} . Визначимо струми у всіх гілках.

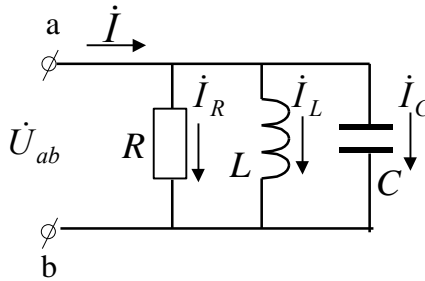


Рисунок 3.19

За I законом Кірхгофа миттєве значення струму

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t).$$

Згідно з теоремою про суму

$$i(t) \rightarrow \dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C.$$

Застосуємо для кожної гілки закон Ома у комплексній формі:

$$i_R = \frac{u_{ab}}{R} \rightarrow \dot{I}_R = \frac{\dot{U}_{ab}}{R},$$

$$i_C = C u'_{ab} \rightarrow \dot{I}_C = C j \omega \dot{U}_{ab} = \dot{U}_{ab} \frac{j}{X_C},$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_{ab} dt \rightarrow \dot{I}_L = \frac{\dot{U}_{ab}}{j \omega L} = -j \frac{\dot{U}_{ab}}{X_L}.$$

Тоді

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \dot{U}_{ab} \left(\frac{1}{R} - j \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) \right) = \dot{U}_{ab} \underline{Y},$$

де \underline{Y} – повна комплексна провідність:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} - j \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) = G - j(B_L - B_C); \quad (3.38)$$

активна провідність $G = \frac{1}{R}$;

індуктивна провідність $B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$;

ємнісна провідність $B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C$.

На підставі формули Ейлера

$$\underline{Y} = Y e^{-j\varphi} = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} e^{-j \arctg \frac{B_L - B_C}{G}}. \quad (3.39)$$

Дійсна частина комплексної провідності $G = Y \cos \varphi$ називається *активною провідністю*, уявна частина комплексної провідності $B = Y \sin \varphi$ називається *реактивною провідністю*.

Для розглянутого кола побудуємо векторну діаграму струмів і напруг. Оскільки для всіх елементів загальним є напруга \dot{U}_{ab} , вектор напруги виберемо як вихідний вектор, направивши його по дійсній осі (рис. 3.20).

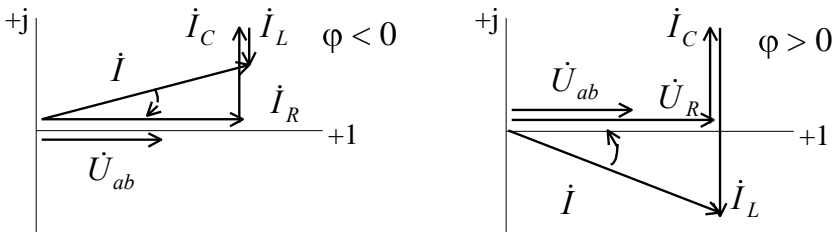


Рисунок 3.20

Можливі три режими роботи такого кола:

- $B_L > B_C$ – індуктивний режим, $\varphi < 0$;

- $B_L = B_C$ – резонанс струмів, $\varphi = 0$;
- $B_L < B_C$ – ємнісний режим, $\varphi > 0$.

Таким чином, у паралельних гілках характер кола визначає більш реактивна провідність або менший реактивний опір.

3.4 Методи розрахунків кіл синусоїдального струму та напруги

Рівняння, що виражають закони Кірхгофа у комплексній формі для кіл синусоїдального струму, мають зовсім такий самий вигляд (це було показано в попередніх розділах), як рівняння для кіл постійного струму:

$$\sum \dot{I} = 0; \quad \sum \dot{U} = \sum \dot{E}, \quad (3.40)$$

тільки струми, напруги, ЕРС і опори входять у ці рівняння у вигляді комплексних величин.

Усі методи розрахунків кіл постійного струму отримані на основі законів Кірхгофа. Якщо повторити всі міркування та виводи, взявши за основу рівняння Кірхгофа в комплексній формі, то для кіл синусоїдального струму можна обґрунтувати ті ж методи, які були отримані для кіл постійного струму. Незважаючи на спільність методів розрахунків кіл синусоїдального та постійного струмів, розрахунки кіл синусоїдального струму складніші та мають рядом особливостей, які будуть розглянуті в наступних розділах.

3.4.1 Еквівалентне перетворення пасивних кіл

При послідовному з'єднанні n приймачів з комплексними опорами $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_n$ еквівалентний або загальний комплексний опір кола

$$\underline{Z} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i = \sum_{i=1}^n R_i + j \sum_{i=1}^n X_i = R + jX. \quad (3.41)$$

При паралельному з'єднанні n приймачів з комплексними провідностями $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_n$ еквівалентна або загальна комплексна провідність кола

$$\underline{Y} = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i = \sum_{i=1}^n G_i - j \sum_{i=1}^n B_i = G - jB. \quad (3.42)$$

Приклад змішаного з'єднання приймачів подано на рис. 3.21.

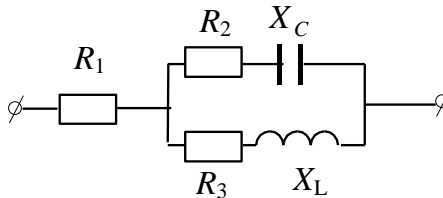


Рисунок 3.21

Приклад 3.2. Відомо, що у колі (рис. 3.21) $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 1$ Ом, $X_L = 1$ Ом, $X_C = 2$ Ом. Визначити еквівалентний опір та провідність.

Розв'язання

Для даної схеми загальний або еквівалентний комплексний опір визначається у такий спосіб:

$$\underline{Z}_{\text{ЕКВ}} = R_1 + \frac{(R_2 - jX_C)(R_3 + jX_L)}{R_2 + R_3 + j(X_L - X_C)},$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{ЕКВ}} &= 10 + \frac{2(-j2)(1+j1)}{2+1+j(1-2)} = 10 + \frac{2(-j1)(1+j1)}{3-j1} = \\ &= 10 + \frac{2(1+j1)(-j1)}{(-j1)(1+j1)} = 10 + \frac{4(-j1)}{3^2+1^2} = 10 + \frac{12+j4}{10} = \\ &= 11.2 + j0.4 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

$$R_{\text{ЕКВ}} = \text{Re}(\underline{Z}_{\text{ЕКВ}}) = 11.2 \text{ Ом}, \quad X_{\text{ЕКВ}} = \text{Im}(\underline{Z}_{\text{ЕКВ}}) = 0.4 \text{ Ом.}$$

Визначимо еквівалентну провідність:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{\text{ЕКВ}} &= \frac{1}{\underline{Z}_{\text{ЕКВ}}} = \frac{1}{11.2 + j0.4} = \frac{11.2 - j0.4}{11.2^2 + 0.4^2} = \\ &= \frac{11.2}{11.2^2 + 0.4^2} - j \frac{0.4}{11.2^2 + 0.4^2} = \\ &= 0.089 - j0.003 \text{ См,} \end{aligned}$$

звідки

$$G_{\text{ЕКВ}} = \text{Re}(\underline{Y}_{\text{ЕКВ}}) = 0.089 \text{ См},$$

$$B_{\text{ЕКВ}} = \text{Im}(\underline{Y}_{\text{ЕКВ}}) = 0.003 \text{ См.}$$

Таким чином, перехід від відомого опору до провідності здійснюється за формулою

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{R}{Z^2} - j \frac{X}{Z^2}, \quad (3.43)$$

а перехід від відомої провідності до опору

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{G}{Y^2} + j \frac{B}{Y^2}. \quad (3.44)$$

При перетворенні з'єднання споживачів трикутником в еквівалентну зірку (рис. 3.22) і назад застосовуються формули, аналогічні формулам для постійного струму, у яких використовуються комплексні опори та провідності:

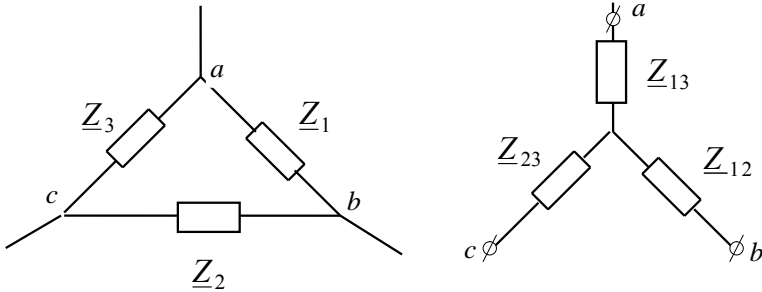


Рисунок 3.22

- перетворення «трикутник – зірка»:

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}, \quad \underline{Z}_{13} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3},$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$$
(3.45)

- перетворення «зірка – трикутник»:

$$\underline{Y}_1 = \frac{\underline{Y}_{12} \underline{Y}_{13}}{\underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{13}}, \quad \underline{Y}_2 = \frac{\underline{Y}_{12} \underline{Y}_{23}}{\underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{13}},$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{\underline{Y}_{23} \underline{Y}_{13}}{\underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{13}}.$$
(3.46)

Слід мати на увазі, що після перетворення з'єднання пасивних елементів трикутником в еквівалентне з'єднання зіркою або назад комплексні опори перетвореної схеми можуть вийти з негативними дійсними частинами, тобто негативними активними опорами. Ці опори мають винятково розрахунковий смисл.

3.4.2 Узагальнений закон Ома в символічній формі

Узагальнений закон Ома для ділянки кола із джерелом гармонійної ЕРС (рис. 3.23)

$$\dot{U}_{12} = \dot{I}Z \mp \dot{E}, \quad (3.47)$$

де «+» відповідає, коли напрям джерела збігається з напрямом струму, «-» – не збігається.

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{12} \pm \dot{E}}{Z}, \quad (3.48)$$

де «+» відповідає, коли напрям джерела збігається з напрямом струму, «-» – не збігається.

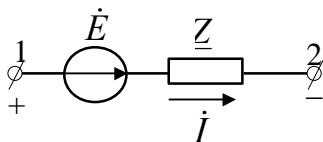


Рисунок 3.23

3.4.3 Рівняння потужності в символічній формі

Згадаємо, що *миттєва потужність* визначається у такий спосіб:

$$p(t) = u(t)i(t) = IU \cos \varphi - IU \cos \left(\omega t + \psi_u + \psi_i \right).$$

Якщо взяти $\psi_u = 0$, тоді з $\psi_u - \psi_i = \varphi$ випливає, що $\psi_i = -\varphi$.

$$\text{Тоді } p(t) = IU \cos \varphi - IU \cos \left(\omega t - \varphi \right).$$

Миттєва потужність має постійну складову $UI \cos \varphi$ та гармонійну складову, що змінюється з подвійною частотою.

Активна потужність – це постійна складова миттєвої потужності або середнє за період значення:

$$P_{\text{акт}} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos \varphi = I^2 R = U^2 G. \quad (3.49)$$

Одиниця виміру потужності – *ват* (Вт).

Активна потужність завжди додатна.

Електричні машини та апарати конструюють для роботи при певних значеннях напруги та струму, тому їх характеризують не активною потужністю, що залежить від зсуву фаз, а *повною потужністю*

$$S = UI = I^2 Z = U^2 Y, \quad (3.50)$$

де U, I – діючі значення відповідно напруги та струму.

Повна потужність дорівнює найбільшому значенню активної потужності при заданих напругах і струмах. Також амплітуда гармонічної складової миттєвої потужності чисельно дорівнює повній потужності. Розмірність повної та активної потужностей однакова, однак одиницю виміру потужності в застосуванні до повної потужності S називають *вольт-ампер* ($V \cdot A$).

Відношення активної потужності до повної, що дорівнює косинусу кута зсуву фаз між напругою та струмом, називається *коефіцієнтом потужності*:

$$\frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi. \quad (3.51)$$

Для ефективного використання електричних машин і апаратів бажане мати більш високий коефіцієнт потужності або меншій зсув за фазою струму щодо напруги, тобто $\cos \varphi \rightarrow 1, \varphi \rightarrow 0$.

Високий коефіцієнт потужності також бажаний для зменшення втрат при передачі енергії по лініях електропередачі. При даному значенні P приймача струм на лінії тим менше, чим більше $\cos \varphi$:

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi}.$$

При розрахунках електричних кіл застосовують *реактивну потужність* Q :

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 (X_L - X_C) = U^2 (B_C - B_L), \quad (3.52)$$

яка додатна при індуктивному характері кола ($\varphi > 0$) і негативна при ємнісному характері кола ($\varphi < 0$). Одиницю потужності у застосуванні до виміру реактивної потужності називають *вар*.

Активна, реактивна й повна потужності зв'язані співвідношеннями

$$S^2 = P^2 + Q^2; \quad \frac{Q}{P} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (3.53)$$

Як впливає із формул, для підвищення коефіцієнта потужності приймача потрібно зменшувати його реактивну потужність.

У той час як активна потужність визначає виконану роботу або передану енергію за одиницю часу, повна та реактивна потужності не визначають ні виконаної роботи, ні переданої енергії за одиницю часу. Однак в електроенергетиці за аналогією з поняттям активної потужності реактивній потужності приписують аналогічний зміст, розглядають її як потужність віддачі, одержання або передачі деякої величини, яку, хоча вона і не є енергією, умовно називають *реактивною енергією* W_p , на практиці вимірюють лічильниками:

$$W_p = Qt \quad (\text{вар } \varepsilon). \quad (3.54)$$

Уведемо поняття *комплексної потужності*. Для того щоб одержати повну, активну та реактивну потужності з відомих комплексів струму і напруги, використовують такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \dot{U} I^* = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = UI e^{j(\psi_u - \psi_i)} = UI e^{j\varphi} = \\ &= UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ, \end{aligned} \quad (3.55)$$

де \tilde{S} – *комплексна потужність*; I^* – спряжене значення струму.

Звідси бачимо, що дійсна частина комплексної потужності дорівнює активній потужності, а уявна частина – реактивній потужності. Модуль комплексної потужності дорівнює повній потужності S :

$$\tilde{S} = I^2 \underline{Z} = U^2 \underline{Y}. \quad (3.56)$$

Розглянемо комплексні потужності для різних споживачів:
для активного опору:

$$\tilde{S} = \dot{U}^* I = \dot{I} R I^* = I e^{j\psi_i} R I e^{-j\psi_i} = I^2 R; \quad (3.57)$$

$$P = I^2 R; \quad Q = 0;$$

для індуктивного опору:

$$\tilde{S} = \dot{U}^* I = \dot{I} j X_L I^* = I^2 j X_L; \quad (3.58)$$

$$P = 0; \quad Q = I^2 X_L;$$

для ємнісного опору:

$$\tilde{S} = \dot{U}^* I = \dot{I} \left(-j X_C \right) I^* = -j X_C I^2; \quad (3.59)$$

$$P = 0; \quad Q = -X_C I^2.$$

3.4.4 Баланс потужності

Із закону збереження енергії випливає, що в будь-якому колі дотримується баланс як миттєвих, так і активних потужностей. Сума всіх потужностей, що віддаються, дорівнює сумі всіх одержуваних потужностей. Розглянемо, як виконується баланс для комплексних потужностей, а отже, і для реактивних потужностей.

Нехай загальна кількість вузлів схеми дорівнює n . Запишемо для кожного вузла рівняння за I законом Кірхгофа для комплексних сполучених струмів:

$$\begin{aligned} \overset{*}{I}_{12} + \overset{*}{I}_{13} + \dots + \overset{*}{I}_{1n} &= 0, \\ \overset{*}{I}_{21} + \overset{*}{I}_{23} + \dots + \overset{*}{I}_{2n} &= 0, \\ &\dots \\ \overset{*}{I}_{n1} + \overset{*}{I}_{n2} + \dots + \overset{*}{I}_{n,n-1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Ці рівняння записані у загальній формі в припущенні, що кожний вузол (тут вузол – місце з'єднання не менше двох гілок) пов'язаний з іншими $n - 1$ вузлами. За відсутності яких-небудь гілок відповідні доданки в рівняннях дорівнюють нулю. За наявності між якою-небудь парою вузлів декількох гілок, числа, що додаються відповідно збільшуються.

Помножимо кожне рівняння (3.60) на комплексний потенціал вузла, для якого складемо рівняння:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1^* I_{12} + \dot{\phi}_1^* I_{13} + \dots + \dot{\phi}_1^* I_{1n} &= 0, \\ \dot{\phi}_2^* I_{21} + \dot{\phi}_2^* I_{23} + \dots + \dot{\phi}_2^* I_{2n} &= 0, \\ &\dots \\ \dot{\phi}_n^* I_{n1} + \dot{\phi}_n^* I_{n2} + \dots + \dot{\phi}_n^* I_{n,n-1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Додамо усі рівняння (3.61) з урахуванням того, що спряжені комплексні струми входять у ці рівняння двічі (для двох різних напрямків), причому $I_{21}^* = -I_{12}$ і т.д. У результаті одержимо

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2 \overline{I}_{12} + \dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_3 \overline{I}_{13} + \dots + \dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_n \overline{I}_{1n} + \dots + \\ + \dot{\phi}_{n-1} - \dot{\phi}_1 \overline{I}_{n-1,1} + \dots + \dot{\phi}_{n-1} - \dot{\phi}_n \overline{I}_{n-1,n} = 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

У цьому виразі стільки доданків, скільки гілок, і кожний доданок являє собою комплексну потужність гілок \tilde{S}_i . Таким чином, сума комплексних одержуваних потужностей у всіх гілках дорівнює нулю. Отримана рівність виражає баланс потужностей $\tilde{S} = 0$. З нього випливає рівність нулю окремо суми обумовлених активних і суми обумовлених реактивних потужностей.

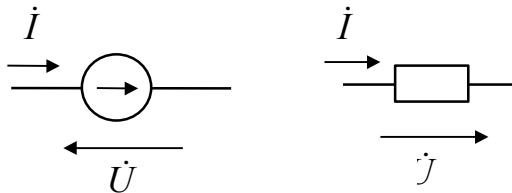


Рисунок 3.24

Слід зазначити, що взаємний напрямок струмів і напруг на споживачах і на джерелах протилежний, як показано на рис. 3.24. Оскільки негативні одержувані потужності являють

собою потужності, що віддані, то можна стверджувати, що суми всіх, що віддані та усіх одержуваних реактивних потужностей дорівнюють один одному:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\text{пов}} &= \tilde{S}_{\text{вд}} \text{ або } \tilde{S}_{\text{дж}} = \tilde{S}_{\text{спож}}. \\ \tilde{S}_{\text{дж}} &= \sum_i \pm \dot{E}_i I_i^* + \sum_i \pm \dot{U}_j J^* = \sum P \pm j \sum Q = \\ &= \underbrace{\sum I^2 R}_P + j \left(\underbrace{\sum I^2 X_L - \sum I^2 X_C}_Q \right) \end{aligned}$$

Отже, одержуємо

$$\tilde{S}_{\text{дж}} = \sum_i \pm \dot{E}_i I_i^* + \sum_i \pm \dot{U}_j J^* = \sum P \pm j \sum Q = P \pm jQ \quad (3.63)$$

При рівності сум комплексних величин суми їх модулів у загальному випадку не дорівнюють один одному. Звідси випливає, що для повних потужностей S баланс не дотримується.

3.4.5 Метод контурних струмів

Алгоритм розрахунків кіл гармонічного струму методом контурних струмів аналогічний розглянутому при вивченні кіл постійного струму з особливостями символічного методу.

При розв'язанні завдання даним методом складається система рівнянь вигляду

$$\mathbf{Z}_{ij} \mathbf{I}_{ii} = \mathbf{E}_{ii}, \quad (3.64)$$

де \mathbf{Z}_{ij} – квадратна матриця комплексних опорів, у якій

$Z_{ij} (i=j)$ – власний комплексний опір;

$Z_{ij} (i \neq j)$ – загальний комплексний опір i і j контурів;

\mathbf{I}_{ii} – матриця-стовпець контурних струмів;

\mathbf{E}_{ii} – матриця-стовпець контурних ЕРС.

Приклад 3.3 У колі, що зображене на рис. 3.25, гармонічні джерела ЕРС

$$e_1(t) = E_{m_1} \sin(\omega t + \psi_{e_1}) \rightarrow \dot{E}_1 = \frac{E_{m_1}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_{e_1}},$$

$$e_2(t) = E_{m_2} \sin(\omega t + \psi_{e_2}) \rightarrow \dot{E}_2 = \frac{E_{m_2}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_{e_2}}.$$

Розрахувати струми у гілках методом контурних струмів.

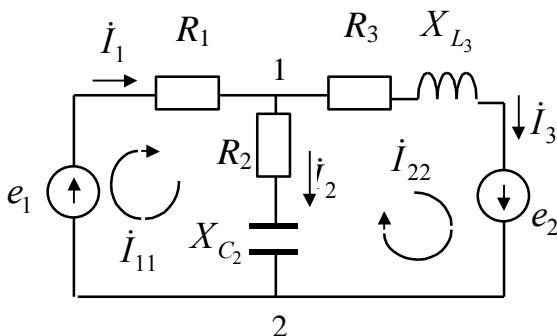


Рисунок 3.25

Розв'язання

Виберемо додатні напрямки проходження струмів у гілках кола (рис. 3.25). Виберемо додатні напрямки проходження контурних струмів.

Складемо систему рівнянь для контурних струмів:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11} \dot{I}_{11} + \underline{Z}_{12} \dot{I}_{22} = \dot{E}_{11}, \\ \underline{Z}_{21} \dot{I}_{11} + \underline{Z}_{22} \dot{I}_{22} = \dot{E}_{22}, \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= R_1 + R_2 - jX_{c_2}, & \underline{Z}_{22} &= R_2 + R_3 + jX_{L_3} - X_{c_2}, \\ \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} &= -R_2 - jX_{c_2}, & \dot{E}_{11} &= \dot{E}_1, & \dot{E}_{22} &= \dot{E}_2. \end{aligned}$$

Розв'яжемо систему рівнянь за правилом Крамера. Для цього запишемо визначники системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{E}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \dot{E}_{22} & \underline{Z}_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \dot{E}_{11} \\ \underline{Z}_{21} & \dot{E}_{22} \end{vmatrix}.$$

Визначимо контурні струми:

$$\dot{I}_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \dot{I}_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Визначимо струми у гілках:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}, \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_{22}.$$

3.4.6 Метод вузлових потенціалів

Алгоритм розрахунків кіл гармонічного струму методом вузлових потенціалів аналогічний розглянутому при вивченні кіл постійного струму з особливостями символічного методу.

При розв'язанні завдання даним методом складається система рівнянь вигляду

$$\underline{Y}_{ij} \underline{\Phi}_i = \underline{J}_{ii}, \quad (3.65)$$

де \underline{Y}_{ij} – квадратна матриця комплексних провідностей, у якій

$\underline{Y}_{ij (i=j)}$ – власна комплексна провідність;

$\underline{Y}_{ij (i \neq j)}$ – загальна комплексна провідність гілок, що з'єднують i і j вузли;

$\underline{\Phi}_i$ – матриця-стовпець потенціалів;

\underline{J}_{ii} – матриця-стовпець вузлових струмів.

Для наведеного кола на рис. 3.25 система рівнянь перетворюється в одне рівняння, оскільки в колі два вузли:

$$\dot{\phi}_2 = 0, \quad \dot{\phi}_1 = \frac{\dot{J}_{11}}{\underline{Y}_{11}},$$

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 - jX_{C_2}} + \frac{1}{R_3 + jX_{L_3}}, \quad \dot{J}_{11} = \frac{\dot{E}_1}{R_1} - \frac{\dot{E}_2}{R_3 + jX_{L_3}},$$

$$\dot{I}_1 = \frac{-\dot{\phi}_1 + \dot{E}_1}{R_1}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{\phi}_1}{R_2 - jX_{C_2}}, \quad \dot{I}_3 = \frac{\dot{\phi}_1 + \dot{E}_2}{R_3 + jX_{L_3}}.$$

3.4.7 Метод накладання

Алгоритм розрахунків аналогічний розглянутому при вивченні кіл постійного струму. Розглянемо застосування цього методу на прикладі схеми, що наведена на рис. 3.25, яку можна замінити двома складовими підсхеми (рис. 3.26):

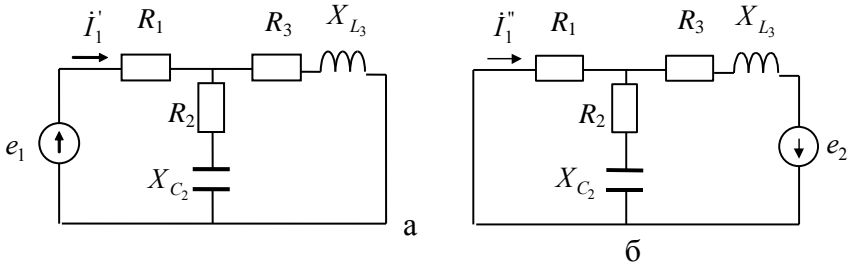


Рисунок 3.26

$$\dot{I}'_1 = \frac{\dot{E}_1}{R_1 + \frac{(R_2 - jX_{C_2})(R_3 + jX_{L_3})}{R_2 + R_3 + j(X_{L_3} - X_{C_2})}},$$

$$\dot{I}''_1 = \frac{\dot{E}_2}{R_3 + jX_{L_3} + \frac{R_1(R_2 - jX_{C_2})}{R_1 + R_2 - jX_{C_2}}} \times \frac{R_2 - jX_{C_2}}{R_1 + R_2 - jX_{C_2}},$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}'_1 + \dot{I}''_1.$$

3.4.8 Метод еквівалентного генератора

Алгоритм розрахунків аналогічний розглянутому при вивченні кіл постійного струму. Розглянемо застосування цього методу на прикладі визначення струму \dot{I}_1 схеми на рис. 3.25. На рис. 3.27 наведені схема кола в режимі холостого ходу (обрив споживача у гілці, де шукається струм, рис. 1.27 а) і пасивна схема (рис. 3.27 б), у якій вилучені джерела (нагадуємо, що дже-

рела вимикаються зі схеми за таким правилом: джерела ЕРС замикаються коротко, а гілки із джерелами струму обривають).

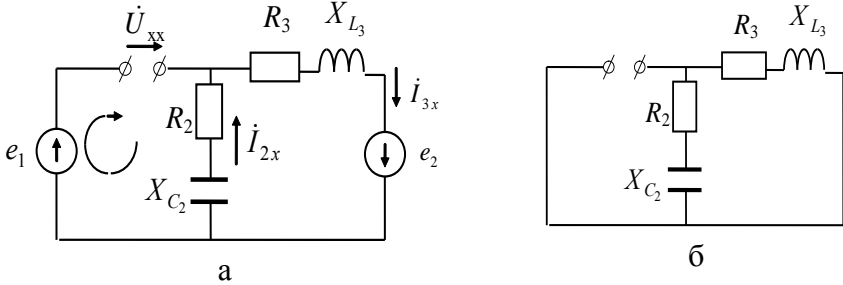


Рисунок 3.27

Для кола, що зображене на рис 1.27,

$$\dot{I}_{2x} = \dot{I}_{3x}, \quad \dot{I}_{3x} = \frac{\dot{E}_2}{R_2 + R_3 + j\omega L_3 - X_{C_2}}$$

Напряг холостого ходу визначається

$$\dot{U}_{xx} - \dot{I}_{3x} (R_2 - jX_{C_2}) = \dot{E}_1$$

Шуканий струм у першій гілці визначається

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{xx}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{\text{вх}}}$$

де $\underline{Z}_1 = R_1$,

вхідний опір кола (рис. 3.27, б)

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{R_2 - jX_{C_2} \parallel R_3 + jX_{L_3}}{R_2 + R_3 + j\omega L_3 - X_{C_2}}$$

4 РЕЗОНАНСНИЙ РЕЖИМ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА

Резонанс (від французького – відгук, що дає) – явище сильного зростання амплітуди коливання під впливом зовнішнього впливу, коли частота зовнішніх коливань збігається із частотою системи.

У пасивних електричних колах явище резонансу може мати місце тільки у тому випадку, якщо вони містять і котушки індуктивності, і конденсатори. У режимі резонансу на вході такого кола напруга і струм збігаються за фазою, тобто критерієм резонансу є рівність кута зсуву фаз нулю ($\varphi = 0$). Враховуючи, що $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$ в послідовному колі, $\varphi = \arctg \frac{B}{G}$ у паралельному колі, умовам виникнення резонансів відповідають співвідношення: $X = 0$ або $B = 0$.

В електричних колах мають місце два види резонансів: *резонанс напруг* і *резонанс струмів*. Під час резонансу напруг при певних параметрах кола можливо значне перевищення напруги на індуктивності та на конденсаторі над вхідною напругою кола. При резонансі струмів в індуктивності та конденсаторі струми у деяких випадках можуть бути значно більшими вхідного струму кола. Тому такі резонанси називають відповідно резонансом напруги і резонансом струму. Умова виникнення першого: реактивний опір $X = 0$, другого – реактивна провідність $B = 0$.

4.1 Резонанс напруг

4.1.1 Загальні співвідношення у послідовному RLC- контурі

Резонанс напруг спостерігається в послідовних колах. Розглянемо режим резонансу напруг для послідовного RC-кола (рис. 4.1).

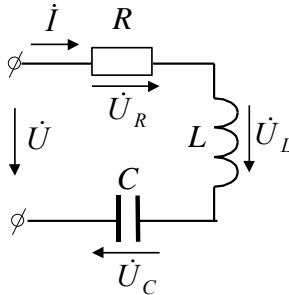


Рисунок 4.1

Для схеми, що зображена на рис. 4.1, справедливо

$$\dot{U} = R\dot{I} + j(X_L - X_C)\dot{I} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C. \quad (4.1)$$

Змінимо частоту генератора або параметри котушки індуктивності або ємності так, щоб для цієї схеми було

$$X = X_L - X_C = 0,$$

тоді

$$\dot{U}_L + \dot{U}_C = jX_L\dot{I} - jX_C\dot{I} = 0,$$

напруга на вході $\dot{U} = R\dot{I} = \dot{U}_R$, тобто струм і напруга на вході збігаються за фазою. У колі – режим резонансу:

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = 0. \quad (4.2)$$

Частота, при якій спостерігається резонанс, ω_0 може бути визначено із співвідношення

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C},$$

Звідки одержуємо резонансну частоту

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.3)$$

Струм у колі у режимі резонансу

$$I_0 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{R},$$

тобто максимально можливий при даних параметрах контуру.
Повна потужність кола

$$S = I_0^2 Z = I_0^2 R = P,$$

тобто дорівнює потужності, що виділяється на активному опорі.

На рис. 4.2 наведена векторна діаграма, яка відповідає режиму резонансу. Часова діаграма струму та напруг наведена на рис. 4.3 ($\psi_i = 0$).

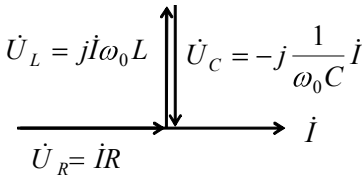


Рисунок 4.2

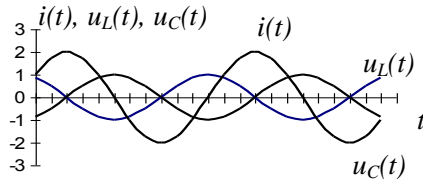


Рисунок 4.3

У кожний момент часу $U_L - U_C = 0$. Враховуючи вираз (4.3), одержуємо

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho, \quad (4.4)$$

де ρ – *характеристичний*, або *хвильовий опір* резонансного контуру, вимірюваний в омах.

Відношення напруги на реактивних елементах (U_L і U_C) до напруги на вході у режимі резонансу називають *добротністю* контуру:

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0 L I_0}{R I_0} = \frac{I_0}{\omega_0 C I_0 R} = \frac{\rho}{R}. \quad (4.5)$$

Чим більше $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ та чим менше активний опір у колі, тим вища напруга на реактивних елементах у порівнянні з напругою на вході контура.

4.1.2 Енергетичні процеси

Нехай у послідовному колі, що складається з R , L , C елементів, проходить струм

$$i(t) = I_m \sin \omega_0 t,$$

тоді напруга на ємності

$$u_C(t) = U_{Cm} \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = -U_{Cm} \cos \omega_0 t.$$

Магнітна енергія індуктивності

$$W_M = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega_0 t.$$

Енергія, накопичена на ємності,

$$W_{ел} = \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{CU_{Cm}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t.$$

Оскільки

$$U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega_0 C} = I_m \sqrt{\frac{L}{C}},$$

то

$$W_{ел} = \frac{CI_m^2}{2} \frac{L}{C} \cos^2 \omega_0 t = \frac{LI_m^2}{2} \cos^2 \omega_0 t.$$

У кожний момент часу сумарна енергія контуру в режимі резонансу

$$\begin{aligned} W = W_M + W_{ел} &= \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega_0 t + \frac{LI_m^2}{2} \cos^2 \omega_0 t = \\ &= \frac{LI_m^2}{2} = \text{const}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

тобто у контурі відбувається обмін енергії між індуктивністю і ємністю. Сума енергій магнітного та електричного полів залишається незмінною. Енергія, яка споживається від джерела, дорівнює тільки тепловій, що виділяється на активному опорі контуру.

4.1.3 Частотні та резонансні характеристики послідовного RLC-контуру

Залежності параметрів RLC-кола від частоти називають *частотними характеристиками*.

Це індуктивний опір $X_L(\omega) = \omega L$, ємнісний опір $X_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}$, реактивний опір

$$X(\omega) = X_L(\omega) - X_C(\omega),$$

активний опір $R(\omega) = \text{const}$, повний опір

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)},$$

кут зсув фаз

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{X(\omega)}{R(\omega)}.$$

Якісні характеристики наведені на рис. 4.4.

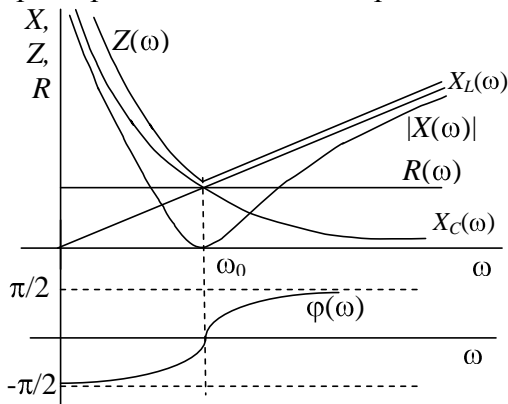


Рисунок 4.4

У момент резонансу $X_L \overset{\sim}{=} X_C \overset{\sim}{=}$, $X \overset{\sim}{=} 0$, $Z \overset{\sim}{=} 0$, $\varphi \overset{\sim}{=} 0$.

Залежності струму $I(\omega)$, напруги на індуктивності $U_L(\omega)$, напруги на ємності $U_C(\omega)$ називають *резонансними характеристиками*:

$$I \overset{\sim}{=} \frac{U}{\sqrt{R^2 \overset{\sim}{+} X^2 \overset{\sim}{}}}; \quad U_L \overset{\sim}{=} I\omega L; \quad U_C = \frac{I}{\omega C}. \quad (4.7)$$

Графіки цих характеристик при добротності $Q = 2$ подані на рис. 4.5.

При добротності контуру $Q < 5$ максимуми напруг U_L та U_C зміщуються одна від одної на одне й те саме значення частоти від резонансної ω_0 . При добротності контуру $Q > 5$ максимуми цих напруг при резонансній частоті $\omega = \omega_0$ збігаються.

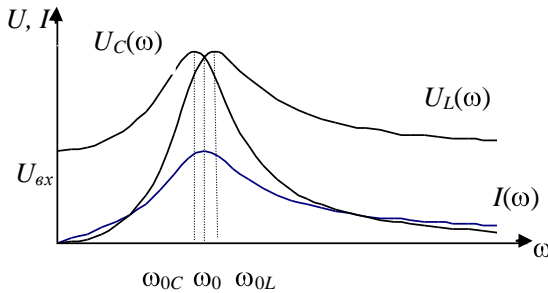


Рисунок 4.5

Якщо частота $\omega = 0$, то $X_C = \infty$, $X_L = 0$ (рис. 4.6 а). За цієї умови

$$U_C \overset{\sim}{=} U_{\text{вх}}, \quad U_L \overset{\sim}{=} 0.$$

Якщо частота дорівнює резонансній $\omega = \omega_0$, то $X = 0$ (рис. 4.6 б). При цьому

$$U_L \overset{\sim}{=} U_C \overset{\sim}{=}$$

Якщо $\omega \rightarrow \infty$, тоді $X_C \rightarrow 0$, $X_L \rightarrow \infty$ (рис. 4.6 в). При цьому

$$U_L \rightarrow U_{\text{вх}}, \quad U_C \rightarrow 0.$$

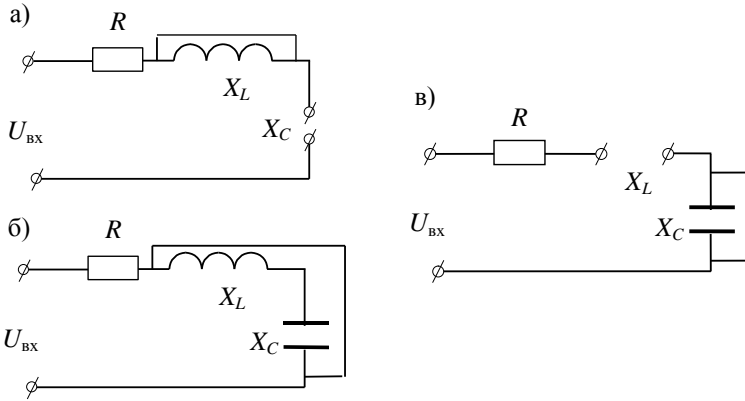


Рисунок 4.6

З наведених характеристик випливає, що RLC - контур має вибірккові властивості. Найбільше значення струму має місце у режимі резонансу ($\omega = \omega_0$). Для оцінки вибіркових властивостей контуру вводять поняття *смуги пропущення* контуру. Вона дорівнює різниці частот, яким відповідає відношення $\frac{I}{I_0}$ до та після

резонансу, що дорівнює $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Параметри кола дуже впливають на вибіркковість. Чим більша добротність контуру, тем вища його вибіркковість. У цьому можна переконатися при розглядання кривих на рис. 4.7.

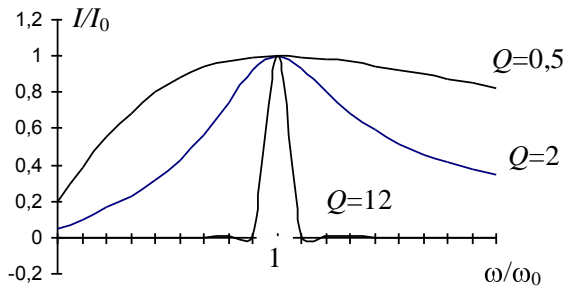


Рисунок 4.7

На рис. 4.7 $\frac{I}{I_0}$ – відношення струму поточної частоти до струму резонансної частоти; $\frac{\omega}{\omega_0}$ – відношення поточної частоти до резонансної.

Чим більша добротність контуру, тим кращі його вибіркові властивості і тим менша смуга пропусчення.

4.1.4 Залежності I , U_L , U_C від L та C

Режиму резонансу напруг у RLC-колі можна досягти, не тільки змінюючи частоту, але й змінюючи параметри індуктивності і ємності. Представимо електричні схеми послідовного RLC-кола при $L = 0$, $L = L_0$ (індуктивність досягнення резонансу), $L \rightarrow \infty$ (рис. 4.8).

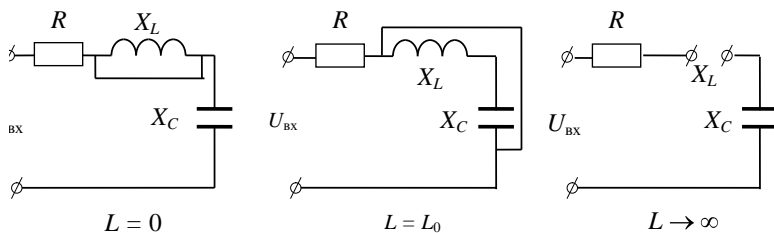


Рисунок 4.8

Значення $I(L)$, $U_L(L)$, $U_C(L)$ для кожної схеми подані у табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Значення L	Струм $I = U_{\text{вх}} / \sqrt{R^2 + X^2}$	Напруга на індуктивності $U_L = I\omega L$	Напруга на ємності $U_C = \frac{I}{\omega C}$
0	$U_{\text{вх}} / \sqrt{R^2 - X_C^2}$	0	$\sqrt{U_{\text{вх}}^2 - I^2 R^2}$
L_0	$U_{\text{вх}} / R$	$U_C = U_{\text{вх}} Q$	$U_L = U_{\text{вх}} Q$
∞	0	$U_{\text{вх}}$	0

Електричні схеми RLC-кола при $C = 0$, $C = C_0$ (значення ємності при резонансі), $C \rightarrow \infty$ наведені на рис. 4.9.

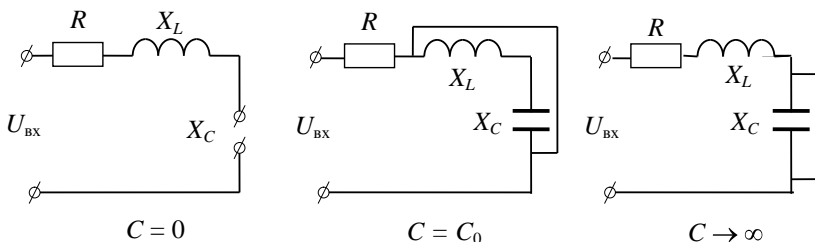


Рисунок 4.9

Значення $I(C)$, $U_L(C)$, $U_C(C)$ для кожної схеми дані у таблиці 4.2.

Таблиця 4.2

Значення C	Струм $I = U_{\text{BX}} / \sqrt{R^2 + X^2}$	Напруга $U_L = I\omega L$	Напруга $U_C = \frac{I}{\omega C}$
0	0	0	U_{BX}
C_0	U_{BX} / R	$U_C = U_{\text{BX}} Q$	$U_L = U_{\text{BX}} Q$
∞	$I = U_{\text{BX}} / \sqrt{R^2 + X_L^2}$	$\sqrt{U_{\text{BX}}^2 - I^2 R^2}$	0

Характер зміни залежностей $I(L)$, $U_L(L)$, $U_C(L)$, $I(C)$, $U_L(C)$, $U_C(C)$ поданий на рис. 4.10.

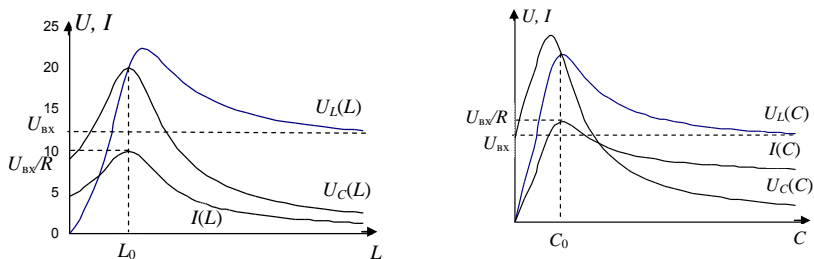


Рисунок 4.10

4.2 Резонанс струмів

4.2.1 Загальні співвідношення у паралельному LC- контурі

Резонанс струмів спостерігається в паралельних гілках. При резонансі струмів за фазою збігаються струм загальної гілки та напруга на паралельній ділянці. Розглянемо резонанс струмів у схемі з паралельними гілками RL та RC (рис. 4.11 а).

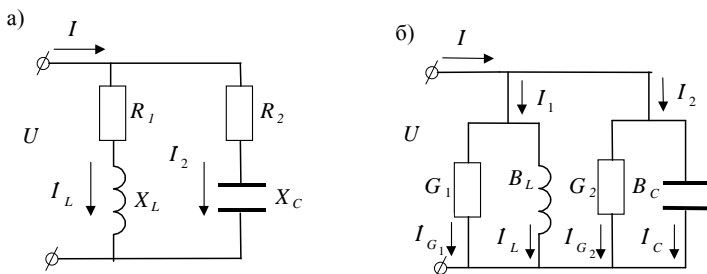


Рисунок 4.11

Замінімо дану схему еквівалентною, що наведена на рис. 4.11 б.

У цій схемі взяті такі позначення:

$$G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2}; B_L = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2}; \quad (4.8)$$

$$G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2}; B_C = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}.$$

Для даної схеми справедливо

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{U} \left(\mathbf{G}_1 - jB_L \right) + \dot{U} \left(\mathbf{G}_2 + jB_C \right) \\ &= \dot{U} \left(\mathbf{G}_1 + G_2 \right) - j\dot{U} \left(B_L - B_C \right) \\ &= \dot{I}_{G_1} + \dot{I}_{G_2} + \dot{I}_L + \dot{I}_C. \end{aligned}$$

Звідки одержимо

$$\dot{I} = \dot{I}_{G_1} + \dot{I}_{G_2} + \dot{I}_L + \dot{I}_C. \quad (4.9)$$

У режимі резонансу

$$\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G_1 + G_2} = 0.$$

Це можливо, якщо буде виконана умова

$$B = B_L - B_C = \frac{X_L}{Z_1^2} - \frac{X_C}{Z_2^2} = 0 \quad (4.10)$$

і відповідно $\dot{I}_L + \dot{I}_C = 0; I_L = I_C$.

При резонансі повна потужність, яка споживається контуром, мінімальна та має активний характер:

$$S = UI = P = U^2(G_1 + G_2) = U^2G. \quad (4.11)$$

У режимі резонансу струм на вході паралельного контуру $\dot{I}_0 = \dot{U} \overbrace{(G_1 + G_2)}^G = \dot{U}G$, тобто мінімальний струм для цієї схеми при незмінній напрузі на вході \dot{U} . При $G \rightarrow 0$ $I \rightarrow 0$ опір такого кола $Z \rightarrow \infty$. Для резонансної частоти ω_0 такий контур прийнято називати *фільтром - пробкою*.

Величина резонансної частоти для наведеної схеми визначається з умови

$$\frac{\omega_0 L}{R_1^2 + X_L^2} = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{R_2^2 + X_C^2}. \quad (4.12)$$

Звівши до спільного знаменника та помноживши обидві частини на ω_0 , після перетворень одержимо

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (4.13)$$

Резонанс у такій схемі може мати місце, якщо тільки виконуються такі умови:

- 1) $\rho > R_1, \quad \rho > R_2$;
- 2) $\rho < R_1, \quad \rho < R_2$.

При $R_1 = R_2 = \rho$ схема перебуває у резонансі при будь-яких частотах. Це так званий *всехвильовий резонанс*.

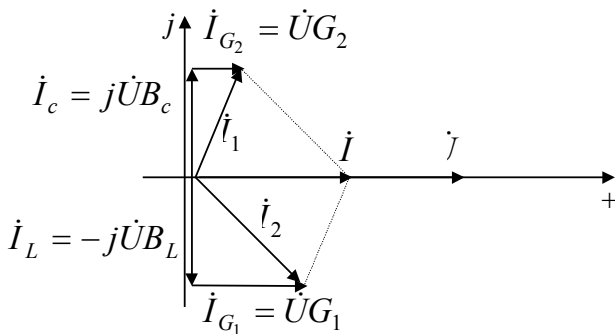


Рисунок 4.12

Основою для побудови векторної діаграми є опис схеми за допомогою виразу (4.9). При побудові з'єднаємо з дійсною віссю напругу \dot{U} , тоді векторна діаграма буде мати вигляд, наведений на рис. 4.12, якщо врахувати, що $I_L = I_C$.

Під *добротністю* контуру при резонансі струмів розуміють відношення струму на реактивних елементах I_L або I_C до струму на вході контуру I :

$$Q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} = \frac{B_L}{G} = \frac{B_C}{G}. \quad (4.14)$$

При незначних втратах у контурі струми I_L і I_C можуть багаторазово перевищувати струми на вході схеми.

4.2.2 Частотні та резонансні характеристики у паралельному LC- контурі

Як частотні характеристики у контурі на рис. 4.13 стають залежності $B_L(\omega)$, $B_C(\omega)$, $B(\omega)$, значення яких при $\omega = 0, \omega_0, \infty$ наведені у таблиці 4.3.

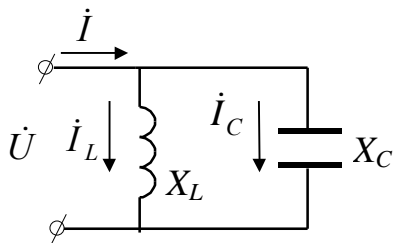


Рисунок 4.13

Характер зміни залежностей $B_L(\omega)$, $B_C(\omega)$, $B(\omega)$ наведений на рис. 4.14.

Таблиця 4.3

Частота ω	Провідність $B_L = \frac{1}{\omega L}$	Провідність $B_C = \omega C$	Різниця про- відності $B = B_L - B_C$
0	∞	0	∞
ω_0	$B_L = B_C$	$B_C = B_L$	0
∞	0	∞	∞

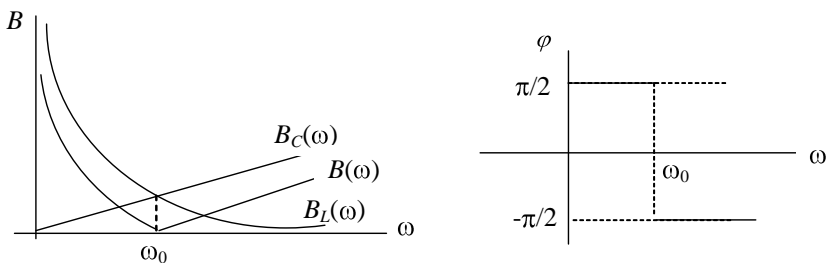


Рисунок 4.14

Враховуючи, що $I_L = UB_L$, $I_C = UB_C$, $I = UB$, характер резонансних кривих $I_L(\omega)$, $I_C(\omega)$, $I(\omega)$ повністю збігається з відповідними частотними залежностями. При $\omega = \omega_0$ такий контур виконує роль фільтра – пробки, провідність його, а отже, і струм \dot{I} загальної гілки дорівнюють нулю, а опір – нескінченності.

4.3 Резонанси у складних колах

У складних схемах, у яких мають місце одночасно і послідовне, і паралельне з'єднання галузей з індуктивністю і ємністю, може спостерігатися резонанс напруги й струмів. Покажемо це на прикладі схеми, наведеної на рис. 4.15.

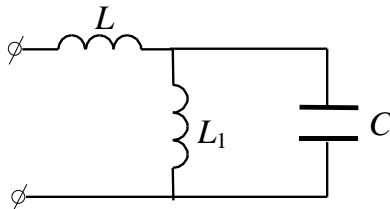


Рисунок 4.15

Вхідний опір

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = j\omega L + \frac{j\omega L_1 \left(-\frac{j}{\omega C} \right)}{j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C} \right)} = j \left(\omega L - \frac{\omega L_1}{\omega^2 L_1 C - 1} \right). \quad (4.15)$$

У цій схемі резонанс напруг можливий за умови

$$\omega_0 L - \frac{\omega_0 L_1}{\omega_0^2 L_1 C - 1} = 0,$$

при цьому резонансна частота

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L_1 + L}{L_1 LC}}. \quad (4.16)$$

Вхідна провідність цієї схеми

$$\underline{Y}_{\text{вх}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{вх}}} = -j \frac{\omega^2 L_1 C - 1}{\omega^3 L_1 LC_1 - \omega L - \omega L_1} = -jB. \quad (4.17)$$

При резонансі струмів $B = 0$. При цьому резонансна частота

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}. \quad (4.18)$$

Чисельні значення частот у режимі резонансу струмів і напруг різні для однієї і тієї ж схеми.

Таким чином, коло з декількома RLC - контурами, які можуть бути з'єднані довільно, може давати кілька резонансів струмів і напруг. Аналіз здійснюється шляхом розрахунків $\underline{Z}_{\text{вх}}$ кола. Розглядається $\text{Im}(\underline{Z}_{\text{вх}})$, яка являє собою дріб.

Відомо, що умова резонансу напруг $X = 0$, тобто $\text{Im}(\underline{Z}_{\text{вх}}) = 0$. Отже, рівність нулю чисельника $\text{Im}(\underline{Z}_{\text{вх}})$ дає резонансну частоту для резонансу напруг.

Умова резонансу струмів $B = 0$ або $\text{Im}(\underline{Y}_{\text{вх}}) = 0$, тобто $\text{Im}(\underline{Z}_{\text{вх}}) = \infty$. Отже, рівність нулю знаменника $\text{Im}(\underline{Z}_{\text{вх}})$ дає резонансну частоту для резонансу струмів. Таким чином, завдання зводиться до визначення нулів і полюсів $\text{Im} \underline{Z}_{\text{вх}}$.

5 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ІЗ ВЗАЄМОІНДУКЦІЄЮ

5.1 Напруга на індуктивно зв'язаних елементах кола

Явище наведення ЕРС в одному елементі кола при зміні струму в іншому називають **взаємоіндукцією**.

Про такі елементи говорять, що вони індуктивно (або магнітно) зв'язані.

Нехай є дві котушки (рис. 5.1), по яких проходять струми i_1 та i_2 . У першій котушці W_1 витків, у другій – W_2 . При цьому ці котушки будуть магнітно зв'язані так, як це показано на рис. 5.1.

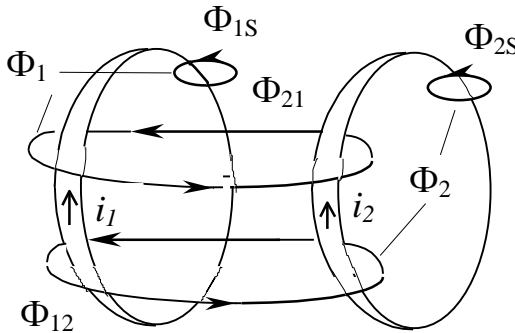


Рисунок 5.1

Тут введені такі позначення:

Φ_{11} – магнітний потік, створений струмом i_1 (потік самоіндукції першої котушки);

Φ_{1s} – частина магнітного потоку Φ_{11} , зв'язана тільки з першою котушкою;

Φ_{22} – магнітний потік, створений струмом i_2 (потік самоіндукції другої котушки);

Φ_{2s} – частина магнітного потоку Φ_{22} , зв'язана тільки із другою котушкою;

Φ_{12} – потік взаємоіндукції – частина потоку Φ_{22} , яка пов'язана з першою котушкою;

Φ_{21} – потік взаємоіндукції – частина потоку Φ_{11} , яка зв'язана із другою котушкою.

Першу котушку пронизує магнітний потік $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$, другу котушку – $\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}$.

Потокозчеплення першої та другої котушок відповідно

$$\begin{aligned}\psi_1 &= W_1\Phi_{11} + W_1\Phi_{12} = \psi_{11} + \psi_{12}, \\ \psi_2 &= W_2\Phi_{22} + W_2\Phi_{21} = \psi_{22} + \psi_{21},\end{aligned}\tag{5.1}$$

де ψ_{11}, ψ_{22} – потокозчеплення самоіндукції відповідно першої та другої котушок; ψ_{12}, ψ_{21} – потокозчеплення взаємоіндукції відповідно першої та другої котушок.

Співвідношення (5.1) справедливі тільки у тому випадку, коли потокозчеплення самоіндукції та взаємної індукції збігаються за знаком. При зміні напрямку струму, наприклад, у другій котушці, знаки перед потокозчепленнями взаємоіндукції повинні змінитися на протилежний. Тому формули (5.1) можна переписати

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \psi_{11} \pm \psi_{12}, \\ \psi_2 &= \psi_{22} \pm \psi_{21},\end{aligned}\tag{5.2}$$

при цьому верхній знак у цих виразах відповідає «узгодженому» вмиканню котушок, а нижній – «зустрічному».

Дослідним шляхом установлений зв'язок між струмами й потокозчепленнями для котушок без феромагнітних осердь:

$$\psi_{11} = L_1 i_1, \quad \psi_{22} = L_2 i_2, \quad \psi_{12} = M_{12} i_2, \quad \psi_{21} = M_{21} i_1.\tag{5.3}$$

У колах, які ми вивчаємо, $M_{12} = M_{21} = M$. Тут L_1, L_2 – індуктивність відповідно до першої та другої котушок, M – взаємна індуктивність між котушками, що вимірюється в Гн.

Ступінь магнітного (індуктивної) зв'язку двох елементів кола характеризується *коефіцієнтом зв'язку* K :

$$K^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{\psi_{21}/i_1 \cdot \psi_{12}/i_2}{\psi_{11}/i_1 \cdot \psi_{22}/i_2} < 1; \quad K < 1. \quad (5.4)$$

Оскільки $\psi_{21} < \psi_{11}$, а $\psi_{12} < \psi_{22}$, а ψ_{21} і ψ_{12} є частиною потокозчеплень відповідно ψ_{11} і ψ_{22} .

Відповідно до закону Фарадея – Ленца

$$e = -\frac{d\psi}{dt}.$$

Тоді напруги на першій та другій котушках при зміні струму $i(t)$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{d\psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} = u_{L_1} \pm u_{M_1}, \\ u_2 &= \frac{d\psi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} = u_{L_2} \pm u_{M_2}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

де u_{L_1}, u_{L_2} – напруга самоіндукції;

u_{M_1}, u_{M_2} – напруга взаємоіндукції.

5.2 Одноімненні затискачі котушок

Зустрічне та узгоджене вмикання індуктивно зв'язаних елементів (котушок) залежить від напрямку струму в елементах і взаємного розміщення котушок у просторі.

Два затискачі двох індуктивно (магнітно-) зв'язаних елементів кола називають **однойменними**, якщо при одному й тому самому напрямку струму щодо цих затискачів потоки самоіндукції та взаємоіндукції на кожному елементі додаються.

В електричних схемах такі затискачі позначаються точками (·) або зірочками (*). Магнітний зв'язок між елементами позначається дугою зі стрілками (рис. 5.2).

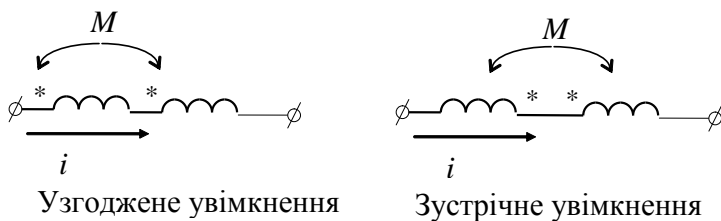


Рисунок 5.2

5.3 Розрахунки гармонічних кіл із взаємоіндукцією

5.3.1 Послідовне з'єднання індуктивно зв'язаних кіл

Розглянемо розрахунки послідовного кола із взаємоіндукцією на прикладі схеми, наведеної на рис. 3.3, при узгодженому вмиканні індуктивно зв'язаних елементів.

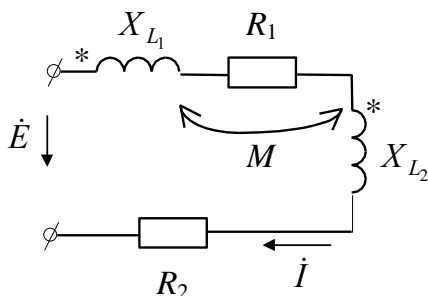


Рисунок 5.3

Комплексні опори першої та другої реальної котушки індуктивності

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L_1}, \quad \underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L_2}.$$

Зазначимо, що \underline{Z}_1 і \underline{Z}_2 – це опори без врахування магнітного впливу котушок одна на одну.

Рівняння за II законом Кірхгофа для миттєвих значень із урахуванням індуктивних зв'язків має вигляд

$$u = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \quad (5.6)$$

$$= u_{R_1} + u_{L_1} + u_{M_1} + u_{R_2} + u_{L_2} + u_{M_2},$$

де $u_{M_1} = u_{M_2}$ – напруга взаємоіндукції першої та другої котушок.

У комплексній формі це рівняння має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{U} &= R_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I} + R_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I} = \dot{U}_{K_1} + \dot{U}_{K_2} = \\ &= \dot{I} (R_1 + R_2) + \dot{I} (j\omega L_1 + j\omega L_2 + 2j\omega M) = \\ &= \dot{I} (R_1 + R_2 + j\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M) = \\ &= \dot{I} (R_3 + j\omega L_3) = \dot{I} (R_3 + jX_{L_3}) = \dot{I} Z_{\text{узгод}}, \end{aligned}$$

де ωM – опір взаємоіндукції, $\omega M = X_M$;

$X_{L.EKB}$ – реактивний опір при узгодженому вмиканні,

$$X_{L.EKB} = X_{L_1} + X_{L_2} + 2X_M;$$

L_{EKB} – еквівалентна індуктивність при узгодженому вмиканні магнітно-зв'язаних елементів, $L_3 = L_1 + L_2 + 2M$;

$\dot{U}_{K_1}, \dot{U}_{K_2}$ – напруга на першій та другій котушках,

$$\dot{U}_{K_1} = \dot{I} (R_1 + j\omega L_1 + X_{M_1}), \quad \dot{U}_{K_2} = \dot{I} (R_2 + j\omega L_2 + X_{M_2}).$$

Остаточно одержимо

$$\dot{U} = \dot{I} (R_3 + j\omega L_3) = \dot{I} (R_3 + jX_{L_3}) = \dot{I} Z_{\text{узгод}}. \quad (5.7)$$

При цьому еквівалентна індуктивність L_{EKB} і еквівалентний опір $X_{L.EKB}$ при узгодженому включенні

$$L_{EKB} = L_1 + L_2 + 2M, \quad X_{EKB} = X_{L_1} + X_{L_2} + 2X_M. \quad (5.8)$$

З наведених співвідношень випливає, що при узгодженому вмиканні індуктивно зв'язаних котушок їх сумарний опір більше, ніж сума опорів цих котушок, не увімкнених за такою схемою.

Векторна діаграма при узгодженому вмиканні відповідно до виразу (5.7) має вигляд, поданий на рис. 5.4.

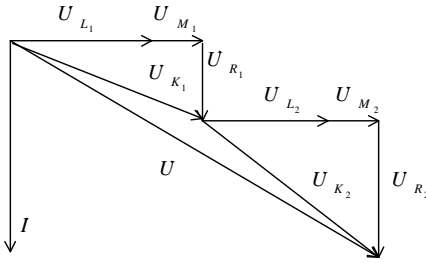


Рисунок 5.4

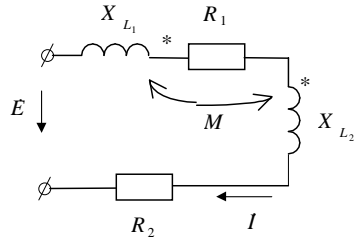


Рисунок 5.5

На рис. 5.5 дана схема зустрічного вмикання індуктивно зв'язаних котушок. Для цієї схеми справедливо

$$u = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = u_{R_1} + u_{L_1} - u_{M_1} + u_{R_2} + u_{L_2} - u_{M_2} \quad (5.9)$$

або в комплексній формі

$$\begin{aligned} \dot{U} &= R_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I} + R_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} = \dot{U}_{K_1} + \dot{U}_{K_2} = \\ &= \dot{I} (R_1 + R_2) + \dot{I} (j\omega L_1 + j\omega L_2 - 2j\omega M) = \\ &= \dot{I} (R_1 + R_2 + j\omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M) = \dot{I} (R_3 + j\omega L_3) = \\ &= \dot{I} (R_3 + jX_{L_3}) = \dot{I} Z_{\text{ЗУСТР}} \end{aligned}$$

Таким чином, одержимо

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{I} (R_1 + R_2) + \dot{I} (j\omega L_1 + j\omega L_2 - 2j\omega M) = \\ &= \dot{I} (R_3 + jX_{L_3}) = \dot{I} Z_{\text{ЗУСТР}} \end{aligned} \quad (5.10)$$

При цьому еквівалентна індуктивність $L_{\text{ЕКВ}}$ і еквівалентний опір $X_{\text{ЕКВ}}$ при зустрічній включенні

$$L_{\text{ЕКВ}} = L_1 + L_2 - 2M, \quad X_{\text{ЕКВ}} = X_{L_1} + X_{L_2} - 2X_M. \quad (5.11)$$

При зустрічному вмиканні індуктивно зв'язаних котушок їх сумарний опір менший, ніж сума опорів цих котушок, не увімкнених за такою схемою.

Векторна діаграма при зустрічному вмиканні індуктивно зв'язаних котушок подана на рис. 5.6.

При зустрічному вмиканні може спостерігатися режим, при якому струм на одній з котушок випереджає напругу \dot{U}_K . Це може мати місце у випадку, якщо напруга самоіндукції першої котушки $\dot{U}_{L_1} < \dot{U}_M$. При цьому говорять, що в такому колі спостерігається ємнісний ефект. У цьому випадку векторна діаграма має вигляд, поданий на рис. 5.7.

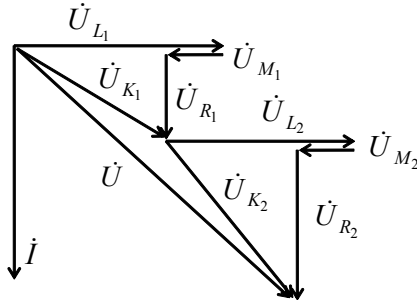


Рисунок 5.6

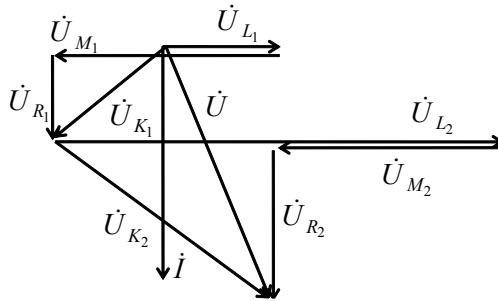


Рисунок 5.7

Напруга першої котушки \dot{U}_{K_1} відстає від струму \dot{i} , тобто спостерігається ємнісний ефект. Однак слід зазначити, що напруга \dot{U} ділянки кола із двома індуктивно зв'язаними послідовно включеними елементами завжди випереджає струм, тобто таке коло має індуктивний характер. Покажемо це. Очевидно, що

$$0 < (\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2 = L_1 + L_2 - 2\sqrt{L_1 L_2}.$$

Звідси випливає, що $L_1 + L_2 > 2\sqrt{L_1 L_2}$. Але зі співвідношення для коефіцієнта магнітного зв'язку $M < \sqrt{L_1 L_2}$, отже, $2M < L_1 + L_2$, а $L_{\text{ЗУСТР}} = L_1 + L_2 - 2M > 0$ та $X_{\text{ЗУСТР}} > 0$. З наведених співвідношень випливає справедливості твердження: коло із двома послідовними індуктивно зв'язаними елементами завжди має індуктивний характер.

5.3.2 Експериментальне визначення полярності взаємної індуктивності індуктивно зв'язаних елементів

Існує кілька способів визначення цих параметрів. Один з них поданий на рис. 3.8.

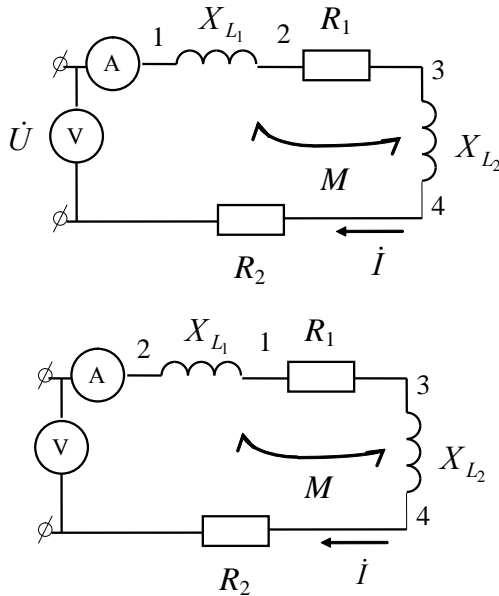


Рисунок 5.8

Якщо при проведенні дослідів виявиться, що струм у першому досліді менше, ніж у другому, то спочатку котушки були увімкнені узгоджено, тому що $Z_{\text{узгод}} > Z_{\text{зустр}}$.

Для визначення значення взаємної індуктивності необхідно знайти різницю узгодженого та зустрічного опорів:

$$Z_{\text{узгод}} - Z_{\text{зустр}} = \left| \underline{Z}_{\text{узгод}} - \underline{Z}_{\text{зустр}} \right| = \left| R_1 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) - R_1 - j\omega(L_1 + L_2 + 2M) \right| = 4\omega M,$$

$$M = \frac{Z_{\text{узгод}} - Z_{\text{зустр}}}{4\omega}.$$

5.4 Розрахунки паралельних кіл із взаємною індукцією

На рис. 5.9 наведена схема із двома паралельними гілками R_1, L_1 та R_2, L_2 із взаємоіндуктивністю M .

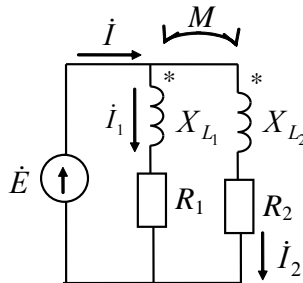


Рисунок 5.9

Визначимо струми із рівнянь:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2, \quad \dot{E} = \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_M \dot{I}_2, \quad \dot{E} = \underline{Z}_2 \dot{I}_2 + \underline{Z}_M \dot{I}_1. \quad (5.12)$$

Із двох останніх рівнянь за II законом Кірхгофа випливає, що

$$\dot{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \dot{E} = \underline{Y}_{1\text{э}} \dot{E},$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \dot{E} = \underline{Y}_{2\text{э}} \dot{E}.$$

Звідки

$$\dot{i} = \underline{Y}_{1.EKB} + \underline{Y}_{2.EKB} \dot{E} = \underline{Y}_{EKB} \dot{E} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \dot{E}, \quad (5.13)$$

де

\underline{Z}_M – опір взаємної індукції, $\underline{Z}_M = jX_M$;

\underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 – опори першої та другої котушок без урахування взаємоіндукції, $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L_1}$, $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L_2}$;

$\underline{Y}_{1.EKB}$, $\underline{Y}_{2.EKB}$ – провідності першої та другої гілок з урахуванням взаємоіндукції;

\underline{Y}_{EKB} – провідність усієї схеми з урахуванням магнітних зв'язків.

При зустрічному вмиканні

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2, \quad \dot{E} = \underline{Z}_1 \dot{I}_1 - \underline{Z}_M \dot{I}_2, \quad \dot{E} = \underline{Z}_2 \dot{I}_2 - \underline{Z}_M \dot{I}_1, \\ \dot{I}_1 &= \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \dot{E} = \underline{Y}_{1.EKB} \dot{E}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \dot{E} = \underline{Y}_{2.EKB} \dot{E}, \\ \dot{i} &= \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \dot{E}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Еквівалентний опір схеми

$$\underline{Z}_E = \frac{\dot{E}}{\dot{i}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M}, \quad (5.15)$$

де верхній знак відповідає узгодженому вмиканню індуктивно зв'язаних елементів. З (5.15) випливає, що при узгодженому вмиканні еквівалентний опір більший, ніж при зустрічному вмиканні. При паралельному так само, як і при послідовному з'єднанні індуктивно зв'язаних котушок може на одній з них спостерігатися ємнісний ефект. Однак на вході кола двох паралельно увімкнених котушок із взаємоіндукцією струм \dot{I} відстає від напруги, тобто завжди коло має індуктивний характер.

5.5 Розрахунки розгалужених кіл із взаємодукцією

Розрахунки розгалужених кіл проводять за допомогою методу рівнянь Кірхгофа, методу контурних струмів. Можна використовувати і метод еквівалентного генератора, якщо досліджувана гілка не охоплена магнітним зв'язком. Метод вузлових потенціалів не застосовуємо, тому що струми у гілках залежать не тільки від напруг між вузлами, до яких приєднані гілки, але й від струмів інших гілок, з якими вони магнітно зв'язані.

Як приклад, запишемо рівняння за законами Кірхгофа за методом контурних струмів для схеми, що зображена на рис. 5.10.

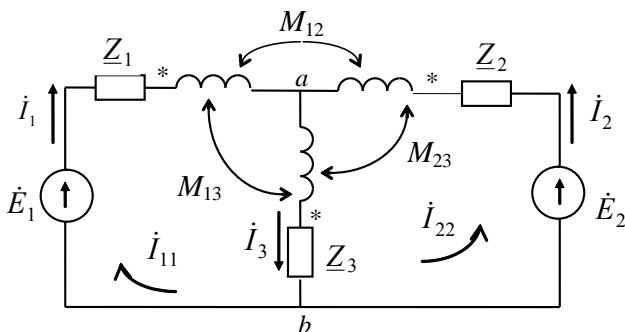


Рисунок 5.10

У схемі два вузли та два незалежні контури. З урахуванням цього складемо одне рівняння за I законом Кірхгофа та два за II законом Кірхгофа, що дасть можливість визначити струми у трьох гілках цієї схеми:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0,$$

$$\underline{\mathcal{E}}_1 + j\omega L_1 \vec{I}_1 + j\omega M_{12} \vec{I}_2 - j\omega M_{13} \vec{I}_3 + \dot{U}_{ab} = \dot{E}_1,$$

$$\underline{\mathcal{E}}_2 + j\omega L_2 \vec{I}_2 + j\omega M_{12} \vec{I}_1 - j\omega M_{13} \vec{I}_3 + \dot{U}_{ab} = \dot{E}_2,$$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}_3 \underline{\mathcal{E}}_3 + j\omega L_3 \vec{I}_3 - j\omega M_{13} \vec{I}_1 - j\omega M_{23} \vec{I}_2.$$

За методом контурних струмів рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned}
& \dot{I}_{11} \underline{Z}_1 + jX_{L_1} + \underline{Z}_3 + jX_{L_3} - 2jX_{13} \overset{+}{=} \\
& + \dot{I}_{22} \underline{Z}_3 + jX_{L_3} + jX_{12} - jX_{13} - jX_{23} \overset{+}{=} \dot{E}_1, \\
& \dot{I}_{11} \underline{Z}_3 + jX_{L_3} + jX_{12} - jX_{13} - jX_{23} \overset{+}{=} \\
& + \dot{I}_{22} \underline{Z}_2 + jX_{L_2} + \underline{Z}_3 + jX_{L_3} - 2jX_{23} \overset{+}{=} \dot{E}_2.
\end{aligned}$$

Тут X_{12} , X_{13} , X_{23} – опори взаємоіндуктивності відповідних індуктивно зв'язаних елементів схеми, $X_{12} = \omega M_{12}$, $X_{13} = \omega M_{13}$, $X_{23} = \omega M_{23}$.

При складанні рівнянь при узгодженому вмиканні котушок напруга самоіндукції $U_{L_k} = X_{L_k} I_k$ та напруга взаємоіндукції $U_{km} = X_{km} I_m$ записуються з тим самим знаком.

При запису рівнянь за методом рівнянь Кірхгофа та методом контурних струмів можна також скористатися таким правилом: якщо напрямок обходу контуру за котушкою k і напрямок струму I_m за індуктивно зв'язаною котушкою m щодо однойменних затискачів збігаються, то напруга взаємоіндукції $U_M = X_{km} I_m$ записується з додатним знаком.

5.6 Еквівалентна заміна індуктивних зв'язків

У деяких випадках аналіз і розрахунки електричних кіл із взаємоіндукцією можна спростити, якщо замінити у них частину схеми з індуктивними зв'язками на еквівалентну, що не містить їх. Покажемо цю заміну, яка називається *розв'язкою індуктивних зв'язків*, на прикладі схеми рис. 5.11.

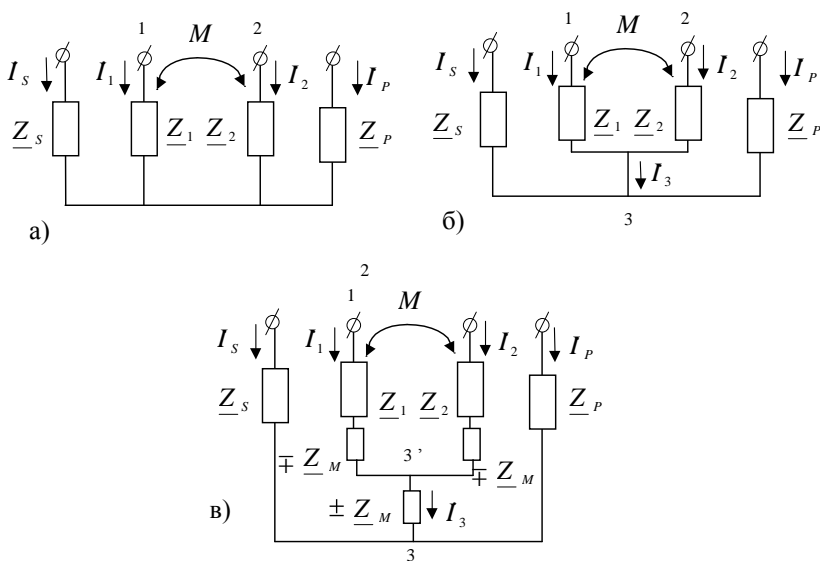


Рисунок 5.11

У схемі, що зображена на рис. 5.11, має місце магнітний зв'язок між елементами 1 і 2. Представимо електричне коло, що зображене на рис. 5.11 а, у вигляді схеми, зображеної на рис. 5.11 б. Для цієї схеми справедливо

$$\begin{aligned} \dot{U}_{13} &= \underline{Z}_1 \dot{I}_1 \pm \underline{Z}_M \dot{I}_2, & \dot{U}_{23} &= \underline{Z}_2 \dot{I}_2 \pm \underline{Z}_M \dot{I}_1, \\ \dot{I}_3 &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Верхній знак відповідає випадку, коли однойменні клеми підключені до одного вузла. Виключимо у виразі (5.17) з першого рівняння \dot{I}_2 , а із другого – \dot{I}_1 :

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_3 - \dot{I}_1, \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_3 - \dot{I}_2. \quad (5.17)$$

При цьому

$$\begin{aligned} \dot{U}_{13} &= \dot{I}_1 \underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M \pm \underline{Z}_M \dot{I}_3, \\ \dot{U}_{23} &= \dot{I}_2 \underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M \pm \underline{Z}_M \dot{I}_3, \\ \dot{U}_{12} &= \dot{I}_1 \underline{Z}_1 \pm \dot{I}_2 \underline{Z}_M - \dot{I}_2 \underline{Z}_2 \mp \dot{I}_1 \underline{Z}_M = \\ &= \dot{I}_1 \underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M \pm \dot{I}_2 \underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M \end{aligned} \quad (5.18)$$

Рівнянням (5.18) відповідає електричне коло, що зображене на рис. 5.11 в, у якому магнітні зв'язки замінені на опори $\mp \underline{Z}_M$ у гілках 1 і 2 та $\pm \underline{Z}_M$ у додатковій третій гілці, підключеній до еквівалентної схеми до місця з'єднання двох раніше індуктивно зв'язаних елементів.

Таким чином, при «розв'язанні» двох індуктивно зв'язаних гілок, що підключаються до того самого вузла, у ці гілки послідовно увімкнені опори $\mp \underline{Z}_M = \mp jX_M = \mp j\omega M$, а у гілці між загальним вузлом та іншою схемою – опір $\pm \underline{Z}_M$. Відсутність магнітних зв'язків дає можливість проводити розрахунки в еквівалентній схемі всіма методами, заснованими на законі Ома та законах Кірхгофа без яких-небудь обмежень.

5.7 Трансформатори

5.7.1 Рівняння трансформатора без феромагнітного осердя

Трансформатор – пристрій для передачі енергії з одного кола в інший за допомогою електричної індукції.

Він призначений для перетворення величин струмів і напруг, для гальванічного поділу електричних кіл, для перетворення опорів за величиною та для інших цілей.

Трансформатор може складатися із двох і більше обмоток. Ми будемо розглядати трансформатор із двох розділених обмоток без феромагнітного осердя (*повітряний трансформатор*), схема якого подана на рис. 5.12.

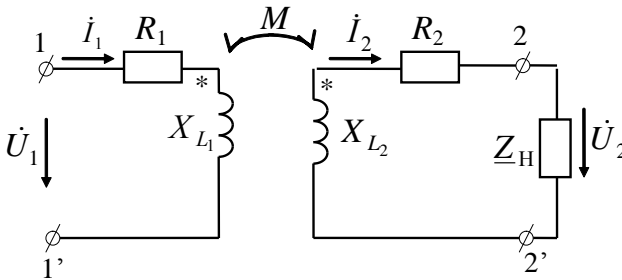


Рисунок 5.12

Обмотка із клемми 1-1', приєднана до джерела живлення, – *первинна*, обмотка, до якої підключається опір навантаження $Z_H = R_H + jX_H$, – *вторинна*. Опір первинної обмотки $Z_1 = R_1 + jX_{L_1}$, опір вторинної – $Z_2 = R_2 + jX_{L_2}$.

Рівняння трансформатора при прийнятій полярності котушок і напрямку струмів мають вигляд:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + jX_{L_1} \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2, \\ 0 = R_2 \dot{I}_2 + jX_{L_2} \dot{I}_2 + R_H \dot{I}_2 + jX_H \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1. \end{cases} \quad (5.19)$$

Цим рівнянням відповідає векторна діаграма, що зображена на рис. 5.13. Побудова її здійснювалася відносно струму \dot{I}_2 , який спрямований за дійсною віссю.

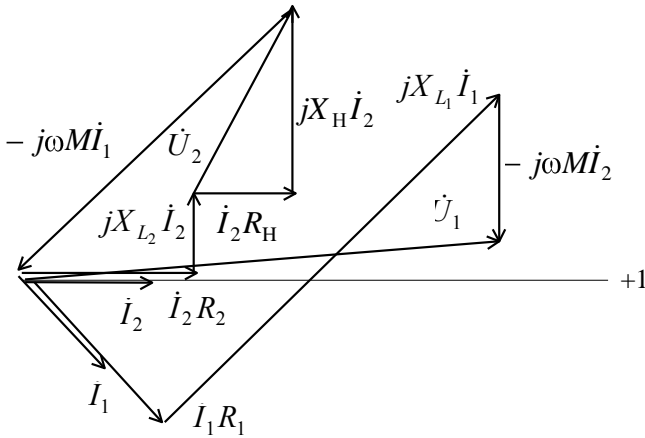


Рисунок 5.13

5.7.2 Вхідний опір трансформатора

Позначимо $R_2 + R_H = R_{22}$, $X_{L_2} + X_{L_H} = X_{22}$, тоді рівняння (5.19) можна переписати

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + jX_{L_1} \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2, \\ 0 = R_{22} \dot{I}_2 + jX_{22} \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1. \end{cases} \quad (5.20)$$

Вхідний опір трансформатора

$$\underline{Z}_{\text{вх}_1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}.$$

Враховуючи, що

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{R_{22} + jX_{22}},$$

та підставляючи у перше рівняння (5.19), одержимо,

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{вх}_1} &= \frac{\left(R_1 + jX_{L_1} \right) \vec{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_{22} + jX_{22}} \vec{I}_1}{\vec{I}_1} = \\ &= \underline{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_{22} + jX_{22}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{\text{вн}}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Таким чином, вхідний опір трансформатора з боку первинних клем складається із двох доданків: \underline{Z}_1 – опір первинної обмотки без урахування взаємоіндукції, $\underline{Z}_{\text{вн}}$, яке з'являється за рахунок явища взаємоіндукції. Опір $\underline{Z}_{\text{вн}}$ ніби додається (вноситься) із вторинної котушки і тому називається *внесеним опором*.

5.7.3 Вхідний опір ідеального трансформатора

Ідеальним трансформатором (теоретичне поняття) називають такий трансформатор, у якому виконуються умови:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = n, \quad \dot{U}_1 = n\dot{U}_2, \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{I}_2}{n}. \quad (5.22)$$

При цьому $M^2 = L_1 L_2$; $R_1 = R_2 = 0$. З певною погрішністю такі умови можна виконати у трансформаторі із осердям із високою магнітною проникністю, на який намотані провони з малим активним опором.

Вхідний опір цього трансформатора:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{nU_2}{I_2/n} = n^2 \frac{U_2}{I_2} = n^2 \underline{Z}_{\text{н}}. \quad (5.23)$$

Отже, ідеальний трансформатор, увімкнений між навантаженням і джерелом енергії, змінює опір навантаження $\underline{Z}_{\text{н}}$ пропорційно квадрату коефіцієнта трансформації n .

Властивість трансформатора перетворювати величини опорів широко використовується у різних галузях електротехніки, зв'язку, радіотехніки, автоматики та насамперед з метою узгодження опорів джерела та навантаження.

5.7.4 Схема заміщення трансформатора

Схема трансформатора з двома обмотками без феромагнітного осердя може бути зображена так, як це показано на рис. 5.14. Струморозподіл у ній такий самий, що і на схемі рис. 5.12 без загальної точки між обмотками.

Проведемо на схемі, що зображена на рис. 5.14, розв'язку індуктивних зв'язків. При цьому одержимо схему заміщення трансформатора (рис. 5.15), у якій відсутні магнітні зв'язки.

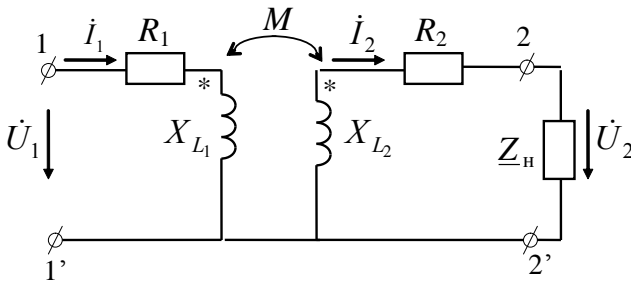


Рисунок 5.14

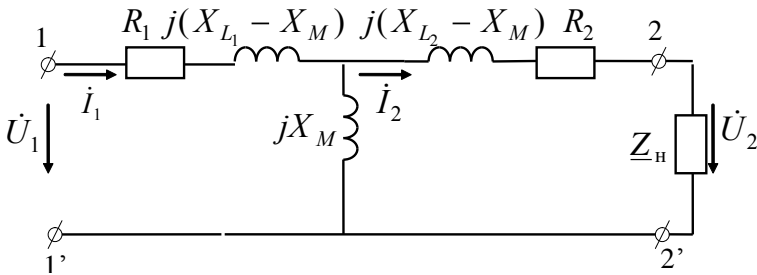


Рисунок 5.15

5.7.5 Енергетичні процеси в індуктивно зв'язаних котушках

Диференціальні рівняння повітряного трансформатора, що зображені на рис. 5.15:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}, \\ 0 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + u_2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Помножимо перше рівняння на i_1 , а друге – на i_2 :

$$\begin{aligned} u_1 i_1 &= R_1 i_1^2 + L_1 \frac{di_1^2}{dt} - M i_1 \frac{di_2}{dt}, \\ 0 &= R_2 i_2^2 + L_2 \frac{di_2^2}{dt} - M i_2 \frac{di_1}{dt} + u_2 i_2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Склавши ці рівняння, одержимо сумарну миттєву потужність, яка споживається від джерела та витрачається у первинній і вторинній обмотках трансформатора та у навантаженні:

$$\begin{aligned} p = ui &= p_2 + R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + L_1 \frac{di_1^2}{2} + L_2 \frac{di_2^2}{2} - \\ &- M \left(i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right) = p_2 + p_T + \frac{dW_M}{dt}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

де p_2 – миттєва потужність у навантаженні, $p_2 = u_2 i_2$;

p_T – миттєва потужність, що витрачається на тепло у обмотках трансформатора, $p_T = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$;

W_M – енергія магнітного поля обмоток трансформатора,

$$W_M = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} - M i_1 i_2.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Попов В.П. Основы теории цепей: учебник для вузов спец. «Радиотехника». – М: Высш. шк., 1985. – 490с.
2. Основы теории цепей: учебник для вузов / Г.В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Стахов – 4-е изд., перераб. – М.: Энергия, 1975.– 752с.
3. Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных эл. цепей: учеб. пособ. для электротехнич., радиотехнич. спец. вузов. – 4 изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 544с.
4. Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» на тему «Розрахунок лінійних електричних кіл в усталених режимах» для студентів спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики» заочної форми навчання / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2009. – 87с.
5. Теоретичні основи електротехніки: підручник: у 3 т.; за заг. ред. І. М. Чиженка, В. С. Бойко. - К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2004. - Т. 1.: Усталений режим лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. – 272с.
6. Електротехніка: навчальний посібник; за заг. ред. В. І. Коруда. – 3-тє вид., переробл. і доп. – Львів: Магнолія плюс, 2004. – 447с.
7. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки. – Частина 1; за ред. А. Ю. Воробкевича, О. І. Шегедина. – Львів: Новий світ-2000, 2004. – 224с.
8. Булашенко А. В. Теорія електричних та магнітних кіл.: навч. пос. Частина 1: Усталені режими у лінійних електричних колах. – Суми: Вид-во СумДУ, 2009. – 398с.
9. Електротехніка та електроніка. Теоретичні відомості, розрахунки та дослідження за підтримкою комп'ютерних технологій: навчальний посібник; за заг. ред. А. А. Щерби та В. М. Рябенського. – К.: Корнійчук, 2007. – 488с.

10. Сборник задач и практикум по основам теории электрических цепей; под ред. Ю. А. Бычкова, В. М. Золотницкого, Э. П. Чернышева. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2007. – 300с.
11. Методичні вказівки до практичних робіт з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» на тему «Розрахунок електричних кіл постійного струму» / Укладач А.В. Булашенко. - Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – 81с.
12. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» за темою «Усталені режими у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами» / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во: СумДУ, 2008. – 70с.
13. Основы теории цепей: Примеры и задачи / О. В. Беляев, М. В. Быстров, В. Л. Коданев, Е. А. Смирнов, Р. А. Халимов, В. В. Штейнбрехер. – М.: Радиотехника, 2007. – 240с.
14. Баскаков В. П., Журавлева О. Б., Крук Б. И. Основы анализа цепей: учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 591с.
15. Основы теорії кіл: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч.1 / Ю. О. Коваль, Л. В. Гринченко, І. О. Милютченко, О. І. Рибін; за заг. редакцією В. М. Шокала та В. І. Правди. – Х.: Компанія СМІТ, 2008 – 432с.
16. Новгородцев А. Б. 30 лекций по теории электрических цепей. – СПб.: Политехника, 1995. – 520с.
17. Сборник задач по ТОЕ; под ред. Л. А. Бессонова. – М.: Высшая школа, 1975. – 247с.
18. Гумен М. Б., Гуржій А. М., Співак В. М. Основы теорії електричних кіл. Кн. 1. Аналіз лінійних електричних кіл. Часова область; за ред. М. Б. Гумена. – К.: Вища шк., 2003. – 399с.
19. Гумен М. Б., Гуржій А. М., Співак В. М. Основы теорії електричних кіл. Кн. 2. Аналіз лінійних електричних кіл. Частотна область; за ред. М. Б. Гумена. – К.: Вища шк., 2004. – 358с.

20. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи: учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1978. – 528с.
21. Основы теории цепей: Примеры и задачи / О. В. Беляев, М. В. Быстров, В. Л. Коданев, Е. А. Смирнов, Р. А. Халимов, В. В. Штейнбрехер. – М.: Радиотехника, 2007. – 240с.
22. Методичні вказівки для самостійної роботи з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» за темою «Усталені режими у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами» для студентів спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики» заочної форми навчання / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2008. – 25с.
23. Баскаков В. П., Журавлева О. Б., Крук Б. И. Основы анализа цепей: учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 591с.
24. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи: учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1978. – 528с

ДОДАТОК А (ДОВІДКОВИЙ)

РЕАЛІЗАЦІЯ АКТИВНИХ ЧОТИРИПОЛЮСНИКІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ОПЕРАЦІЙНИХ ПІДСИЛЮВАЧІВ

КЕРОВАНІ ДЖЕРЕЛА

Операційні підсилювачі (ОП) серійно випускаються у вигляді мікросхем. Їх вартість порівнянна з вартістю резисторів і конденсаторів. Тому їх розглядають як базисний елемент кіл. На їх основі побудована велика кількість різних пристроїв електроніки.

На рис. А.1 а подана найпростіша схема підсилювача, що інвертує.

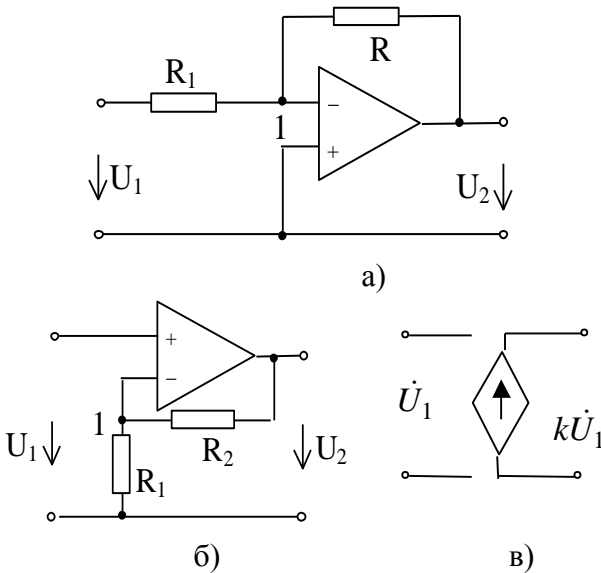


Рисунок А.1

Продовження додатка А

Оскільки напруги на входах ОП приблизно рівні (через дуже великий коефіцієнт підсилення ОП) і один із входів заземлений, то потенціал точки 1 можна вважати нульовим і суму струмів у цьому вузлі записати в такий спосіб

$$\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R} = 0.$$

Тоді $U_2 = -U_1 \frac{R}{R_1}$, тобто вихідна напруга U_2 перебуває в

протифазі із вхідною напругою U_1 і більше його у $\frac{R}{R_1}$ раз.

На рис А.1 б показана схем підсилювача, що, як і у попередній схемі, напруга на входах ОП приблизно однакові, але тепер вони дорівнюють напрузі U_1 . Сума струмів у вузлі 1 дорівнює

$$\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1 - U_2}{R_2} = 0 \quad \text{або} \quad U_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) U_1,$$

тобто вихідна напруга U_2 синфазна із вхідним U_1 і більше його в $\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$ раз.

При розрахунках різних пристроїв обидві розглянуті схеми можуть бути подані як джерело напруги, кероване напругою (рис. А.1 в), але з різними коефіцієнтами k (у схемі 1, а коефіцієнт $k = -\frac{R}{R_1}$, а в схемі 1, б – $k = 1 + \frac{R_2}{R_1}$).

На рис. А.2 а подана схема, що реалізує властивості як джерело струму, кероване струмом. Можна показати, що струм у навантаженні I_2 лінійно пов'язаний зі струмом на вході I_1 :

$$I_2 = -\frac{R}{R_1} I_1$$

і не залежить від опору навантаження та напруги джерел живлення.

Продовження додатка А

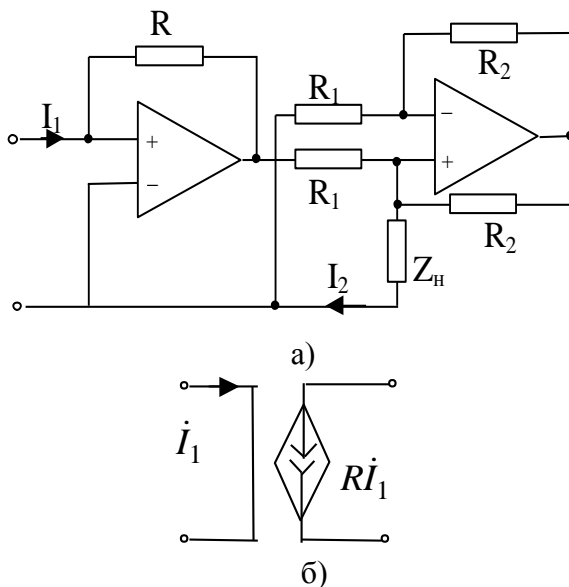


Рисунок А.2

На рис. А.2 б ця схема подана у вигляді ідеалізованого елемента теорії електричних кіл – залежного джерела струму.

ІМІТОВАНІ ЕЛЕМЕНТИ КІЛ

Існує велика кількість схем, що дозволяють імітувати негативні ємності та резистори, індуктивні елементи із втратами й без втрат, із заземленням і без заземлення.

Розглянемо найпростішу схему, що реалізує заземлений індуктивний елемент із втратами (рис. А.3 а). Через великий коефіцієнт підсилення вхідний струм ОП прагне до 0.

Продовження додатка А

При цьому струм

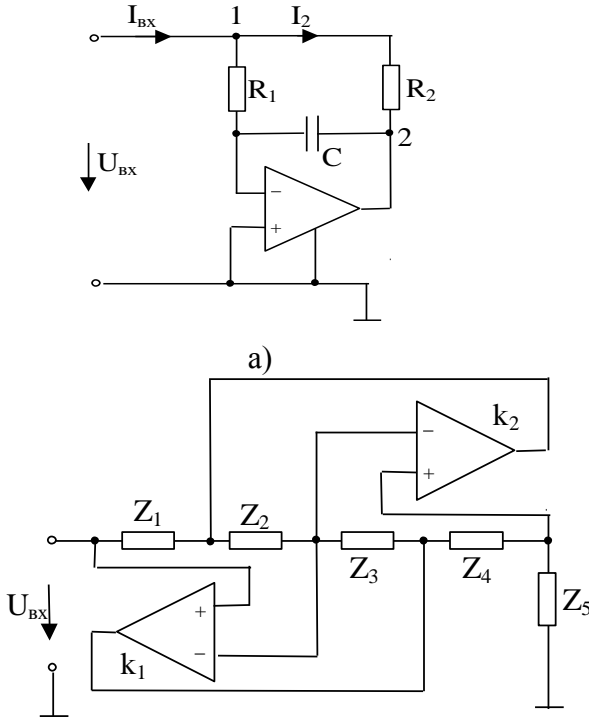
$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}_{ex}}{R_1}, \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{U}_{12}}{R_2} = \frac{\dot{I}_1 \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C} \right)}{R_2} = \frac{\dot{U}_{ex} \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C} \right)}{R_1 R_2}, \\ \dot{I}_{ex} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ex}}{R_1} + \frac{\dot{U}_{ex} \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C} \right)}{R_1 R_2} = \\ &= \dot{U}_{ex} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega R_1 R_2 C} \right). \end{aligned}$$

Таким чином, вхідна провідність

$$\dot{Y}_{ex} = \frac{\dot{I}_{ex}}{\dot{U}_{ex}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - j \frac{1}{\omega R_1 R_2 C}$$

має активно-індуктивний характер.

Продовження додатка А



б)
Рисунок А.3

На рис. А.3 б наведена більш складна, але й більш універсальна схема перетворювача опорів. Можна показати, що вхідний опір

$$Z_{вх} = \frac{Z_1 \cdot Z_3 \cdot Z_5}{Z_2 \cdot Z_4}.$$

Якщо вибрати як резистори R Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_5 , а Z_4 – як ємнісний елемент, то вхідний опір

$$Z_{вх} = j\omega CR^2$$

відповідає заземленому імітованому індуктивному елементу без втрат.

Продовження додатка А

РЕАЛІЗАЦІЯ ЧАСТОТНО-ЗАЛЕЖНИХ НЕГАТИВНИХ ОПОРІВ

За допомогою схеми, наведеній на рис. А.3 б можна реалізувати частотно-залежні негативні опори.

Для реалізації D-елемента (ємнісного елемента другого порядку) потрібно взяти

$$Z_1 = Z_3 = \frac{1}{j\omega C} \text{ та } Z_2 = Z_4 = Z_5 = R.$$

При цьому

$$Z_{ex} = \frac{1}{(j\omega)^2 C^2 R}$$

і тоді $D = 3^2 R$.

Для реалізації E-елемента (індуктивного елемента другого порядку) потрібно взяти $Z_2 = Z_4 = \frac{1}{j\omega C}$ та

$$Z_1 = Z_3 = Z_5 = R.$$

Тоді $Z_{ex} = (j\omega)^2 R^3 C^2 = (j\omega)^2 E$.

При цьому $E = R^3 C^2$.

Можлива реалізація індуктивних і ємнісних елементів і більш високих порядків, але їх використання важке через нестійкість ланцюгів з ними.

Продовження додатка А

РЕАЛІЗАЦІЯ ГІРАТОРА

Як зазначалося раніше, рівняння гіратора через z -параметри мають вигляд $U_1 = RI_2$, $U_2 = RI_1$.

На рис. 4 наведено одна з можливих схем, що реалізує гіратор.

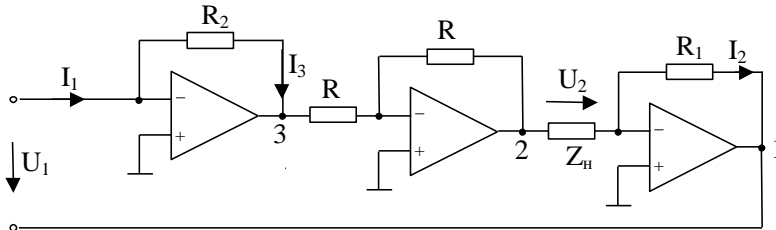


Рисунок А.4

Оскільки неінвертуючі входи усіх ОП заземлені, то потенціали інвертуючих входів наближаються до 0 та струми входів ОП теж.

Тоді потенціал точки 1 дорівнює U_1 , а струм $I_2 = U_1 / R_1$.

Відповідно потенціал точок 2 і 3 дорівнює U_2 (оскільки середній ОП має коефіцієнт підсилення, рівний $1 = \frac{R}{R}$). При цьому струм

$$I_1 = -I_3 = \frac{U_2}{R_2}.$$

Отримані рівняння для струмів I_1 і I_2 відповідають наведеним вище рівнянням гіратора, а провідності резисторів R_1 і R_2 виконують функції провідності гіратора.

Продовження додатка А

АКТИВНІ ФІЛЬТРИ

Відомо багато різних схем активних резистивно-ємнісних фільтрів, що не містять індуктивних елементів.

На рис. А.5 а наведена схема найпростішого низькочастотного фільтра, що забезпечує передавальну функцію:

$$K(p) = \frac{ka_1a_2}{p^2 + p\left(\frac{1}{R_1C_4} + 2a_2 - ka_2\right) + a_1a_2},$$

де $a_1 = \frac{1}{R_1C_1}$, $a_2 = \frac{1}{R_2C_2}$.

Набагато більш високу стабільність характеристик фільтра при зміні значень параметрів, що входять у нього елементів, одержують при імітації індуктивних елементів звичайних LC-фільтрів. Імітацію можна виконати за допомогою гіраторів з підключеними до них конденсаторами або за допомогою спеціальних схем, розглянутих вище й у [3]. При цьому істотне значення має наявність або відсутність заземлення в імітованого індуктивного елемента.

Продовження додатка А

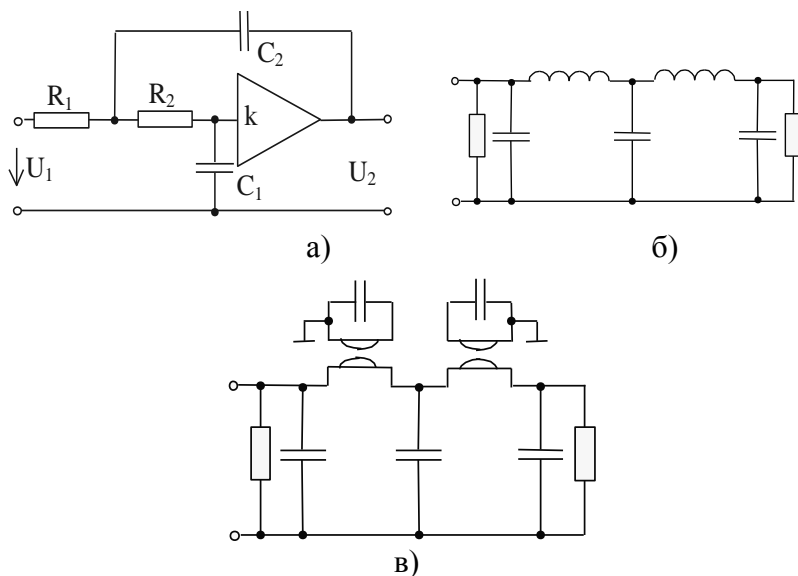


Рисунок А.5

На рис. А.5 б, наведені: схема-прототип, виконана на LC-елементах, і перетворена схема, що містить RC- елементи та гіратори.

АНАЛІЗ КІЛ, ЩО МІСТЯТЬ ЗАЛЕЖНІ ДЖЕРЕЛА ТА ОП

Будь-який чотириполюсник може бути поданий схемою, що містить пари залежних джерел. Наприклад, якщо чотириполюсник має систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2. \end{cases}$$

то з нею можна порівняти схему заміщення, наведену на рис. А.6 а.

Продовження додатка А

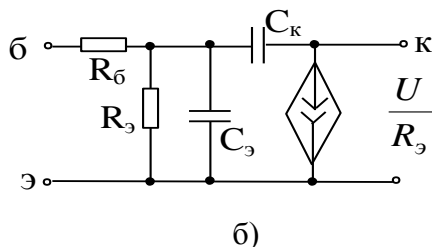
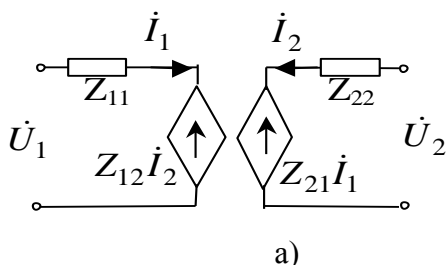


Рисунок А.6

Значна частина технічних пристроїв містить у своїх схемах заміщені залежні джерела. Наприклад, у схемі заміщення біполярного транзистора (рис. А.6 б), складеній для сигналів з малою амплітудою, використовується залежне джерело струму.

Слід мати на увазі, що всі залежні джерела є необерненими елементами. Вони не споживають, а генерують енергію. У ланцюгах джерела, що містять можливе виникнення автоколивань.

При розрахунках ланцюгів, що містять залежні джерела струму, звичайно використовують рівняння за методом вузлових потенціалів, преутворюючи джерела інших типів у джерело напруги кероване напругою (ДНКН). Якщо в схемі наявні ДНКН, то їх часто подають як ОП, але із зазначенням кінцевого коефіцієнта підсилення. При цьому кількість вузлових напруг зменшується на кількість наявних у схемі ДНКН, оскільки напруга на виході ДНКН однозначно пов'язана з напругою на вході ДНКН. Наприклад, для схеми на рис. А.7 а $\varphi_3 = k\varphi_2$.

Продовження додатка А

Хоча у схемі чотири вузли, складемо тільки два рівняння для вузлів 1 і 3:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \varphi_2 \frac{1}{R_2} &= J_1, \\ -\varphi_1 \frac{1}{R_2} + \varphi_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \varphi_3 \frac{1}{R_3} &= \\ = -\varphi_1 \frac{1}{R_2} + \left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} (1-k) \right] \varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

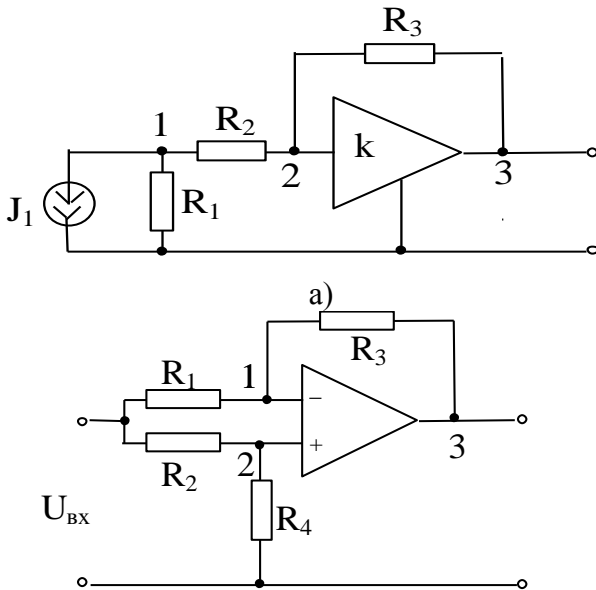
У випадку диференціального підсилювача із двома входами використовуємо рівняння, що зв'язує три вузлові напруги.

Наприклад, для схеми, що зображена на рис. А.7 б $\varphi_3 = k(\varphi_1 - \varphi_2)$.

З урахуванням цього рівняння для вузлів 1 і 2 будуть мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) - \varphi_2 \frac{1}{R_3} &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} - k \frac{1}{R_3} \right) \varphi_1 + k \frac{1}{R_3} \varphi_2 = \frac{U_{ex}}{R_1}, \\ \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) \varphi_2 &= \frac{U_{ex}}{R_2}. \end{aligned}$$

Продовження додатка А



б)

Рисунок А.7

При розрахунках ланцюгів, що містять ОП, ураховують такі особливості:

- відсутність вхідного струму ОП ($R_{\text{вх}} \rightarrow \infty$);
- нульову вхідну диференціальну напругу ОП ($k_U \rightarrow \infty$);
- вихідний струм ОП повинен набути таких значень, щоб

забезпечити

$U_1 - U_2 = 0$. Наприклад, для схеми, що зображена на рис. А.8, містить два ОП.

Продовження додатка А

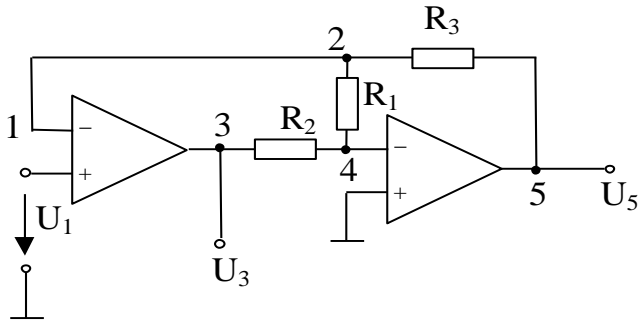


Рисунок А.8

З рівності нулю напруг на входах обох ОП маємо $\dot{U}_2 = \dot{U}_1$; $\dot{U}_4 = 0$.

Тоді для вузлів 3 і 5

$$\frac{1}{R_3} \dot{U}_5 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) \dot{U}_1$$

$$-\frac{1}{R_2} \dot{U}_3 = \frac{1}{R_1} \dot{U}_1.$$

Звідси знаходимо значення напруг U_3 і U_5 .

ДОДАТОК Б (довідковий)


Розв'язок рівнянь за допомогою програми Mathcad

Введення

Програма Mathcad використовується у такий спосіб. Після запуску програми користувач одержує чисту сторінку, на якій він може записати математичні вирази у звичній формі та деякі умовні вирази.

При записі виразів слід урахувувати, що програма оперує з величинами, числові значення яких їй уже відомі. Тому повинна бути забезпечена визначеність числових значень для всіх величин, що входять у вираз.


Ці значення задаються у явній формі шляхом запису виразів, яким присвоюється значення. Наприклад, вирази (тут і далі в рамці міститься роздрукування зображення на екрані дисплея комп'ютера)



$R:=10.5 \ 103$

Рисунок Б.1

На рис. Б.1 заданий постійний опір 10,5 кОм. Зазначимо, що замість коми використовується крапка.



$R \ 1:= 10,30 \dots 100$

Рисунок Б.2

Вираз з рис. Б.2 задає ряд дискретних значень опору від 10 Ом до 100 Ом з інтервалом 20 Ом ($30-10=20$). Якщо значення або величини не буде визначено, то програма зупинить обчислення, укаже на помилки та виведе на екран відповідний коментар.

Продовження додатка Б

Як оператор присвоювання використовується знак «:=», тоді як знак «=» відведений для виводу значення константи або змінної. Якщо змінній присвоюється початкове значення за допомогою оператора «:=», (викликається натисканням клавіші «:=» (двокрапка) на клавіатурі), то таке присвоювання називається *локальним*. До цього присвоювання змінна не визначена та її не можна використовувати. Однак за допомогою знака \equiv (клавіша ~ на клавіатурі) можна забезпечити *глобальне* присвоювання (див. приклад 1).

У більш пізніх версіях програми Mathcad операцію присвоювання можна та навіть доцільно вводити натисканням клавіші «=». При цьому Mathcad перевіряє, чи не використовувалася відповідна величина раніше або за замовчуванням. Якщо не використовувалася, то надрукує знак «:=», а якщо ні, то надійде повідомлення про помилку.

У програмі Mathcad можна використовувати комплексні числа. Комплексну величину можна задати в алгебраїчній або експонентній формі.

В одному рядку можна записати кілька регіонів з формулами або текстом. Регіони розділяють порожніми проміжками. Наприклад, див. на рис. Б.3.

$$Z:= 100+100 j \quad E1:=100.\exp (1.47j) \quad E2:=127.e^{(-1.47 j)}$$

Рисунок Б.3

Уявна частина комплексного числа повинна завершуватися символом i або j .

У експонентній формі після модуля числа вводиться знак множення, який на екрані зображується крапкою. Експонента може бути записана кожним із двох використаних вище способів. Аргумент комплексної величини записують у радіанах.

Продовження додатка Б

У програмі Mathcad не передбачені спеціальні символи для запису комплексних величин, як це прийнято у теорії електричних кіл (підкреслення комплексних опорів, крапки над комплексними величинами). Комплексний характер величини декларується в програмі Mathcad у виразах комплексних значень, що присвоюються, або впливає автоматично з обчислювального процесу.

Для позначення модуля комплексної величини слід використовувати яке-небудь нове позначення.

Наприклад, модуль комплексної напруги U_1 можна позначити символами $\text{Mod } U_1$. Рядок програми, у якій цій величині присвоюється відповідне значення, виглядає на екрані так, як зображено на рис. Б.4.

$$\text{Mod } U_1 := |U_1|$$

Рисунок Б.4

Для обчислень із дійсної та уявної частин, аргументам комплексної величини можна зробити присвоєння, що зображено на рис. Б.5.

$$\text{Re } U_1 := \text{Re}(U_1) \quad \text{Im}U_1 := \text{Im}(U_1) \quad \text{Psi } U_1 := \text{arg}(U_1)$$

Рисунок Б.5

Приклад Б.1. Визначення змінних

Розв'язання

$a := 2$ – локальне визначення; $b \equiv 1$ – глобальне визначення,

$a + b = 3$ – обчислення,

$e = 2.718$ – вбудована константа (за замовчуванням).

Продовження додатка Б

Приклад Б.2. Визначення функцій

Розв'язання

$\sin(b)=0,841$ – вбудована функція повернула значення $\sin(1)=0,841$;

$\text{pro}(x,y):=2\cdot x\cdot y\cdot a$ – визначення функції користувача pro , тут x і y – аргументи функції pro , a – параметр;

$\text{pro}(5, 3.2): = 64$ – обчислення функції pro при $x = 5$, $y = 3.2$.

Mathcad прочитує весь документ двічі зліва на право і зверху вниз. При першому проході виконуються всі дії, запропоновані глобальним оператором присвоювання (\equiv), а при другому – проводяться дії, запропоновані локальним оператором присвоювання ($:=$), і відображаються всі необхідні результати обчислень ($=$).

Існує також жирний знак рівності $=$ (комбінація клавіш **Ctrl** + $=$), який використовується, наприклад, як оператор наближеної рівності при розв'язанні систем рівнянь, і символічний знак рівності \rightarrow (комбінація клавіш **Ctrl** + \cdot).

Для виконання багаторазових обчислень застосовують **дискретні аргументи**. Ці змінні мають ряд фіксованих значень, або цілочислових (1-й спосіб), або у вигляді чисел з певним кроком, що змінюються від початкового значення до кінцевого (2 спосіб).

Наприклад: $x:=5\dots 40$ (1-й спосіб), де x – ім'я змінної; 5 – її початкове значення; 40 – кінцеве значення, \dots – символ, що вказує на зміну змінної в заданих межах (уводиться клавішею $;$). Якщо початкове значення менше кінцевого, то крок змінної буде дорівнювати +1, інакше –1.

Для завдання бажаного кроку зміни аргументу застосовують 2-й спосіб: $x:=3,3.1\dots 4$, де $(3,1-3)=0,1$ – заданий крок зміни.

Продовження додатка Б

Дискретні аргументи значно розширюють можливості Mathcad, дозволяючи виконувати багаторазові обчислення або цикли з повторюваними обчисленнями, формувати вектори й матриці.

Приклад Б.3 Визначення та використання дискретного аргументу

Розв'язання

$z:=2,2.5\dots 4$ - змінна ухвалює набір значень від 2 до 4 із кроком 0.5, для введення набрати $z=2,2.5;4$. Для відображення значень змінної z необхідно набрати $z=$. Одержимо *розв'язання*, що подане на *рис. Б.6*.

$z:= 2,2.5..4$ $z =$

2
2.5
3
3.5
4

Можливо задати крок за замовчуванням

$i =$

$i:=0..3$ - тут крок дорівнює 1, запис упростився!

Наберемо $i=$, одержимо

- Використання дискретного аргументу для присвоєння значень елементам вектора (чи матриці). Для введення необхідно набрати для вектора $c[i:i^2]$, для матриці $q[i,j:i+j]$,

Рисунок Б.6

Продовження додатка Б

$$\begin{array}{l}
 i := 0..3 \quad j := 0..2 \quad c_i := i^2 \\
 q_{i,j} := i + j
 \end{array}
 \quad
 c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}
 \quad
 q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Рисунок Б.7

Для введення числових значень у таблицю потрібно набрати $i=0;3$, потім $s[i:3,5,7.8]$, одержимо (рис. Б.8).

$$\begin{array}{l}
 i := 0..3 \\
 s_i :=
 \end{array}$$

3
5
7.8

$$s_1 = \blacksquare$$

Для перегляду вміщеного першого елемента вектора s потрібно набрати $s_1 =$, одержимо $s_1 = 5$.

Рисунок Б.8

Для створення сукупності кінцевого числа числових або символічних елементів, упорядкованих деяким чином, що мають певні адреси, у пакеті Mathcad використовуються масиви типів: одновимірні (вектори); двовимірні (матриці).

Порядковий номер елемента, який є його адресою, називається *індексом*. Індеси можуть мати тільки цілочислові значення. Вони можуть починатися з нуля або одиниці відповідно до значень системної змінної **ORIGIN**.

Вектори й матриці можна задавати різними способами:

- за допомогою комбінації клавіш **Ctrl + M** або клацанням на кнопці (рис. Б.9) панелі **Матриця**, заповнивши масив порожніх полів для не дуже великих масивів;

Продовження додатка Б

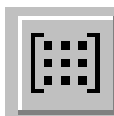


Рисунок Б.9

- з використанням дискретного аргументу, коли є деяка явна залежність для обчислення елементів через їх індекси (приклад Б.3).

Для виконання певних обчислень використовують функції, наприклад: $y(x) := 3x^2 + 2a$. *Функція* - вираз, згідно з яким проводяться деякі обчислення з *аргументами* й визначаються його числові значення.

Слід особливо зазначити різницю між *аргументами* й *параметрами* функції. Змінні, зазначені в дужках після імені функції, є її *аргументами* (тобто x) і замінюються при обчисленні функції значеннями з дужок.

Змінні у правій частині визначення функції, не зазначені дужках у лівій частині (тобто a), є *параметрами* й повинні задаватися до визначення функції (див. приклад 2).

Головною ознакою функції є *повернення значення*, тобто функція у відповідь на звертання до неї за ім'ям із вказівкою її аргументів повинна повернути своє значення.

Функції у пакеті Mathcad можуть бути *вбудовані*, тобто завчасно введені розроблювачами, і *певні користувачем*.

Способи вставлення вбудованої функції:

1. Вибрати пункт меню **Вставка** → **Функція**.
2. Натиснути комбінацію клавіш **Ctrl + E**.
3. Клацнути на кнопці (рис. Б.10).



Рисунок Б.10

Для написання коментарів, які користувач прагне бачити у своєму документі, використовують текстові фрагменти.

Продовження додатка Б

Існують два види текстових фрагментів:

- *текстова область* призначена для невеликих кусків тексту - підписів, коментарів і т.п. Вставляється за допомогою команди **Вставка** → **Текстовий регіон** або комбінації клавіш **Shift + "** (подвійні лапки);

- *текстовий абзац* застосовується в тому випадку, якщо необхідно працювати з абзацами або сторінками. Вставляється за допомогою комбінації клавіш **Shift + Enter**.

Для побудови графіків використовують графічні області.

Графічні області поділяють на три основні типи - двовимірні графіки, тривимірні графіки й імпортовані графічні образи. Двовимірні й тривимірні графіки будуються самим Mathcad на підставі оброблених даних.

Для створення **декартового графіка**:

1. Установити візир у порожньому місці робочого документа.
2. Вибрати команду **Вставка** → **Графік X→Y графік** або натиснути комбінацію клавіш **Shift + @**, або клацнути кнопку (рис. Б.11) панелі **Графіки**. З'явиться шаблон декартового графіка.



Рисунок Б.11

3. Увести у середній мітці під віссю X першу незалежну змінну, через кому - другу і так до 10, наприклад x_1, x_2, \dots

4. Увести у середній мітці ліворуч від вертикальної осі Y першу незалежну змінну, через кому - другу і т.д., наприклад $y_1(x_1), y_2(x_2), \dots$ або відповідні вираження.

5. Клацнути за межами області графіка, щоб почати його побудову.

Продовження додатка Б

Знаходження кореня полінома

Для знаходження коренів виразів, що мають вигляд

$$v_n x^n + \dots + v_2 x^2 + v_1 x + v_0,$$

краще використовувати функцію **polyroots(v)**, ніж *root*. На відміну від функції *root*, функція *polyroots* не вимагає початкового наближення. Коефіцієнти полінома перебувають у векторі **v** довжиною $n + 1$. Функція повертає вектор довжиною n , що складається з коренів полінома.

Вектор **v** створюють або у вигляді таблиці, або використовуючи команду **Символи** → **Коефіцієнти полінома**.

Приклад Б.4 Знаходження коренів полінома

$$0.75 \cdot x^3 - 8 \cdot x + 5.$$

Розв'язання

Для введення числових значень у таблицю набрати $i=0;3$,

потім $v[i]=5,-8,0,0.75$, одержимо (рис. Б.12).

$i := 0..3$

$v_i :=$

5
-8
0
0.75

Маючи вектор **v**,
знайдемо корені

$r := \text{polyroots}(v)$

$$r = \begin{pmatrix} -3.542 \\ 0.651 \\ 2.892 \end{pmatrix}$$

Рисунок Б.12

Продовження додатка Б

Побудова графіка функції

Запишемо функцію $f(x) := 0.75 \cdot x^3 - 8 \cdot x + 5$ і межі зміни аргументу $x := -4, -3.9..4$.

Нажавши комбінацію клавіш **Shift** + **@**, одержимо осі, на них уведемо x і $f(x)$. У підсумку одержимо графік (рис. Б.13).

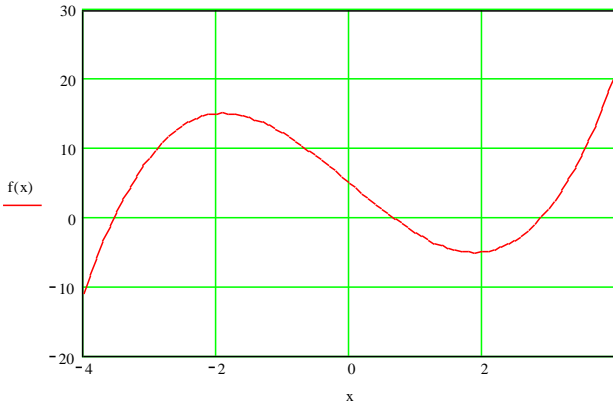


Рисунок Б.13

Розв'язання систем рівнянь

Mathcad дає можливість розв'язувати також і системи рівнянь. Для розв'язання системи рівнянь необхідно виконати таке:

- задати початкове наближення для всіх невідомих рівнянь, що входять у систему (Mathcad розв'язує систему за допомогою ітераційних методів);

- надрукувати ключове слово *Given* (воно вказує Mathcad, що далі впливає система рівнянь) і ввести рівняння в будь-якому порядку (використовуйте **[Ctrl]=** для друку символу =). Для одержання відповіді ввести будь-який вираз, який включає функцію *Find*, наприклад: $a := \text{Find}(x, y)$.

Продовження додатка Б

Можна вивести знайдене розв'язання, надрукувавши вираз вигляду: $Find(var1, var2, \dots) =$, або визначити змінну за допомогою функції $Find$: $a := Find(x)$ - скаляр, $var := Find(var1, var2, \dots)$ – вектор, або визначити іншу функцію за допомогою $Find$ $f(a, b, c, \dots) := Find(x, y, z, \dots)$.

No solution was found. Try changing the guess value or the value of TOL or CTOL.

Рисунок Б.14

Повідомлення про помилку (рис. Б.14) (розв'язання не знайдено) при розв'язанні рівнянь з'являється, коли поставлене завдання може не мати розв'язання, або рівняння не має дійсних розв'язань, або як початкове наближення взяте дійсне число й навпаки, або в процесі пошуку розв'язку послідовність наближень потрапила в точку локального мінімуму нерозв'язання. Для пошуку шуканого розв'язання потрібно задати різні початкові наближення. Можливо, поставлене завдання не може бути розв'язаними із заданою точністю. Спробуйте збільшити значення TOL.

Приклад Б.5. Розв'язання системи рівнянь за допомогою функції Find.

Розв'язання

Розв'язання подане на рис. Б.15.

$x1 := 0$ $x2 := 0$ $x3 := 0$ - початкові наближення

Given

$$100 \cdot x1 + 6 \cdot x2 - 2 \cdot x3 = 100$$

$$6 \cdot x1 + 200 \cdot x2 - 10 \cdot x3 = 600$$
 - використовуйте [Ctrl]=

для друку символу =

$$x1 + 2 \cdot x2 + 100 \cdot x3 = 500$$

Продовження додатка Б

Матриця-стовпець x , елементи якої - шукані невідомі, називається *розв'язанням системи*.

Якщо матриця A - неособлива, тобто $\det A \neq 0$, то система (А.1) або еквівалентне їй матричне рівняння (А.2) має єдине розв'язання.

Насправді, за умови $\det A \neq 0$ існує зворотна матриця A^{-1} . Множачи обидві частини рівняння (А.2) на матрицю A^{-1} , одержимо:

$$\begin{aligned} A^{-1}Ax &= A^{-1}Ib, \\ x &= A^{-1}b. \end{aligned} \tag{Б.4}$$

Формула (А.4) дає розв'язання рівняння (А.2) і воно єдино. Наприклад, для розв'язання системи рівнянь

$$\begin{aligned} -I1 + I2 + I3 &= 0, \\ Z1 \cdot I1 + Z2 \cdot I2 &= E1, \\ -Z2 \cdot I2 + Z3 \cdot I3 &= 0 \end{aligned}$$

потрібно спочатку ввести вихідні дані

$$E1 := 10 \quad Z1 := 100 + 100j \quad Z2 := 100 - 100j \quad Z3 := 30 + 40j.$$

Потім записати матриці коефіцієнтів

$$Z := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ Z1 & Z2 & 0 \\ 0 & -Z2 & Z3 \end{bmatrix} \quad E := \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Потім записати матричне розв'язання рівняння

$$I := Z^{-1} E1$$

і викликати відповідь $I =$.

Відповідь вийде у вигляді матриці

$$I = \begin{bmatrix} 0,039 - 0,035j \\ 0,014 + 0,010j \\ 0,024 - 0,045j \end{bmatrix}.$$

Продовження додатка Б

Розв'язання рівнянь у символьному вигляді

Розв'язання рівнянь у символьному вигляді дозволяє знайти точні або наближені корені рівняння:

- Якщо розв'язуване рівняння має параметр, то розв'язання у символьному вигляді може виразити шуканий корінь безпосередньо через параметр. Тому замість того, щоб розв'язувати рівняння для кожного нового значення параметра, можна просто замінити його значення в знайденому символьному розв'язку.

- Якщо потрібно знайти всі комплексні корені полінома зі ступенем менше або таким, що дорівнює 4, символьне розв'язання дасть їх точні значення в одному векторі або в аналітичному або цифровому вигляді.

Щоб розв'язати рівняння символьно, необхідно:

- Надрукувати вираз (для введення знака рівності використовуйте комбінацію клавіш **[Ctrl]=**).

- Виділити змінну, щодо якої потрібно розв'язати рівняння, клацнувши на ній мишею.

- Вибрати пункт меню **Символи** → **Змінні** → **Обчислити**.

Немає необхідності прирівнювати вираз нулю. Якщо Mathcad не знаходить знака рівності, він припускає, що потрібно прирівняти вираз нулю.

Щоб розв'язати систему рівнянь у символьному вигляді, необхідно виконати таке:

- Надрукувати ключове слово *Given*.

- Надрукувати рівняння в будь-якому порядку нижче слова *Given*. Упевнитися, що для введення знака = використовується **[Ctrl]=**.

- Надрукувати функцію *Find*, відповідну до системи рівнянь.

- Нажати **[Ctrl]**. (клавіша CTRL, супроводжувана точкою) Mathcad відобразить символьний знак рівності → .

- Клацнути мишею на функції *Find*.

Продовження додатка Б

Приклад Б.6. ілюструє символічне розв'язання системи рівнянь в Mathcad.

Приклад Б.6. Розв'язання системи рівнянь у символічному вигляді.

Розв'язання

Given

$$x + 2 \cdot \pi \cdot y = a$$

$$4 \cdot x + y = b$$

$$\text{Find}(x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-(2 \cdot \pi \cdot b + a)}{(-1 + 8 \cdot \pi)} \\ (4 \cdot a - b) \\ \frac{(-1 + 8 \cdot \pi)}{(-1 + 8 \cdot \pi)} \end{bmatrix} \quad \text{- Використовуйте [Ctrl].}$$

(клавіша Ctrl. супроводжувана точкою) для друку символічного знака рівняння.

Побудова векторних діаграм

Для аналізу лінійних електричних кіл гармонійного струму використовують векторні діаграми. Векторна діаграма – це діаграма, яка відображає дійсні та уявні частини комплексного числа. Векторна діаграма дозволяє досить просто знаходити напругу між будь-якими точками кола: діюче значення та фаза шуканої напруги чи струму визначаються прямою, що з'єднує відповідні точки діаграми.

Розглянемо побудову векторної діаграми за допомогою математичного пакета MathCAD. Нехай в електричному колі визначені комплексні струми $I_1 = 2 + 3j$ та $I_2 = -3 + 2j$. Струми наведені в алгебраїчній формі запису комплексного числа, але для запису у програмі MathCAD. Їх можна подавати як у показниковій, так і у тригонометричній формах запису. Векторна діаграма цих струмів зображена на рис. Б.16.

Продовження додатка Б

За віссю абсцис відкладаємо дійсну частину комплексного числа, а за віссю ординат – уявну. Суцільною лінією поданий струм I_1 , а штрихпунктирною – I_2 .

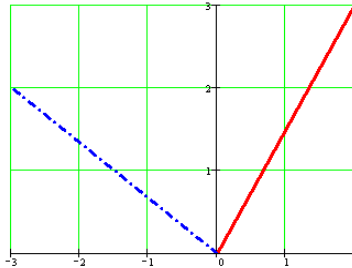


Рисунок Б.16

Для знаходження суми двох струмів за допомогою векторної діаграми необхідно додати два вектори I_1 та I_2 . Для цього спочатку необхідно кінець одного з векторів, наприклад I_2 паралельно перенести до початку іншого вектора I_1 (рис. Б.17). Потім необхідно побудувати третій вектор I_3 з початку координат (рис. Б.18)

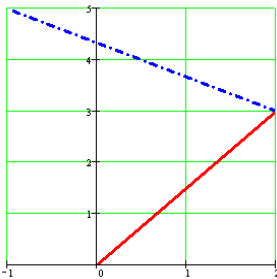


Рисунок Б.17

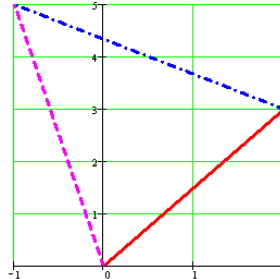


Рисунок Б.18

Описаний метод додавання векторів за допомогою MathCAD можна використовувати для перевірки правильності розрахованих значень струмів I_1 , I_2 , I_3 .

Продовження додатка Б

Також можна використовувати додавання векторів за правилом паралелограма (рис. Б.19).

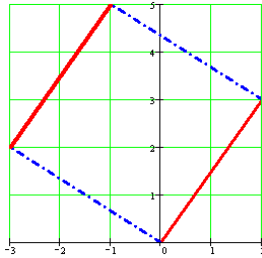


Рисунок Б.19

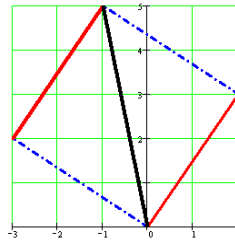


Рисунок Б.20

Потім із початку координат відкладаємо третій вектор I_3 (рис. Б.20). Якщо кінець вектора збігається з протилежним кінцем паралелограма, то значить розрахунки вектора I_3 здійснені правильно.

Всі описані дії можна проводити із більшою кількістю векторів (рис. Б.21 – рис. Б.24). Нехай треба додати три вектори $U_1 = 4 + 5j$, $U_2 = -2 + 4j$ та $U_3 = 5 - 2j$.

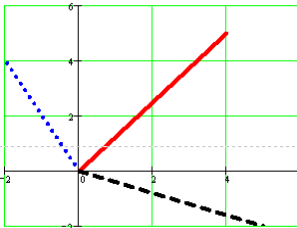


Рисунок Б.21

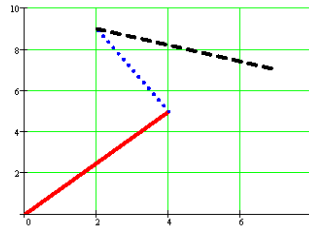


Рисунок Б.22

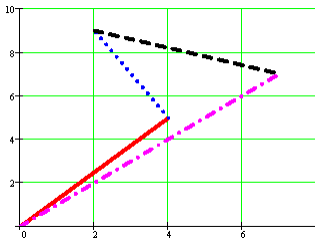


Рисунок Б.23

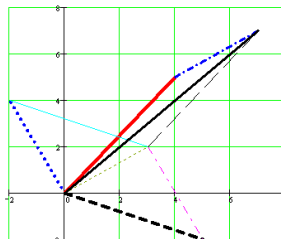


Рисунок Б.24

Продовження додатка Б

На рис. Б.25 зображені всі три вектори, що відкладені від початку координат. На рис. Б.22 та рис. Б.23 показано додавання трьох векторів за правилом трикутника. На рис. Б.24 показано додавання трьох векторів за правилом паралелограма.

Також у математичному пакеті MathCAD можна будувати векторні діаграми трифазних кіл. Векторна діаграма трифазного кола, що з'єднане зіркою з нейтральним проводом, показана на рис. Б.25.

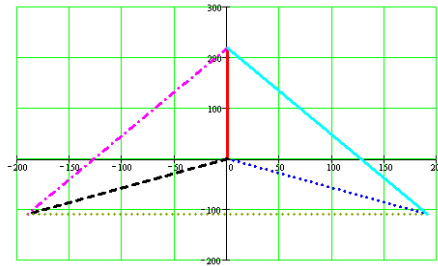


Рисунок Б.25

На векторній діаграмі зображені лінійні (сторони трикутника) та фазні напруги (вектори, що виходять з початку координат).

Отже, за допомогою математичного пакета MathCAD можна побудувати векторні діаграми кіл змінного однофазного та трифазного струмів та здійснити аналіз кіл на основі побудованих діаграм.

Навчальне видання

Теорія електричних та магнітних кіл
Конспект лекцій на тему
«Лінійні електричні кола постійного та змінного струму»
для студентів напряму 050201 «Системна інженерія»
спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики»
заочної форми навчання

Відповідальний за випуск Г. М. Худолей
Редактор М. Я. Сагун
Комп'ютерне верстання А. В. Булашенка

Підп. до друку 15.06.2010, поз.
Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 10,7. Обл.-вид. арк. 7,41. Тираж 50 пр. Зам №
Собівартість видання грн к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.



Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

У п'яти частинах

Частина 1

**ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА
ПОСТІЙНОГО ТА ЗМІННОГО СТРУМУ**

Суми
Вид-во СумДУ
2010

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут

До друку та в світ
дозволяю на підставі
«Єдиних правил», п.2.6.14
Заступник першого проректора –
начальник організаційно-методичного
управління

В.Б. Юскаєв

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ
Конспект лекцій
для студентів напрямку 050201 «Системна інженерія»
спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики»
заочної форм навчання
У п'яти частинах
Частина 1

Лінійні електричні кола постійного та змінного струму

Усі цитати, цифровий
та практичний матеріал,
бібліографічні
відомості перевірені,
написання одиниць
відповідає стандартам

Укладач

А.В. Булашенко

Відповідальний за випуск

Г.М. Худолей

Директор Шосткинського інституту

В.Л. Акуленко

Суми
Видавництво СумДУ
2010