

**ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ ИМЕНИ В.И.ЛЕНИНА**

На правах рукописи

**КУНЦЕВ СЕРГЕЙ ВАСИЛЬЕВИЧ**

УДК 534.1:539.37

**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И АНАЛИЗ  
КОЛЕБАНИЙ ПАКЕТА КРУГЛЫХ ГИБКИХ ПЛАСТИН  
МЕМБРАНЫХ КОМПРЕССОРНЫХ УСТАНОВОК**

01.02.06 – динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Диссертация на соискание  
ученой степени кандидата  
технических наук

Научный руководитель –  
заслуженный работник высшей школы УССР  
доктор технических наук,  
профессор ГОЛОСКОКОВ Е.Г.

Харьков – 1984

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ .....	5
ГЛАВА I. СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИКИ МНОГОСЛОЙНЫХ И ОДНОРОДНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН И МЕМБРАН .....	II
I.1. Оценка влияния различных факторов на колебания однородной круглой пластины .....	II
I.2. Классификация моделей многослойных тонкостенных конструкций по характеру связи между слоями .....	24
I.3. Динамика многослойных круглых пластин .....	29
I.4. Выводы и постановка задачи .....	33
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ ПАКЕТА КРУГЛЫХ ГИБКИХ ПЛАСТИН, ДОПУСКАЮЩАЯ СКОЛЬЖЕНИЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ .....	35
2.1. Основные допущения и исходные уравнения ...	36
2.2. Формирование уравнений равновесия пакета и совместности деформаций каждого слоя. Введение комплекса безразмерных и осред- ненных переменных .....	42
2.3. Переход к системе обыкновенных дифферен- циальных уравнений .....	48
2.4. Реакция со стороны жидкости, соприкасающейся с пакетом .....	54
2.5. Реакция упругих сил контактирующего с па- кетом газа .....	58
2.6. Выводы .....	60

ГЛАВА 3. СОБСТВЕННЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПАКЕТА .....	62
3.1. Метод и алгоритм вычислений на ЭЦВМ параметров собственных колебаний пакета .....	62
3.2. Исследование влияния краевых смещений и начального несовершенства пакета пластин на статический прогиб и собственные частоты колебаний .....	65
3.3. Оценка влияния на собственные частоты колебаний пакета пластин и мембран конечных объемов жидкости и газа .....	71
3.4. Вынужденные колебания пакета под действием динамической нагрузки .....	75
3.5. Прохождение пакета через резонанс при линейном законе изменения частоты возмущающей силы .....	80
3.6. Выводы .....	88
ГЛАВА 4. ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПАКЕТА КРУГЛЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ АСИММЕТРИИ МЕМБРАННЫХ УСИЛИЙ .....	91
4.1. Основные конечноэлементные соотношения....	92
4.2. Алгоритм вычислений частот и форм собственных колебаний пакета пластин методом конечных элементов .....	102
4.3. Численные результаты .....	109
4.3.1. Точность вычислений значений собственных частот. Влияние количества элементов на частоты и формы собственных колебаний .....	109

4.3.2. Влияние асимметрии распределения мембранных усилий на собственные колебания пакета пластин .....	I20
4.4. Выводы .....	I29
ГЛАВА 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ .....	I31
5.1. Описание экспериментальной установки и методика измерений .....	I32
5.2. Исследование собственных колебаний одно- родной пластины .....	I34
5.2.1. Влияние несимметрии граничных усло- вий .....	I35
5.2.2. Влияние статического прогиба .....	I37
5.2.3. Расслоение спектра собственных частот .....	I46
5.3. Исследование собственных колебаний пакета пластин .....	I51
5.4. Выводы .....	I61
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	I64
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	I69
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 .....	I83
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 .....	I87
ПРИЛОЖЕНИЕ 3 .....	I95

## ВВЕДЕНИЕ

Повышение надежности, экономичности и производительности, снижение уровня вибраций машин является, как было указано на XXVI съезде КПСС / 1 /, одной из важнейших проблем современного машиностроения.

Тонкие круглые пластины применяются в качестве конструктивных элементов в авиационной, вычислительной технике, приборостроении, энергетических установках, машинах и аппаратах химических производств и т.д.

Весьма широкое распространение получили в настоящее время в химическом и нефтяном машиностроении мембранные компрессоры (МК) и насосы (МН). Современный мембранный компрессор (рис. 1, мембранный блок ЭКГМ II/20-200 разработки ВНИИкомпрессормаш) представляет собой сложную машину, узлы которой подвергаются воздействию переменного во времени давления, измеряемого сотнями и тысячами атмосфер. Гибкий элемент 1, разделяющий газовую и гидравлические полости, защемляется между ограничительным 2 и распределительным 3 дисками, которые стягиваются силовыми шпильками 4. Замена его сопряжена с трудоемкой операцией разборки всего мембранного блока / 2 /.

В качестве гибкого элемента в последнее время широко применяется пакет / 4 / круглых гибких пластин, которые в технике называют мембранами. Существенное отличие его от обычных многослойных пластин заключается в отсутствии жестких связей между слоями. Пластины объединяются в пакет посредством защемления между дисками.

Надежность и производительность мембранной установки в значительной мере определяется закономерностями колебательного дви-

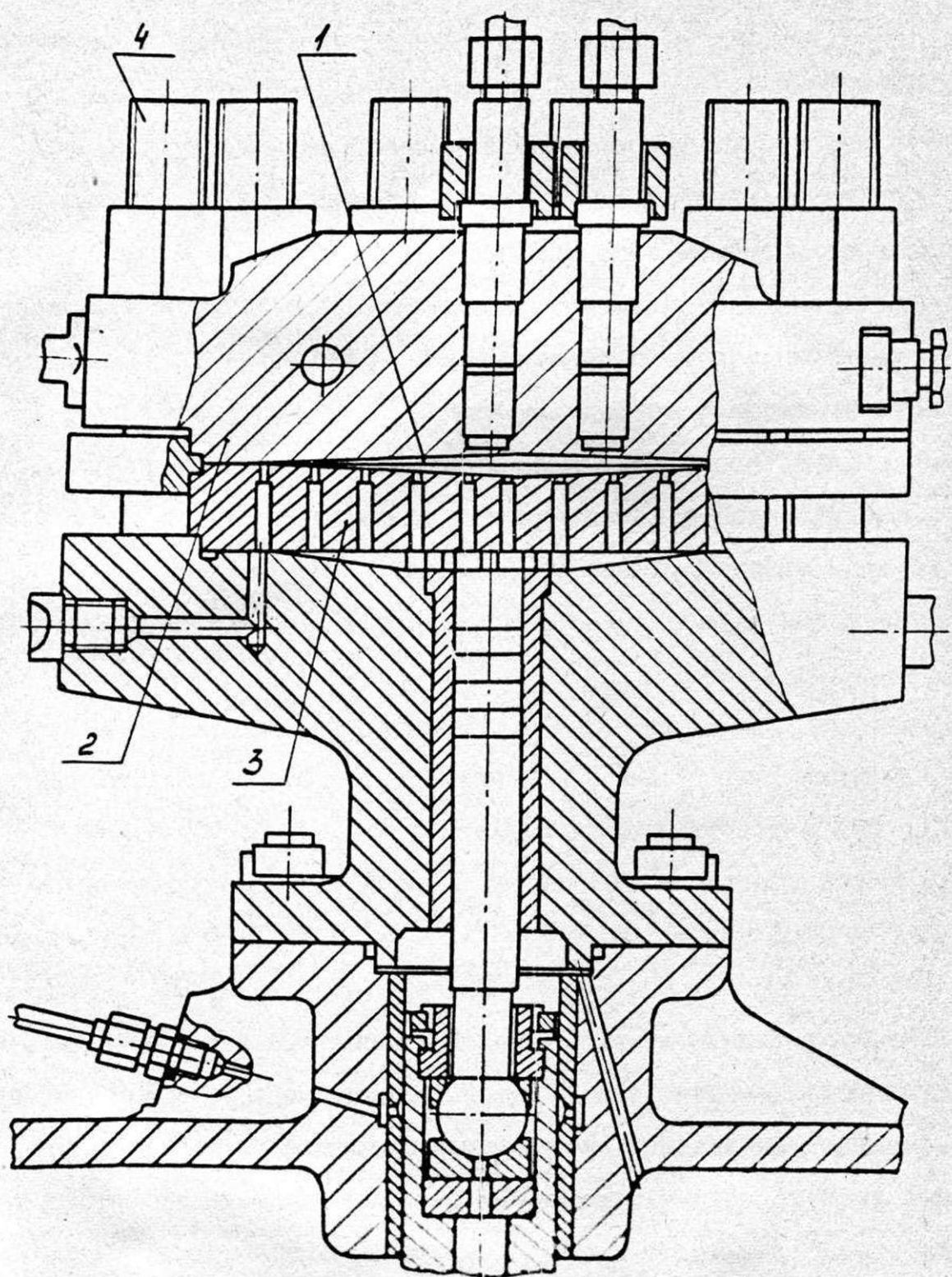


Рис. 1. Поперечный разрез мембранного блока компрессора

жения пакета / 2 /. Повышение производительности достигается путем увеличения быстроходности и полезного объема, что приводит к возрастанию динамических нагрузок на пакет и повышает уровень его напряженно-деформированного состояния.

Опыт эксплуатации мембранных компрессорных машин отечественного производства указывает на низкую долговечность гибкого элемента. Причиной отказа является разрушение мембраны со стороны газовой или со стороны гидравлической полостей. Анализом статистических данных / 79 /, собранных на семи предприятиях страны, установлено, что наибольшее количество разрушений газовых мембран происходит при долговечности 1100 часов, а масляных - после 2000 часов работы. Зарегистрированная в ряде случаев долговечность мембран, превышающая 3000 часов, свидетельствует об имеющихся, но не всегда реализуемых возможностях повышения надежности.

Долговечность гибких элементов в зарубежных машинах мембранного типа существенно выше. Применяемая в мембранных насосах фирмы " *Widder* " /Австрия/ двухслойная металлическая мембрана / 105 / имеет ресурс 3000 - 5000 часов. Гарантируемая долговечность мембран фирмы " *Amisco* " /США/ достигает 2000 - 3000 часов / 3 /.

Создание более высокопроизводительных надежных отечественных агрегатов и анализ причин поломок в уже эксплуатируемых установках немислимы без создания методики определения динамических характеристик многослойного элемента с учетом свойств применяемых материалов, геометрических размеров отдельных слоев, видов нагрузки, граничных условий, начальных несовершенств и других факторов.

Проблемы повышения надежности, производительности и эконо-

мичности установок требуют резкой активизации исследований в области прочности и надежности компрессоров и их основных элементов / 88 /. Большое значение имеет широкое внедрение в практику конструирования современных расчетных методов и математических моделей, ориентированных на применение ЭЦВМ / 76 /.

Актуальность проблемы повышения надежности мембранных компрессорных машин нашла отражение в материалах VI Всесоюзной научно-технической конференции по компрессоростроению "Повышение технического уровня, надежности и долговечности компрессоров и компрессорных установок" / 89 /.

Данная работа составляет часть исследований проблемной лаборатории "Динамическая прочность деталей машин" Харьковского ордена Ленина политехнического института имени В.И.Ленина, входящих в комплексную тему "Исследование динамических процессов в турбомашинах, газотурбинных и тепловых двигателях, высоконагруженных машиностроительных конструкциях для оценки их надежности, оптимизации и диагностики", выполняемую по Постановлению Президиума АН УССР от 25.12.80 г.

Ц е л ь ю д и с с е р т а ц и и является создание математической модели пакета круглых гибких пластин, допускающей проскальзывание отдельных слоев друг относительно друга и учитывающей факторы, наиболее существенно влияющие на характеристики колебаний; теоретическое и экспериментальное исследование собственных и вынужденных колебаний пакета; получение данных, позволяющих анализировать причины поломок гибких элементов; разработка практических рекомендаций по конструированию опорных устройств гибких элементов мембранных установок.

Н а у ч н а я н о в и з н а работы заключается в том, что в ней построена математическая модель пакета круглых гибких пластин, допускающая проскальзывание слоев друг от-



носителем друга, уравнения которой учитывают краевые смещения, несовершенства слоев, геометрическую нелинейность, давления жидкости и газа, контактирующих с пакетом. Предложена конечно-элементная мембранная модель пакета, с помощью которой установлено и исследовано изменение спектра частот и форм колебаний при асимметричном распределении мембранных усилий. Экспериментально выявлены закономерности изменения спектров собственных колебаний однородных пластин и пакета при больших статических прогибах и асимметрии распределения мембранных усилий.

Практическая ценность диссертационной работы состоит в том, что в ней созданы прикладные программы расчетов характеристик колебаний гибкого элемента на основе пластинчатой и мембранной моделей, расчетов смещений опорного устройства. Проведена сравнительная оценка ряда факторов, влияющих на колебания пакета. Представлены систематизированные данные по собственным колебаниям однородных пластин и пакета, позволяющие анализировать причины поломок гибких элементов в действующих машинах мембранного типа. Предложены рекомендации по конструированию опорных устройств с целью улучшения эксплуатационных характеристик мембранных установок.

Теоретические и экспериментальные результаты проведенных исследований могут быть использованы для исследования колебаний круглых однородных и многослойных гибких элементов мембранных компрессоров и насосов, измерительных приборов, предохранительных устройств, авиационных и судовых конструкций.

Разработанные программы внедрены в практику инженерных расчетов Всесоюзного научно-исследовательского и конструкторско-технологического института компрессорного машиностроения.

Полученные экспериментальные и теоретические данные по собственным колебаниям гибких элементов применяются в лаборатории мембранных компрессоров названного института для анализа причин поломок в действующих установках. С использованием предложенных рекомендаций по конструированию опорных устройств во ВНИИкомпрессормаше создан новый мембранный блок компрессора специального назначения, который превосходит по ряду показателей аналогичные зарубежные машины мембранного типа.

Диссертационная работа объемом 203 стр. состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и трех приложений. Содержит 131 стр. основного машинописного текста, 16 табл., 54 рис., приложения на 22 стр. Список литературы состоит из 122 наименований.

## СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИКИ МНОГОСЛОЙНЫХ И ОДНОРОДНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН И МЕМБРАН

Современная теория многослойных упругих систем является обобщением классической теории однородных пластин и оболочек. Суть его заключается в сведении модели многослойной конструкции к уравнениям адекватной сплошной модели, а также в применении для решения задачи апробированных численных и аналитических методов.

В первой части обзора рассматривается влияние на динамику однородных защемленных круглых пластин начальных несовершенств срединной поверхности, условий закрепления контура, видов динамической нагрузки, а также изменение характеристик колебаний при контакте пластин с жидкостью и газом. Анализируются уравнения колебаний и методы их решения.

Вторая часть обзора посвящена классификации математических моделей тонкостенных многослойных конструкций по степени жесткости связи между слоями.

В соответствии с предложенной классификацией в третьей части обзора осуществляется сравнительный анализ динамики многослойных круглых пластин с различным типом связи между слоями.

### I.1. Оценка влияния различных факторов на колебания однородных защемленных круглых пластин

Исследование колебаний круглых пластин давно привлекает

внимание ученых и инженеров. По сравнению с оболочечными конструкциями круглая пластина является, на первый взгляд, довольно простой. Однако обилие публикаций как в отечественной, так и в зарубежной литературе, посвященных статике и динамике круглой пластины, убедительно подтверждает, что с ней связан ряд проблем, являющихся в настоящее время весьма актуальными.

Колебания круглых тонких пластин составляют один из наиболее развитых разделов общей теории колебаний. В этой области хорошо известны работы И.А.Биргера / 16 /, В.В.Болотина / 18 /, Н.В.Валишвили / 23 /, А.С.Вольмира / 30 /, Э.И.Григолюка / 45 /, В.И.Феодосьева / 97 /, А.П.Филиппова / 98 /, С.П.Тимошенко / 92 / и других.

Поведение круглой пластины при малых амплитудах колебаний описывается линейным дифференциальным уравнением в частных производных с постоянными коэффициентами. Решение соответствующего однородного уравнения выражается в функциях Бесселя. В этом уравнении учитывается влияние на собственные колебания пластины постоянного радиального усилия, равномерно распределенного по контуру / 98 /. Влияние неравномерности распределения радиального усилия на собственные колебания круглой пластины в литературе не отражено.

Как считает автор статьи / 108 /, при неравномерном натяжении для определения собственных частот и форм колебаний должен быть использован дискретный метод. В работе / 108 / для круглой мембраны, находящейся под действием неравномерного натяжения, распределенного по закону косинуса, применяется метод конечных элементов. Такой подход оказался весьма успешным. Неравномерность натяжения очень своеобразно изменяет конфигурацию "классических" узловых линий (диаметров и окружностей). Данное

исследование / 108 / является пока лишь теоретическим, поскольку в литературе отсутствуют аналогичные экспериментальные результаты, которые могли бы подтвердить возможность возникновения на практике вычисленных форм колебаний.

С точки зрения устойчивости целесообразно выделить докритическое и закритическое состояния пластин. Собственные колебания круглых пластин в докритическом состоянии изучены достаточно подробно. Однако неисследованным является, как указывалось выше, влияние неравномерности распределения по контуру сжимающих усилий. Причиной возникновения сжимающих усилий являются смещения опорных устройств / 28 /. Большинство авторов считает их влияние неизбежным, хотя далеко не все учитывают это в своих расчетах. Весьма существенное влияние опорные устройства оказывают на параметры собственных колебаний пластин малой толщины ( $H/R \ll 1$ ). Такие пластины являются гибкими, легко теряют устойчивость и переходят в закритическое состояние. В этом состоянии особым образом перераспределяются напряжения, а соответствующие уравнения должны учитывать геометрическую нелинейность. Как отмечено А.С.Вольмиром / 28 /, закритическое состояние формируется также действием поперечных нагрузок, приводящих к конечным перемещениям. Нелинейность уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние, трудности проведения экспериментов объясняют то, что собственным колебаниям круглых пластин в закритическом состоянии посвящено ограниченное количество публикаций.

Влияние начального несовершенства при закритическом состоянии приводит к смещению точки потери устойчивости в область более низких значений краевого смещения. После потери устойчивости пластина может "прохлопывать" в положение, где знак прогиба

противоположен знаку прогиба от начального несовершенства. Значение собственной частоты пластины после хлопка меньше, чем в основном положении, хотя, как показывают расчеты / II2 /, соответствующие максимальные поперечные прогибы незначительно отличаются друг от друга.

Возможность возникновения двух противоположных деформированных состояний пластины, характеризующихся разными значениями собственных частот, следует отнести к одной из особенностей поведения круглой пластины в закритическом состоянии. В экспериментальной работе тех же авторов / II3 / подтвержден факт существования двух близких состояний. Кроме того, в своих выводах авторы указывают на то, что амплитудно-частотные характеристики пластины в этом случае отличаются от характеристик растянутой пластины и являются более сложными. Приведенные экспериментальные результаты выгодно отличаются от теоретических, поскольку в последних рассматриваются только осесимметричные формы колебаний.

В статье / II4 / рассматривается влияние начального растягивающего смещения срединной поверхности весьма тонкой круглой пластины на субгармонические колебания. На основе уравнений Кармана исследуются только осесимметричные колебания.

При конечных амплитудах колебания круглой пластины не являются изохронными. К такому выводу приходит С.П.Тимошенко / 92 /, получив выражение для потенциальной энергии пластины с учетом вклада растягивающих усилий в срединной поверхности. Он рассмотрел также малые колебания около положения, определяемого действием статического равномерно распределенного давления. В этом случае частота собственных колебаний является функцией статического поперечного перемещения в центре пластины. С.П.Тимо-

шенко отмечает, что возрастание частоты подтверждается и экспериментально.

С учетом влияния конечности прогибов изменяются количественно и качественно дифференциальные уравнения круглой пластины. Вместо одного линейного уравнения в задаче изгибных колебаний, геометрически нелинейные колебания описываются двумя связанными нелинейными уравнениями: уравнением равновесия и уравнением совместности деформаций. Большинство авторов рассматривает только осесимметричные колебания. С этой целью часто используются уравнения типа Кармана / 29, 30, 91 /.

Влияние равномерной статической нагрузки на собственные частоты осесимметричных колебаний круглых пластин исследовано в статье / 96 /. Исходные уравнения являются динамическим аналогом уравнений Кармана. Решение их осуществляется с помощью рядов Фурье-Бесселя и Дини-Бесселя. Тщательная подготовка прижимающих поверхностей зажимных колец в ходе эксперимента позволила получить значения частот собственных колебаний, близкие к теоретическим. Однако нужно заметить, что полностью избавиться от радиальных напряжений на контуре так и не удалось. Эти напряжения были сжимающими и приводили к понижению частот. Авторы работы ограничились рассмотрением лишь первой и второй осесимметричных форм колебаний. Граничные условия формулировались только для случая неподвижно закрепленного края.

В предположении осесимметричности деформаций Бауером /14/ получено уравнение движения защемленной круглой пластины, подобное дифференциальному уравнению типа Дуффинга. Кроме граничных условий для прогиба автор различает два крайних варианта: свободный от напряжений и неподвижно защемленный края. Каждому типу условий в уравнении соответствует свое значение коэффици-

ента при нелинейном слагаемом. С помощью метода Пуанкаре рассмотрены вынужденные колебания пластин (независимо от формы их контура) при ступенчато приложенной нагрузке и импульсной, убывающей по экспоненциальному закону. Временная функция, определенная при решении первой задачи, включает пять гармоник и имеет относительно компактный вид. Решение же задачи при импульсной нагрузке даже в первом приближении представляет собой весьма громоздкое выражение. Следовательно, метод Пуанкаре нельзя считать наиболее удобным способом решения задач вынужденных колебаний пластин при конечных амплитудах.

В статье / 99 / динамика круглой пластины с учетом растяжения в срединной поверхности при осесимметричном нагружении давлением описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением типа Дуффинга. Силы инерции в срединной поверхности не учитываются. Нагрузка изменяется во времени по экспоненциальному закону. Решение уравнения осуществляется численным путем / 34 /. Вначале дифференциальное уравнение приводится к интегральному уравнению. После разбиения интервала интегрирования на участки, где прогиб можно считать постоянным, решение интегрального уравнения сводится к решению на каждом временном участке кубического уравнения, коэффициенты которого зависят от интегралов по времени.

Осесимметричные колебания круглой мембраны рассматриваются И.И.Аникьевым и М.И.Воротниковой / 9 / также на основе уравнений типа Кармана / 31 /, где учитывается начальное напряжение в мембране. Авторы пренебрегают членами, соответствующими инерции мембраны в радиальном направлении, и приходят к нелинейному дифференциальному уравнению, которое отличается от уравнения типа Дуффинга наличием квадратичного слагаемого. Собственные ко-



лебания в статье не рассматриваются.

К числу немногочисленных работ, где на основе уравнений типа Кармана определены частоты осесимметричных и неосесимметричных форм колебаний, относится статья Р.И.Рабиновича / 82 /. Прогиб выбирается в виде ряда по функциям Бесселя, предложенном Б.Г.Корневым / 61 / в задаче линейных колебаний круглой пластины. Применяв метод Бубнова-Галеркина автор приходит к однородному уравнению типа Дуффинга, коэффициенты которого зависят от форм колебаний. Получена формула для определения частот собственных колебаний в зависимости от форм и амплитуды колебаний для случая пластины с подвижно-защемленным краем, когда мембранные напряжения в контуре отсутствуют.

Осесимметричные колебания неподвижно защемленной пластины рассматриваются в статье / 48 / на основе уравнений, для вывода которых использована трехмерная нелинейная теория упругости. Авторы получают обыкновенное дифференциальное уравнение типа Дуффинга, решение которого при собственных колебаниях выражается через эллиптические функции. Как показано в статье, если значение амплитуды равно удвоенной толщине пластины, то период колебаний уменьшается более чем на 35%. Авторы указывают, что на точность экспериментов с круглыми пластинами существенное влияние оказывают условия закрепления, начальные несовершенства и несимметричность пластин. В связи с этим для проведения опытов были отобраны только две пластины из двадцати.

Для закрепления круглых пластин обычно используются конструкции, состоящие из двух прижимных колец / 48, 96, 102, 117 /, скрепляемых между собой болтами. Условия закрепления существенно влияют на результаты опытов / 48, 96 /. Эта зависимость носит довольно сложный неоднозначный характер и проявляется не

только в количественных, но и в качественных изменениях: в одних случаях условия закрепления приводят к увеличению собственных частот колебаний, в других — к уменьшению.

Например, в статье / 48 / указано, что появление радиальных сжимающих усилий по контуру пластины, возникающих при затяжке болтов, приводит к снижению резонансных частот. С другой стороны, найденная экспериментально / II7 / собственная частота линейных колебаний по осесимметричной форме оказалась на 27,5% больше теоретического значения. Хотя авторам не удалось объяснить причину расхождения, однако можно предположить, что это также вызвано влиянием граничных условий.

В работе Л.Е.Андреевой / 8 / назван иной способ крепления упругих элементов в приборах, который заключается в предварительном натяжении круглых пластин и мембран с целью изменения их упругих характеристик. Возбуждение колебаний осуществляется несколькими способами. Чаще всего применяется силовой (электромагнитный) способ / 48, II0, II7/. Используется также инерционный способ возбуждения / 96 /.

Вид резонансных форм зависит от характера приложения возбуждающей нагрузки. Если нагрузка представляет собой сосредоточенную силу, то точка ее приложения может совпадать с узловыми линиями соответствующего резонанса. Тогда конфигурация резонирующих форм искажается / 94, III /. От названного недостатка можно избавиться, если сосредоточенную возбуждающую силу прикладывать в геометрическом центре пластины или применять для возбуждения пластины равномерно распределенную нагрузку. Отсюда следует вывод, что инерционный способ возбуждения колебаний наиболее целесообразен при регистрации спектра частот пластины.

Наблюдаемые в экспериментах формы колебаний получаются в результате суперпозиции целого ряда форм. Например, в статье / III / для заземленной круглой пластины показано, что хотя при резонансе с двумя диаметрами и одной окружностью преобладает резонансная форма, однако весьма существенным является также влияние самой низшей формы колебаний. Фигуры Хладни для круглых пластин определяются здесь методом голографической интерферометрии. Показано, что влияние внутреннего и внешнего демпфирования одинаково. Формы колебаний при меньшем значении коэффициента демпфирования более четкие.

Измерение амплитуд колебаний исследуемых пластин осуществляется обычно бесконтактным способом. В / 48, II7/ с помощью оптического датчика определены формы прогиба пластины по радиусу и построены амплитудно-частотные характеристики. Применение дополнительной аппаратуры для скоростной съемки позволило зарегистрировать переходные процессы / II7 /.

Известно / II7 /, что при амплитудах, сравнимых с толщиной пластины совершает нелинейные колебания, которые описываются уравнениями типа Дуффинга. При исследовании таких уравнений показано, что в этом случае существуют два устойчивых режима колебаний, которым соответствуют два значения частоты. Переход от одного режима к другому осуществляется скачкообразно. Поэтому для определения резонансных частот необходимо проводить опыты многократно: с увеличением и уменьшением частоты возбуждения. На подобную процедуру при проведении эксперимента указали авторы статьи / 96 /. Следует заметить, что это делалось ими несмотря на предположение о малости амплитуд колебаний.

Для определения характеристик свободных колебаний круглых пластин при конечных амплитудах привлекается также метод конеч-

ных элементов / 122 /. Типичный конечный элемент обладает в каждом из двух узлов тремя степенями свободы: двумя линейными перемещениями в плоскости и углом поворота. Численные расчеты показывают хорошую сходимость результатов уже при пяти элементах. Эта работа, безусловно, представляет большой интерес, однако в ней рассмотрены только осесимметричные формы колебаний.

С помощью кольцевого конечного элемента в статье / 118 / проведено численное исследование влияния ортотропных свойств материала круглой пластины на значения частот осесимметричных собственных колебаний.

Применение метода конечных элементов / 17, 52, 115 / к расчету собственных колебаний круглых пластин позволило установить явление расслоения частот. При расслоении пластина имеет два различных значения частоты, которым соответствуют одинаковые по виду формы колебаний, например - с узловым диаметром. Расслоение вызывается нарушением симметрии. К пластинам с нарушенной симметрией относятся круглая пластина с вырезами / 17 / и сегментная пластина / 115 /. По названным конструктивным причинам их жесткости меньше жесткости аналогичной сплошной круглой пластины. Поэтому пары значений частот для каждой конфигурации пластин соответственно меньше значения частоты такой же по размерам, но осесимметричной круглой пластины. Заметим, что в частном случае формы колебаний с узловым диаметром при резонансе с меньшим значением частоты узловой диаметр проходит по линии наименьшей жесткости, а с большим значением - по линии наибольшей жесткости / 17, 52, 115 /.

Если расстройка частот вызвана дополнительной массой, то одно из пары значений частот меньше, а другое меньше либо равно значению частоты колебаний пластины без дополнительной мас-

сы / 52 /.

Из анализа литературы следует, что исследование явления расслоения частот круглой мембраны при неравномерном натяжении не проводилось ни теоретическими, ни экспериментальными методами. Практически отсутствуют также результаты по расслоению частот круглых пластин при неосесимметричном распределении мембранных усилий.

В ряде случаев при исследовании колебаний пластин и мембран необходимо учитывать влияние окружающих их жидкости и газа. При малых колебаниях тонкостенных элементов конструкций предполагается / 42 /, что:

- а) формы колебаний в жидкости и в вакууме одинаковые;
- б) движение жидкости от колебаний твердого тела безвихревое;
- в) при низкочастотных колебаниях жидкость можно считать несжимаемой.

В рамках сформулированных гипотез исследуется влияние жидкости на частоты собственных колебаний круглых мембран / 13 / и пластины / 12 /. Анализ гидроупругой системы осуществляется на основе двух линейных уравнений с соответствующими граничными условиями. Показано, что частота собственных колебаний мембраны, соприкасающейся с несжимаемой жидкостью, в зависимости от отношения столба жидкости к радиусу мембраны сохраняет постоянное значение (которое выше в несколько раз частоты свободной мембраны) до значения 0,6, а затем для более низких значений указанного относительно параметра плавно убывает.

При решении совместной гидродинамической задачи некоторые авторы делают основной упор на динамику жидкости / 95 /. Названная работа отличается от предыдущих тем, что в ней для мемб-

раны используются геометрически нелинейные уравнения, позволяющие рассматривать задачу при конечных перемещениях.

Исследование взаимодействия круглой пластины с волной давления, распространяющейся в жидкости, содержится в монографии Ш.У.Галиева / 33 /. Решение проводится методом конечных разностей. Линейное взаимодействие рассматривается при осесимметричном нагружении с помощью уравнения, где формула для давления выбирается в соответствии с гипотезой плоского отражения, а давление падающей волны задается по экспоненциальному закону. Численным путем определены временные зависимости давления и прогиба для пластин с разной толщиной. Влияние геометрической нелинейности учитывается в решении, выполненном на основе уравнений типа Кармана.

В последующей монографии Ш.У.Галиева / 32 / исследовано взаимодействие круглой пластины и жидкости с учетом влияния изменения объема жидкой среды при деформации пластины. Поведение круглой осесимметричной пластины рассматривалось с помощью уравнений С.П.Тимошенко / 92 /. Разница между результатами, полученными с помощью линейной и нелинейной моделей, возрастает с увеличением динамического прогиба.

Для измерения переменных давлений в газовых потоках широко применяются мембранные датчики / 74 /. От значения собственной частоты мембраны зависят границы рабочего диапазона измерительного прибора. Собственная частота мембраны вычисляется по формуле для круглой заземленной пластины. Для натянутых мембран используется формула вычисления частоты с учетом натяжения. В том случае, если давление подается к мембране по входному каналу, то определяется так называемая акустическая частота системы "канал-датчик", зависящая от длины канала и скорости рас-

пространения звука в газе. При определении акустической частоты жесткость мембраны не учитывается.

Анализ динамического поведения мембраны датчика осуществляется на основе линейного уравнения движения мембраны как твердого тела / 74 /. Решение этого уравнения используется для экспериментального определения коэффициента демпфирования.

В статье / 20 / показано, что в уравнении движения мембраны, применяемой в датчиках давления, необходимо учитывать нелинейное слагаемое, отражающее влияние турбулентного демпфирования окружающей мембрану газообразной среды. Необходимость учета турбулентного трения обусловлена тем, что мембраны в датчиках обладают практически незначительной массой.

Экспериментальные результаты исследований тонкостенных деформируемых конструкций отличаются от теоретических из-за несовершенств геометрической формы образцов, несоблюдения граничных условий и т.д. В статье / 49 / отмечается влияние на результаты опытов и природы нагружения, которое заключается в том, что от значения объема газа, находящегося в замкнутой полости, изменяется зависимость "прогиб-нагрузка". Было бы логично сделать вывод о том, что конечность объема газа необходимо учитывать и при исследовании колебаний круглых пластин, контактирующих с газом.

Таким образом, обзор исследований колебаний круглых однородных пластин и мембран показывает, что

1) большинство исследований колебаний круглых пластин и мембран с учетом геометрической нелинейности ограничено рассмотрением только осесимметричных колебаний;

2) круглые пластины малой толщины на практике в большинстве случаев оказываются в закритическом состоянии. Однако для

этого состояния почти полностью отсутствуют исследования их собственных и вынужденных колебаний;

3) для круглых пластин отсутствуют оценки влияния присоединенных масс и жесткости газа на частоты их собственных колебаний;

4) экспериментальное исследование собственных колебаний круглых пластин и мембран при неосесимметричном распределении мембранных усилий не проводилось.

## 1.2. Классификация моделей многослойных тонкостенных конструкций по характеру связи между слоями

По способу получения основных уравнений многослойных систем А.С.Вольмир / 29 / выделяет две схемы. Одна из них сводит исследуемую многослойную конструкцию к эквивалентной сплошной модели. Существующие варианты схемы базируются на различных гипотезах, позволяющих получать сравнительно несложные математические модели, удобные для практической реализации на ЭЦВМ. Отличительной чертой и преимуществом данной схемы является независимость системы дифференциальных уравнений от числа слоев.

В соответствии с указанной схемой А.С.Вольмиром / 28 / на основе линейной теории рассматривалась устойчивость трехслойных пластин и оболочек, а позднее получены уравнения трехслойной пластины с учетом геометрической нелинейности / 14 /. Используя гипотезу о линейном распределении касательных перемещений по высоте пакета и условие его несжимаемости, Э.И.Григолюк и П.П.Чулков / 43 / разработали теорию пологих оболочек конечного прогиба. Глубокое исследование моделей многослойных конструкций содержит монография В.В.Болотина и Ю.Н.Новичкова / 18 /.



Общая техническая теория тонких пластин и пологих оболочек с произвольным соотношением упругих свойств по толщине предложена В.В.Пикулем / 75 /. Переходом к адекватной сплошной модели А.П. Прусаковым / 78 / получены уравнения трехслойных пластин с легким наполнителем. В статье / 44 / представлены линейные уравнения движения трехслойной круговой пластины со сжимаемым наполнителем. В работе С.Г.Лехницкого / 66 / предложены формулы для вычисления жесткостей и приведенных модулей многослойной пластинки, составленной из анизотропных слоев. Эта тема предложена С.А. Амбарцумяном / 6 /, который построил и развил уточненную теорию расчета многослойных ортотропных пластинок. Автор отмечает полную идентичность строения систем уравнений для многослойной и однородной пластинок. В монографии Я.М.Григоренко и А.П.Мукоеда / 46 / сформулированы основные соотношения теории анизотропных слоистых оболочек. Для исследования осесимметричных двухслойных пластин в книге / 56 / предложен кольцевой конечный элемент.

Математические модели, составленные по другой схеме, включают в себя отдельно уравнения для каждого слоя, условия контакта соседних слоев и соответствующие граничные условия. Здесь порядок системы уравнений определяется количеством слоев в пакете / 29 /. Этому направлению посвящено меньшее число публикаций. Среди них можно назвать работы В.В.Болотина и Ю.Н.Новичкова / 71 /.

Во всех указанных выше работах рассмотрены конструкции с жесткой связью между отдельными слоями, не допускающей взаимного скольжения слоев и отделения их друг от друга. Данное ограничение позволяет записать условия контакта слоев в виде равенств соответствующих перемещений в области контакта.

Если слои конструкции имеют жесткость одного порядка, то для всего пакета считается справедливой гипотеза прямой нормали / 28 / . Она использована во многих уже упомянутых выше работах. К ним можно добавить также исследование В.И.Мяченкова и И.В.Григорьева / 69 / по составным оболочечным конструкциям, а также статью А.В.Кармишина / 57 / , посвященную выводу уравнений неоднородных тонкостенных конструкций на основе принципа минимальных жесткостей, и монографию / 58 / .

В склеенных слоистых конструкциях влияние податливости связующего приводит к тому, что гипотеза прямой нормали перестает быть справедливой для пакета. Кроме того, связь между слоями может быть нарушена из-за дефектов структуры или под воздействием динамических нагрузок / 7, 21 / . Полное или частичное отсутствие жесткой связи приводит к существенному снижению частот колебаний слоистой пластины по сравнению с монолитной конструкцией. Этот факт был экспериментально установлен Е.П.Бусловым / 21 / . Автором исследовались двухслойные круглые пластины под действием кратковременных ударных нагрузок. При полном разрушении связующего слоя частота колебаний снижалась вдвое, а максимальный прогиб возрастал в несколько раз.

Степень жесткости связи оказывает существенное влияние на динамические характеристики. Деформируемость связующего слоя в склеенных оболочках приводит к тому, что модели, основанные на гипотезе прямой нормали для пакета, не дают удовлетворительного согласия с экспериментом / 7 / .

В то же время отдельным представлением пакета, с моделированием связующего слоя пружинами с нелинейными характеристиками, получены хорошие результаты при исследовании нестационарных колебаний цилиндрических оболочек / 7 / .

В основу метода решения положена программа расчета однородной оболочки, где учитываются геометрическая нелинейность, пластичность материала, переменность толщины, влияние температуры.

В случае отсутствия связующего взаимодействие соседних слоев происходит через контактные усилия. Для моделирования такой конструкции рекомендуется / 62 / способ расчленения механической системы на отдельные элементы. Он является более рациональным при наличии освоенных методов расчета элементов и более предпочтителен при односторонних связях между отдельными частями системы. Предложенным методом решены задачи контактного деформирования под действием импульсных нагрузок балок, прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек / 62 /. Под контактом упругих элементов здесь подразумевается совпадение нормальных перемещений в соответствующих точках после дискретизации (приближенный способ) или равенство тех же перемещений во всей поверхности контакта (точный способ).

В работе / 62 / развивается приближенный способ, так как он позволяет рассмотреть нагружение системы, сопровождающиеся "отходом" одного элемента от другого. Итерационный метод, применяемый для определения контактного давления, весьма напоминает аналогичный метод из работы / 7 /. Механические системы, в которых учитывается возможность отслоений, в литературе относят к разряду "конструктивно-нелинейных систем" / 67, 81 /. Несмотря на линейность исходных уравнений, решение подобных задач довольно трудоемко.

Напряженно-деформированное состояние пакета гофрированных мембран как системы с односторонними связями рассмотрено в работах / 24, 25 / методом конечных элементов. Важной чертой этого исследования является учет конечности перемещений. Однако

исследование ограничено воздействием только статических нагрузок.

Проведенные структурные исследования / 80 / контактных поверхностей пакетов пластин мембранных установок обнаружили зоны с износом от фреттинг-коррозии. Указанный процесс возникает на контактирующих нагруженных металлических поверхностях при их относительном колебательном движении с малыми амплитудами. Причиной износа является трение скольжения в пакете при малых смещениях слоев друг относительно друга. Трение между слоями вызывает перераспределение нагрузок между ними. В статье /54/ высказано мнение, что именно по названной причине разрушение многослойного сильфона начинается обычно с наружного слоя.

Сила трения скольжения между одинаковыми слоями круглой слоистой пластины учитывается в работе / 107 / путем подстановки в дифференциальное уравнение одного слоя слагаемого, соответствующего усилию натяжения в срединной поверхности. Авторы указывают на качественный характер такой модели, поскольку не представляется возможным осуществить эквивалентный переход от поперечных усилий, скрепляющих оба слоя, к тангенциальному усилию, действующему в срединной поверхности.

Подводя итог классификации моделей многослойных тонкостенных конструкций по характеру связи между слоями, можно констатировать, что

1) следует различать слоистые пластины с жесткими, податливыми и односторонними связями;

2) характер связи между слоями оказывает существенное влияние на частоты и прогибы многослойных пластин.

### 1.3. Динамика многослойных круглых пластин

В соответствии с предложенной выше классификацией рассмотрим результаты исследований колебаний слоистых круглых пластин с жесткими, податливыми и односторонними связями.

Следует заметить, что в литературе имеется мало фундаментальных работ по слоистым круглым пластинам. Слоистые круглые пластины обычно рассматриваются лишь в виде частных случаев, как иллюстративные приложения к соответствующей теории многослойной конструкции. Это затрудняет анализ влияния различных факторов на статику и динамику многослойной круглой пластины.

В монографии С.А. Амбарцумяна / 6 / показано, что значения частот собственных колебаний трансверсально изотропной (анизотропность обусловлена многослойностью пластинки) круглой пластинки при учете поперечных сдвигов уменьшаются с уменьшением относительной толщины пластинки и отношения модуля Юнга к модулю поперечного сдвига. Это означает, что при достаточно малой толщине пластинки и сравнительно небольших номерах исследуемых резонансов вполне оправдано использование уравнений, не содержащих слагаемых, учитывающих влияние поперечного сдвига.

Изменение соотношений толщин слоев из различных материалов в слоистой пластине приводит к изменению ее частот собственных колебаний. Эта зависимость является нелинейной и имеет минимум и максимум / 116, 121 /. В частности, численный пример / 121 / для двухслойной алюминиево-стальной пластины показывает, что при основной форме колебаний максимальная частота на 4,4% больше частоты соответствующей однородной алюминиевой пластины. Интересно, что для второй осесимметричной формы раз-

ницы между частотами составляют соответственно 4,3% и 9%, что говорит о существенном влиянии соотношения слоев двухслойной пластины и при более высоких формах колебаний.

Основная частота колебаний трехслойной пластины / II6 / принимает максимальное значение, когда оба наружных слоя имеют одинаковую толщину. В численном примере повышение частоты является существенным и составляет 30,9% (по сравнению с частотой однородной алюминиевой пластины). Частота колебаний слоистой пластины с мягкой основой выше, чем у пластины с твердой основой. Упомянутые выше численные результаты / II6 / получены авторами на основе уравнений, учитывающих инерцию вращения и деформацию сдвига. Учет названных дополнительных факторов в уравнениях, по нашему мнению, вряд ли является целесообразным для конструкций из приведенных выше численных и экспериментальных примеров.

В уравнениях работы / II6 / учитываются деформации изгиба и растяжения. На основе вычисленных форм колебаний авторы делают вывод, что формы колебаний, соответствующие продольному перемещению, являются преобладающими. Авторам удалось получить решение только для осесимметричных форм. Следует заметить, что теоретическое значение собственной частоты основной формы колебаний двухслойной пластины отличается от экспериментального значения на 8%. Эту разницу следует считать существенной, поскольку именно в таких пределах изменяется собственная частота двухслойной пластины при изменении толщин слоев.

Отсутствие численных результатов для неосесимметричных форм колебаний снижает ценность приведенных / II6 / конфигураций узловых линий при резонансах слоистой пластины, найденных экспериментально. Вместо анализа причин некоторой искаженности

опытных форм осесимметричных и неосесимметричных колебаний, авторы относят это явление на счет условий заземления и неоднородности отдельных слоев, полагая влияние их неизбежным. Надо сказать, что и представленная математическая модель не пригодна для анализа условий закрепления, неоднородности слоев и других факторов, могущих повлиять на формы колебаний.

В работе / 21 / исследуются колебания круглых пластин, состоящих из металлического слоя, скрепленного эпоксидным клеем со слоем полиметилметакрилата. С точки зрения собственных колебаний такая связь является жесткой. При жесткой связи соседние слои не отделяются друг от друга и собственная частота системы является неизменной. Судя по приведенным формам колебаний, автору удалось избежать влияния посторонних факторов, искажающих конфигурации узловых линий.

Представляет большой интерес вывод автора / 21 / о непосредственной связи форм колебаний при резонансе с конфигурациями трещин после разрушения под действием импульсных нагрузок. Практическое значение этого факта заключается в том, что открывается возможность анализа причин разрушения слоистых круглых пластин по формам собственных колебаний.

Изгибные жесткости пластин с жесткой связью определяются с помощью принципа минимальных жесткостей / 57, 58 /. Экспериментальные значения собственных частот совпадают с теоретическими значениями с точностью 5% - 10%. Собственные частоты у пластин с отделяющимися друг от друга слоями ниже, чем у пластин со связанными слоями. Этот факт был установлен только экспериментально.

В статье / 107 / исследовано влияние конструкционного демпфирования на частоту и амплитуду колебаний при резонансе сво -

бодно опертой круглой пластины, состоящей из двух идентичных стальных слоев. Усилие прижатия слоев друг к другу регулировалось специальными болтами с калиброванными пружинами. Экспериментально установлено, что существует оптимальное значение поперечного усилия, при котором амплитуда колебаний слоистой пластины минимальна. На значения резонансной частоты конструкционное демпфирование практически не повлияло.

Таким образом, результаты анализа содержания третьей части обзора могут быть сформулированы в нижеследующих выводах:

1) динамика многослойных круглых пластин является малоизученной. Особенно мало работ по пакетам с односторонними связями, для исследования колебаний которых обычно используется уравнение только одного слоя;

2) существенное отличие слоистых круглых пластин с односторонними связями от пластин с жесткими связями заключается в том, что у первых собственные частоты намного ниже, а динамические прогибы значительно выше;

3) известные задачи для слоистых круглых пластин решены с рядом допущений, ограничивающих их общность:

а) рассматриваются в основном осесимметричные колебания;

б) в уравнениях не учитываются различие в толщинах и свойствах материалов слоев, краевые смещения и начальные несовершенства, геометрическая нелинейность и т.д.;

5) конструкционное демпфирование, вызванное трением скольжения между слоями, изменяет амплитуду колебаний, но практически не оказывает влияния на резонансные частоты.



#### 1.4. Выводы и постановка задачи

Результаты обзора исследований динамики многослойных и однослойных круглых пластин и мембран могут быть обобщены в следующих выводах:

1. Колебания пакетов круглых гибких пластин и мембран с односторонними связями изучены недостаточно. Известные математические модели являются упрощенными, в них учитываются только отдельные факторы. Обобщенные модели, учитывающие совместно различные геометрические и механические параметры слоев, краевые смещения, начальные несовершенства и т.д., отсутствуют.

2. Влияние краевых смещений на колебания пакета круглых пластин с односторонними связями не рассматривалось. Исследования геометрически нелинейных колебаний однородных круглых пластин проводились только для двух типов граничных условий: когда контур пластины неподвижно заземлен или свободен от напряжений. В задаче малых колебаний однородных пластин учитывались заданные на контуре только равномерно распределенные усилия.

3. Анизотропность материала при исследованиях колебаний пакета круглых пластин с односторонними связями не учитывалась. В моделях пакетов с жесткими связями учтена анизотропность, обусловленная многослойностью пакета. Колебания однородных круглых пластин рассматривались с учетом цилиндрической анизотропии материала.

4. Влияние присоединенных масс жидкостей и жесткости газа конечного объема на колебания пакета круглых пластин с односторонними связями не оценивалось.

5. Вынужденные колебания пакета круглых пластин с односто-

ронными связями не изучены.

На основании сформулированных выше выводов в диссертационной работе поставлены следующие задачи:

1. Построить математическую модель колебаний пакета круглых пластин, допускающую взаимное проскальзывание слоев, уравнения которой учитывали бы геометрическую нелинейность, краевые смещения, несовершенства слоев, анизотропность материала, влияние жидкости и газа, контактирующих с пакетом.

2. Изучить влияние анизотропности материала, краевых смещений, несовершенства слоев, геометрической нелинейности, жидкости и газа на частоты и формы собственных колебаний пакета.

3. Исследовать вынужденные колебания пакета под действием динамической нагрузки.

4. Экспериментально проверить адекватность математической модели и реальной конструкции.

## ГЛАВА 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ ПАКЕТА КРУГЛЫХ  
ГИБКИХ ПЛАСТИН, ДОПУСКАЮЩАЯ СКОЛЬЖЕНИЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Цель данной главы заключается в разработке геометрически нелинейной математической модели пакета, учитывающей краевые смещения, начальные несовершенства, механические и геометрические параметры отдельных слоев, давления жидкости, газа и другие параметры, которые оказывают наиболее существенное влияние на характеристики собственных и вынужденных колебаний пакета.

Пакет круглых гибких пластин, заземленных по контуру, представляет собой упругую механическую систему с односторонними связями в поперечном направлении. На основе предположения о равенстве поперечных перемещений осуществляется переход к модели с обычными двухсторонними связями, допускающей смещения соприкасающихся поверхностей отдельных слоев друг относительно друга.

Пакеты пластин мембранных компрессоров и насосов представляют собой связанные системы. Действующие на их внешние слои давления жидкости и газа зависят от перемещения пакетов. В настоящей работе предлагается реакцию упругих сил газа в замкнутой полости определять по методике для пневматического амортизатора / IOI /, а реакцию жидкости в ограниченной гидравлической полости находить из уравнения Лапласа / I3 /.

К пакету мембранной установки, допускающему относительное проскальзывание слоев, не применимы известные уравнения многослойных пластин с жесткими связями. Математическая модель пакета строится путем расчленения его на составные элементы / 62 /. Для составления системы уравнений привлекаются уравнения для каждого слоя пакета с соответствующими граничными условиями.

Используемые уравнения представляют собой геометрически нелинейные уравнения круглых гибких пластин. Это служит общности постановки задачи, позволяет учесть в задаче собственных колебаний нелинейность напряженно-деформированного состояния, в задаче вынужденных колебаний – конечность амплитуд.

## 2.1. Основные допущения и исходные уравнения

При формулировке уравнений, описывающих движение каждого слоя, давлений со стороны газа и жидкости, граничных условий и условий контакта, учитываются особенности функционирования гибкого пакета в реальных мембранных установках.

Полагаем, что пакет состоит из трех пластин (рис. 2.1).

Ниже излагаются основные допущения.

1. Равенство нормальных перемещений слоев и отсутствие трения между слоями.

Полагаем, что трение между слоями пакета отсутствует.

Сформулированное допущение основывается на том, что пластины пакетов мембранных установок имеют гладкие, тщательно подготовленные поверхности. Коэффициенты трения покоя и скольжения, соответствующие материалу пластин, весьма низки / 10 /. Защемление натурального пакета в мембранном блоке не устраняет граничное скольжение внутри пакета, что подтверждается / 80 / следами фреттинг-коррозии, обнаруженными на поверхностях трущихся между собой пластин. Экспериментально установлено, что сила трения скольжения практически не изменяет значения частоты, при котором возникает резонанс в слоистой круглой пластине.

2. Равенство коэффициентов Пуассона слоев.

В статье / 121 / авторами показано, что практически прием-

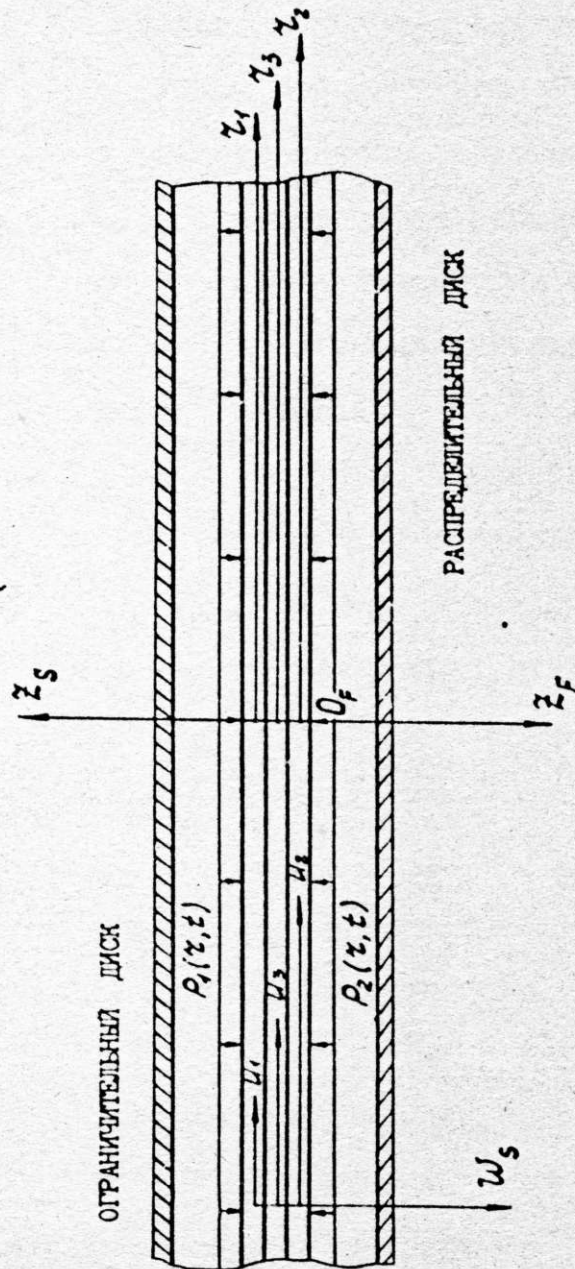


Рис. 2.1

лемым является допущение равенства коэффициентов Пуассона для материалов всех слоев слоистой круговой пластины. В предлагаемой модели пакета коэффициенты Пуассона отдельных слоев также принимаются одинаковыми.

### 3. Осесимметричность колебаний.

Целесообразность исследования осесимметричных колебаний пакета объясняется следующими соображениями:

а) самой первой в спектре частот собственных колебаний пакета находится частота, соответствующая осесимметричной форме колебаний. По сравнению со значениями других частот значение указанной частоты в наибольшей степени зависит от жесткостных и инерционных характеристик пакета;

б) неосесимметричные формы прогиба пакета являются недопустимыми при эксплуатации мембранной установки. Образующиеся при этом "мертвые" зоны / 2 / снижают производительность и создают предпосылки для усталостного разрушения. Формы профилированных поверхностей ограничительного и распределительного дисков изготавливаются в расчете только на осесимметричную форму прогиба пакета;

в) вероятность наступления основного резонанса больше, чем других, так как частота гидропривода эксплуатируемых МК и МН довольно низкая.

Для решения гидродинамической задачи принимаем следующие допущения / 13, 42 /:

1. Жидкость в гидравлической полости мембранной установки является идеальной, несжимаемой и однородной.

2. Движение жидкости потенциальное.

3. В жидкости сохраняются собственные формы пакета, по которым он совершает колебания в вакууме.

4. Система "пакет-жидкость" совершает малые колебания.

Сформулированные допущения позволяют функцию давления со стороны жидкости находить путем решения уравнения Лапласа /13/.

С целью определения реакции газа на перемещение пакета используем модель пневматического амортизатора / 101 /. Принимаем следующие допущения:

1. Газ в нагнетательной полости является идеальным.

2. Нагнетательная полость с находящимся в ней газом является замкнутой. Не учитываем влияние второстепенных процессов, имеющих место в реальном мембранном компрессоре / 2 /: перетекания газа через клапаны ограничительного диска, теплообмена газа со стенками мембранного блока, колебаний давления в трубопроводах компрессора и т.д.

3. Система "газ-пакет" совершает малые колебания.

Перейдем к составлению полной системы уравнений "газ-пакет-жидкость". Пусть  $S$ -я пластина пакета характеризуется модулем упругости  $E_s$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$ , плотностью  $\rho_s$ , толщиной  $h_s$ , прогибом  $w_s$ , коэффициентом демпфирования  $k_s$ . Обычно количество слоев в пакете МК и МН не превышает трех, поэтому полагаем  $S = 1, 2, 3$ , где 1 и 2 соответствуют внешним пластинам, а 3 - средней. Поведение каждого слоя описываем уравнениями типа Кармана / 30, 96 /:

$$\rho_s h_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} = -D_s \nabla^4 (w_s - w_H) +$$

$$+ L_1(w_s, F_s) - k_s \frac{\partial w_s}{\partial t} + \theta_s(w_s), \quad (2.1)$$

$$\nabla^4 F_s = -\frac{1}{2} E_s h_s [L_2(w_s, w_s) - L_2(w_H, w_H)], \quad (2.2)$$

где

$$\nabla^4(\ ) = \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 L_2(w_s, w_s) = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial w_s}{\partial z} \right)^2 \right];$$

$$L_1(w_s, F_s) = \frac{\partial^2 w_s}{\partial z^2} (N_{zs} + T_{zs}) + \frac{1}{z} \frac{\partial w_s}{\partial z} (N_{\theta s} + T_{\theta s});$$

- $T_{zs}, T_{\theta s}$  - касательные усилия взаимодействия между слоями;  
 $N_{zs}, N_{\theta s}$  - мембранные усилия в срединной поверхности  $s$ -го слоя;  
 $D_s, F_s, k_s$  - цилиндрическая жесткость, функция напряжений и коэффициент демпфирования слоя;  
 $w_H$  - начальное несовершенство пакета.

Нагрузки на слои пакета определяются выражениями

$$Q_1(w, z, t) = \bar{p}_1 - R_1, Q_2(w_2, z, t) = \bar{p}_2 + R_2, Q_3(w_3, z, t) = R_1 - R_2 \quad (2.3)$$

где  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$  - давления газа и жидкости на внешние слои пакета,  $R_1(z, t)$  и  $R_2(z, t)$  - интенсивности реакций взаимодействия между слоями в поперечном направлении.

Граничные условия при  $z = R$  ( $R$  - радиус пакета) относительно перемещений  $s$ -го слоя пакета, имеющего начальное несовершенство и краевое смещение  $\bar{u}_{s0}$ , имеют вид

$$w_s - w_H = \frac{\partial}{\partial z} (w_s - w_H) = 0. \quad (2.4)$$

$$u_s = \bar{u}_{s0}. \quad (2.5)$$



Условия контакта слоев имеют вид относительно прогибов

$$w_s(z, t) = (z, t), \quad (2.6)$$

и относительно касательных усилий взаимодействия между слоями

$$T_{zs} = T_{\theta s} = 0. \quad (2.7)$$

Давление на пакет со стороны газа определяется по формуле / IOI /

$$\bar{p}_1(w_1) = p_a(w_1) - p_{a_0}, \quad (2.8)$$

где  $p_{a_0}, p_a$  - начальное и текущее абсолютные давления газа. Текущее давление газа зависит от поперечного перемещения контактирующей с ним пластины пакета. Для определения соответствующей функциональной зависимости необходимо выбрать наиболее подходящую модель, учитывающую упругие свойства газа, находящегося в замкнутой полости. В настоящей работе в качестве такой модели используется модель пневматического амортизатора / IOI /. Вывод основных уравнений модели газа, контактирующего с пакетом, приводится в параграфе 2.5.

Реакция жидкости плотности  $\rho_0$ , находящейся в гидравлической полости, на перемещение пакета, зависит от скорости изменения во времени потенциальной функции  $\varphi$  / I2, I3 /:

$$p_2(w_2) = -\rho_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z_F = h}, \quad (2.9)$$

где  $h$  - высота столба жидкости (см. рис. 2.1).

Потенциальная функция обычно определяется путем решения уравнения Лапласа / I2 /

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_F^2} = 0 \quad (2.10)$$

при соответствующих граничных условиях. Однако в данном случае из-за сложности формы гидравлической полости, наличия подвижной границы контакта жидкости и пакета, непосредственно получить решение уравнения (2.10) не представляется возможным. В настоящей работе предлагается перейти к цилиндрической форме гидравлической полости, которая дает возможность использовать известное аналитическое решение уравнения Лапласа / 13 / с использованием указанного выражения для потенциала жидкости в параграфе 2.4 получена формула для определения реакции жидкости на перемещение пакета.

Таким образом, в настоящем параграфе представлены уравнения (2.1 - 2.10), описывающие движение взаимосвязанной системы "газ-пакет-жидкость". Взаимодействие пакета с газом и жидкостью осуществляется посредством поперечных усилий. Для определения аналитических зависимостей реакций жидкости и газа на перемещение пакета предложены соответствующие модели, основные уравнения которых приводятся в параграфах 2.4 и 2.5.

## 2.2. Формирование уравнений равновесия пакета совместности деформаций каждого слоя. Введение комплекса безразмерных и осредненных переменных

В настоящем параграфе осуществляется формирование единых уравнений колебаний пакета на основе уравнений равновесия (2.1) и совместности деформаций слоев (2.2), соотношений для нагру-

зок (2.3), условий контакта (2.6 - 2.7). Выполняется преобразование неоднородного граничного условия (2.5) в однородное.

Неоднородность граничного условия (2.5) затрудняет решение задачи с помощью рядов по функциям Бесселя. Чтобы перейти к однородному граничному условию выразим смещение срединной поверхности одного слоя пакета через функцию напряжений. Для этого воспользуемся выражениями для мембранных усилий, записанными в полярной системе координат

$$N_{zs} = h_s \frac{E_s}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u_s}{\partial r} + \nu \frac{u_s}{r} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w_s}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_H}{\partial r} \right)^2 \right] \right\}, \quad (2.11)$$

$$N_{\theta s} = h_s \frac{E_s}{1-\nu^2} \left\{ \frac{u_s}{r} + \nu \frac{\partial u_s}{\partial r} + \nu \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w_s}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_H}{\partial r} \right)^2 \right] \right\},$$

которые связаны с функцией напряжений

$$N_{zs} = \frac{h_s}{r} \frac{\partial F_s}{\partial r}, \quad N_{\theta s} = h_s \frac{\partial^2 F_s}{\partial r^2}. \quad (2.12)$$

Из (2.11) и (2.12) получаем неоднородное граничное условие, где смещение выражено через функцию напряжений

$$\frac{R}{E_s h_s} \left( \frac{\partial^2 F_s}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial F_s}{\partial r} \right)_{r=R} = \bar{u}_{s0}. \quad (2.13)$$

Заменим в (2.13) производную от функции напряжений суммой

$$\frac{\partial F_s}{\partial r} = \frac{E_s h_s}{R} \frac{\bar{u}_{s0}}{1-\nu} + \frac{\partial \tilde{F}_s}{\partial r}, \quad (2.14)$$

где функция напряжений с чертой удовлетворяет однородному граничному условию

$$\left( \frac{\partial^2 \tilde{F}_s}{\partial z^2} - \frac{\nu}{z} \frac{\partial \tilde{F}_s}{\partial z} \right)_{z=R} = 0. \quad (2.15)$$

Входящие в состав нагрузок на слои пакета (2.3) неизвестные интенсивности реакций взаимодействия исключаем, складывая почленно уравнения равновесия слоев (2.1). Уменьшение при этом числа уравнений компенсируется использованием дополнительных уравнений - условий контакта (2.6). Тогда система уравнений колебаний пакета с учетом замены (2.14) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \sum_{s=1}^N \rho_s h_s = & - \nabla^4 (w - w_H) \sum_{s=1}^N D_s + \\ & + \frac{1}{R(1-\nu)} \sum_{s=1}^N \bar{u}_{s0} E_s h_s \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial z} z \right) + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \sum_{s=1}^N \frac{\partial F_s}{\partial z} \right) - \\ & - \frac{\partial w}{\partial t} \sum_{s=1}^N k_s + \bar{p}_1(w) - \bar{p}_2(w), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\nabla^4 \tilde{F}_s = - \frac{1}{2} E_s h_s \frac{1}{z} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial w_s}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial w_H}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.17)$$

Искомые функции представленной системы уравнений должны удовлетворять граничным условиям (2.4) и (2.15).

Далее осуществляется переход к безразмерным и осредненным переменным. Это позволяет осуществить решение нижеследующих вопросов:

а) обеспечение общности уравнений и получаемых на их

основе функциональных зависимостей;

б) понижение вероятности машинного переполнения при вычислениях на ЭЦВМ;

в) получение возможности непосредственного использования табличных интегралов в процедуре метода Бубнова-Галеркина.

Специфика уравнений (2.16), (2.17) не позволяет в данном случае непосредственно ввести один из многочисленных комплексов безразмерных переменных для однородных круглых пластин или многослойных пластин с жесткими связями между слоями.

Предлагается следующий комплекс безразмерных и осредненных переменных:

$$x = \frac{z}{R}; \zeta = \frac{w}{H}; \zeta_H = \frac{w_H}{H}; H = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N h_s; \rho_s = \frac{\bar{\rho}_s}{E};$$

$$t_0 = \omega_0 t; \omega_0^2 = \frac{D}{\rho H R^4}; D = \frac{E H^3}{12(1-\nu^2)}; f_s = \frac{\tilde{F}_s}{D};$$

$$E = H^{-1} \sum_{s=1}^N E_s h_s; \rho = H^{-1} \sum_{s=1}^N \rho_s h_s; U_{s0} = \frac{\bar{U}_{s0}}{H}; \quad (2.18)$$

$$c_1 = \frac{D H}{R^4}; c_2 = \frac{H}{R^4} \sum_{s=1}^N D_s; c_3 = \frac{H^2}{R^3(1-\nu)} \sum_{s=1}^N U_{s0} E_s h_s;$$

$$c_4 = \omega_0 H \sum_{s=1}^N k_s; c_{4+s} = \frac{E_s h_s}{2} \frac{H^2}{D}; c_8 = \sum_{s=1}^N c_{4+s}.$$

Систему уравнений (2.16), (2.17) в безразмерных величинах перепишем в виде

$$c_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t_0^2} = -c_2 \nabla^4 (\zeta - \zeta_H) + c_3 \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} x \right) + \quad (2.19)$$

$$+ c_4 \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \sum_{s=1}^N \frac{\partial f_s}{\partial x} \right) - c_4 \frac{\partial \zeta}{\partial t_0} + E\rho_1(\zeta) - E\rho_2(\zeta);$$

$$\nabla^4 f_s = -c_{4+s} \frac{1}{x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \zeta_H}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.20)$$

Осесимметричность колебаний допускает понижение порядка производных в уравнениях (2.19), (2.20). Процедуру интегрирования основных уравнений по радиусу покажем на примере уравнений совместности деформаций, которые представим в виде

$$x \nabla^2 (\nabla^2 f_s) = -c_{4+s} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \zeta_H}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (2.21)$$

Интеграл от левой части (2.21) представим в виде суммы двух интегралов

$$\int x \nabla^2 (\nabla^2 f_s) dx = \int x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 f_s + \int \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 f_s dx. \quad (2.22)$$

Применяя к первому слагаемому правой части (2.22) правило интегрирования по частям, получаем

$$\int x \nabla^2 (\nabla^2 f_s) dx = x \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 f_s + C, \quad (2.23)$$

где  $C$  - постоянная интегрирования.

Интегрируя правую часть уравнений (2.21), окончательно получа-

ем уравнения совместности деформаций

$$x \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 f_s + c_{4+s} \left[ \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \zeta_H}{\partial x} \right)^2 \right] + C = 0, \quad (2.24)$$

где постоянная  $C$ , определяемая из условия отсутствия отверстия в пакете, равна 0.

После аналогичного интегрирования уравнения равновесия оно приобретает вид

$$\begin{aligned} c_1 \int_0^x y \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t_0^2} dy = & -c_2 x \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 (\zeta - \zeta_H) + c_3 x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + c_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \sum_{s=1}^N \frac{\partial f_s}{\partial x} - \\ & - c_4 \int_0^x y \frac{\partial \zeta}{\partial t_0} dy + E \int_0^x y [p_1(\zeta) - p_2(\zeta)] dy. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Искомые функции должны удовлетворять граничным условиям при  $x = 1$ :

$$\zeta - \zeta_H = \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - \zeta_H) = 0. \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial x^2} - \frac{\nu}{x} \frac{\partial f_s}{\partial x} = 0. \quad (2.27)$$

Таким образом, получены основные уравнения математической модели пакета, которая включает уравнение равновесия (2.25) и уравнение совместности деформаций (2.24) с соответствующими однородными граничными условиями.

Уравнения пакета являются достаточно общими. В коэффициенты уравнений вошли различные параметры слоев. Уравнения в

в комплексе охватывают ряд факторов, оказывающих существенное влияние на поведение пакета. В уравнениях предусмотрены геометрическая нелинейность, начальные несовершенства слоев, краевые смещения, демпфирование. Давления на внешние слои формулируются в общем виде как функции прогиба пакета, что позволяет ввести аналитические зависимости, учитывающие влияние жидкости и газа. Учет краевого смещения позволяет оценить влияние смещений опорного устройства и температуры на динамику пакета.

### 2.3. Переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Уравнения (2.24) и (2.25) представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. Решение даже линейных уравнений в частных производных представляет большие трудности. Большинство исследователей осуществляется тем или иным способом переход к обыкновенным дифференциальным уравнениям по времени, для которого известно большее количество апробированных численных методов / 103 /.

Применяя процедуру метода Бубнова-Галеркина / 96 /, представим производные от функций напряжений и перемещения в виде конечных рядов Фурье-Бесселя и Дини-Бесселя / 39, 93, 96 /, которые удовлетворяют граничным условиям (2.26) и (2.27)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \sum_{m=1}^M a_m(t_0) J_1(\alpha_m x); \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \sum_{n=1}^M b_{sn}(t_0) J_1(\gamma_n x), \quad (2.28)$$

где  $\alpha_m$  - нули функции Бесселя I-го ряда;  $n = 1, \dots, M$ ;  
 $\gamma$  - корни трансцендентного уравнения:



$$\gamma_n J_1'(\gamma_n) - \nu J_1(\gamma_n) = 0, \quad (2.29)$$

Функцию статического прогиба представим в виде, соответствующем формулам (2.28)

$$\zeta_n = \tilde{a}_1 / \alpha_1 [J_0(\alpha_1) - J_0(\alpha_1 x)] c, \quad (2.30)$$

где  $\tilde{a}_1$  - коэффициент, равный отношению прогиба в центре пакета к его толщине;

$$c = 2,731.$$

Подставляем (2.28) и (2.30) в уравнения (2.24) и (2.25). Используя рекуррентность функций Бесселя / 60, 63, 93 / , после ряда преобразований получаем уравнения совместности деформаций и уравнение равновесия

$$\sum_{n=1}^M \delta_{sn}(t_0) \gamma_n^2 x J_1(\gamma_n x) - c_{4+s} \left\{ \left[ \sum_{m=1}^M a_m(t_0) J_1(\alpha_m x) \right]^2 - \tilde{a}_1^2 J_1^2(\alpha_1 x) \right\} = 0, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} c_1 \int_0^x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t_0^2} dy &= c_2 \sum_{m=1}^M a_m(t_0) \alpha_m^2 x J_1(\alpha_m x) - c_2 \tilde{a}_1 \alpha_1^2 x J_1^2(\alpha_1 x) + \\ &+ c_3 \sum_{m=1}^M x J_1(\alpha_m x) a_m(t_0) + c_4 \sum_{m=1}^M a_m(t_0) J_1(\alpha_m x) \sum_{n=1}^M \sum_{s=1}^M \delta_{sn}(t_0) J_1(\gamma_n x) \quad (2.32) \\ &- c_4 \int_0^x \frac{\partial \zeta}{\partial t_0} dy + E \int_0^x [\rho_1(\zeta) - \rho_2(\zeta)] dy. \end{aligned}$$

После замены в (2.31) второго слагаемого двойным рядом уравнения совместности деформаций приобретают вид

$$\sum_{n=1}^M \delta_{sn}(t_0) \gamma_n^2 x J_1(\gamma_n x) - c_{4+s} \left[ \sum_{l=1}^M \sum_{q=1}^M a_l(t_0) a_q(t_0) J_1(\alpha_l x) J_1(\alpha_q x) - \tilde{a}_1^2 J_1^2(\alpha_1 x) \right] = 0. \quad (2.33)$$

В уравнении равновесия (2.32) по сравнению с уравнением (2.25) оставлены без изменений инерционное и демпфирующее слагаемые. Подынтегральное выражение у них содержит функцию прогиба, а не производную от нее. Поэтому непосредственно подставить ряд Фурье-Бесселя (2.28) не представляется возможным. Необходимые для этого дополнительные преобразования проведем на примере инерционного слагаемого. Пользуясь формулой для первообразной интеграла

$$\int_0^x \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy = \zeta(x, t_0) - \zeta(0, t_0), \quad (2.34)$$

представим инерционное слагаемое из (2.32) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t_0^2} \int_0^x y \zeta(y, t_0) dy = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} \int_0^x y \left[ \zeta(0, t_0) + \int_0^x \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy \right] dy. \quad (2.35)$$

Вместо подынтегрального выражения во втором слагаемом из квадратных скобок (2.35) подставляем соответствующий ряд (2.28).

Получающийся при этом интеграл является табличным / 104 /, что позволяет его заменить выражением, зависящим от функций Бесселя

$$\int_0^x \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy = \sum_{m=1}^M \frac{a_m(t_0)}{\alpha_m} \left[ 1 - J_0(\alpha_m x) \right]. \quad (2.36)$$

После интегрирования по радиусу ряда Фурье-Бесселя (2.28) с учетом граничного условия (2.26) функцию прогиба получаем в виде

$$\zeta(x, t_0) = \sum_{n=1}^M \frac{a_n(t_0)}{\alpha_n} [\mathcal{J}_0(\alpha_n) - \mathcal{J}_0(\alpha_n x)]. \quad (2.37)$$

Функцию прогиба (2.37) при  $x = 0$  и выражение (2.36) подставляем в формулу инерционного слагаемого (2.37).

Таким образом, инерционное слагаемое приобретает вид

$$c_1 \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} \left[ \sum_{m=1}^M \frac{x^2}{2} \frac{\mathcal{J}_0(\alpha_m)}{\alpha_m} a_m(t_0) - \sum_{m=1}^M \frac{1}{\alpha_m^2} x \mathcal{J}_1(\alpha_m x) a_m(t_0) \right]. \quad (2.38)$$

Демпфирующее слагаемое отличается лишь значением постоянного коэффициента и порядком производной по времени.

Умножаем уравнение равновесия (2.32) с учетом дополнительных выражений для инерционного (2.38) и демпфирующего слагаемых и уравнения совместности деформаций (2.31) соответственно на  $\mathcal{J}_1(\alpha_k x) dx$  ( $k = 1 \dots M$ ) и  $\mathcal{J}_1(\gamma_j x) dx$  ( $j = 1 \dots M$ ) и интегрируем в пределах от 0 до 1. С учетом свойства ортогональности функций Бесселя / 60 / приходим к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно временных функций

$$-c_1 \frac{H_1(k)}{\alpha_k^2} \frac{d^2 a_k}{dt_0^2} + c_1 \frac{H_3(k)}{2} \sum_{m=1}^M \frac{\mathcal{J}_0(\alpha_m)}{\alpha_m} \frac{d^2 a_m}{dt_0^2} = c_2 \alpha_k^2 H(k) a_k - \quad (2.39)$$

$$-c_2 \alpha_j^2 H(j) \tilde{a}_j + c_3 H_1(k) a_k + c_4 \frac{H_1(k)}{\alpha_k^2} \frac{d a_k}{dt_0} - c_4 \frac{H_3(k)}{2} \sum_{m=1}^M \frac{\mathcal{J}_0(\alpha_m)}{\alpha_m} \frac{d a_m}{dt_0} +$$

$$+c_1 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M a_m \sum_{s=1}^M \beta_{sn} H_2(m, k, n) + E \int_0^1 \int_0^x y [\rho_1(\xi) - \rho_2(\xi)] J_1(\alpha_k x) dy dx.$$

$$\beta_{sn} H_4(n) = c_{4+5} \sum_{l=1}^M \sum_{q=1}^M a_l a_q H_2(l, q, n) - c_{4+5} \tilde{\alpha}_1^2 H_2(1, 1, n). \quad (2.40)$$

где  $H_1, H_2, H_3, H_4$  - интегралы от функций Бесселя (табл. 2.1).

Для более компактной записи уравнений введем следующие обозначения:

$$1/\lambda_k = c_1 \left[ \frac{H_1(k)}{\alpha_k^2} - \frac{H_3(k)}{2\alpha_k} J_0(\alpha_k) \right]; \quad \gamma_k = \frac{1}{\lambda_k}; \quad \beta_k^2 = c_2 \lambda_k \alpha_k^2 H_1(k);$$

$$\alpha_{km} = \lambda_k c \frac{H_3(k)}{2\alpha_m} J_0(\alpha_m); \quad \mu_k = c_1 \lambda_k c_8 \sum_{n=1}^M \frac{H_2(m, R, n) H_2(l, q, n)}{H_4(n)}; \quad (2.41)$$

$$\varkappa_k = \lambda_k c_3 H_1(R); \quad \xi_k = c_4 \lambda_k; \quad \bar{\alpha}_{km} = \alpha_{km} \frac{c_1}{c_4} \lambda_k.$$

Из уравнений равновесия (2.39) и совместности деформаций (2.40) находим объединенную систему уравнений  $M$ -го порядка. После некоторых преобразований с учетом обозначений (2.41) получаем компактную систему уравнений колебаний пакета

$$-\ddot{a}_k + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^M \alpha_{km} \ddot{a}_m = \beta_k^2 a_k - \beta_1^2 \tilde{a}_1 + \varkappa_k a_k + \xi_k \dot{a}_k - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^M \bar{\alpha}_{km} \dot{a}_m \quad (2.42)$$

Таблица 2.1

Интегралы от функций Бесселя

Обозначение : интеграла :	Общий вид интеграла	Значение интеграла с уче- : том ортогональности :	Формула или способ : вычисления интеграла :
$H_1(k)$	$\int_0^1 x J_1(\alpha_m x) J_1(\alpha_k x) dx$	0 при $m \neq k$ ; $\int_0^1 x J_1^2(\alpha_k x) dx$ при $m=k$ ;	$\frac{1}{2} J_2^2(\alpha_k)$
$H_2(m, k, n)$	$\int_0^1 J_1(\alpha_m x) J_1(\alpha_k x) J_1(\gamma_n x) dx$		Численное интегрирование
$H_3(R)$	$\int_0^1 x^2 J_1(\alpha_k x) dx$		$\frac{1}{\alpha_k} J_2(\alpha_k)$
$H_4(n)$	$\int_0^1 x J_1(\gamma_j x) J_1(\gamma_n x) dx$	0 при $j \neq n$ ; $\int_0^1 x J_1^2(\gamma_n x) dx$ при $j=n$ ;	$\frac{1}{2} \gamma_n^2 \left(1 + \frac{\nu^2 - 1}{\gamma_n^2}\right) J_1^2(\gamma_n)$

$$\begin{aligned}
 & -\tilde{\alpha}_1^2 \sum_{m=1}^M \bar{\mu}_k a_m + \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^M \sum_{q=1}^M \mu_k a_m a_i a_q + \\
 & + \lambda_k E \int_0^1 \int_0^x y [\rho_1(\xi) - \rho_2(\zeta)] J_1(\alpha_k x) dy dx,
 \end{aligned}$$

где точками обозначены производные по  $t_0$ ;  $\bar{\mu}_k = \mu_k (i=q=1)$ .

Представленная система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (2.42) позволяет исследовать собственные и вынужденные колебания пакета.

#### 2.4. Реакция со стороны жидкости, соприкасающейся с пакетом

При формулировке исходных уравнений модели было показано, что давление жидкости на пакет пропорционально потенциальной функции, определяемой из уравнения Лапласа (2.10). Для записи граничных условий относительно потенциальной функции изложим дополнительные допущения относительно формы гидравлической полости:

1. Стенки гидравлической полости мембранного блока жесткие. Влияние отверстий (см. рис. I Введения) в ограничительном (под клапаны) и в распределительном (для поступления жидкости от гидропривода) дисках не учитываем.

2. Область, где находится жидкость, полагаем ограниченной не конической (см. рис. I Введения), а цилиндрической поверхностью. Тогда увеличивается расчетный объем, занимаемый жидкостью, изменяется и значение гидродинамического давления. Поскольку высота столба жидкости для обеих форм областей одинакова, то

есть основание полагать, что изменение формы области существенно не повлияет на гидродинамическое давление. В рамках приближенных оценочных расчетов принятое допущение является вполне приемлемым.

Для области, имеющей в соответствии с принятыми допущениями прямоугольную форму поперечного сечения, известно аналитическое решение уравнения Лапласа / 13 /. Потенциал жидкости, выраженный через функции Бесселя, принимаем в виде

$$\bar{\varphi}(x, t_0, \bar{z}_F) = \sum_{m=1}^M B_m J_0(\alpha_m x) \operatorname{ch}[\alpha_m (\bar{z}_F - \bar{h})] \cos \omega t_0, \quad (2.43)$$

где

$$\bar{z}_F = \frac{z_F}{R}; \quad \bar{h} = \frac{h}{R}; \quad \bar{\varphi} = \frac{\rho_0 \omega_0}{E} \varphi; \quad \omega = \frac{\omega_1}{\omega_0};$$

$\omega_1$  - частота колебаний пакета, контактирующего с жидкостью.

Потенциальная функция жидкости (2.43) удовлетворяет граничным условиям соответственно на цилиндрической и круговой поверхностях гидравлической полости

$$\left. \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right|_{x=1} = 0; \quad \left. \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{z}_F} \right|_{\bar{z}_F = \bar{h}} = 0, \quad (2.44)$$

и граничному условию на круговой поверхности контакта пакета и жидкости

$$\left. \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{z}_F} \right|_{\bar{z}_F=0} = \begin{cases} \frac{\partial \zeta(x, t_0)}{\partial t_0}, \text{ при } x < 1 \\ 0, \text{ при } x = 1. \end{cases} \quad (2.45)$$

Полагаем, что динамическое перемещение пакета (2.37), как и потенциал жидкости, тоже гармонически зависит от времени. С учетом предположения о малости амплитуд колебаний функция прогиба (2.37) приобретает вид

$$\zeta(x, t_0) = \sum_{m=1}^M \frac{A_{m1}}{\alpha_m} [J_0(\alpha_m) - J_0(\alpha_m x)] \cos \omega t_0, \quad (2.46)$$

где  $A_{m1}$  — коэффициент, соответствующий малым колебаниям пакета.

Из граничного условия (2.45), используя выражения для потенциала (2.43) и перемещения пакета (2.46), находим связь между коэффициентами разложений в ряд потенциальной функции и перемещения. Благодаря тому, что в обоих разложениях фигурируют одинаковые функции Бесселя, эта связь оказывается довольно простой:

$$B_m = - \frac{\omega}{\alpha_m^2 \operatorname{sh}(\alpha_m \bar{h})} A_{m1}. \quad (2.47)$$

Функция давления (2.9) жидкости на пакет для потенциала (2.43) с учетом "сшивания" (2.47) имеет вид

$$p_2(x, \bar{z}_F, t_0) = A \sum_{m=1}^M \frac{J_0(\alpha_m x)}{\alpha_m^2} \operatorname{cth}(\alpha_m \bar{h}) \cos \omega t_0 A_{m1} \quad (2.48)$$

где



$$A = \omega^2 \rho_0 \frac{\omega_0^2 H^2}{E} \frac{R}{H}.$$

Реакция жидкости на перемещение пакета учитывается подстановкой полученной функции давления в подынтегральное выражение соответствующего слагаемого из системы (2.42):

$$\lambda_k E \int_0^1 \int_0^x y [-p_2(\zeta)] J_1(\alpha_k x) dy dx = \quad (2.49)$$

$$\frac{1}{\varphi_1} \frac{R}{H} \frac{\rho_0}{\rho} \omega^2 \cos \omega t_0 \sum_{m=1}^M I_F(m) I(m, k) \cdot A_{m1},$$

где

$$I_F(m) = \frac{1}{\alpha_m^2} \operatorname{cth}(\alpha_m h); \quad I(m, k) = \int_0^1 \int_0^x y J_0(\alpha_m y) dy J_1(\alpha_k x) dx;$$

$$\varphi_1(m) = \frac{H_1(m)}{\alpha_m^2} - \frac{J_0(\alpha_m)}{2\alpha_m} H_3(m).$$

Интегралы из (2.49), содержащие функции Бесселя, после двукратного интегрирования выражаются через известный интеграл из таблицы 2.1:

$$I(m, k) = \begin{cases} 0, & m \neq k; \\ H_1(m)/\alpha_m, & m = k. \end{cases}$$

Таким образом, в рамках сформулированных выше допущений получено выражение (2.49), описывающее реакцию жидкости на перемещение пакета. В задаче собственных колебаний выражение (2.49) будет использовано для оценки влияния жидкости, находящейся в гидравлической полости, на собственную частоту колебаний пакета.

### 2.5. Реакция упругих сил контактирующего с пакетом газа

Для определения функции давления на пакет со стороны газовой полости применяется подход, отличающийся от метода решения гидродинамической задачи. Газ, наполняющий замкнутую нагнетательную полость, представляет собой как бы упругую "подушку". Поскольку все стенки нагнетательной полости являются жесткими, то изменение объема газа и, соответственно, упругих свойств системы "Газ-пакет" происходит при перемещениях пакета, выполняющего роль подвижного элемента. Пользуясь определенной аналогией, функцию давления со стороны газа определяем по методике для пневматического амортизатора / IOI /.

Нелинейное восстанавливающее давление, действующее на пакет, состоит из двух компонентов (2.8): начального и текущего абсолютных давлений газа. Текущее давление газа обусловлено изменением его объема. Формула изменения состояния газа при политропическом процессе имеет вид

$$P_a = P_{a_0} \left( \frac{V_0}{V} \right)^\gamma \quad (2.50)$$

где  $\gamma$  - показатель политропы;

$V_0, V$  - начальное и текущее объемы газовой полости.

Текущий объем газа зависит от перемещения пакета  $w$

$$V = V_0 - \int_0^w S dy, \quad (2.51)$$

где  $S$  - эффективная  $|101|$  площадь поверхности пакета, соприкасающейся с газом.

При малых амплитудах колебаний пакета эффективную площадь можно положить постоянной. Начальный объем газовой полости равен:

$$V_0 = S \cdot \delta, \quad (2.52)$$

где  $\delta$  - начальная высота столба сжатого газа.

Подставляя (2.50) с учетом (2.52) и (2.51) в (2.8), получаем

$$\bar{p}_1 = p_{a_0} \left[ \left( \frac{\delta}{\delta - w} \right)^2 - 1 \right]. \quad (2.53)$$

Раскладываем выражение (2.53) в ряд Маклорена и переходим к безразмерным переменным

$$p_1(\xi) = C_1 \xi + C_2 \xi^2 + C_3 \xi^3, \quad (2.54)$$

где

$$p_1 = \frac{\bar{p}_1}{E}; C_1 = \frac{p_{a_0} H \gamma}{E \delta}; C_2 = \frac{p_{a_0} H^2 \gamma(\gamma+1)}{E 2\delta^2}; C_3 = \frac{p_{a_0} H^3 \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{E 6\delta^3}.$$

В выражении (2.54) сохраним только линейное слагаемое, поскольку при численной оценке было установлено, что его значение намного больше квадратичного и кубического слагаемых.

Реакцию газа на перемещение пакета получим, подставив линейное слагаемое из (2.54) в подынтегральное выражение последнего слагаемого системы уравнений (2.42) и проинтегрировав с

учетом выражения для прогиба (2.37)

$$\lambda_k E \int_0^1 \left\{ \int_0^x y p_1[\zeta(y, t_0)] dy \right\} J_1(\alpha_k x) dx = \lambda_k E I_G, \quad (2.55)$$

где

$$I_G = C_1 \sum_{m=1}^M a_m(t_0) \psi_1(m).$$

Здесь  $\psi_1(m)$  - постоянные величины, в состав которых входят интегралы от функций Бесселя. Формула для вычислений этих величин приведена в спецификации к равенству (2.49).

Таким образом, полученное в настоящем параграфе выражение (2.55) для реакции газа, находящегося в замкнутой полости, имеет законченный вид. В следующем разделе выражение (2.55) используется для оценки влияния газа на частоту колебаний пакета.

## 2.6. Выводы

1. На основе предположения о равенстве поперечных перемещений отдельных слоев построена математическая модель колебаний пакета круглых гибких пластин, допускающая скольжение между слоями / 38, 41 /. Уравнения модели учитывают краевые смещения, механические и геометрические параметры отдельных слоев, начальное несовершенство пакета, давления со стороны газа и жидкости, контактирующих с пакетом.

2. При формировании основных уравнений пакета неоднородные граничные условия относительно краевых смещений преобразованы в однородные условия, выражение через функции напряжений. Выполненная замена переменных дала возможность применить ряды

по функциям Бесселя.

3. Введен специальный комплекс безразмерных и осредненных переменных, благодаря которому обеспечивается общность уравнений, предоставляется возможность непосредственного использования табличных интегралов, понижается вероятность возникновения машинного переполнения при вычислениях на ЭЦВМ.

4. В основных уравнениях осуществлен переход к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений методом Бубнова-Галеркина, для чего производные по радиусу от функций напряжений и прогиба аппроксимированы рядами Фурье-Бесселя и Дини-Бесселя, автоматически удовлетворяющими однородными граничными условиями.

5. Получены выражения для реакций на перемещение пакета находящихся в замкнутых полостях жидкости и газа.

## ГЛАВА 3

СОБСТВЕННЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ  
КОЛЕБАНИЯ ПАКЕТА3.1. Метод и алгоритм вычислений на ЭЦВМ параметров  
собственных колебаний пакета

Нелинейность уравнений (2.42), описывающих колебания пакета, приводит к необходимости применения специальных методов решения. Наиболее распространенным и достаточно общим является метод гармонического баланса / 73 /. Использование процедуры названного метода в данном случае позволяет получить уравнение для определения частот собственных колебаний пакета.

В соответствии с методом гармонического баланса временную функцию  $Q_k(t_0)$  представим в виде / 96 /

$$Q_k(t_0) = A_{k0} + A_{k1} e^{i\omega t_0}, \quad (3.1)$$

где  $A_{k0}$  - коэффициент, соответствующий перемещению под действием статических нагрузок;

$A_{k1}$  - коэффициент, соответствующий динамическому перемещению пакета около положения равновесия;

$\omega$  - безразмерная частота, равная отношению размерной частоты к постоянной величине  $\omega_0$  из комплекса (2.18).

Полагаем, что коэффициенты  $A_{k1}$  намного меньше, чем  $A_{k0}$ . Подставляем выражение (3.1) в систему уравнений (2.42) с учетом найденных реакций со стороны жидкости (2.49) и газа (2.55). Сла-

гаемыми, которые зависят от вторых и более высоких степеней пренебрегаем в силу их малости.

Получаем частотное уравнение, представляющее собой систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A_{k1}$ :

$$\begin{aligned}
 & (\omega^2 - \beta_k^2 + \omega \xi_k - \alpha_k) A_{k1} - \omega^2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^M d_{km} A_{m1} + \\
 & + \omega \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^M \bar{d}_{km} A_{m1} + \tilde{A}_0^2 \sum_{m=1}^M \bar{\mu}_k A_{m1} - \sum_{j=1}^M q_{jk} A_{j1} + \\
 & + f \omega^2 \sum_{m=1}^M I_F(m) I(m, m) A_{m1} - \lambda_k E I_G A_{k1} = 0, \quad k=1, \dots, M.
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{1}{\varphi_1} \frac{\rho_F}{\rho} \frac{R}{H}; \quad q_{jk} = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^M \mu(m, i, j) A_{m0} A_{i0} + \\
 & + \sum_{m=1}^M \sum_{q=1}^M \mu_k(m, i, q) A_{m0} A_{q0} + \sum_{i=1}^M \sum_{q=1}^M \mu_k(i, j, q) A_{i0} A_{q0}.
 \end{aligned}$$

Решение частотного уравнения (3.2) существенным образом зависит от нелинейного напряженно-деформированного состояния пакета, которому соответствует система нелинейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A_{k0}$ :

$$\begin{aligned}
 & (\beta_k^2 + \alpha_k) A_{k0} - \beta_1^2 \tilde{A}_0 + \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^M \sum_{q=1}^M \mu_k(m, i, q) A_{m0} A_{i0} A_{q0} - \\
 & - \tilde{A}_0^2 \sum_{m=1}^M \mu_k A_{m0} + \lambda_k E (\rho_2 - \rho_1) H_3(k) / 2 = 0.
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Большой объем вычислений по определению коэффициентов обеих систем, сложность решения нелинейных уравнений (3.3) требуют применения ЭЦВМ. Процедура численного решения задачи состоит из следующих этапов.

1. Ввод исходных данных по каждому слою пакета.
2. Вычисление интегралов от функций Бесселя (см. табл. 2.1).
3. Определение комплекса безразмерных и осредненных переменных (2.18).
4. Вычисление коэффициентов компактной системы уравнений (2.41).
5. Решение системы нелинейных алгебраических уравнений (3.3).
6. Вычисление значения частоты собственных колебаний (3.2).
7. Определение формы статического прогиба пакета (2.37).

Вычисление интегралов от функций Бесселя производится по формулам из табл. 2.1. Значение интеграла  $H_2$  определяется численным интегрированием, модифицированным методом трапеций.

Значительную трудность представляет решение системы нелинейных алгебраических уравнений (3.3). Известный метод решения Ньютона-Рафсона здесь не пригоден, так как требует дифференцирования уравнений, что в данном случае приводит уже для второго приближения к весьма громоздким выкладкам.

С другой стороны, из-за учета в уравнениях большого количества различных факторов весьма неопределенным оказывается выбор значений вектора начального приближения. Учитывая названные обстоятельства, считаем целесообразным решение уравнений (3.3) ограничить первым приближением. Тогда вместо системы кубических уравнений решение сводится к одному уравнению.

Для успешного применения функций Бесселя весьма перспективно использование современных быстродействующих ЭЦВМ, обладающих



обширной библиотекой прикладных подпрограмм. Решение данной задачи реализовано в виде алгоритма на языке ФОРТРАН. Пакет подпрограмм состоит из пяти модулей, из которых два относятся к типу подпрограмм-функций. Наиболее объемной является подпрограмма ввода исходных данных, включающая около 230 перфокарт. Все программные единицы каталогизированы на резидентном диске в библиотеке объемных модулей / 72 /.

### 3.2. Исследование влияния краевых смещений и начального несовершенства пакета пластин на статический прогиб и собственные частоты колебаний

С помощью программы, описанной в предыдущем параграфе, проведено численное исследование влияния начального несовершенства и краевых смещений слоев на статический прогиб и частоты собственных колебаний пакета.

Начальное несовершенство состоит в том, что в исходном недеформированном состоянии пакет обладает некоторым прогибом, обусловленным некачественным изготовлением. Из-за весьма малой толщины слоев пакета избавиться от начального несовершенства практически невозможно. Значение прогиба, вызванного начальным несовершенством, может быть соизмеримо с толщиной пакета.

Краевые смещения, учитываемые в расчетах, распределяются по контуру равномерно. Рассматриваются сжимающие и растягивающие смещения. Для тонкого пакета мембранной установки особый интерес представляет область сжимающих усилий, где происходит потеря устойчивости и пакет переходит в закритическое состояние / 23, 28 /.

Исследование закритического состояния требует решения сис-

темы уравнений (3.3), где учитывается геометрическая нелинейность. Как указывалось в предыдущем параграфе, целесообразно ограничиться одним уравнением из этой системы, положив для этого постоянную  $M$  равной единице. После нахождения корня  $A_0$  нелинейного алгебраического уравнения в программе для ЭЦВМ предусмотрено вычисление зависимости безразмерного прогиба  $\zeta$  от радиуса  $\mathcal{X}$  в соответствии с формулой (2.37). По найденному значению корня с помощью частотного уравнения (3.2) вычисляется также соответствующее значение безразмерной частоты собственных колебаний  $\omega$ .

В мембранной установке пакет круглых пластин зашпелен по контуру. Это означает, что прогиб и угол поворота в заделке отсутствуют, что отражено в граничных условиях (2.26). Краевые смещения учитываются в уравнениях (3.2) и (3.3) посредством коэффициентов  $\mathcal{X}$  с обязательным соблюдением однородных граничных условий (2.27). Уравнения (3.2) и (3.3) не требуют подчинения искомым функций граничным условиям, поскольку удовлетворение граничных условий с помощью рядов Фурье-Бесселя и Дини-Бесселя (2.28) осуществляется автоматически.

Уравнения модели слоистого пакета представляет собой уравнения эквивалентной однородной пластины. Без ущерба для общности данного исследования полагаем все слои одинаковыми. Значения параметров пакета не приводятся, поскольку решение выполнено относительно безразмерных переменных. Заметим только, что на рис. 3.1 и 3.2 по оси абсцисс откладываются значения безразмерного смещения одного слоя пакета, вычисляемого по формуле, аналогичной формуле для однородной пластины / II2 /

$$u_0 = u_{s0} R/H, \quad s = 1, 2, 3,$$

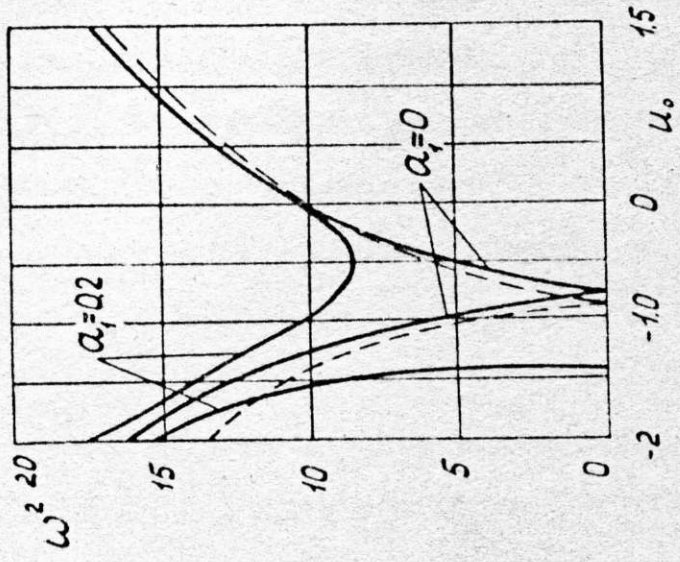


Рис. 3.2

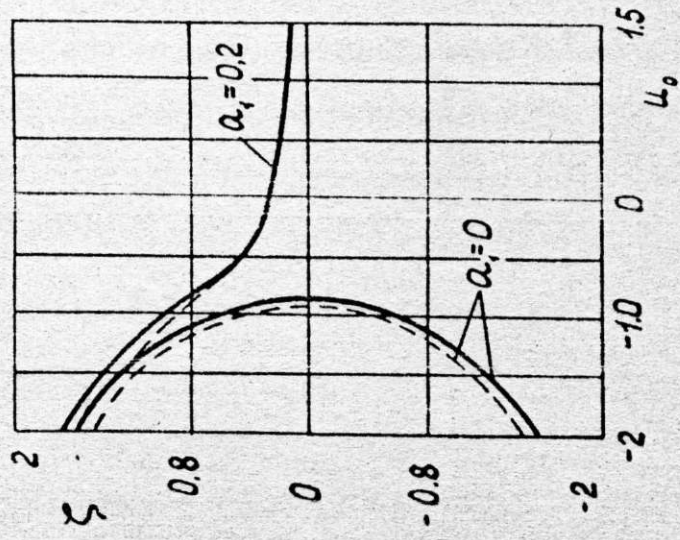


Рис. 3.1

где  $U_{s0}$  - безразмерное смещение  $s$ -го слоя пакета  
(2.18);

$R, H$  - радиус и толщина пакета.

Такая постановка дает возможность сравнить результаты расчета пакета с аналогичными теоретическими данными по однородной гибкой пластине / II2 / и с собственными экспериментальными данными / 37 /. На рис. 3.1 - 3.2 пакету соответствует сплошная линия, а однородной пластине / II2 / - пунктирная.

Статический прогиб пакета с увеличением сжимающих краевых смещений  $U_0$  существенно возрастает (рис. 3.1). После некоторого значения краевого смещения (критического) деформирование пакета становится неоднозначным: в закритической зоне возможны два положения пакета, отличающиеся между собой знаками статического прогиба. Разветвление функции статического прогиба на графике происходит при  $U_0 \approx -1$ . Анализом численных результатов установлено, что заметное влияние начального несовершенства проявляется в зоне краевых смещений между точкой, где краевые смещения отсутствуют (неподвижно заземленный контур) и точкой потери устойчивости.

Частота колебаний пакета по сравнению с собственной частотой малых колебаний неподвижно заземленной пластины (указанное значение равно  $10.21 / 98 /$ ) с ростом растягивающих перемещений на контуре значительно возрастает. С другой стороны, при сжатии пакета его частота уменьшается вначале до нулевого значения, после чего опять начинает возрастать, причем более быстро, чем в зоне, находящейся правее точки потери устойчивости. Так же, как и для функции статического прогиба, начальные несовершенства слоев наиболее существенно сказываются в зоне между нулевым и критическим значениями краевых перемещений пакета.

Сравнение полученных результатов с данными / II2 / для однородной пластины (показаны на рис. 3.1 и 3.2 пунктирными линиями) указывает на достаточную близость сопоставляемых безразмерных переменных.

Для сравнения с экспериментальными данными с помощью ЭЦВМ построена зависимость частоты собственных колебаний пакета от статического прогиба в центре (см. рис. 3.3). В качестве исходных данных приняты следующие характеристики для каждого слоя трехслойного пакета: модуль упругости  $2,06 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона 0,3, плотность 7800 кг/м<sup>3</sup>, толщина пакета  $0,4 \cdot 10^{-3}$  м. Начальное несовершенство пакета принято равным  $0,08 \cdot 10^{-3}$  м. При расчетах варьировалось значение сжимающего краевого смещения от  $0,4 \cdot 10^{-5}$  м до  $-0,4 \cdot 10^{-5}$  м с шагом  $0,1 \cdot 10^{-5}$  м.

Зависимость значений частоты  $\nu$  (Гц) собственных колебаний от статического прогиба  $w$  ( $10^{-3}$  м) (соответствующие значения показаны на рис. 3.3 белыми кружочками), найденная при исследовании на вибростенде (см. раздел 4) однородной пластины, обладающей характеристиками, принятыми для слоев пакета, оказались близкими к теоретической кривой. Опытные значения частот собственных колебаний трехслойного пакета легли выше и расположились вдоль расчетной зависимости (на рис. 3.3 заштрихованными кружочками).

Из анализа результатов следует, что пакет является системой более гибкой, чем однородная пластина такой же суммарной толщины. С другой стороны, судя по вычисленным значениям частот (см. рис. 3.3) теоретическая жесткость его такая же, как у однородной пластины с толщиной, равной толщине одного слоя (для пакета из одинаковых слоев). Более высокие значения частот реального

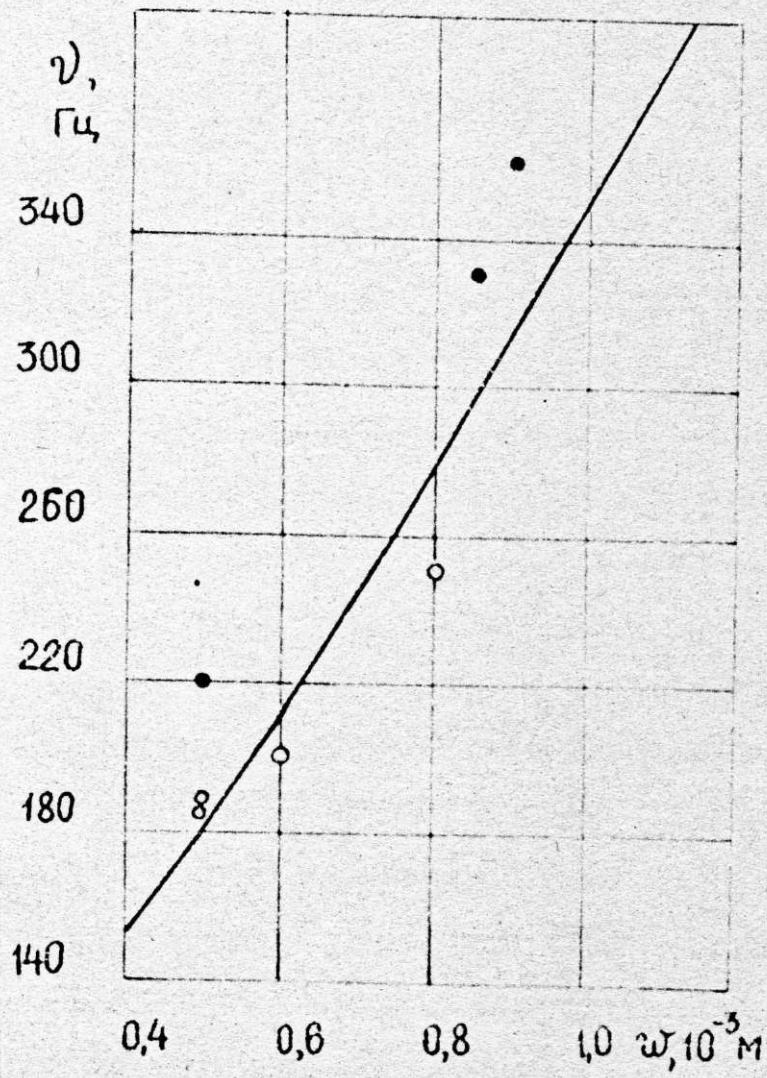


Рис. 3.3

пакета (см. рис. 3.3), использованного в эксперименте, объясняются тем, что реальные функции распределения начальных несовершенств каждого слоя различны и несколько отличаются от осесимметричного закона, заложенного в уравнениях модели пакета.

Из полученных результатов следует вывод о целесообразности применения рассматриваемого пакета в мембранных установках, где гибкость пакета способствует повышению его долговечности. Однако тонкий пакет более чувствителен к краевым смещениям, чем пакет большей толщины. После потери устойчивости под действием сжимающих краевых смещений пакет приобретает форму, близкую к форме сферической оболочки. Естественно предположить, что в этом состоянии пакет будет деформироваться под действием равномерного давления так же, как и сферическая оболочка. Данные опытов /28/ показывают, что деформирование сферической оболочки происходит с образованием вмятин различной формы. Возникновение вмятин нежелательно для мембранной установки, поэтому необходимо принимать меры, устраняющие вредное влияние сжимающих краевых смещений пакета. С этой целью рекомендуется использовать те конструкции опорных устройств, где исключены смещения в зоне заземления гибкого элемента. Устранить возможность перехода пакета в критическое состояние можно путем создания растягивающих краевых смещений на его контуре. Однако в этом случае существенно усложняется конструкция опорного устройства.

### 3.3. Оценка влияния на собственные частоты колебаний пакетов пластин и мембран конечных объемов жидкости и газа

Жидкость и газ, находящиеся соответственно в гидравлической и газовой замкнутых полостях, при контакте с пакетом изме-

няют значение частоты его колебаний. Ниже получены аналитические формулы для собственных частот колебаний пакета, которые наглядно показывают влияние параметров жидкости и газа. Представленные выражения сравниваются с известными решениями для однородных пластин и мембран. Производится сравнительная численная оценка значений частот.

При удержании одного члена ряда в разложениях рядов Фурье-Бесселя и Дини-Бесселя система уравнений (3.2) сводится к квадратному уравнению относительно безразмерной частоты  $\omega$  :

$$a\omega^2 + b\omega + c = 0,$$

где

$$a = 1 + f I_f(1) I(1,1); \quad b = -\xi;$$

$$c = -\beta_1^2 + \alpha_1 + \tilde{A}_0^2 \mu_1 - \lambda_1 E_1 I_G - 3\mu_1 A_{10}^2.$$

Частота собственных колебаний системы "газ-пакет-жидкость" вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{1}{2a} (-b + \sqrt{b^2 - 4ac}). \quad (3.4)$$

Отсюда получается формула, учитывающая влияние только жидкости на частоту

$$\omega = \frac{\beta_1}{\sqrt{1+a}}. \quad (3.5)$$

Справедливость формулы (3.5) подтверждается ее большим сходством с аналогичной формулой для мембраны, полученной в качестве частного случая из уравнения, приведенного в статье / 13 /



$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \mu_1 \frac{R}{\delta} \frac{\rho_0}{\rho_1} \operatorname{ctg}(\mu_1 \frac{h}{R})}}, \quad (3.6)$$

где  $\omega_0$  - безразмерная частота собственных колебаний мембраны, не контактирующей с жидкостью;

$\mu_1$  - наименьший по значению корень уравнения

$$J_1(\mu_1) = 0,$$

$R, \delta$  - радиус и толщина мембраны;

$\rho_0, \rho_1$  - плотности жидкости и мембраны;

$h$  - высота столба жидкости.

Вид обоих равенств (3.5) и (3.6) указывает на то, что частоты колебаний мембраны и пакета зависят от отношения радиуса к толщине, плотностей жидкости и материала упругой системы, высоты столба жидкости к радиусу. При численной проверке значения частоты мембраны, подсчитанного по формуле (3.6), получено удовлетворительное совпадение (табл. 3.1) с данными, определенными в статье / 13 /. Некоторое различие объясняется тем, что неизвестные данные по плотностям жидкости и мембраны при расчете принимались произвольно: предполагалось, что стальная мембрана контактирует со столбом воды.

Численная оценка значений безразмерной частоты  $\omega$  для пакета из стальных мембран (табл. 3.1, вариант 2) и гибкого пакета мембранного компрессора (см. табл. 3.1, вариант 3) показывает, что

а) контактирование пакета с жидкостью приводит к снижению частоты его собственных колебаний;

б) наиболее существенное влияние на понижение частоты оказывают значения отношений радиуса пакета к его усредненной тол-

Таблица 3.1

Влияние жидкости на собственные частоты колебаний однородной мембраны (1), пакета мембран (2) и пакета пластин мембранного компрессора (3)

	толщина мем- браны или па- кета (усред- ненная), $10^{-3}$ м	Радиус мемб- раны или па- кета, $10^{-3}$ м	Отношение высоты стол- ба жидкости к радиусу	Уменьшение частоты, %
1	0,1	2	0,6	69
2	0,1	2	0,6	13
3	0,4	85	0,03	13

Таблица 3.2

Влияние давления газа в мембранном компрессоре на частоту собственных колебаний пакета

	Начальное абсолютное давление газа, 0,1 МПа				
	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
Безразмерная частота	10,37	10,41	10,45	10,48	10,52
Увеличение частоты, %	0,25	0,29	0,67	0,99	1,3

щине и плотностей жидкости и материала пакета.

Влияние параметров газа на частоту колебаний пакета мембранного компрессора учитывается в формуле, вытекающей из (3.4)

$$\omega = \sqrt{B_1^2 + \lambda_1 EI_G} . \quad (3.7)$$

Оценка значений частоты пакета мембранного компрессора (табл.3.2) указывает на то, что газ увеличивает жесткость всей упругой системы, чем и объясняется возрастание частоты с ростом начального абсолютного давления.

#### 3.4. Вынужденные колебания пакета под действием динамической нагрузки

Рабочий процесс мембранной установки подобен рабочему процессу поршневой машины. При тактах всасывания и нагнетания пакет пластин совершает хлопообразное движение между внутренними поверхностями распределительного и ограничительного дисков.

Определение внешних нагрузок, действующих на пакет в реальной мембранной установке, представляет весьма сложную задачу. С помощью измерительной системы, созданной специально для мембранного компрессора, С.М.Алтуховым и Э.И.Левиным / 5 / получена зависимость давления газа от угла поворота вала. Экспериментальная диаграмма включает зоны интенсивного снижения (такт всасывания) и повышения (такт нагнетания) давления газа. В промежутке между этими скачками давление практически не изменяется и равно давлению всасывания. Скачки давления занимают весьма малую часть рабочего цикла мембранного компрессора, поэтому в расчетах необходимо учитывать динамический характер нагрузок, прикладываемых к пакету. Внешнюю нагрузку на пакет в расчетных

уравнениях представляем в виде экспоненциальной зависимости. Задача о вынужденных колебаниях пакета под действием экспоненциальной нагрузки с учетом конечности амплитуд решается численным интегрированием методом Рунге-Кутта-Фельберга /39, 40, 65 /.

Вынужденные осесимметричные колебания рассматриваем с помощью уравнений (2.42) математической модели, допускающей проскальзывание слоев. Коэффициенты уравнений зависят от числа слоев и их механических характеристик. В уравнениях учитываются начальное несовершенство, краевые смещения, демпфирование, геометрическая нелинейность, статическая и динамическая нагрузки. Учет перечисленных выше факторов позволяет исследовать колебания с конечными амплитудами и использовать в расчетах собственную частоту колебаний пакета, вычисляемую для реальных условий его закрепления.

Известные из литературы решения задачи вынужденных нелинейных колебаний круглых пластин с помощью рядов из функций Бесселя проводились в первом приближении. Тем не менее, экспериментальные данные подтвердили достаточную точность теоретических результатов. Очевидно, что и в уравнениях колебаний пакета целесообразно ограничиться только первыми слагаемыми рядов Фурье-Бесселя и Дини-Бесселя. Тогда система уравнений сводится к одному нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению 2-го порядка, которое затем легко приводится к нормальному виду, необходимому для численного интегрирования его на ЭЦВМ методом Рунге-Кутта.

Динамическую нагрузку описываем экспоненциальной зависимостью, которая является достаточно общей. С ее помощью можно рассмотреть нагружение внезапно приложенным давлением / 14 / или аппроксимировать нагрузку ударного типа / 99 /. При необходимо-

сти в расчетную программу может быть внесена любая другая функция нагрузки.

Итак, уравнение вынужденных колебаний пакета из (2.42) запишем в следующем виде

$$\ddot{a} + (\beta^2 + \alpha - \mu)a + \xi \dot{a} + \mu a^3 = \beta^2 \tilde{a}_0 + \rho_0 + \varphi(t_0), \quad (3.8)$$

где  $\rho_0$  - статическое давление на пакет;  
 $\varphi(t_0)$  - функция динамической нагрузки.

Предполагаем, что на характер вынужденных колебаний существенное влияние оказывает статическое напряженное состояние, которое формируется в слоях пакета при его больших прогибах под действием краевых смещений и статического давления. Выполним замену переменной в (3.8), выделив статическую и динамическую составляющие

$$a(t_0) = A_0 + z(t_0). \quad (3.9)$$

В отличие от представления (3.1) динамическая составляющая в формуле (3.9) описывает колебания с конечными амплитудами. Подставив функцию (3.9) уравнение (3.8) приходим к уравнению статики и уравнению динамики. Уравнение статики имеет такой же вид как полученное раньше уравнение (3.2) (при  $M = 1$ ) в задаче собственных колебаний. Процесс вынужденных колебаний описывается следующим уравнением

$$\ddot{z} + \omega_1^2 z + \xi \dot{z} + 3A_0 \mu z^2 + \mu z^3 = \varphi(t_0), \quad (3.10)$$

где

$$\omega_1^2 = \beta^2 + \alpha - \mu + 3A_0^2 \mu.$$

В силу нелинейности уравнения динамики пакета (3.10) решение его осуществляется путем численного интегрирования на ЭЦВМ. Начальные условия при  $t_0 = 0$  задаем следующие  $Z(0) = 0$ ;  $\dot{Z}(0) = 0$ . Коэффициенты уравнения (3.10) вычисляются с помощью программы, описанной в параграфе 3.1.

Успех решения дифференциальных уравнений зависит, как известно / I00 /, от метода и соответствующей программы для ЭЦВМ. Численное интегрирование уравнения (3.10) осуществляется на ЭЦВМ типа ЕС методом Рунге-Кутты-Фельберга 4-го порядка, реализованного в подпрограмме *RKF45 / I00 /*. Эта подпрограмма является подпрограммой интерфейса: она вызывает подпрограмму *RKFS*, интегрирующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая в свою очередь вызывает подпрограмму *FENL*, вычисляющую приближенное решение на один шаг. Выбранная программа является достаточно точной и довольно гибкой, обладает широкими возможностями для отладки.

Дифференциальное уравнение 2-го порядка (3.10) приводится к адекватной системе двух уравнений 1-го порядка. Для вычисления правых частей этой системы составлена специальная подпрограмма.

Для управления процессом интегрирования также составлена специальная подпрограмма. В ней задаются начальные условия, границы абсолютной и относительной погрешностей, шаг и интервал печати. Управляющая подпрограмма содержит вызов основной подпрограммы интегрирования.

Составленные пользователем и стандартные подпрограммы интегрирования уравнения вынужденных колебаний объединены в единую программу вместе с подпрограммами решения задачи собственных колебаний. Объединение этих подпрограмм стало возможным благодаря модульной структуре программ на ФОРТРАНЕ в дисковой операционной системе ЕС ЭВМ / 72 /. Значения коэффициентов уравнения (3.10)

из подпрограммы ввода исходных данных через общие области передаются в управляющую программу, откуда посредством формальных параметров они передаются в подпрограммы интегрирования. Выбор именно такого способа передачи информации объясняется тем, что в отличие от первой группы модулей подпрограммы интегрирования оперируют переменными с удвоенной точностью.

Для проверки работоспособности программы решена тестовая задача, предложенная в книге Т.Шупа / 103 /. Рассмотрено движение системы, описываемое нелинейным дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + cx + kx + k^*x^3 = 0,$$

с начальными условиями:  $x(0) = 10$  см,  $\dot{x}(0) = 0$ .

Полученная в настоящей работе и представленная в / 103 / зависимости смещения  $x$  от времени совпали друг с другом.

Уравнение колебаний пакета (3.10) отличается от известного уравнения колебаний однородной пластины / 14 / постоянными коэффициентами. Поэтому исследование новых нелинейных эффектов при вынужденных колебаниях пакета приводится на примере однородной пластины.

Рассмотрена задача о вынужденных колебаниях однородной круглой гибкой защемленной пластины под действием внезапно приложенного давления. В расчетах приняты параметры пластины, использованные в экспериментах на вибростенде: толщина  $0,4 \cdot 10^{-3}$  м; модуль упругости  $2,06 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>; плотность 7800 кг/м<sup>3</sup>; радиус 0,085 м; коэффициент Пуассона 0,3; значение внезапно приложенного давления  $10^3$  Н/м<sup>2</sup>.

Временные зависимости вынужденных колебаний круглой плас-

тинки представлены на рис. 3.4. Линией 1 показано решение уравнения (3.10) без учета нелинейных слагаемых, а сплошной 2 - с учетом нелинейных членов. Решение нелинейного уравнения (3.10) показало, что истинные амплитуды и частоты колебаний меньше амплитуды и частоты колебаний, вычисленных по линейному уравнению. Пользуясь пропорциональностью между временной зависимостью и прогибом пластины легко установить, что по линейному решению безразмерный прогиб в центре пластины равен 7.0, а согласно нелинейному равен 2.5.

В отличие от линейных колебаний увеличение значения внезапно приложенного давления (рис. 3.5) приводит к смещению максимума амплитуды колебаний (линия 1 - 0.01 МПа; линия 2 - давление 0.1 МПа).

Расчет вынужденных колебаний пластины под действием внезапно приложенного давления с учетом сжимающих краевых смещений показал (рис. 3.6), что в этом случае происходит смещение максимума амплитуды колебаний, которое зависит от знака соответствующего статического прогиба. Статический прогиб возникает после потери устойчивости пакета под действием сжимающих краевых смещений. На рис. 3.6 приведены три варианта расчета: линия 1 - краевые смещения отсутствуют; линия 2 - статический прогиб (безразмерный) в центре равен 1,25; линия 3 - прогиб равен: -1,25.

### 3.5. Прохождение пакета через резонанс при линейном законе изменения частоты возмущающей силы

Особенность поведения нелинейных систем в резонансной зо-



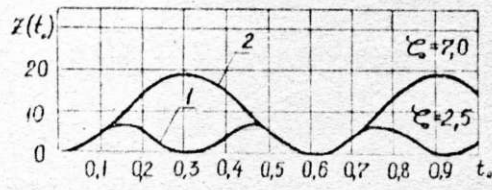


Рис. 3.4

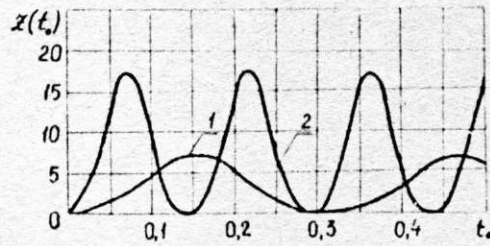


Рис. 3.5

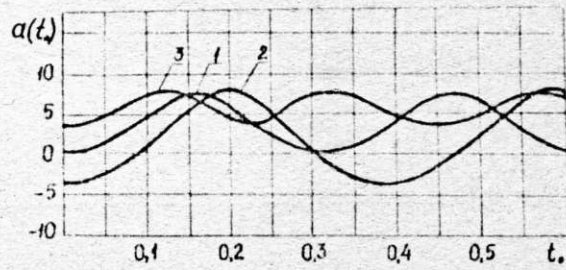


Рис. 3.6

не заключается в скачкообразном изменении амплитуд колебаний. Пакет круглых тонких пластин мембранной установки относится к числу нелинейных систем. Поэтому представляет большой интерес исследование его колебаний при прохождении через резонанс. Эта информация необходима также для разработки методики экспериментальных исследований собственных колебаний пакета на вибростенде. Поведение пакета в резонансной зоне исследуется методом медленно меняющихся амплитуд в сочетании с численным интегрированием уравнений на ЭЦВМ.

При рассмотрении прохождения через резонанс пакета пластин с учетом конечности амплитуд, приходим к интегрированию нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (3.II)

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z + \xi \dot{z} + 3A_0 \mu z^2 + \mu z^3 = F \cos \theta(t_0), \quad (3.II)$$

с нулевыми начальными условиями. Здесь  $F \cos \theta(t_0)$  - возмущающая сила с постоянной амплитудой и переменной частотой  $\nu = d\theta/dt_0 = \varepsilon_1 t_0 + \nu_0$ ;  $\varepsilon_1$  - скорость прохождения через резонанс;  $\nu_0$  - начальное значение переменной частоты.

Определение максимальных амплитуд колебаний, возникающих в резонансной зоне, возможно только путем численного интегрирования уравнения (3.II). Учитывая особенности колебаний нелинейных систем при переходе через резонанс, считаем целесообразным применение метода медленно меняющихся амплитуд / 34, 73 /.

Движение пакета в области резонанса в первом приближении представляем в виде

$$z(t_0) = a(t_0) \cos(\theta + \psi), \quad (3.I2)$$

где  $a(t_0)$ ,  $\psi(t_0)$  - "медленно" меняющиеся во времени ампли-

туда и фаза колебаний.

Уравнения первого приближения относительно амплитуды и фазы колебаний в рамках метода медленно меняющихся амплитуд имеют вид

$$\frac{da}{dt_0} = -\frac{1}{2} \xi a - \frac{F \sin \psi}{\omega_1 + \nu(t_0)}; \quad (3.13)$$

$$\frac{d\psi}{dt_0} = \omega_1 - \nu(t_0) + \frac{3}{8\omega_1} \mu a^2 - \frac{F \cos \psi}{a[\omega_1 + \nu(t_0)]}.$$

Проверку правильности решений уравнений (3.13) проводим на примере расчета временных зависимостей амплитуды и фазы колебаний переходного процесса однородной круглой пластины /II7/. Полагаем, что пластина проходит основной резонанс с уменьшением возбуждающей частоты, что сопровождается скачком амплитуды вверх.

В исходных данных задаем следующие параметры: количество слоев в пакете - 1; коэффициент вязкого трения -  $3,55 \text{сек}^{-1}$  сек; коэффициент нелинейной жесткости -  $36900 \text{сек}^{-2}$  сек; радиус - 0,255 м; толщина -  $0,98 \cdot 10^{-3}$  м; плотность материала -  $7800 \text{кг/м}^3$ ; амплитуда возмущающей силы - 1,135 Н.

Начальное значение фазы колебаний принимаем равным 3,14159, а амплитуды - равным нулю. Скорость прохождения пластины через резонанс полагаем равной ( $-3$ )  $\text{сек}^{-1}$ . Расчет проводим с относительной точностью  $10^{-6}$ .

Результаты численного интегрирования с помощью программы на ФОРТРАНЕ совпадают с аналогичными данными статьи А. Парзигнаты / II7 /. Полученные временные зависимости подтверждены изложенными в этой статье результатами тщательного эксперимен-

тального исследования. Следовательно, уравнения (3.13) являются правильными, а составленная программа, реализующая метод Рунге-Кутты-Фельберга, обеспечивает достаточно высокую точность интегрирования. Названные обстоятельства свидетельствуют о достоверности получаемых на ЭЦВМ численных результатов.

Амплитудно-частотные характеристики являются более удобными, нежели зависимости амплитуды и фазы колебаний от времени. Поэтому в уравнениях (3.13) произведем следующую замену:

$$\alpha t_0 = \alpha \nu / \varepsilon_1 \quad (3.14)$$

После подстановки (3.14) в уравнения (3.13) последние принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\nu} &= \frac{1}{\varepsilon_1} \left( -\frac{\xi a}{2} - \frac{F \sin \psi}{\omega_1 + \nu} \right); \\ \frac{d\psi}{d\nu} &= \frac{1}{\varepsilon_1} \left[ \omega_1 - \nu + \frac{3}{8} \frac{\mu a^2}{\omega_1} - \frac{F \cos \psi}{a(\omega_1 + \nu)} \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Начальные значения амплитуды и фазы колебаний находим из решения системы (3.15) для случая стационарных колебаний. Известно / 34 /, что стационарные амплитудно-частотные характеристики мало отличаются от стационарных при любых скоростях изменения частоты возмущающей силы для участков резонансных кривых, близких к горизонтальным линиям. С учетом сделанных замечаний из уравнений (3.15) получаем формулу для определения начального значения амплитуды

$$a = \frac{F \cos \psi}{\omega^2 - \nu_0^2}. \quad (3.16)$$

Начальные значения переменной частоты колебаний задаем  $\nu \leq 0,8\omega$  и  $\nu_0 \geq 1,3\omega$  в случае прохождения резонансной зоны соответственно с увеличением и уменьшением частоты возмущающей силы. При этом начальные значения фазы полагаем равными соответственно 0 или  $3,14159$ .

Амплитудно-частотные характеристики прохождения через резонанс гибкой круглой пластины в прямом и обратном направлениях существенно отличаются друг от друга (рис. 3.7). При разгоне (линия 1) безразмерная амплитуда  $A$  монотонно растет до значения 2, 3, а затем происходит резкий скачок вниз до практически нулевого значения, равного 0,03. В отличие от разгона при выбеге (линия 2) амплитуда колебаний намного меньше, хотя и остается соизмеримой с толщиной пластины. Уменьшение частоты возбуждения колебаний сопровождается не монотонным, а резким возрастанием амплитуды в резонансной зоне. В зоне, расположенной левее скачка амплитуды вверх, нестационарные резонансные кривые разгона и выбега пластины совпадают.

Максимальное значение амплитуды колебаний в резонансной зоне зависит от скорости прохождения через резонанс (рис. 3.8). Чем выше скорость, тем меньше амплитуда колебаний. С увеличением скорости максимум амплитуды смещается в область более высоких значений частоты. При малой скорости после прохождения резонанса амплитуда совершает заметные колебания, пока не достигает стационарного значения.

Таким образом, на основе результатов исследования нестационарных колебаний пакета сформулируем рекомендации по проведению экспериментальных исследований колебаний пакета на вибростенде:

1) измерение собственных частот выполнять многократно при

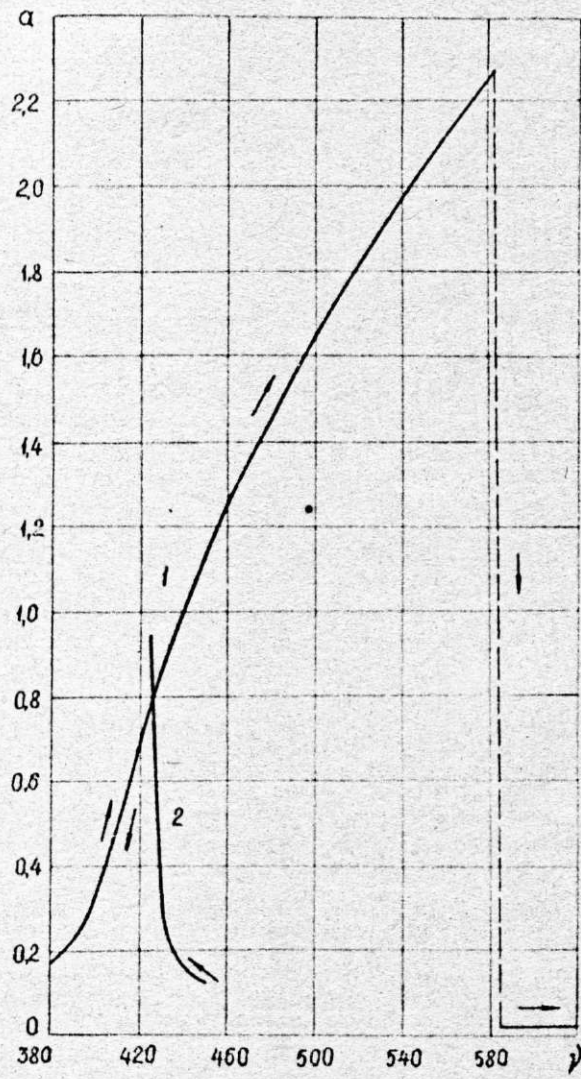


Рис. 3.7

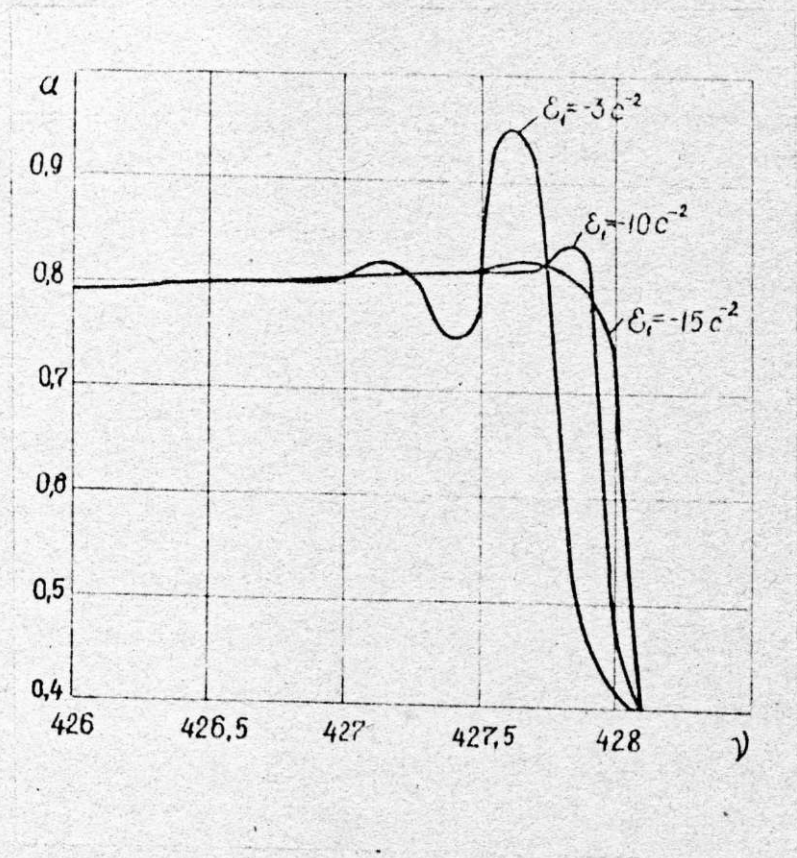


Рис. 3.8

прохождении резонансной зоны в прямом и обратном направлениях;

2) вначале рекомендуется просто зарегистрировать значения частот, при которых происходят скачки амплитуды. В дальнейшем это дает возможность сократить время опытов: изменять частоту возмущения быстро, а вблизи точек скачка регулировать ее с малой скоростью;

3) при регистрации частот поддерживать в повторяющихся опытах одинаковые амплитуды колебаний.

### 3.6. Выводы

1. С помощью метода гармонического баланса получена система алгебраических уравнений для определения собственных частот колебаний пакета в зависимости от геометрически нелинейного напряженно-деформированного состояния его слоев. Получены аналитические формулы для вычисления собственных частот пакета, контактирующего с жидкостью и газом, заключенных в замкнутых полостях.

2. На основе осесимметричной модели пакета получены уравнения его вынужденных колебаний под действием динамических нагрузок. Методом медленно меняющихся амплитуд получены уравнения нелинейных нестационарных колебаний пакета.

3. Создана ФОРТРАН-программа, ориентированная на ЭЦВМ типа ЕС. С ее помощью вычисляются статический прогиб, собственная частота колебаний, путем численного интегрирования методом Рунге-Кутты определяется динамический прогиб пакета при вынужденных колебаниях под действием динамических нагрузок и строится его амплитудно-частотная характеристика колебаний при прохождении через резонанс.



4. Анализ численных результатов показывает, что краевые смещения пакета изменяют значения его собственных частот колебаний в широком диапазоне. Эта зависимость является нелинейной. Минимальное значение частоты определяется значением начального несовершенства. Сжимающие краевые смещения, в отличие от растягивающих, при определенных значениях приводят к переходу пакета в закритическое состояние. Возникновение при этом больших статических прогибов нежелательно для гибкого элемента мембранной установки, поэтому надо стремиться к уменьшению сжимающих смещений или созданию на контуре растягивающих смещений. В закритическом состоянии пакет становится более жестким, о чем свидетельствует возрастание его собственной частоты после потери устойчивости. Указанное изменение жесткости необходимо учитывать при расчете вынужденных колебаний пакета пластин.

5. Контактное взаимодействие пакета с жидкостью приводит к снижению его собственных частот колебаний. В то же время упругие свойства газа увеличивают жесткость всей системы, что вызывает возрастание собственных частот. Для мембранного компрессора с диаметром пакета 0,17 м уменьшение значения основной частоты при контактировании пакета с жидкостью составило 16,7%, а приращение частоты за счет жесткости газа - 1,3%.

6. Проведено численное исследование вынужденных колебаний пакета мембранной установки под действием внезапно приложенного давления. Показано, что благодаря учету в уравнениях конечности амплитуд точность расчета динамического прогиба повышается более чем в два раза. Установлено, что при действии сжимающих краевых перемещений происходит смещение максимума динамического прогиба, которое зависит от знака соответствующего стати-

ческого прогиба. Выявлено, что с увеличением значения динамической нагрузки повышается скорость движения центра пакета и возрастает значение максимального прогиба.

7. Анализом результатов численного интегрирования нелинейных уравнений пакета мембранной установки выявлены характерные особенности его колебаний при нестационарном прохождении через резонанс. Они состоят в том, что: кривые прохождения через резонанс в прямом и обратном направлениях отличаются друг от друга, в них отсутствует симметрия, характерная для линейных систем; переход через резонанс в прямом направлении сопровождается большей амплитудой колебаний; значение максимума амплитуды колебаний и соответствующего значения возмущающей частоты зависят от скорости прохождения через резонанс. На основе результатов исследования нестационарных колебаний пакета сформулированы рекомендации по проведению экспериментальных исследований его колебаний на вибростенде.

## ГЛАВА 4

## ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПАКЕТА КРУГЛЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ АСИММЕТРИИ МЕМБРАННЫХ УСИЛИЙ

В настоящей главе предлагается методика определения спектра собственных колебаний пакета круглых гибких пластин около положения равновесия, определяемого большими поперечными статическими перемещениями. Исследуется влияние на частоты и формы колебаний пакета асимметрии мембранных усилий в каждом из его слоев.

Расчет параметров собственных колебаний пакета пластин производится на основе его мембранной конечноэлементной модели, допускающей проскальзывание слоев друг относительно друга. Полагаем, что нормальные перемещения всех слоев одинаковы, а силы трения между слоями отсутствуют. Мембранные усилия в каждом слое пакета являются фиксированными, не зависящими от времени.

Представление пакета гибких пластин с помощью мембранной модели обосновывается ниже соображениями конструктивного характера и спецификой деформирования пакетов в мембранных установках:

1. Применяемые в машиностроении пакеты комплектуются из весьма тонких пластин. Значения отношений толщины слоя пакета или его суммарной толщины к радиусу существенно меньше единицы.
2. Наибольшее значение перемещения пакета пластин под действием привода зависит от высоты внутренней полости мембранного блока и в 6 - 10 раз превышает толщину одного слоя пакета. По-

скольку собственная частота малых изгибных колебаний пакета значительно выше частоты работы привода, то движение пакета между поверхностями ограничительного и распределительного дисков можно считать статическим. При больших поперечных статических перемещениях мембранные напряжения в слоях пакета становятся соизмеримыми или существенно выше изгибных напряжений, поэтому они оказывают наибольшее влияние на собственные колебания пакета.

3. На параметры собственных колебаний пакета заземленных круглых пластин малой толщины также, как и однородной круглой пластины / 28 /, существенное влияние оказывает опорное устройство. Пакет пластин получает на внешнем контуре растягивающее или сжимающее перемещения в срединной поверхности, которое в общем случае неравномерно распределено по окружности. Сжатие тонкого пакета пластин приводит к тому, что каждый слой приобретает большие перемещения в поперечном направлении и переходит в закритическое состояние, характеризующееся перераспределением напряжений, вследствие чего при малых амплитудах колебаний значительно смещается спектр собственных частот и качественно изменяются формы колебаний. Поскольку в закритическом состоянии преобладают мембранные напряжения, то и в этом случае использование мембранной модели является оправданным.

#### 4.1. Основные конечноэлементные соотношения

Составление мембранной конечноэлементной модели пакета сводится к получению матриц жесткости и инерции рассматриваемой упругой системы. Вывод указанных матриц осуществляется с помощью суммирования соответственно потенциальной и кинетической энергий каждого слоя. Применяется конечный элемент треугольной формы, с

помощью которого вполне осуществима аппроксимация пакетов с любым криволинейным контуром, в том числе - круглых пакетов.

Допускаем, что материал слоистого конечного элемента является ортотропным. Полагаем, что главные направления упругости (термин заимствован из монографии С.А.Амбарцумяна / 6 /) совпадают с направлениями осей декартовых координат. Для такого вида анизотропии было бы естественно записать закон Гука в декартовой системе координат. Поскольку уравнения движения для круглых пластин обычно составляются в другой - цилиндрической системе координат, то учет данного типа анизотропии представляет значительные трудности, чем и объясняется тот факт, что до сих пор такая задача не рассматривалась. В настоящей работе указанная проблема решается с помощью метода конечных элементов, где все соотношения формулируются в единой системе координат - декартовой.

Матрица жесткости конечного элемента устанавливает связь между узловыми усилиями, приложенными к элементу, и узловыми перемещениями. На ее основе строится глобальная матрица жесткости всей исследуемой конструкции. Для получения матрицы жесткости конечного элемента пакета суммируются потенциальные энергии элементов слоев.

Потенциальная энергия деформации слоя представляет собой интеграл (номер слоя опущен)

$$\frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dV, \quad (4.1)$$

где

$\{\epsilon\}$  - вектор полной деформации;  
 $[D]$  - матрица упругих постоянных;  
 $V$  - объем элемента.

Выражение (4.1) в общем случае может быть представлено в виде суммы трех слагаемых / 109 /: энергии плоской деформации, энер-

гии изгибной деформации и энергии деформации при конечных перемещениях. Выделенным слагаемым соответствуют матрицы конечного элемента, имеющие такие же названия.

Вектор полной деформации связан с перемещениями матричным соотношением

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_p\} + \{\epsilon_f\} + \{\epsilon_g\} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

где  $u, v, w$  - перемещения;

$x, y, z$  - координаты;

$\{\epsilon_p\}$  - вектор плоской деформации;

$\{\epsilon_f\}$  - вектор изгибной деформации;

$\{\epsilon_g\}$  - вектор деформации при конечных перемещениях.

Матрица упругости для анизотропного материала имеет вид

/53/:

$$[D] = \frac{E_y}{1 - \nu_y^2} \begin{bmatrix} n & n\nu_y & 0 \\ n\nu_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

где

$$n = E_x / E_y ; \quad m = G_y / E_y ;$$

$\nu_y$  - коэффициент Пуассона.

Потенциальная энергия деформации (4.1) с учетом соотношений упругости (4.3) анизотропного материала приобретает вид

$$\frac{E_y}{2(1-\nu_y^2)} \int [n\varepsilon_x^2 + 2n\nu_y \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + m(1-\nu_y^2)\nu_{xy}^2] dV \quad (4.4)$$

Подставляем в (4.4) формулы для деформаций (4.2), группируем соответствующие слагаемые, интегрируем по толщине элемента. В результате получаем ряд интегралов. Интеграл, соответствующий потенциальной энергии деформации для плоской задачи теории упругости имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 = & \frac{E_y}{2(1-\nu_y^2)} \int_V \left\{ n \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2n\nu_y \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2m(1-\nu_y^2) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + m(1-\nu_y^2) \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dV. \end{aligned}$$

Интеграл, соответствующий энергии деформации при изгибе

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 = & \frac{E_y}{2(1-\nu_y^2)} \int_V \left\{ n z^2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2n\nu_y z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + m(1-\nu_y^2) 4z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dV. \end{aligned}$$

Интеграл, соответствующий и энергии деформации при конечных перемещениях,

$$\begin{aligned} \gamma_3 = & \frac{E_y}{2(1-\nu_y^2)} \int_V \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left[ n \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4} n \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\ & + n \frac{\nu_y}{1+\nu_y} \left. \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1+n\nu_y^2}{2(1+\nu_y)} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ & + n\nu_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + n\nu_y \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ & \left. + m(1-\nu_y^2) 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} dV. \end{aligned}$$

Ввиду незначительности пренебрегаем слагаемыми, содержащими производные от нормального прогиба, возведенные в четвертую степень. Окончательно искомый интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_3 = & \frac{E_y}{2(1-\nu_y^2)} \int_V \left\{ \left( n \frac{\partial u}{\partial x} + n\nu_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial v}{\partial y} + n\nu_y \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + m(1-\nu_y^2) 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} dV. \end{aligned} \quad (4.5)$$

При подстановке упругих постоянных  $E_y = E$ ,  $\nu = E_x/E_y = 1$ ,  $\nu_y = \nu$ ,  $m = G_y/E = 0,5/(1+\nu)$  отсюда получается как частный случай выражение для изотропной пластины. После интегрирования третьего интеграла по толщине элемента слоя, получаем

$$\gamma_3 = \frac{1}{2} \int_{A_0} \left[ \sigma_x^0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y^0 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] h dx dy. \quad (4.6)$$

Здесь  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$ ,  $\tau_{xy}^0$  — мембранные напряжения, приходящиеся на единицу длины контура;  $h$ ,  $A_0$  — толщина слоя



и площадь элемента. В соответствии с выражением (4.5) мембранные напряжения связаны с перемещениями следующим образом

$$\sigma_x^0 = \frac{E_y}{1 - \nu_y^2} \left( n + n \nu_y \frac{\partial v}{\partial y} \right), \sigma_y^0 = \frac{E_y}{1 - \nu_y^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + n \nu_y \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (4.7)$$

$$\tau_{xy}^0 = E_y m \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Потенциальную энергию конечного элемента пакета получаем как сумму энергий плоской деформации и деформации при конечных перемещениях элементов каждого слоя. С учетом допущения о равенстве поперечных перемещений каждого слоя получаем

$$\gamma_3^p = \frac{1}{2} \int_{A_0} \left[ T_x^p \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + T_y^p \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 T_{xy}^p \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad (4.8)$$

где

$$T_x^p = \sum_{i=1}^N \sigma_{xi}^0 h_i, T_y^p = \sum_{i=1}^N \sigma_{yi}^0 h_i, T_{xy}^p = \sum_{i=1}^N \tau_{xyi}^0 h_i$$

- мембранные усилия, приходящиеся на единицу длины контура.

Считаем, что размеры конечного элемента малы по сравнению с радиусом пакета. Поэтому распределение перемещений внутри элемента принимаем в виде линейной функции его координат, связанных с центром тяжести / 68 /

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 y. \quad (4.9)$$

После подстановки (4.9) в (4.6) и проведения ряда промежу-

точных преобразований получаем формулу для определения матрицы жесткости конечного элемента пакета

$$[k] = ([B]^{-1})^T \left( \int_{A_0} [C]^T \begin{bmatrix} T_{xx}^p & T_{xy}^p \\ T_{xy}^p & T_{yy}^p \end{bmatrix} [C] dx dy \right) [B]^{-1}, \quad (4.10)$$

где

$$[B]^{-1} = \begin{bmatrix} b_{ii} & b_{ji} & b_{ki} \\ b_{ij} & b_{jj} & b_{kj} \\ b_{ik} & b_{jk} & b_{kk} \end{bmatrix} \frac{1}{\det B}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det B = 2A_0.$$

Алгебраические дополнения матрицы  $[B]$  следующим образом выражаются через локальные декартовы координаты узловых точек элемента

$$b_{ii} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix} = (xy)_{jk}, \quad b_{ji} = - \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix} = (xy)_{ki},$$

$$b_{ki} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = (xy)_{ij}, \quad b_{ij} = - \begin{vmatrix} 1 & y_i \\ 1 & y_k \end{vmatrix} = y_{jk},$$

$$b_{jj} = \begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_k \end{vmatrix} = y_{ki}, \quad b_{kj} = - \begin{vmatrix} 1 & y_i \\ 1 & y_j \end{vmatrix} = y_{ik},$$

$$b_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_k \end{vmatrix} = x_{kj}, \quad b_{jk} = - \begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_k \end{vmatrix} = x_{ik},$$

$$b_{kk} = \begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{vmatrix} = x_{ji}$$

После перемножения матриц в соответствии с формулой (4.10) получаем матрицу жесткости мембранного элемента

$$[k] = \frac{1}{4A_0} \begin{bmatrix} \beta_{ij}^2 T_x^p + 2\beta_{ij}\beta_{ik} T_{xy}^p + \beta_{ik}^2 T_y^p, & \text{симм.} \\ \beta_{ij}\beta_{jj} T_x^p + (\beta_{ij}\beta_{jk} + \beta_{ik}\beta_{jj}) T_{xy}^p + \beta_{ik}\beta_{jk} T_y^p, \\ \beta_{jj}^2 T_x^p + 2\beta_{jk}\beta_{jj} T_{xy}^p + \beta_{jk}^2 T_y^p, \\ \beta_{ij}\beta_{kj} T_x^p + (\beta_{ij}\beta_{kk} + \beta_{ik}\beta_{kj}) T_{xy}^p + \beta_{ik}\beta_{kk} T_y^p \\ \beta_{jj}\beta_{kj} T_x^p + (\beta_{jj}\beta_{kk} + \beta_{jk}\beta_{kj}) T_{xy}^p + \beta_{jk}\beta_{kk} T_y^p, \\ \beta_{kj}^2 T_x^p + 2\beta_{kj}\beta_{kk} T_{xy}^p + \beta_{kk}^2 T_y^p \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Ниже приводится матрица жесткости, в которой алгебраические дополнения выражены через локальные координаты узлов элемента

$$[k] = \frac{1}{4A_0} \begin{bmatrix} y_{jk}^2 T_x^p + 2y_{jk}x_{kj} T_{xy}^p + x_{kj}^2 T_y^p, & \text{симм.} \\ y_{jk}y_{ki} T_x^p + (y_{jk}x_{ik} + x_{kj}y_{ki}) T_{xy}^p + x_{kj}x_{ik} T_y^p, \\ y_{ki}^2 T_x^p + 2x_{ik}y_{ki} T_{xy}^p + x_{ik}^2 T_y^p, \\ y_{jk}y_{ij} T_x^p + (y_{jk}x_{jl} + x_{kj}y_{ij}) T_{xy}^p + x_{kj}x_{ji} T_y^p, \\ y_{ki}y_{ij} T_x^p + (y_{ki}x_{ji} + x_{ik}y_{ij}) T_{xy}^p + x_{ik}x_{ji} T_y^p, \\ y_{ij}^2 T_x^p + 2y_{ij}x_{ji} T_{xy}^p + x_{ji}^2 T_y^p. \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Наиболее удобной для программирования является формулировка матрицы жесткости мембранного конечного элемента пакета в виде (4.12), нежели (4.11), поэтому матрица (4.12) принимается за окончательный вариант.

Кинетическая энергия конечного элемента пакета представляет собой сумму кинетических энергий элементов слоев. С учетом допущения о равенстве поперечных перемещений слоев выражение для кинетической энергии пакета принимает вид

$$T^p = \frac{1}{2} \rho^p \int_{A_0} \dot{w}^2 dx dy, \quad (4.13)$$

где  $\rho^p = \sum_{i=1}^N \rho_i$ ,  $\rho_i$  - поверхностная плотность отдельного слоя;

$\dot{w}$  - скорость перемещения пакета.

Выражение (4.13) является основой для получения матрицы инерции пакета. Опыт применения метода конечных элементов / 53, 106 / указывает на то, что наилучшая аппроксимация динамических систем достигается при использовании матриц не сосредоточенных, а распределенных матриц, которые обычно называют "согласованными" матрицами. Для получения "согласованной" матрицы инерции конечного элемента пакета воспользуемся нижеследующей формулой

/ 108 /

$$[m] = ([B]^{-1})^T \left( \int_{A_0} \rho^p [N]^T [N] dx dy \right) [B]^{-1} \quad (4.14)$$

где

$$[N] = [1 \ x \ y].$$

При интегрировании по площади треугольника в (4.14) часть интегралов обращается в нуль. Оставшиеся интегралы обозначим следующим образом

$$J_x = \int_{A_0} x^2 dx dy, \quad J_y = \int_{A_0} y^2 dx dy, \quad J_{xy} = \int_{A_0} xy dx dy. \quad (4.15)$$

После ряда преобразований получаем матрицу инерции в виде  $[m] = \rho^0 / (4A_0^2)$ :

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_{ii}^2 A_0 + \sigma_{ij}^2 J_x + 2\sigma_{ij} \sigma_{ik} J_{xy} + \sigma_{ik}^2 J_y, \quad \text{СИММ.} \\ \sigma_{ii} \sigma_{ji} A_0 + \sigma_{ij} \sigma_{jj} J_x + (\sigma_{ij} \sigma_{jk} + \sigma_{ik} \sigma_{jj}) J_{xy} + \sigma_{ik} \sigma_{jk} J_y, \\ \sigma_{ji}^2 A_0 + \sigma_{jj}^2 J_x + 2\sigma_{jj} \sigma_{jk} J_{xy} + \sigma_{jk}^2 J_y, \\ \sigma_{ii} \sigma_{ki} A_0 + \sigma_{ij} \sigma_{kj} J_x + (\sigma_{ij} \sigma_{kk} + \sigma_{ik} \sigma_{kj}) J_{xy} + \sigma_{ik} \sigma_{kk} J_y, \\ \sigma_{ji} \sigma_{ki} A_0 + \sigma_{jj} \sigma_{kj} J_x + (\sigma_{jj} \sigma_{kk} + \sigma_{jk} \sigma_{kj}) J_{xy} + \sigma_{jk} \sigma_{kk} J_y, \\ \sigma_{ki}^2 A_0 + \sigma_{kj}^2 J_x + 2\sigma_{kj} \sigma_{kk} J_{xy} + \sigma_{kk}^2 J_y. \end{array} \right] \quad (4.16)$$

При переходе к формулам, указывающим на правило вычислений алгебраических дополнений в декартовой системе координат, связанной с центром тяжести элемента, матрица инерции пакета принимает окончательный вид

$$[m] = \rho^0 / (4A_0^2).$$

$$\left[ \begin{array}{l} (xy)_{jk}^2 A_0 + y_{jk}^2 J_x + 2y_{jk} x_{kj} J_{xy} + x_{kj}^2 J_y, \quad \text{СИММ.} \\ (xy)_{jk} (xy)_{ik} A_0 + y_{jk} y_{ki} J_x + (y_{jk} x_{ik} + x_{kj} y_{ki}) J_{xy} + x_{kj} x_{ik} J_y, \\ (xy)_{ki}^2 A_0 + y_{ki}^2 J_x + 2y_{ki} x_{ik} J_{xy} + x_{ik}^2 J_y, \\ (xy)_{jk} (xy)_{ij} A_0 + y_{jk} y_{ij} J_x + (y_{jk} x_{ji} + x_{kj} y_{ij}) J_{xy} + x_{kj} x_{ji} J_y, \\ (xy)_{ki} (xy)_{ij} A_0 + y_{ki} y_{ij} J_x + (y_{ki} x_{ji} + x_{ik} y_{ij}) J_{xy} + x_{ik} x_{ji} J_y, \\ (xy)_{ij}^2 A_0 + y_{ij}^2 J_x + 2y_{ij} x_{ji} J_{xy} + x_{ji}^2 J_y. \end{array} \right] \quad (4.17)$$

Таким образом, в настоящем параграфе получены необходимые конечноэлементные соотношения для расчета собственных колебаний пакета круглых пластин. Анализ формул (4.12) и (4.17) показывает, что расчет пакета сводится к расчету эквивалентной однородной круглой пластины.

Необходимо заметить, что в представленной матрице жёсткости конечного элемента круглого пакета (4.12) учитывается ортотропность материала, при которой главные направления упругости совпадают с направлениями декартовых осей координат.

Приведенная матрица инерции пакета (4.17) является "согласованной", что обеспечивает высокую точность вычислений значений собственных частот.

Формулы для матриц жесткости и инерции пакета представлены в виде, наиболее удобном для составления программы на ЭЦВМ.

#### 4.2. Алгоритм вычислений частот и форм собственных колебаний пакета пластин методом конечных элементов

Решение задачи о собственных колебаниях пакета методом конечных элементов сводится к матричному обыкновенному дифференциальному уравнению / 53 /

$$[M]\{\ddot{a}\} + [K]\{a\} = 0,$$

где  $[M], [K]$  - глобальные матрицы инерции и жёсткости;  
 $\{a\}$  - вектор узловых перемещений.

Полагая, что узловые перемещения во времени изменяются по гармоническому закону / 53 /

$$[A]\{\alpha_0\} = 0, \quad (4.18)$$

где

$$[A] = [K] - \omega^2[M].$$

Из (4.18) получается частотное уравнение:

$$\det([A]) = 0.$$

Решение его осуществляется методом последовательных приближений с уточнением корня методом дихотомии (методом половинного деления / 55 /).

Значение определителя на каждой пробной частоте вычисляется методом квадратного корня, который имеет ряд преимуществ перед другими методами при машинной реализации метода конечных элементов на ЭЦВМ / 17, 26 /. Матрица  $[A]$  раскладывается на произведение

$$[A] = [S]^T[D][S], \quad (4.19)$$

где

$[S]$  - правая треугольная матрица;

$[D]$  - диагональная матрица с элементами  $d_{ij} = \pm 1$ .

Формулы для вычислений элементов обеих матриц приведены в работах / 17, 26 /.

Знак частотного определителя устанавливается путем перемножения элементов на диагонали диагональной матрицы. Идентификация найденной частоты производится по форме колебаний, вычисление которой осуществляется решением системы (4.18) методом квадратного корня.

Алгоритм решения задачи реализован на ЭЦВМ в виде пакета прикладных подпрограмм на языке ФОРТРАН (рис. 4.1). Среди них



Рис. 4.1. Блок-схема вычисления собственных частот и форм колебаний пакета пластин методом конечных элементов



можно выделить универсальные подпрограммы и те, которые составлены специально для круглого пакета. К последним относятся подпрограмма вычисления матриц жесткости и инерции элемента

*STIF73* (П.1), и подпрограмма вычисления мембранных усилий в узлах элемента *TSTIFT* (П.1).

С помощью специализированной подпрограммы *TSTIFT* по аналитическим формулам определяется распределение мембранных усилий в узловых точках пакета. Распределение мембранных усилий по контуру представляется в виде

$$T = T_0 + T_1 \cos N\theta, \quad (4.20)$$

где

$$T_0 = \sum_{s=1}^3 T_{0s}; \quad T_1 = \sum_{s=1}^3 T_{1s};$$

$T_{0s}, T_{1s}$  — соответственно равномерная составляющая и амплитуда переменного мембранных усилий  $s$ -го слоя;

$N$  — число гармоник переменного усилия;

$\theta$  — угол, отсчитываемый от оси  $X$  к оси  $Y$  против часовой стрелки до соответствующей узловой точки (система координат показана на рис. 4.2).

Мембранные усилия, вычисляемые в соответствии с формулой (4.20), являются постоянными по радиусу. Однако в круглой гибкой пластине мембранные усилия зависят от радиуса / 31 /. Поэтому в качестве равномерной составляющей  $s$ -го слоя предлагается использовать среднее арифметическое от значений радиального мембранного усилия в центре неподвижно заземленной пластины и на ее контуре

$$T_{0s} = \frac{7-3\nu_s}{12(1-\nu_s)} E_s h_s \left(\frac{w}{R}\right)^2, \quad (4.21)$$

где  $\nu_s$ ,  $E_s$ ,  $h_s$  - соответственно коэффициент Пуассона, модуль упругости и толщина слоя  
 $R$ ,  $w$  - радиус и статический прогиб пакета.

По аналогии формулу (4.21) можно использовать и при вычислениях переменной составляющей мембранного усилия. В главе 5 будет показано, что значения частот, вычисленные с использованием предложенных эквивалентных усилий хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Определение значений мембранных усилий в узловой точке пакета производится по формулам плоской задачи теории упругости / 59 /. При этом функция напряжений берется в виде / 108 /

$$\varphi = \frac{T_0}{2} z^2 + \frac{T_1}{2} \left[ z^{N+2}/(N+1)z_0^N - z^N/(N-1)z_0^{N-2} \right] \cos N\theta.$$

Мембранные усилия в полярной системе координат вычисляются по формулам, полученным дифференцированием функции напряжений

$$T_z = T_0 + \frac{T_1}{2} \left[ (2-N)\bar{z}^N + N\bar{z}^{N-2} \right] \cos N\theta,$$

$$T_\theta = T_0 + \frac{T_1}{2} \left[ (2+N)\bar{z}^N - N\bar{z}^{N-2} \right] \cos N\theta, \quad (4.22)$$

$$T_{z\theta} = \frac{T_1}{2} (\bar{z}^N - \bar{z}^{N-2}) N \sin N\theta,$$

где  $z_0$  - радиус пакета;  $\bar{z} = z/z_0$ .

В начале специализированной подпрограммы *STIFT3* вычисляются с помощью вызываемой подпрограммы *TSTIFT* усред-

ненные по элементу усилия натяжения. Далее осуществляется переход от глобальной системы координат к локальной, центр которой находится в центре тяжести элемента. Алгоритм вычисления площади  $A_0$  треугольника заимствован из работы / 53 /. Он предусматривает сигнальную печать в случае ошибки в исходных данных. Необходимые интегралы вычисляются по формулам / 53, 108 /

$$J_x = \frac{A_0}{12} (x_i^2 + x_j^2 + x_k^2), \quad J_y = \frac{A_0}{12} (y_i^2 + y_j^2 + y_k^2),$$

$$J_{xy} = \frac{A_0}{12} (x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k).$$

Среди универсальных подпрограмм основной является *FORMK* / 53 /, которая формирует глобальные компактные ленточные матрицы жесткости и инерции конечноэлементного ансамбля, учитывает граничные условия. Все подпрограммы ориентированы на работу с компактной матрицей.

Поиск корней осуществляется подпрограммой *KOREN*, реализующей метод последовательных приближений. Уточнение значения частоты прекращается, когда параметр относительной точности по частоте достигает заданного значения.

Вычисление определителя и формы колебаний производится соответственно подпрограммами *OPRED* и *RDIN*, построенными на методе квадратного корня. Обе подпрограммы получены из стандартной программы № 0118 для ЭЦВМ "МИР-2" / 77 / переводом с языка АНАЛИТИК на ФОРТРАН. Программа № 0118 выполняет разложение положительноопределенной компактной матрицы на произведение двух треугольных матриц

$$[A] = [S]^T [S]. \quad (4.23)$$

Однако при решении задач динамики исходная матрица часто оказывается неположительноопределенной. Проявляется это в том, что на некоторых пробных значениях частоты появляются комплексные числа / 52 /. В ФОРТРАНовских подпрограммах *OPRED* и *RDIIN* указанный недостаток устранен путем введения матрицы  $[D]$  (см. 4.19), что позволило расширить область их действия и на неположительноопределенные матрицы.

Для удобства анализа численных результатов в подпрограмме предусмотрено перестроение вектора формы колебаний. С этой целью находится максимальное по абсолютной величине значение элемента вектора, на которое делятся все остальные элементы. Максимальное значение элемента в модифицированном таким образом векторе формы колебаний равно единице. При реализации алгоритма перестроения вектора использованы рекомендации работы / 51 /.

С целью экономии машинного времени, повышения стабильности расчетов, все подпрограммы каталогизированы на резидентном диске в библиотеке объектных модулей. На подготовку магнитных дисков и ввод с перфокарт исходных данных уходит менее 5 минут. Время, затрачиваемое на один шаг по частоте для системы из 144 элементов составляет менее 4 секунд. Соответствующий спектр из 7 частот при относительной точности  $10^{-6}$  определяется примерно за 15 минут.

### 4.3. Численные результаты

#### 4.3.1. Точность вычислений значений собственных частот. Влияние количества элементов на частоты и формы собственных колебаний

Точность решения, получаемого с помощью метода конечных элементов, в значительной мере зависит от выбора конечноэлементной сетки. Особенность рассматриваемой задачи заключается также в необходимости аппроксимации контурной окружности треугольными конечными элементами. В данном параграфе выбор наиболее пригодной конечноэлементной сетки осуществляется путем сравнения вычисленных частот и форм пакета изотропных пластин с параметрами собственных колебаний круглой мембраны.

С помощью мембранной модели вычисляются значения частот, обусловленные возникновением мембранных усилий при больших прогибах. Однако в своем усилии пакет проходит и зону, где прогибы малы. При этом на частоты колебаний существенное влияние оказывает изгибная жесткость. Для вычисления полной безразмерной частоты колебаний пакета в широком диапазоне значений прогибов с учетом изгибной жесткости и влияния мембранных усилий нужно пользоваться следующей формулой

$$\omega_{mn}^p = \sqrt{\bar{B}_{mn}^2 + \bar{\omega}_{mn}^2}, \quad (4.24)$$

где  $n = s + 1$ ;  $m, s$  — соответственно число узловых диаметров и окружностей;

$\bar{B}_{mn}$  — коэффициент, зависящий от формы колебаний (/ 98 /, табл. 9.2);

$\omega_{mn} = \bar{\omega}_{mn} \sqrt{\frac{D}{R^4 \rho h}}$ ;  $\omega_{mn}$  - частота колебаний, вычисленная по мембранной модели;

$R$  - радиус пакета;

$D, \rho, h$  - цилиндрическая жесткость, плотность и толщина слоя пакета.

Для проведения сравнительных численных расчетов подготовлены три варианта конечноэлементной модели пакета изотропных круглых пластин:

1 вариант (рис. 4.2) - 24 элемента, 16 узлов;

2 вариант (рис. 4.3) - 80 элементов, 49 узлов;

3 вариант (рис. 4.4) - 144 элемента, 85 узлов.

В модели I-го варианта одна часть узлов располагается на контурной окружности, а другая - на внутренней окружности. Из центров окружностей проведены 4 диаметра. Конечные элементы после разбивки по своим размерам получились примерно одинаковые, близкие к равносторонним (цифры в кружочках на рис. 4.2 обозначают номера элементов).

Во втором варианте узлы сетки располагаются на контурной и двух внутренних окружностях, а также на 16 диаметрах. Из рассмотрения типичного сектора с углом 22,5 градуса следует, что сетка составлена из конечных элементов пяти типоразмеров.

В третьем варианте сетка включает контурную окружность и три внутренние окружности, а также 12 диаметров. В типичном секторе с углом в 30 градусов можно выделить 7 конечных элементов с различными размерами. Большинство из элементов представляет собой равносторонние треугольники.

Точные значения собственных частот круглой мембраны посто-

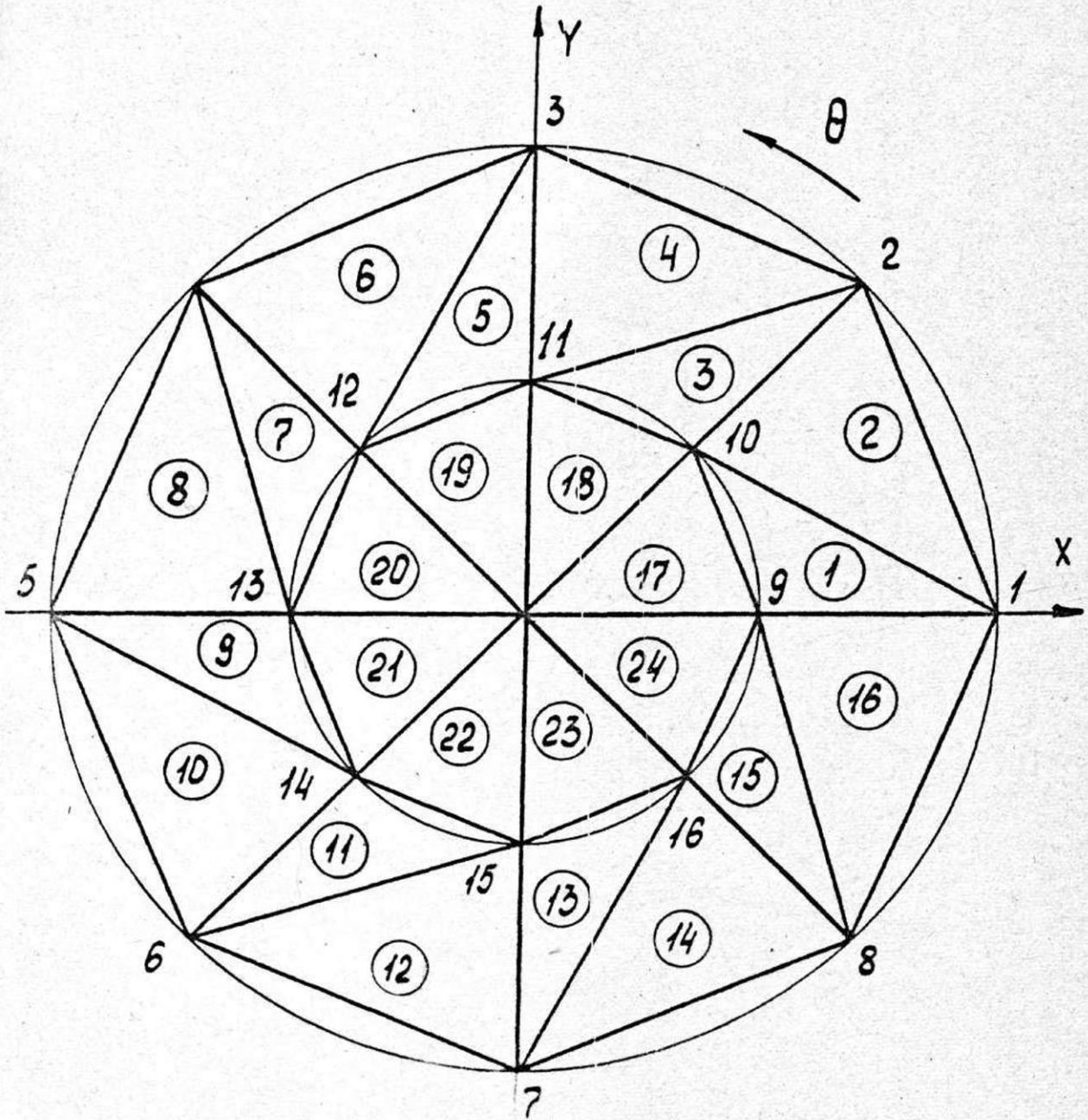


Рис. 4.2

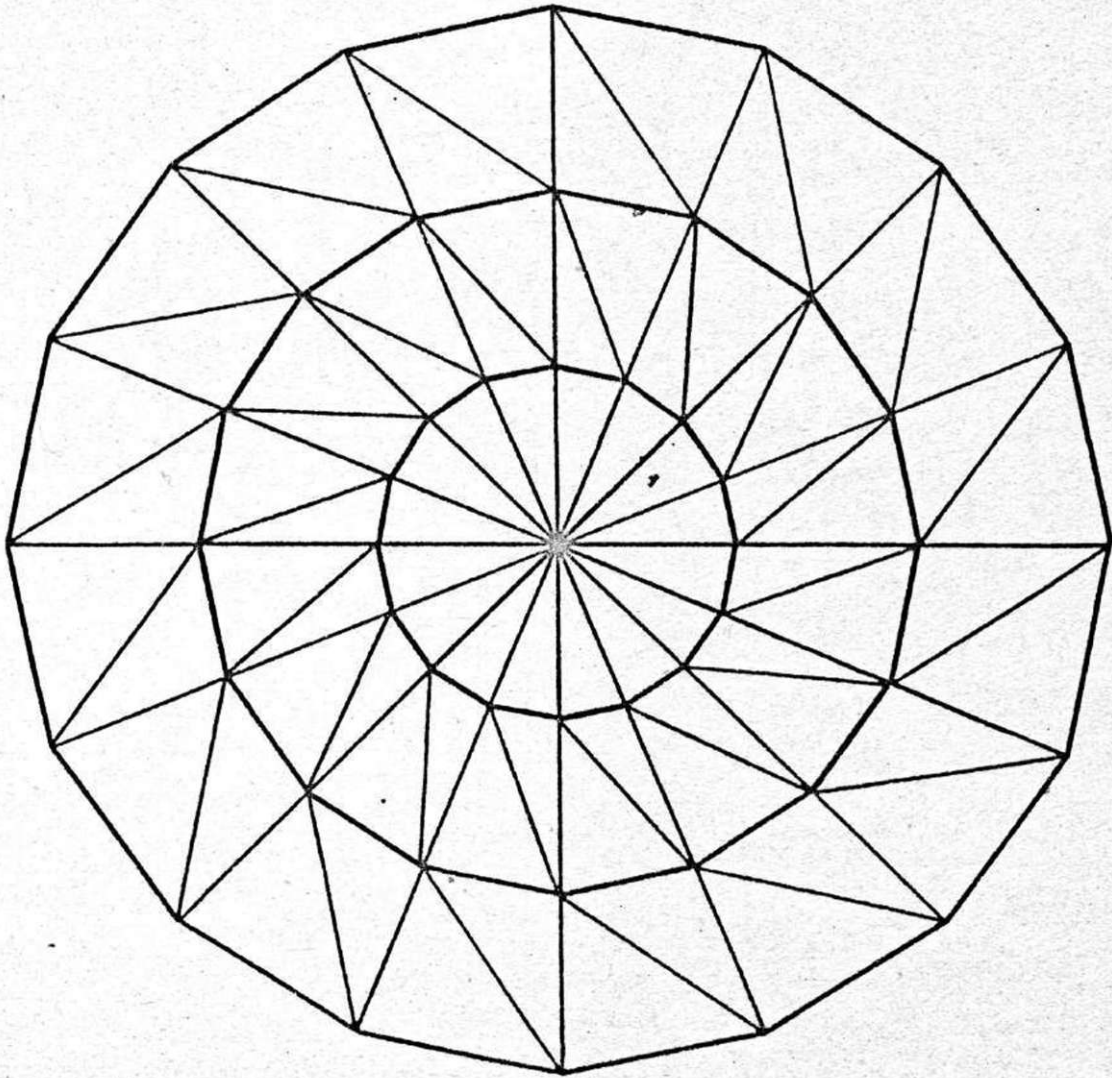


Рис. 4.3



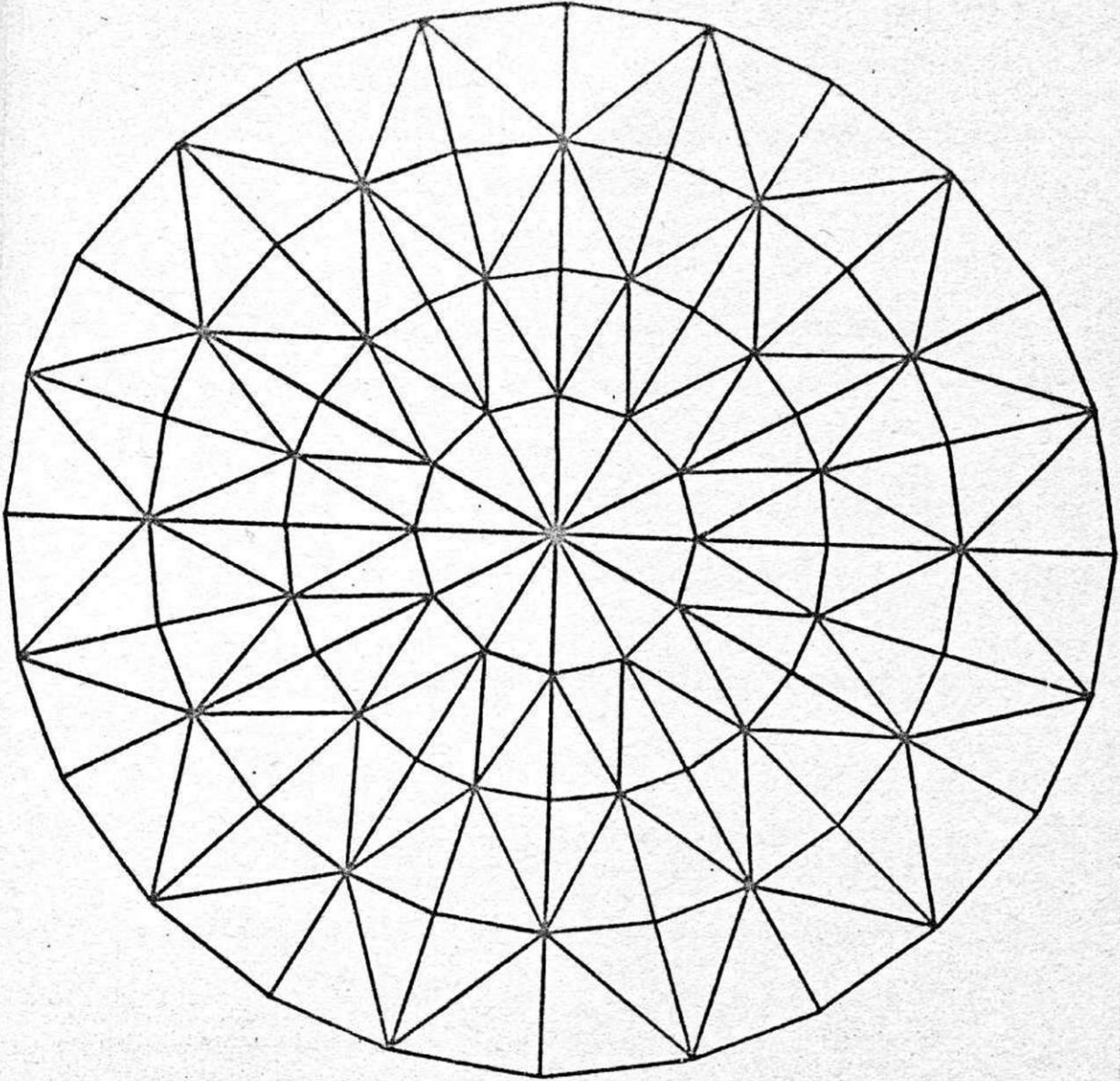


Рис. 4.4

янной толщины при равномерном натяжении в соответствии с классическим решением вычисляются по формуле / 92, 108 /

$$\omega_{mn} = \beta_{mn} \sqrt{T_0 / \rho r_0^2} \quad (4.25)$$

где  $\beta_{mn}$  - нули функции Бесселя первого рода  $m$ -го порядка;

$m, s$  - соответственно число узловых диаметров и окружностей;

$$n = s + 1.$$

Полагая в исходных данных к программе поверхностную плотность пакета круглых изотропных пластин равной единице, определяем следующий частотный параметр

$$\lambda_{mn} = \beta_{mn} \sqrt{T_0 / r_0^2} \quad (4.26)$$

Относительную погрешность вычислений значений частот подсчитываем по формуле

$$\delta = (\lambda - \lambda_0) / \lambda_0 \cdot 100, \% \quad (4.27)$$

где  $\lambda, \lambda_0$  - вычисленное и точное значения частотного параметра.

Результаты численных расчетов частотного параметра пакета круглых пластин при равномерном распределении мембранных усилий сведены в общую таблицу 4.1. Сравнительный анализ его значений показывает, что

а) предлагаемый алгоритм дает оценку значений частот "сверху";

б) точность вычислений значений частот осесимметричных

Сравнение вычисленных по МКЭ значений частотного параметра  $\lambda_{пл}$  с точным значением и известным решением по МКЭ / I08 /, и оценка влияния количества элементов разбиения на точность (заданная относительная точность  $10^{-5}$ )

	Точное	МКЭ / I08 /		МКЭ, результаты автора					
мл	реше - ние	I44 элемен- та	$\delta$ , %	I44 элемен- та	$\delta$ , %	80 элемен- тов	$\delta$ , %	24 элемента	$\delta$ , %
01	2.534	2.486	- 1.894	2.561	+ 1.066	2.594	+ 2.368	2.762	+ 8.998
11	4.039	3.962	- 1.906	4.198	+ 3.937	4.368	+ 8.146	5.028	+24.486
21	5.413	5.245	- 3.104	5.763	+ 6.466	6.131	+13.264	7.510	+38.740
02	5.817	5.271	- 9.386	6.147	+ 5.673	6.432	+10.572	7.405	+27.299
31	6.723	6.379	- 5.117	7.354	+ 9.386	8.022	+19.321	10.327	+53.607
12	7.395	6.620	-10.480	8.265	+11.765	8.951	+21.041	-	-
41	7.996	7.338	- 8.229	8.982	+12.350	-	-	11.742	+46.848

форм выше, чем для осесимметричных форм из работы / 108 /;

в) с увеличением количества элементов расчетные значения собственных частот, полученные на дискретных моделях, приближаются к точным значениям;

г) в спектре частот наблюдается общая тенденция возрастания относительной погрешности с увеличением порядкового номера частоты;

д) осесимметричные формы колебаний во всех трех вариантах совпадают. У форм с одной узловой окружностью радиусы узловых окружностей одинаковы;

е) узловые линии в осесимметричных формах колебаний представляют собой прямолинейные диаметры. В трех вариантах узловые диаметры в соответствующих формах колебаний несколько повернуты друг относительно друга (рис. 4.5 - 5.7);

ж) формы колебаний, вычисленные для третьего варианта с относительной точностью  $10^{-6}$  (рис. П.1.1) отличаются от форм, вычисленных с относительной точностью  $10^{-5}$  (рис. 4.7) поворотом против часовой стрелки узловых диаметров на небольшой угол. Угол поворота уменьшается с возрастанием порядка частоты.

Таким образом, для дальнейших расчетов наиболее предпочтительной является схема третьего варианта, которая обеспечивает высокую точность вычислений значений собственных частот и форм колебаний и предоставляет лучшую возможность для изображения узловых линий сложной конфигурации.

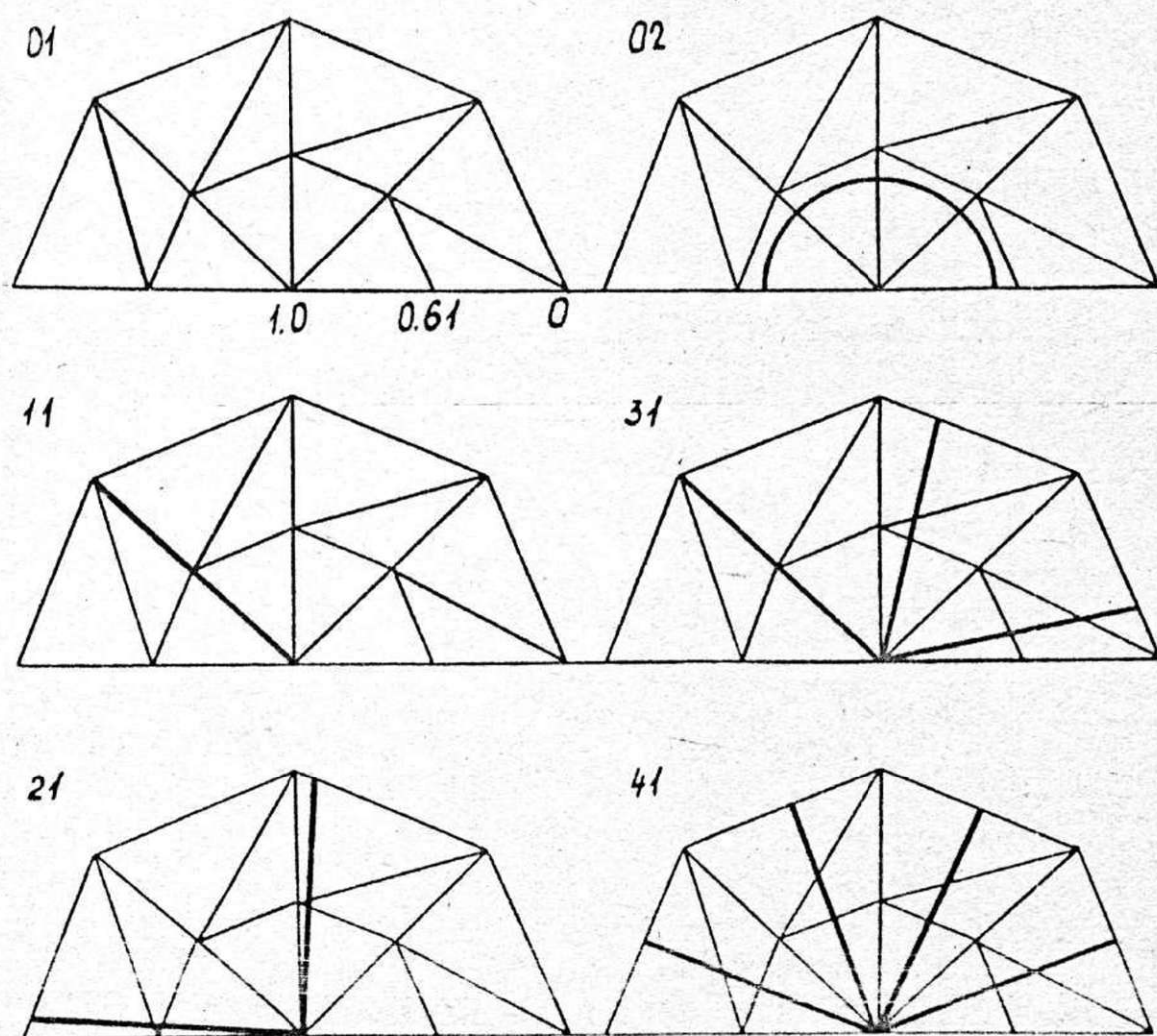


Рис. 4.5. Формы колебаний пакета изотропных пластин, моделированного 24 элементами (относительная точность вычисления частотного параметра  $10^{-5}$ )

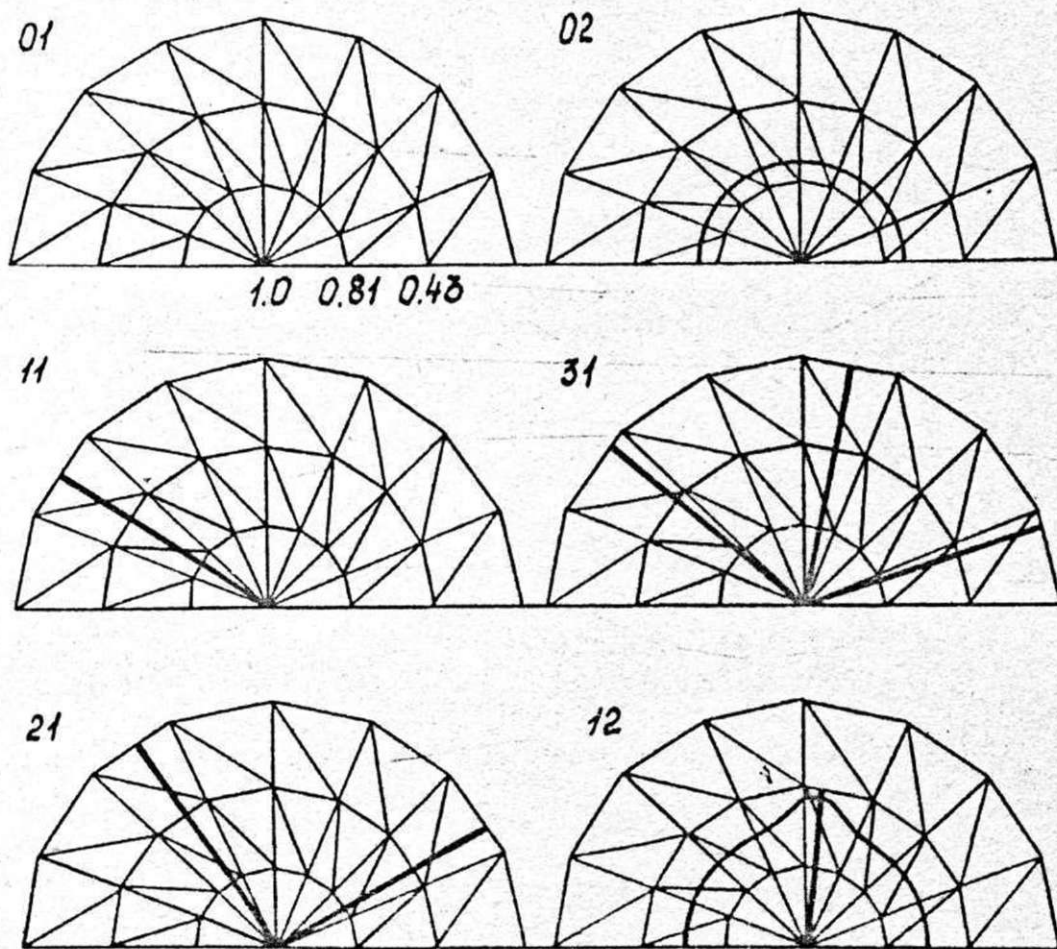


Рис. 4.6. Формы колебаний пакета изотропных пластин, моделированного 80 элементами (относительная точность вычисления частотного параметра  $10^{-5}$ )

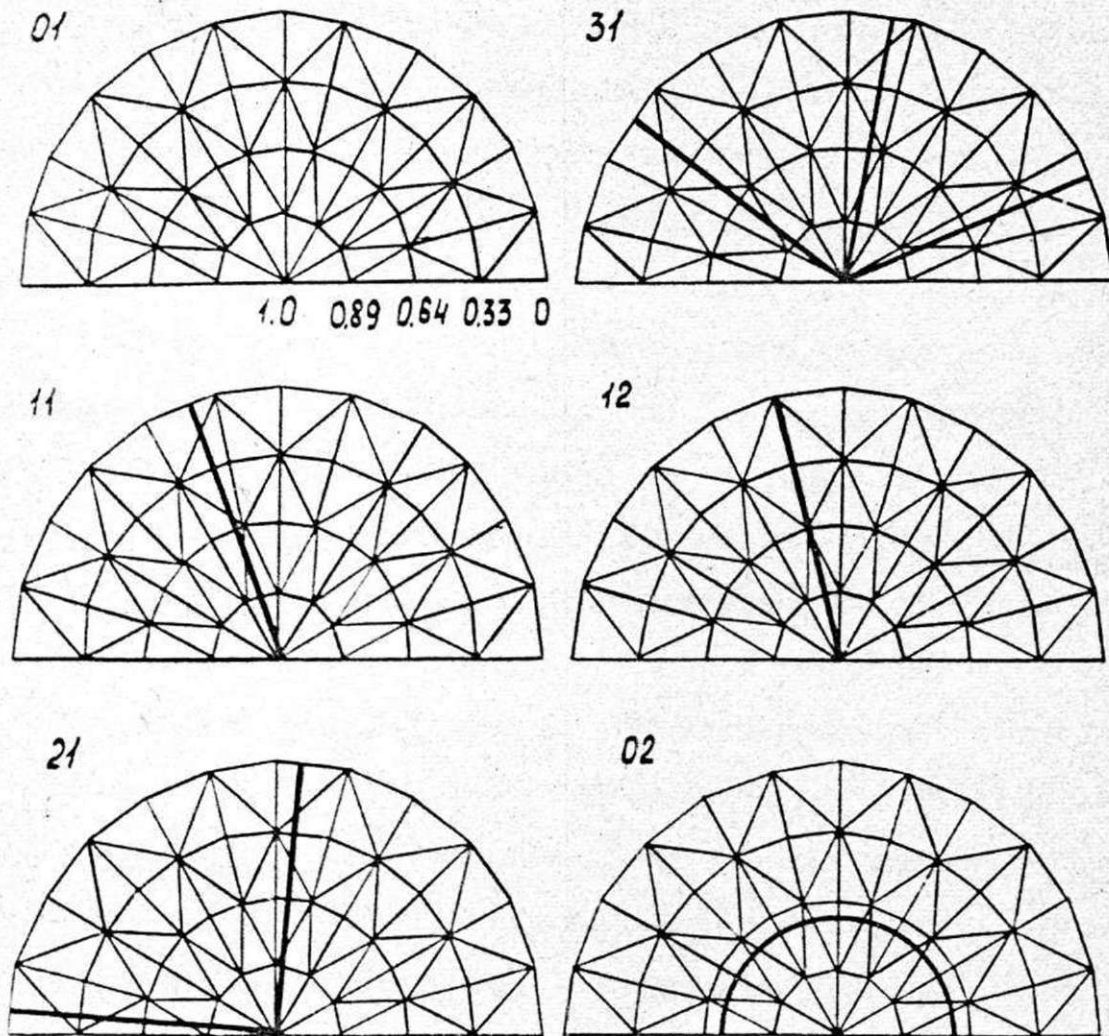


Рис. 4.7. Формы колебаний пакета пластин, моделированного 144 элементами (относительная точность вычисления частотного параметра  $10^{-5}$  )

#### 4.3.2. Влияние асимметрии распределения мембранных усилий на собственные колебания пакета пластин

Анизотропность механических свойств материала пластин, неравномерность усилий, действующих по контуру гибкого элемента со стороны опорного устройства приводят к асимметрии распределения мембранных усилий в гибком элементе. В настоящем параграфе предлагаются результаты качественного исследования собственных колебаний пакета с учетом асимметрии мембранных усилий.

Полагаем, что рассматриваемый пакет состоит из слоев с одинаковым мембранным усилием, материалом и радиусом. Тогда расчет пакета сводится к расчету однородной пластины, представляющей собой один слой, что позволяет сравнить численные результаты по пакету с данными по круглой мембране / IOB /. Сравниваемая круглая мембрана характеризуется следующими параметрами: равномерная составляющая натяжения равна 10 Н; амплитуда переменной составляющей мембранного усилия равна 2 Н в одной серии расчетов и 5 Н в другой; число гармоник переменного усилия принимает значения 2, 4, 6. Такие же исходные данные используются и при расчетах пакета пластин с асимметрией мембранных усилий. Сравнение производится по значениям частотного параметра (см. формулы 4.25 и 4.26), который равен собственной частоте мембраны при поверхностной плотности, равной единице.

Спектр собственных колебаний асимметричного пакета, вычисленный с помощью метода конечных элементов (табл. 4.2), отличается от спектра симметричного пакета (см. табл. 4.1) и от спектра круглой мембраны / IOB /.

Каждой частоте симметричного пакета соответствуют две час-



Таблица 4.2

Значения частотных параметров пакета при асимметрии мембранных усилий  
и мембраны при неравномерном натяжении

	МКЭ / 108 /						МКЭ, результаты автора					
МКЭ	$T_1 = 2$		$T_1 = 5$		$T_1 = 2$		$T_1 = 2$		$T_1 = 5$		$T_1 = 5$	
	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4
01	2.486	2.486	2.486	2.486	2.486	2.486	2.561	2.561	2.561	2.561	2.561	2.561
11	4.144	3.959	3.962	4.399	3.943	3.959	4.016	4.195	4.197	3.718	4.180	4.195
							4.370	-	-	4.613	-	-
21	4.910	5.349	5.243	4.330	5.496	5.229	5.527	5.652	5.868	4.920	5.475	5.752
							5.761	-	-	5.751	-	-
02	5.580	5.257	5.268	6.114	5.180	5.254	6.357	6.132	6.145	6.821	6.051	6.131
12	7.009	6.651	6.608	7.586	6.727	6.547	8.047	8.261	8.255	8.105	8.246	8.206
							8.658	-	-	9.298	-	-
31	6.270	6.324	6.458	6.019	6.123	6.570	7.206	7.775	7.276	6.482	7.228	7.151
							-	-	7.430	-	-	7.540
41	6.924	7.502	7.313	7.581	7.754	7.208	8.890	8.974	8.975	8.502	8.885	8.934

тоты асимметричного. Узловые диаметры поворачиваются на определенный угол по отношению к предшествующему положению. При наименьшем значении частоты узловой диаметр располагается по линии максимальных мембранных усилий, а при наибольшем значении — по диаметрально противоположным линиям (рис. 4.8, 4.9, 4.11, 4.12, 4.13).

Наиболее ярко расслоение собственных колебаний проявляется при двух и четырех гармониках переменного мембранного усилия. В формах с одним узловым диаметром последний располагается под прямым углом к предшествующему положению (см. рис. 4.8).

В формах с двумя узловыми диаметрами при двух гармониках образуются две изогнутые линии, обращенные выпуклостями друг к другу, а при четырех гармониках наблюдается поворот узловых диаметров относительно осей координат на 45 градусов (см. рис. 4.9).

В формах, соответствующих формам симметричного пакета с тремя и четырьмя узловыми диаметрами, наблюдается сочетание узловых диаметров и изогнутых линий (см. рис. 4.12 и 4.13).

Основная осесимметричная форма колебаний при разном количестве гармоник переменного усилия не претерпевает существенных изменений.

Вместо узловых окружностей, имеющих место в симметричном пакете, в асимметричном пакете образуются узловые линии, напоминающие эллипсы. Более длинные оси их располагаются перпендикулярно линиям максимальных мембранных усилий (рис. 4.10).

Для форм, соответствующих форме симметричного пакета с узловым диаметром и окружностью, наблюдаются все закономерности, указанные выше на примере других форм колебаний (см. рис. 4.11).

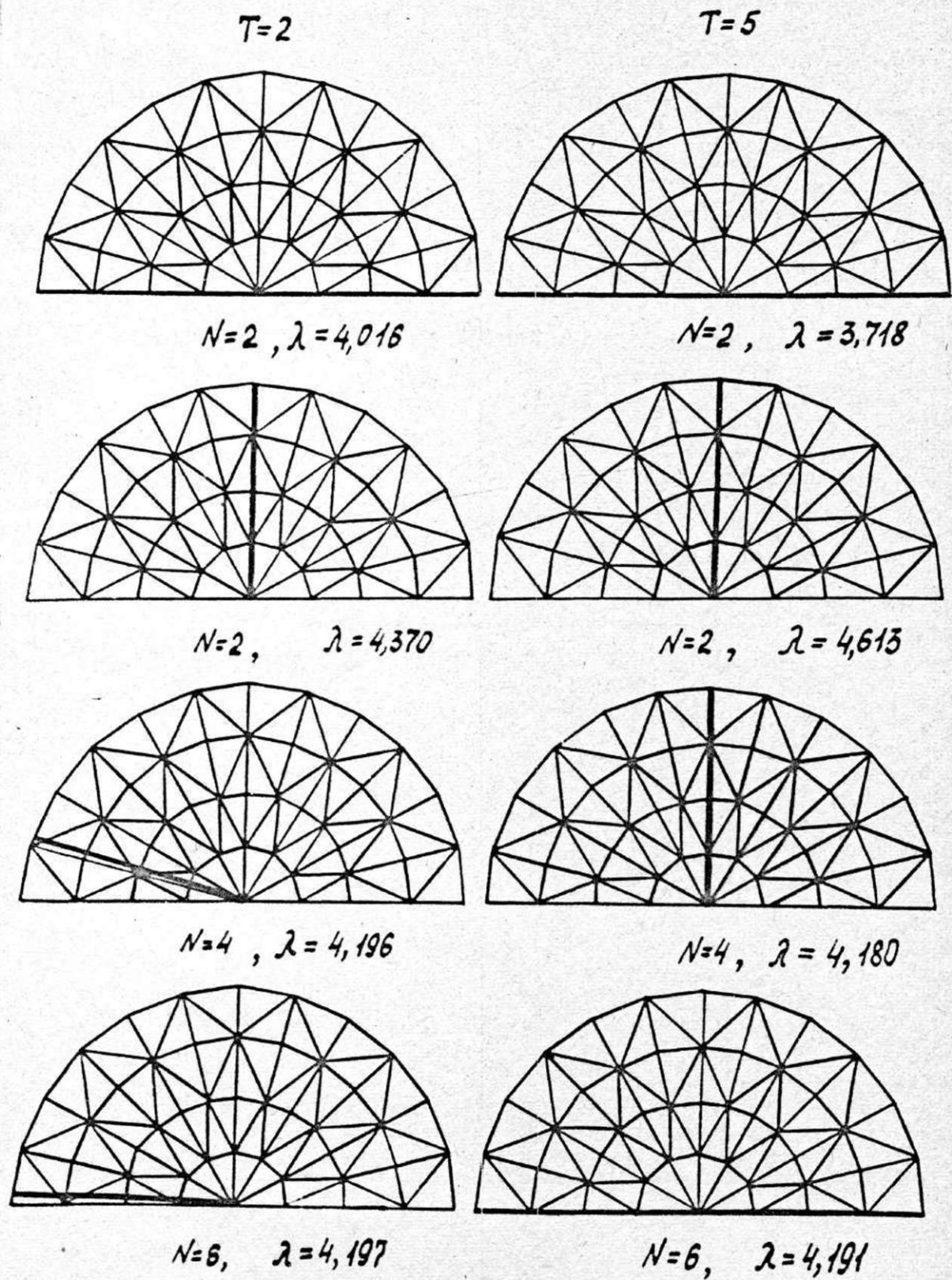


Рис. 4.8. Формы колебаний пакета при асимметрии мембранных усилий (один узловой диаметр)

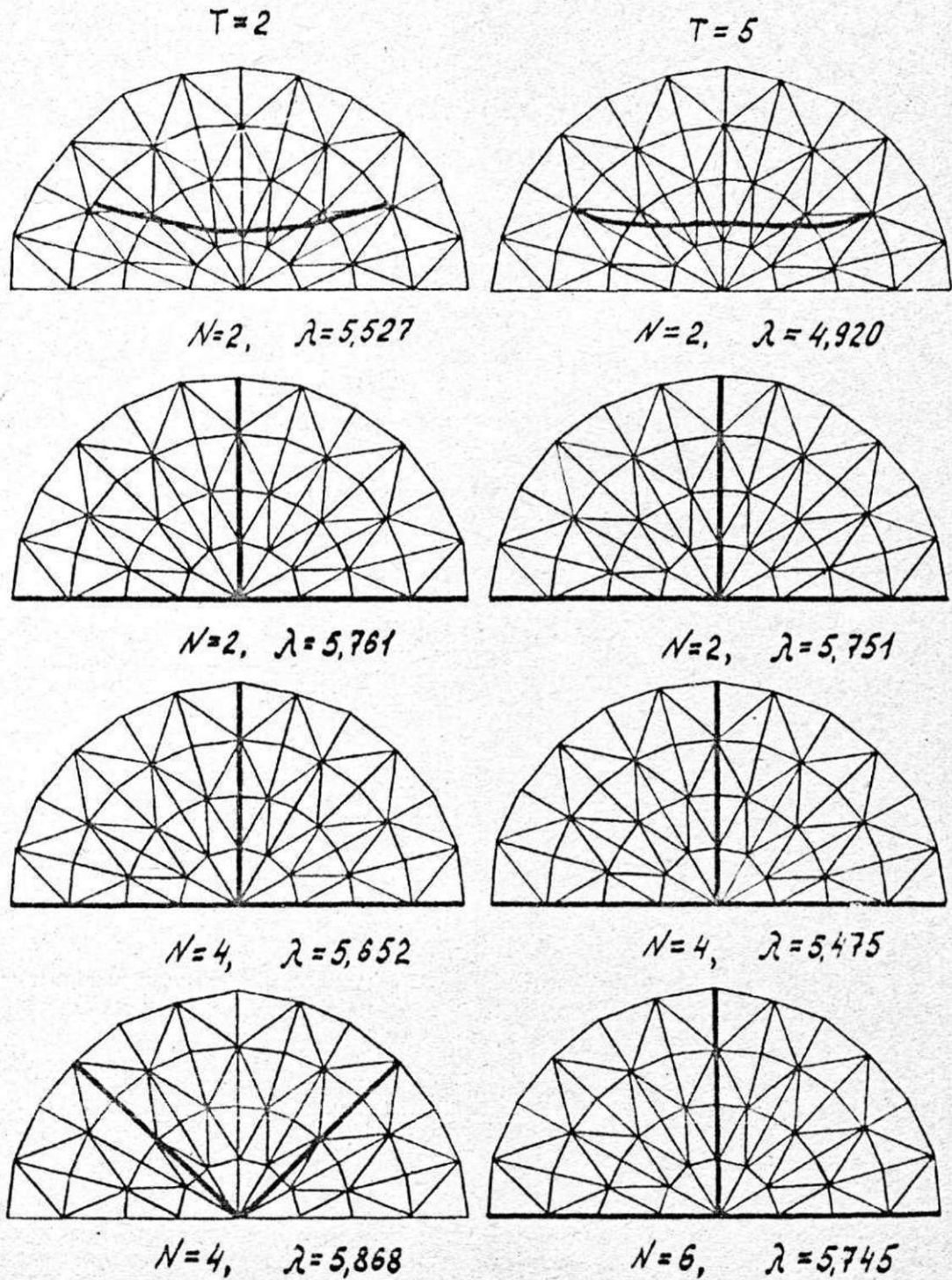


Рис. 4.9. Формы колебаний пакета при асимметрии мембранных усилий (два узловых диаметра)

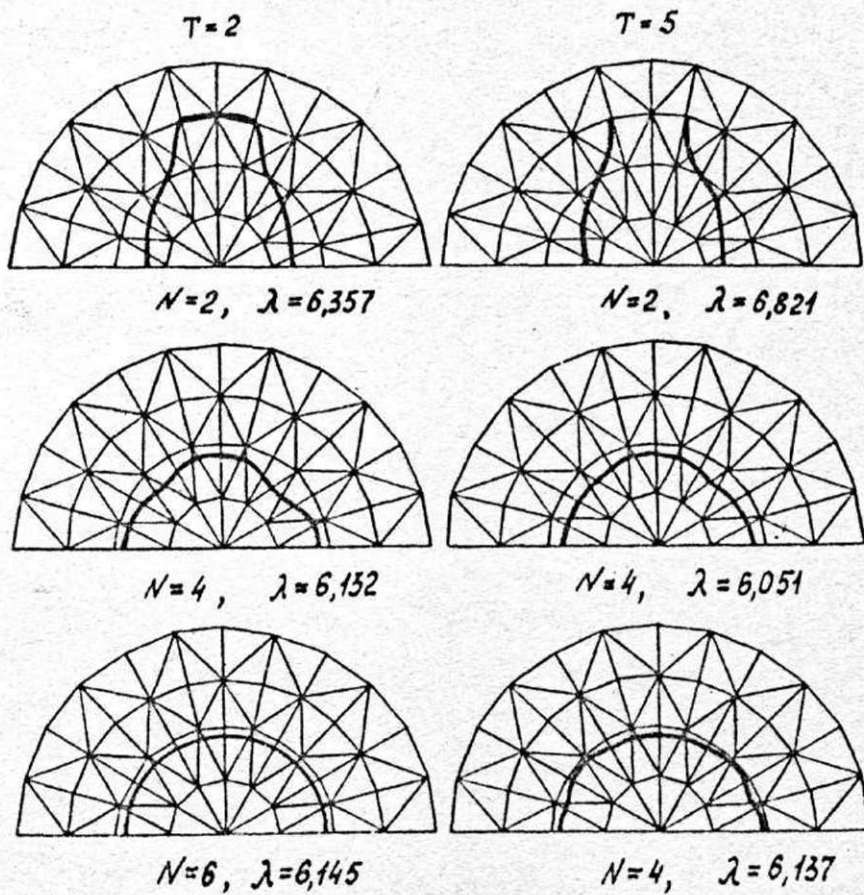


Рис. 4.10. Формы колебаний пакета при асимметрии мембранных усилий (одна узловая окружность)

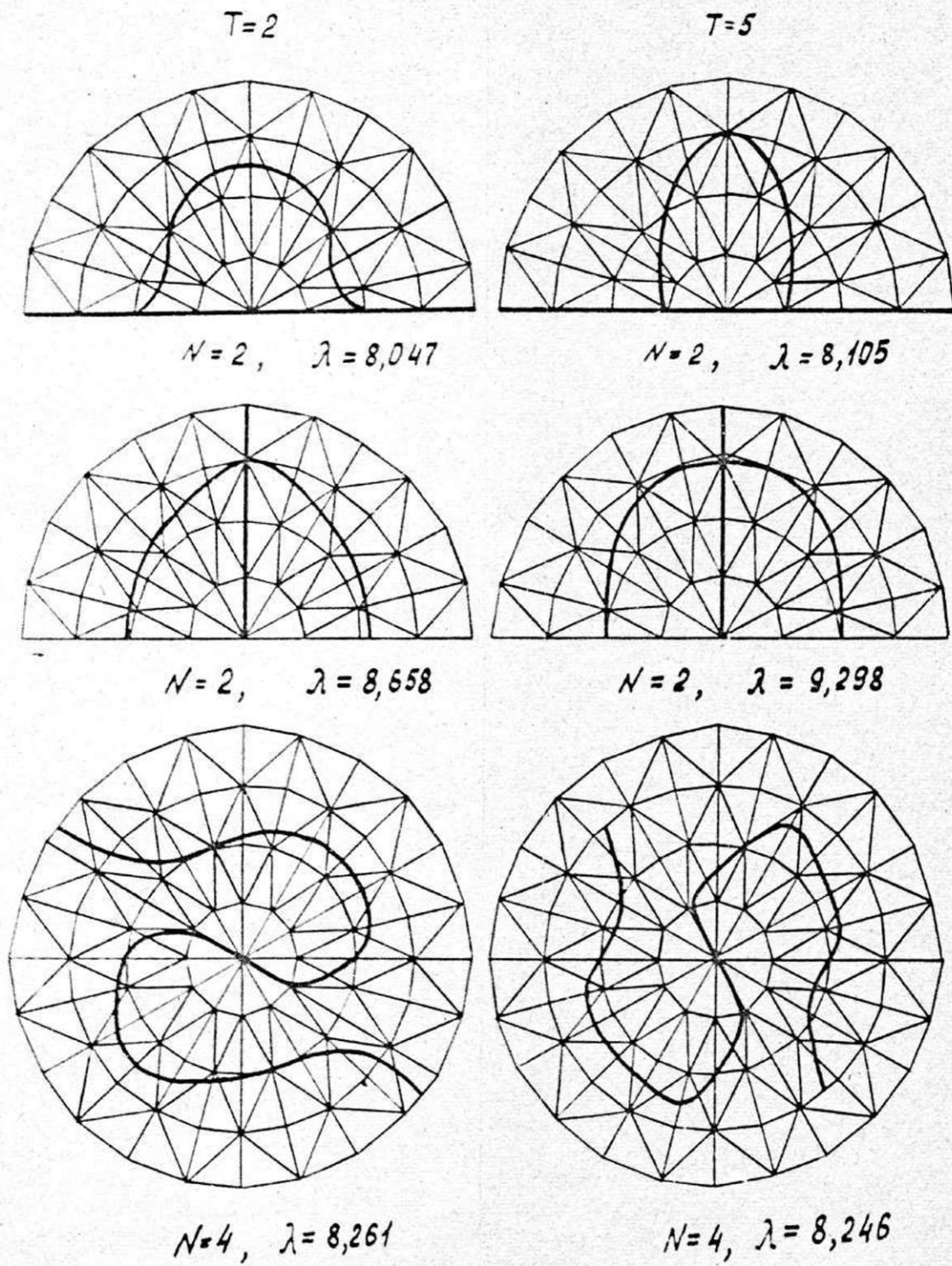
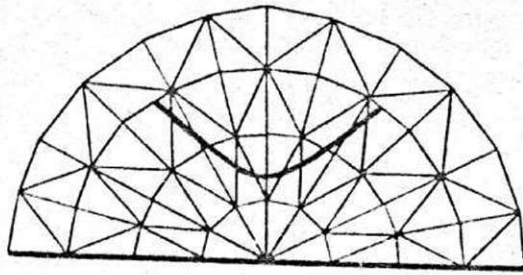
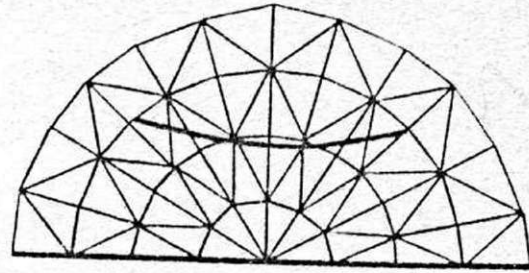


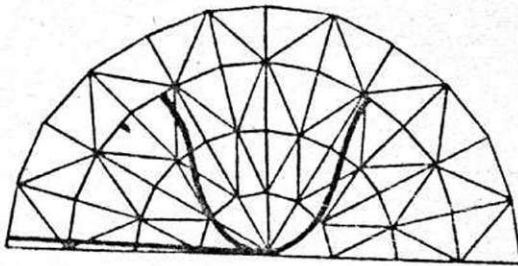
Рис. 4.II. Формы колебаний пакета при асимметрии мембранных усилий (узловой диаметр и окружность)



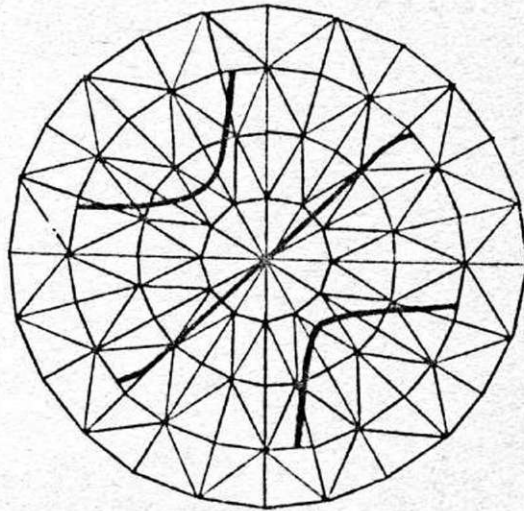
$$T=2, N=2, \lambda=7,206$$



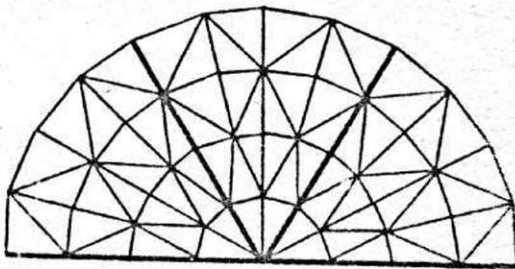
$$T=5, N=2, \lambda=6,482$$



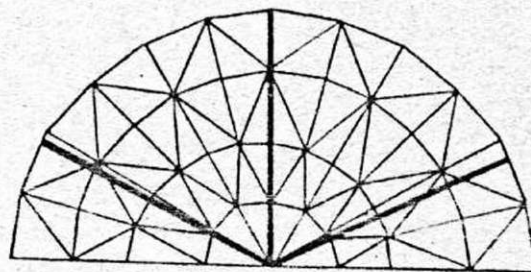
$$T=2, N=4, \lambda=7,335$$



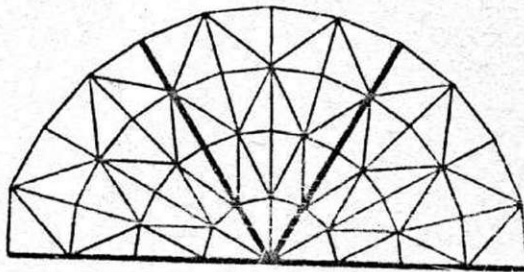
$$T=5, N=4, \lambda=7,228$$



$$T=2, N=6, \lambda=7,261$$



$$T=5, N=6; \lambda=7,574$$



$$T=5, N=6, \lambda=7,116$$

Рис. 4.12. Формы колебаний пакета при асимметрии мембранных усилий (три узловых диаметра)

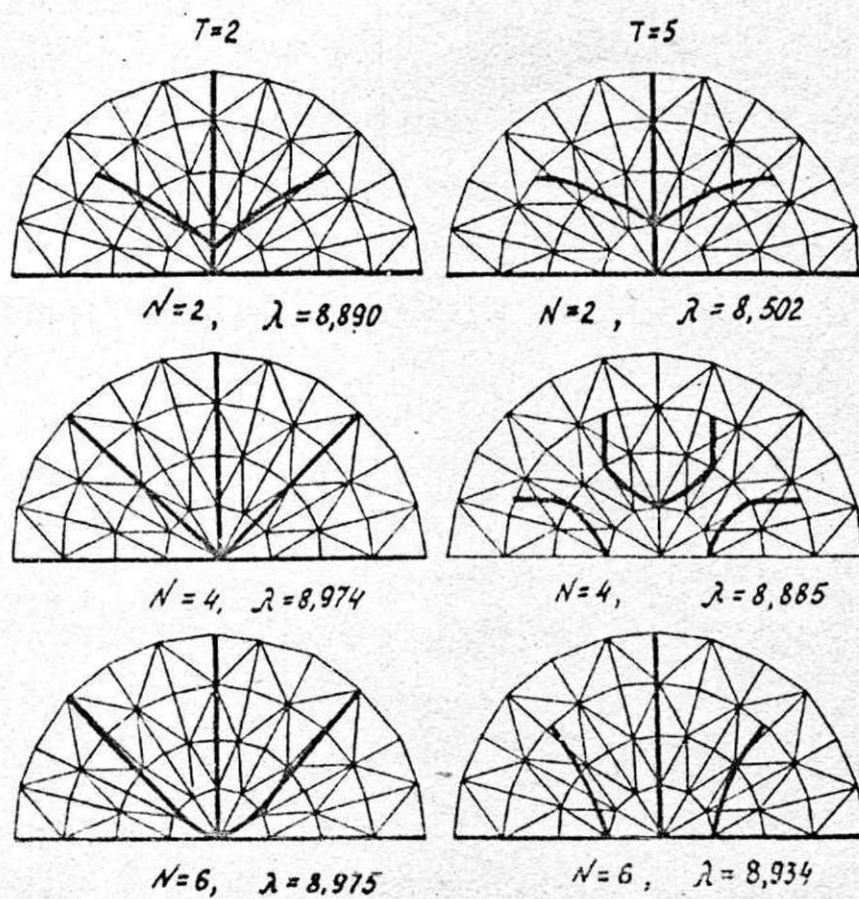


Рис. 4.13. Формы колебаний пакета при асимметрии мембранных усилий (четыре узловых диаметра)



#### 4.4. Выводы

1. Исходя из выражений потенциальной энергии деформации и кинетической энергии движения треугольного конечного элемента получены формулы для вычисления матриц жесткости и инерции по мембранной модели пакета. Представленная матрица жесткости позволяет учитывать асимметрию распределения мембранных усилий, которая может быть вызвана анизотропией механических свойств материала либо действием усилий со стороны опорного устройства, неравномерно распределенных по контуру гибкого элемента.

2. Применение мембранной конечноэлементной модели к расчету параметров собственных колебаний пакета пластин обосновывается малой толщиной пакета и большими статическими перемещениями, вследствие чего мембранные напряжения преобладают над изгибными. Превалирующая роль мембранных напряжений в пакете, находящемся в закритическом состоянии, дает основание для применения мембранной модели и в этом случае.

3. Преимущества конечноэлементной мембранной модели по сравнению с моделью пакета, основанной на уравнениях типа Кармана (см. главу 2), заключаются в краткости записи основных соотношений, линейности уравнений, удобстве для реализации на ЭЦВМ, возможности определения несесимметричных форм колебаний и учета асимметрии распределения мембранных усилий.

4. Разработан алгоритм вычислений частот и форм собственных колебаний пакета круглых пластин методом конечных элементов и реализован на ЭЦВМ типа ЕС в виде пакета подпрограмм на языке ФОРТРАН.

5. По результатам расчетов трех вариантов конечноэлементной сетки пакета, отличающихся количеством конечных элементов, выбран рациональный вариант, обеспечивающий наиболее высокую точность

вычисляемых значений частот и форм собственных колебаний.

Метод расчета является достаточно точным. Максимальная погрешность расчета значений первых пяти частот не превышает десяти процентов. Расчетные значения частот с увеличением количества элементов приближаются к точным значениям. Предлагаемый алгоритм дает оценку значений частот "сверху".

6. Выполнено качественное исследование влияния асимметрии распределения мембранных усилий на собственные колебания пакета пластин. Получены зависимости значений семи частот от амплитуды и числа гармоник переменного усилия, построены соответствующие формы колебаний.

Показано, что асимметрия мембранных усилий приводит к расщеплению спектра частот пакета. При этом узловые линии не только поворачиваются друг относительно друга, но и приобретают криволинейную конфигурацию.

7. Практическая ценность предлагаемой методики заключается в том, что с её помощью можно воспроизвести форму колебаний гибкого элемента мембранной установки и проанализировать причину его разрушения. Мембранная модель позволяет также определить спектр частот пакета в заданном диапазоне еще на стадии проектирования мембранной установки.

## ГЛАВА 5

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Основная цель экспериментального исследования заключается в проверке адекватности пластинчатой и мембранной математических моделей пакета и реальной конструкции. Критерием сравнения служат формы и частоты собственных колебаний. Проверке подлежат допущения, которые легли в основу построения обеих математических моделей. В настоящей главе формулируются рекомендации по анализу причин поломок гибких элементов, конструированию опорных устройств мембранных установок.

Для пакета круглых пластин с ортотропными свойствами материала обнаружен эффект расслоения спектра частот собственных колебаний. Путем сравнения вычисленных методом конечных элементов и зарегистрированных в опытах форм колебаний подтверждается возможность возбуждения на практике форм колебаний, прогнозируемых на основе мембранной модели.

Смещение опорного устройства оказывает существенное влияние на формирование граничных условий на контуре пакета. В настоящей работе смещения опорного устройства анализируются с помощью метода конечных элементов. Соблюдение симметричности граничных условий имеет большое значение для обеспечения равномерности распределения напряжений в пакете пластин мембранной установки. Часть экспериментального исследования посвящена изучению влияния граничных условий на частоты и формы собственных колебаний.

Значительную часть экспериментального исследования составляет анализ колебаний однородной круглой пластины, который име-

ет также и самостоятельное значение.

### 5.1. Описание экспериментальной установки и методика измерений

В соответствии с целями эксперимента предусматривалось создание специального приспособления для закрепления по контуру и установке на вибростенде как пакета, так и одной круглой пластины. Исследование однородной пластины проводится для проверки работоспособности приспособления, освоения методики измерений и получения сравнительных данных.

Изготовленное приспособление состоит из прижимных колец, соединяемых болтами. На рис. 5.1 показан разрез приспособления. Плоскости разреза проходят через центры отверстий в нижнем и верхнем кольцах. Отверстия в нижнем кольце, показанные слева на рисунке, предназначены для крепления приспособления на столике вибростенда. На верхнем кольце установлен вибродатчик ИС-318.

Для опытов используются три пластины из пружинной стали, несколько отличающиеся диаметром и толщиной (табл. 5.1)

Таблица 5.1

Геометрические параметры пластин, используемых  
в экспериментах

Параметры	Пластины		
	№ 1	№ 2	№ 3
Диаметр, м	0,187	0,187	0,185
Толщина, м	$0,370 \cdot 10^{-3}$	$0,380 \cdot 10^{-3}$	$0,365 \cdot 10^{-3}$

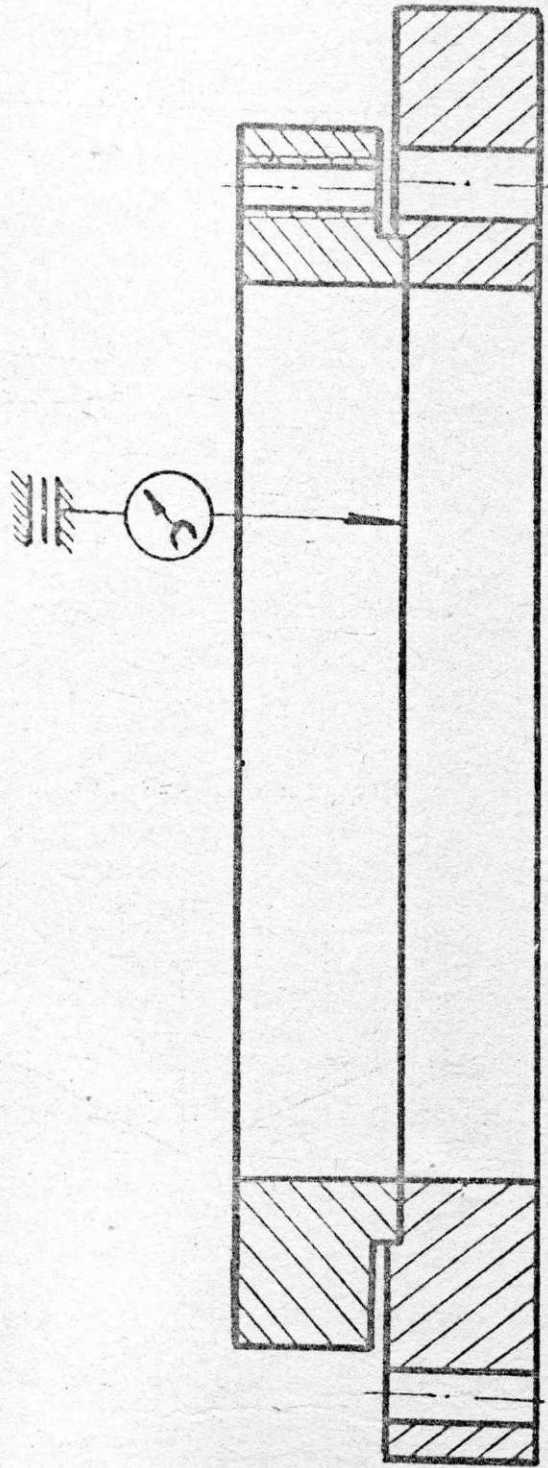


Рис. 5.1

После закрепления пластины в приспособлении предварительные замеры статических прогибов осуществляются индикатором часового типа ИЧ-5. С этой целью приспособление устанавливается на вращающемся координатном столике станка и закрепляется. Измерительная система является достаточно жесткой и позволяет делать замеры с высокой точностью в окружном и радиальном направлениях. Значение статического прогиба определяется по разности показаний индикатора на контуре и в центре пластинки (табл. П.2.1)

Возбуждение колебаний осуществляется с помощью вибростенда ВЭДС-400А. Эксперименты проводятся с небольшим значением ускорения возбуждения. Собственные частоты фиксируются по показаниям генератора гармонических сигналов ГЗ-33, а формы колебаний (песочные фигуры) фотографируются или регистрируются графически. Измерения проводятся многократно: при увеличении и уменьшении частоты возбуждения.

## 5.2. Исследование собственных колебаний однородной пластины

В ходе эксперимента с однородной пластиной удалось выявить три фактора, наиболее существенно влияющих на формы и частоты колебаний: несоосность прижимных колец, статический прогиб, ортотропность пластин. Об их влиянии на колебания пластины и пойдет речь ниже.

Для сравнительного анализа подсчитаны собственные частоты / II / малых колебаний защемленной по контуру круглой пластины, имеющей параметры пластин, используемых в эксперименте: модуль упругости  $2,06 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>; коэффициент Пуассона 0,3; плотность  $7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; радиус 0,085 м; толщина  $0,4 \cdot 10^{-3}$  м (для расчета

взято округленное значение). Получены следующие значения частот: для формы колебаний без узловых линий - 140 Гц, с одним узловым диаметром - 291 Гц, с двумя - 477 Гц, с тремя - 699 Гц, с одной узловой окружностью - 545 Гц.

### 5.2.1. Влияние несимметрии граничных условий

Собственные частоты колебаний тонкой круглой пластины, как показал опыт, чрезвычайно чувствительны к граничным условиям. В первоначальном варианте конструкции приспособления проточки в прижимных кольцах, показанные на рис. 5.1, не были предусмотрены. Вследствие неточности изготовления при каждой сборке прижимные кольца оказываются смещенными друг относительно друга в плоскости заделки. Величина несоосности сравнительно мала, однако достаточна для того, чтобы повлиять на частоты и формы колебаний.

Относительное смещение прижимных колец приводит к несимметричности граничных условий, что является причиной образования смещенных относительно центра пластины форм колебаний, которые изображены на рис. 5.2 в порядке возрастания числа узловых линий. Заштрихованными показаны такие зоны на пластине, где накапливался колеблющийся вместе с пластиной песок. Соответствующие значения резонансных частот в большинстве опытов оказались ниже расчетных собственных частот малых колебаний. Это указывает на то, что пластины в ходе эксперимента были сжаты усилиями, действующими со стороны опорного устройства.

На результаты экспериментов оказывают влияние все тринадцать выше факторы. Примером этому служат вибрационные испытания с пластиной № I, проведенные для изучения влияния несим-



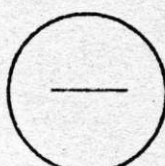
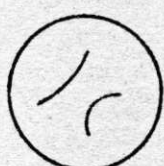
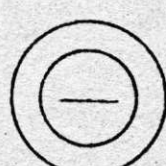
Формы колебаний и частоты, Гц					
пластина 1		пластина 2			
					
525	760	380	495	670	820
					
590	820	400	520	685	880

Рис. 5.2



метричности статического прогиба на собственные колебания / 36 /.

На исследуемую пластину нанесена координатная сетка из нескольких радиусов и окружностей, отстоящих друг от друга на расстояние, составляющее 0,2 радиуса пластины. Проведенные замеры показали, что статический прогиб в геометрическом центре пластины составляет  $0,55 \cdot 10^{-3}$  м, а максимальный прогиб равен  $0,7 \cdot 10^{-3}$  м, причем соответствующая точка смещена вверх по вертикальному радиусу (рис. 5.3) и находится на окружности с радиусом, равным 0,4 радиуса пластины.

Конфигурации узловых линий для формы колебаний с двумя (см. рис. 5.3) и тремя узловыми диаметрами (рис. 5.4) являются несколько смещенными относительно геометрического центра пластины. Наряду с этим следует отметить сильную искаженность форм колебаний (рис. 5.5 - 5.6), идентификация которых является весьма сложной.

#### 5.2.2. Влияние статического прогиба

Для устранения несоосности прижимных колец (рис. 5.1) в них были сделаны проточки, а контактирующие между собой цилиндрические поверхности колец были выполнены по 2 классу точности. После сборки приспособления внутренняя цилиндрическая поверхность была обработана на токарном станке, благодаря чему была достигнута параллельность прижимающих кромок. Указанными конструктивными мероприятиями была обеспечена симметричность граничных условий. Свидетельством этого являются полученные экспериментально формы колебаний (рис. 5.7, рис. П.2.1 - П.2.5), которые подобны классическим формам, известным в теории малых

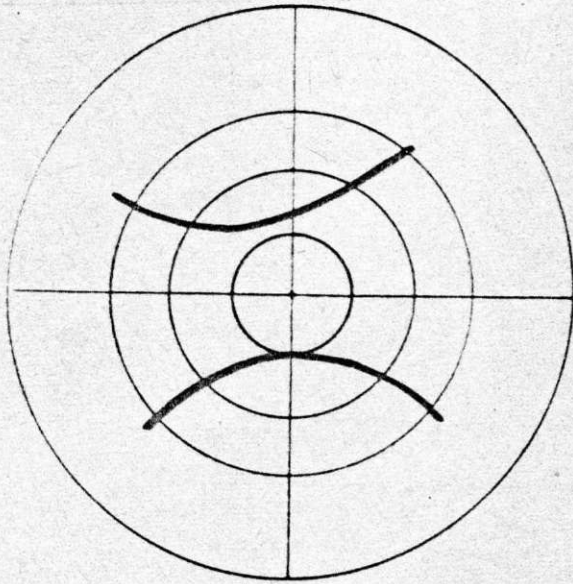


Рис. 5.3. Частота 860 Гц

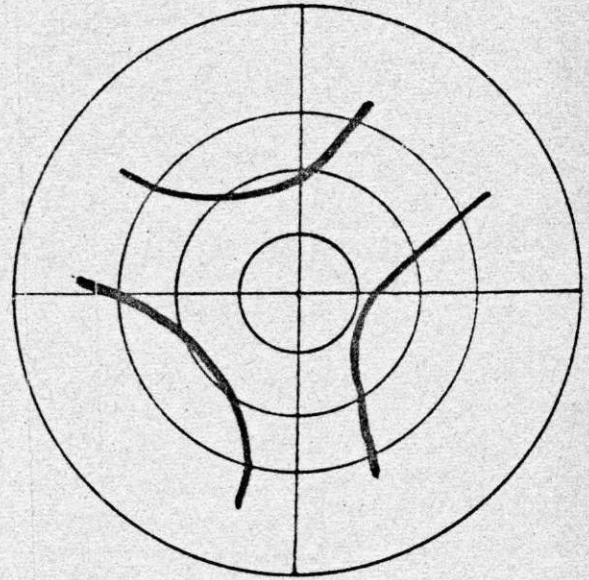


Рис. 5.4. Частота 540 Гц

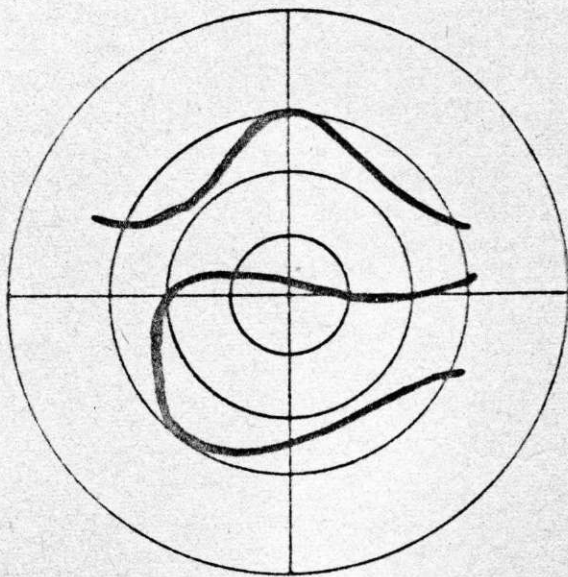


Рис. 5.5. Частота 670 Гц

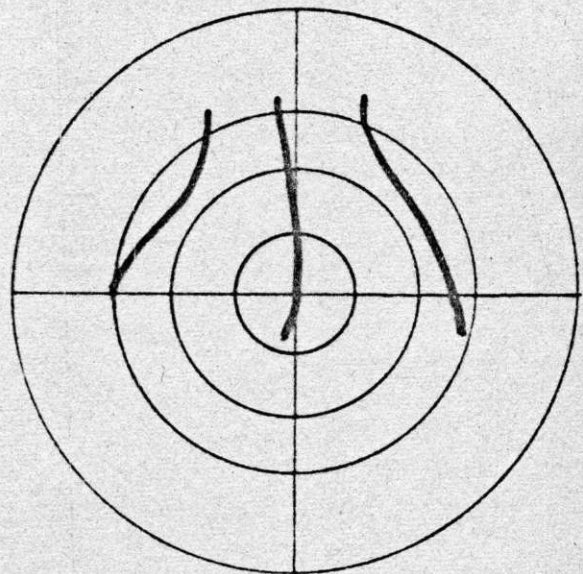


Рис. 5.6. Частота 780 Гц

Формы колебаний и частоты, Гц			
Пластина 2	Пластина 3		
			
160	200-250	430	304
			
200	330-350	502	495

Рис. 5.7

колебаний круглых мембран / 63, 92 /, пластин / II, I5 / и пологих сферических оболочек / IO2 /. Отличительной чертой зарегистрированных форм колебаний является расположение узловых линий в средней части пластины.

С помощью индикатора было установлено, что при затяжке колец болтами пластина прогибается (табл. П.2.1). Очевидно, что при деформации колец в срединной плоскости пластины возникают радиальные сжимающие усилия, распределенные по ее контуру. Если интенсивность этих усилий не превосходит критического значения, при котором происходит потеря устойчивости, то влияние их приводит к понижению собственных частот / 96 /. В большинстве опытов автора все испытываемые пластины после закрепления в приспособлении находились в закритическом состоянии. Об этом свидетельствовал статический прогиб, который пластина приобретала при деформации колец. Значение прогиба превышало толщину пластины. Видоизменялась и форма поверхности пластины: в средней зоне поверхность плоская, а вблизи защемления резко менялась ее кривизна. Известно / 23 /, что при закритическом состоянии в средней зоне пластины действуют растягивающие напряжения. Этим объясняется тот факт, что найденные экспериментально частоты оказались выше собственных частот малых колебаний защемленной по контуру плоской пластины.

Статические прогибы, вызванные деформацией колец, наибольшее влияние оказали на значения собственных частот, соответствующих безузловой форме колебаний (табл. 5.2). Отсутствие узловых линий у названной формы колебаний, а также сравнительно малые амплитуды колебаний в момент резонанса затруднило его идентификацию и определение частоты. Этим обстоятельством объясняется пропуск ряда значений частот в табл. 5.2.

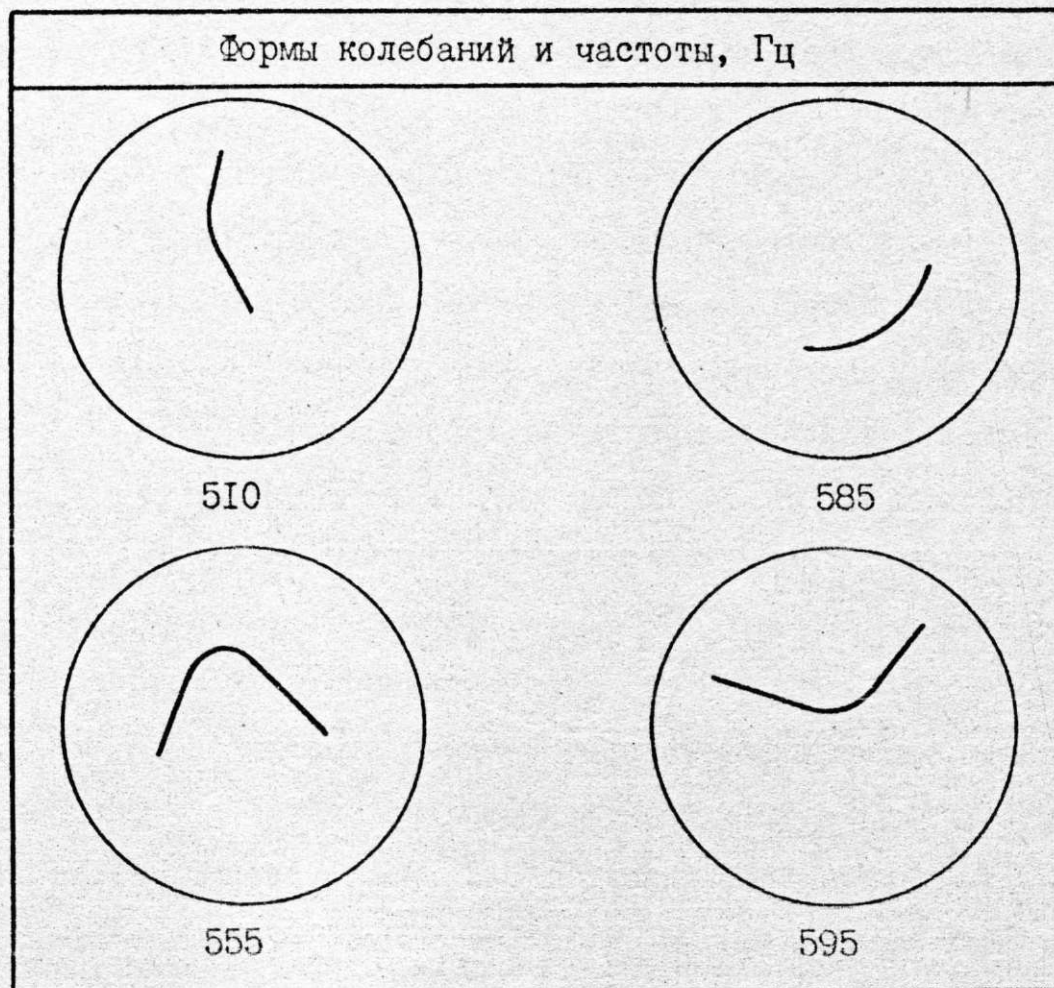
Таблица 5.2

Влияние статического прогиба на собственные частоты колебаний (Гц) пластины № 2

:Количество узловых :диаметров	: Статический прогиб, $10^{-3}$ м :									
	: 0,5:	0,5:	0,6:	0,8:	0,9:	0,9:1,0	: 1,3:	1,7:	:	:
: 0	: 185:	188:	200:	- :	- :	- :	- :	445:	- :	:
: 1	: 370:	360:	370:	370:	370:	380:	390:	- :	510:	:
:	: - :	- :	400:	400:	400:	400:	415:	460:	585:	:

Таблица 5.3

Конфигурации узловых линий при статическом прогибе, равном  $1,7 \cdot 10^{-3}$  м



Значения собственных частот, соответствующих форме колебаний с одним узловым диаметром (см. табл. 5.1), при изменении статического прогиба от 1,25 до значения, соответствующего 2,5 толщины пластины, практически не отличаются друг от друга.

Следует отметить, что приведенные в табл. 5.1 спектры частот для одинаковых статических прогибов ( $0,5 \cdot 10^{-3}$  м и  $0,9 \cdot 10^{-3}$ ) определены независимо друг от друга. В то же время близость зарегистрированных значений частот свидетельствует о достоверности полученных результатов.

При статическом прогибе, превышающем толщину пластины в 4,25 раза ( $1,7 \cdot 10^{-3}$  м, табл. 5.1) наблюдается искривление узлового диаметра (табл. 5.3). Соответствующие частоты существенно выше частот при других значениях статического прогиба (см. табл. 5.1).

К указанным выше значениям собственных частот с одним узловым диаметром при статическом прогибе  $1,7 \cdot 10^{-3}$  м весьма близки следующие значения частот: 555 Гц и 595 Гц. Однако соответствующие конфигурации узловых линий (см. табл. 5.3) не могут быть идентифицированы совокупностью узловых диаметров и окружностей. Интересно, что все четыре формы колебаний были получены в порядке возрастания собственных частот в ходе эксперимента.

При форме колебаний с двумя узловыми диаметрами (табл. 5.4) изменение статического прогиба от  $0,5 \cdot 10^{-3}$  м на значения собственных частот практически не повлияло.

Для формы колебаний с одной узловой окружностью наблюдалась тенденция к возрастанию собственных частот при увеличении статического прогиба (табл. 5.5). Однако зафиксированные при этом конфигурации узловых линий в большинстве случаев не явля-

Таблица 5.4

Формы колебаний с двумя узловыми диаметрами










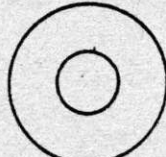


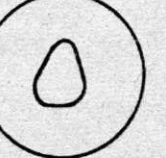
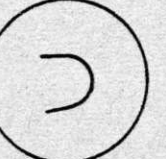

Начальный прогиб, $10^{-3} \text{ м}$	Формы колебаний и частоты, Гц	
0,5	 505	—
0,5	 500	—
0,6	510	—
0,8	 455	 510
0,9	465	510
0,9	 495	 520
1,0	 505	 560
1,3	 505	—

Таблица 5.5

Формы колебаний с узловой окружностью

Начальный прогиб, $10^{-3} \text{ м}$	Формы колебаний и частоты, Гц
0,5	 585
0,5	 590
0,6	580/600 эллипс
0,8	 620
0,9	 605
0,9	 620
1,0	 640

ются осесимметричными. Только при сравнительно небольших прогибах ( $0,5 \cdot 10^{-3}$  м) в качестве форм колебаний зарегистрированы окружность и эллипс.

Большое количество проведенных опытов позволяет сопоставить экспериментальные и теоретические зависимости спектра частот от статического прогиба в центре пластины (табл. 5.6). Сопоставление будем проводить, пользуясь безразмерными переменными. Для перехода к безразмерным переменным замеренные в опытах значения статического прогиба отнесем к толщине пластины, а зарегистрированные значения частот разделим на величину  $\sqrt{D/(R^4 \rho h)}$ . В строках под № 1 помещаем расчетные значения полной безразмерной частоты  $\omega_{mn}^p$ , вычисленные по формуле (4.24). В строках № 2 располагаем значения частот  $\bar{\omega}_{mn}$ , которые зависят от мембранных усилий (см. 4.25).

В табл. 5.6 включены значения четырех частот, формы колебаний при которых отличаются числами узловых диаметров и окружностей, обозначенных соответственно буквами  $m$  и  $s$ . Поскольку в большинстве опытов наблюдалось расслоение спектра частот, то каждая строка экспериментальных данных содержит по паре значений частоты.

Анализ результатов, сосредоточенных в табл. 5.6, позволяет сделать следующие выводы.

1. Увеличение значений статического прогиба круглой пластины приводит к существенному смещению спектра частот собственных колебаний в область более высоких значений.

2. Влияние статического прогиба на значения частот уменьшается с увеличением порядка резонанса. В проведенных опытах при изменении статического прогиба от 1,25 до 4,25 толщины



Таблица 5.6

Экспериментальные и расчетные значения частот прогиба круглой пластины

	Способ определения	Статический прогиб в центре									
		1,25	1,25	1,5	2,0	2,25	2,25	2,5	2,25	3,25	4,25
00	Эксперимент	13,5	13,7	14,6	18,2	-	-	-	-	32,5	-
		13,3	13,3	14,5	17,0	-	-	-	-	24,2	-
	Расчет	8,4	8,4	10,1	13,5	-	-	-	-	21,9	-
		27,0	26,3	27,0	27,0	27,0	27,7	28,5	-	37,2	-
10	Эксперимент	-	-	29,2	29,2	29,2	29,2	29,2	29,2	33,6	42,7
		25,1	25,1	26,7	30,2	32,2	32,2	34,3	40,9	50,5	-
	Расчет	13,5	16,2	21,5	24,2	24,2	24,2	26,9	35,0	45,8	-
		36,8	36,5	37,2	33,2	35,4	36,1	36,8	36,8	-	-
20	Эксперимент	-	-	-	37,2	37,2	37,2	37,2	37,9	-	-
		39,2	39,2	41,0	45,3	47,7	47,7	50,2	58,5	-	-
	Расчет	18,1	18,1	21,7	28,9	32,5	32,5	36,1	50,6	-	-
		42,7	43,0	42,3	45,2	45,2	-	46,7	-	-	-
01	Эксперимент	-	-	43,8	-	-	-	-	-	-	-
		44,3	44,3	46,1	50,5	53,0	53,0	53,0	55,6	-	-
	Расчет	19,4	19,4	23,3	31,1	35,0	35,0	38,9	-	-	-
		42,7	43,0	42,3	45,2	45,2	-	46,7	-	-	-

пластины, отклонение частоты колебаний от соответствующей собственной частоты малых изгибных колебаний составило: при безузловой форме колебаний от 32% до 220% (два значения обусловлены расслоением), при форме с одним узловым диаметром - (37 - 100) %, с двумя - (6 - 7) %, с одной узловой окружностью - (8 - 17) %, при форме колебаний с тремя узловыми диаметрами наблюдался разброс экспериментальных значений частоты около значения собственной частоты малых изгибных колебаний.

Объяснение такого большого увеличения значений частот заключается в том, что при больших прогибах пластина находится в закритическом состоянии, которое характеризуется возникновением в средней зоне пластины значительными растягивающими мембранными усилиями.

Вычисленные значения "полных" частот (строки № 1) весьма близки к экспериментальным значениям частот. Близость сравниваемых значений соблюдается до значения статического прогиба, равного удвоенной толщине пластины. Экспериментальные значения частот при прогибах, превосходящих указанное значение, удовлетворительно совпадают со значениями частот, зависящими от мембранных усилий (строки № 2).

### 5.2.3. Расслоение спектра собственных частот

В подавляющем числе опытов наблюдались парные формы колебаний. Указанное явление характеризуется тем, что значения собственных частот весьма близки друг к другу, а формы колебаний отличаются поворотом узловых линий. Расслоения были зарегистрированы в опытах со всеми тремя пластинами. Они имели

место как при относительном смещении колец (см. рис. 5.2), так и при осесимметричных условиях на контуре пластины (см. рис. 5.7).

Формы колебаний с одним узловым диаметром (см. рис. 5.7) отличаются друг от друга поворотом узловых линий на 90 градусов.

В "расслоившихся" формах колебаний с двумя узловыми диаметрами также наблюдается поворот и некоторое изменение конфигураций узловых линий (см. табл. 5.4). Как показали опыты с пластиной № I, на которую была нанесена координатная сетка, поворот двух узловых диаметров происходит примерно на 45 градусов (рис. 5.8).

Если формы колебаний, изображенные на рис. 5.8, лишь условно можно считать узловыми диаметрами, то форма колебаний, зарегистрированная при 760 Гц (рис. 5.9), полностью соответствует этому названию. При этом "сопутствующая" форма колебаний (при частоте 820 Гц) подобна ей и состоит из двух пар прямолинейных отрезков, пересекающихся под одинаковыми углами, которые чуть больше 90 градусов.

Сравнивая формы колебаний, показанные на рис. 5.8 и 5.9, можно прийти к выводу, что явление расслоения для форм колебаний проявляется не только в повороте узловых линий, но и в изменении их конфигурации: наряду с прямыми узловыми диаметрами наблюдаются ломаные и плавно изогнутые линии.

Более того, экспериментально установлено, что при расслоении довольно часто образуются качественно новые конфигурации узловых линий. Такой результат получен, в частности, при расслоении формы колебаний с тремя узловыми диаметрами (рис. 5.10). Если рисунок узловых линий при частоте 940 Гц сходен с аналогичным рисунком, полученным также экспериментально / 102 /, то

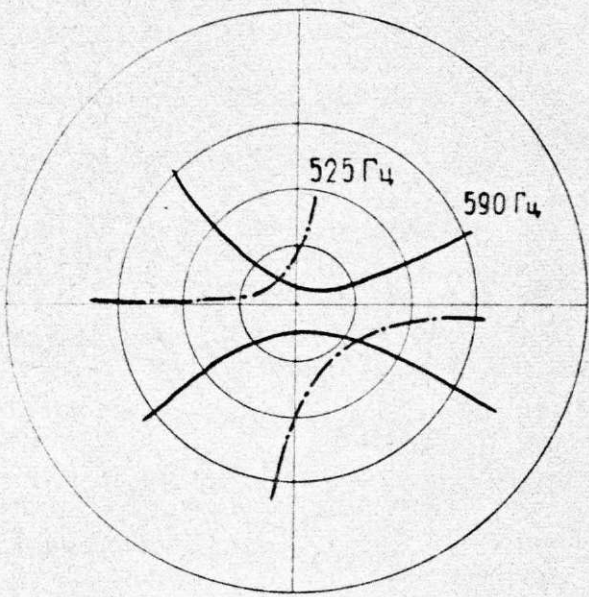


Рис. 5.8.

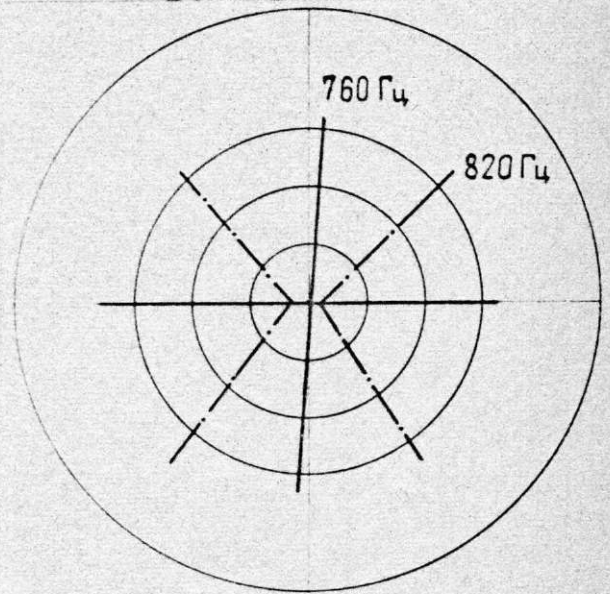


Рис. 5.9.

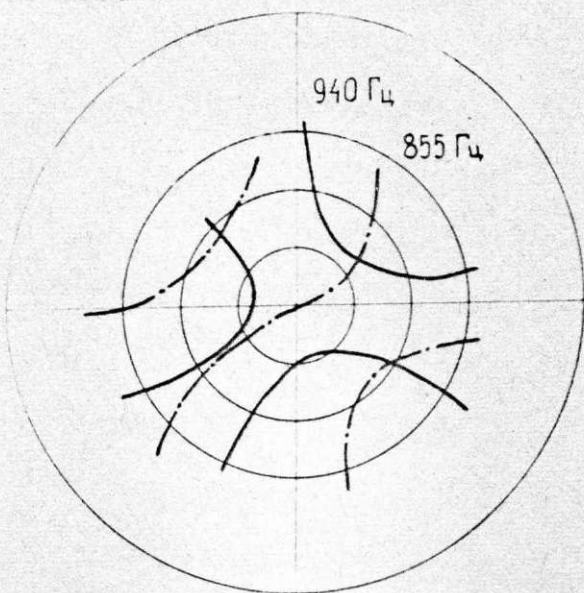


Рис. 5.10

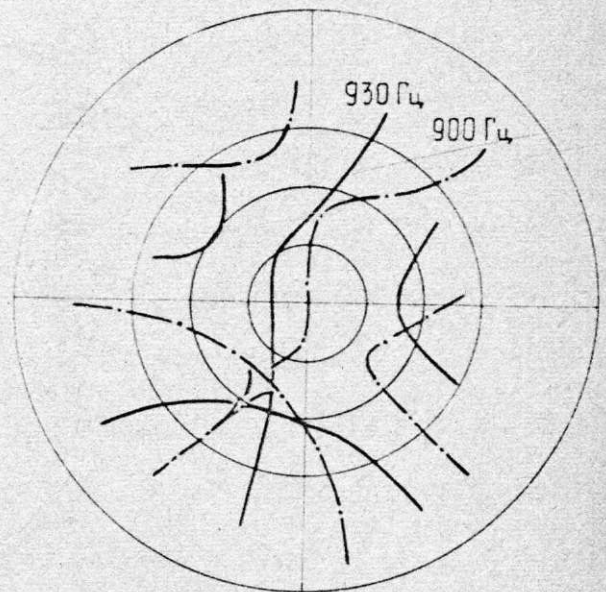


Рис. 5.11

форма колебаний, зарегистрированная при частоте 855 Гц, до сих пор в литературе, по данным автора, опубликована не была. Необходимо заметить также, что указанная форма колебаний в опытах наблюдалась неоднократно (см. на рис. 5.7 форму колебаний при частоте 685 Гц).

К числу новых конфигураций узловых линий можно отнести также уже рассмотренные выше формы, состоящие из двух отрезков (см. табл. 5.3).

Формы колебаний при расслоении могут представлять собой не совсем обычную конфигурацию узловых линий (рис. 5.II), но и в то же время быть подобными друг другу. Для приведенных двух форм отчетливо просматривается относительное смещение и поворот узловых линий.

При расслоении формы колебаний с одной узловой окружностью и пятью диаметрами также возникают новые рисунки узловых линий (рис. П.2.5 и рис. П.2.6). В этом случае узловые линии смещены к периферии пластины и образуют узловые диаметры.

Особое значение в эффекте расслоения имеет амплитуда колебаний. При малых значениях амплитуды песочные фигуры на пластине в момент резонанса являются устойчивыми и наблюдаются отчетливо. Однако при возрастании амплитуды (что достигается повышением виброускорения) узловые линии совершают колебания около стационарного положения. Пластина излучает пульсирующий звук, частота которого увеличивается с ростом амплитуды или уменьшается при ее снижении. В качестве примера можно назвать резонанс с частотой 930 Гц (см. рис. 5.II), где влияние амплитуды проявилось при вариациях виброускорения в диапазоне, превышающем  $2g$ , а устойчивая форма колебаний была зарегистрирована при виброускорении  $1,5g$ . Описанное

явление возникает при расслоении спектра собственных частот, когда существенное влияние на колебания оказывает геометрическая нелинейность пластины. Аналогичный вывод был сформулирован М.М.Смирновым / 90 / при экспериментальном исследовании неосесимметричных форм колебаний тонких пильных дисков.

Расслоение собственных частот наблюдалось также при конечных амплитудах для форм колебаний с одной узловой окружностью (табл. П.2.2). Смещение форм колебаний (представляющих из себя эллипсы) относительно центра пластины объясняется неравномерным распределением сжимающих усилий по контуру ее, действие которых не вызывает сомнений, поскольку все значения частот меньше собственной частоты (545 Гц) малых колебаний круглой заземленной пластины с одной узловой окружностью /98/. Зависимость резонансных частот от амплитуды колебаний является, по всей видимости, причиной возрастания частот от 250 Гц до 460 Гц. Приведенные результаты показывают, что на частоты и формы колебаний круглой пластины в совокупности оказывают воздействие геометрическая нелинейность, неосесимметричность материала пластины и граничных условий на контуре.

Анализируя известные в литературе теоретические / 52 / и экспериментальные / 90, 119 / результаты исследований расслоения спектра частот можно утверждать, что и в представленных опытах причиной возникновения указанного явления служит нарушение циклической симметрии пластин.

К возникновению парных форм колебаний / 37 / приводит ортотропность пластин, вызванная тем, что материал ленты, из которой вырезаются пластины, имеет два различных значения модуля упругости во взаимно перпендикулярных направлениях.

Результаты экспериментального исследования подтвердили

возможность возбуждения на практике форм колебаний, вычисленных на основе мембранной модели методом конечных элементов (см. главу 4). Сравнимые теоретические и экспериментальные формы колебаний обладают множеством общих черт – поворотом узловых диаметров, конфигурацией узловых линий.

### 5.3. Исследование собственных колебаний пакета пластин

В качестве введения следует отметить, что статические и динамические характеристики подобных упругих систем, какую представляет из себя рассматриваемый пакет пластин, экспериментальным путем практически не изучены. Исключение составляют лишь доклад Е.П.Буслова / 21 /, статьи / 7 / и / 107 /.

Опыт, накопленный при исследовании колебаний однородных пластин, существенно облегчил изучение закономерностей собственных колебаний пакета пластин. В частности, выполненная ранее модификация приспособления облегчила симметричность граничных условий на контуре пакета и дала возможность идентифицировать формы колебаний. Методика проведения экспериментов в основном сохранилась. После каждой серии виброиспытаний, где определялся спектр собственных частот и форм колебаний, производилась полная разборка пакета и приспособления. Чтобы обеспечить одинаковые условия проведения экспериментов, последовательность операций при сборке пакета была постоянной. В тщательно подготовленный цилиндрический паз на нижнем кольце приспособления пластины укладывались в следующем порядке: № 3, № 1, № 2. Пластина № 2 помещалась сверху из-за того, что ее собственные колебания были достаточно хорошо изучены в пре-

дыдущих экспериментах.

Таким образом, в процессе сборки составлялась упругая система из пластин, между которыми, если не считать непосредственной зоны заземления, отсутствуют жесткие связи. Естественно было бы предположить, что полученная система будет обладать динамическими свойствами однородной пластины, по которой уже имеется соответствующая информация. Проведенные с пакетом опыты подтвердили высказанное предположение.

Наиболее объективными динамическими характеристиками, определяющими различие между однородной пластиной и пакетом, по мнению автора, являются их собственные частоты. Сравнение проводится, как и в опытах с однородной пластиной, по собственным частотам, зарегистрированным при одинаковых статических прогибах (табл. 5.7). Анализ результатов показывает, что данный пакет пластин обладает практически таким же спектром собственных частот, как и однородная пластина. Однако собственные частоты пакета при безузловой форме колебаний (число узловых диаметров  $M = 0$ ; число узловых диаметров  $S = 0$ ) превышают соответствующие значения частот одной пластины на 20 - 30% (см. табл. 5.2). С увеличением номера формы колебаний значения частот пакета приближаются к значениям собственных частот малых колебаний однородной пластины.

Проведенные измерения показали, что статический прогиб наиболее существенное влияние оказывает на безузловую форму колебаний. Собственные частоты при этой форме колебаний возрастает при увеличении статического прогиба, вызванного деформацией колец (см. табл. 5.7).

Экспериментальные формы колебаний пакета (рис. 5.12 - 5.19) подобны формам колебаний однородной пластины. Однако



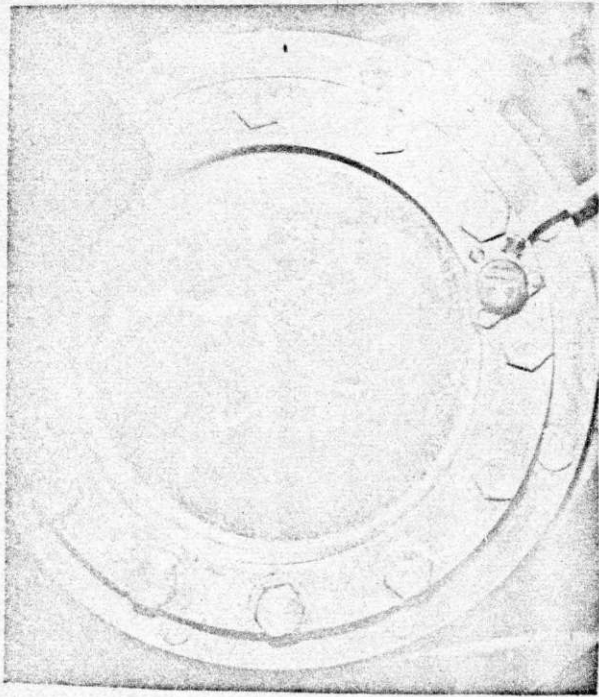


Рис. 5.12. 475 Гц, 3 ц, (2,0)

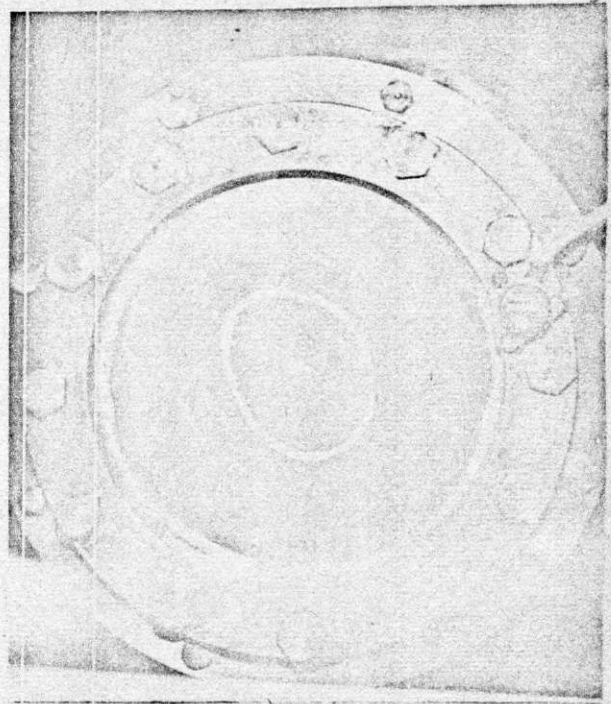


Рис. 5.13. 580 Гц, 1 ц, (0,1)

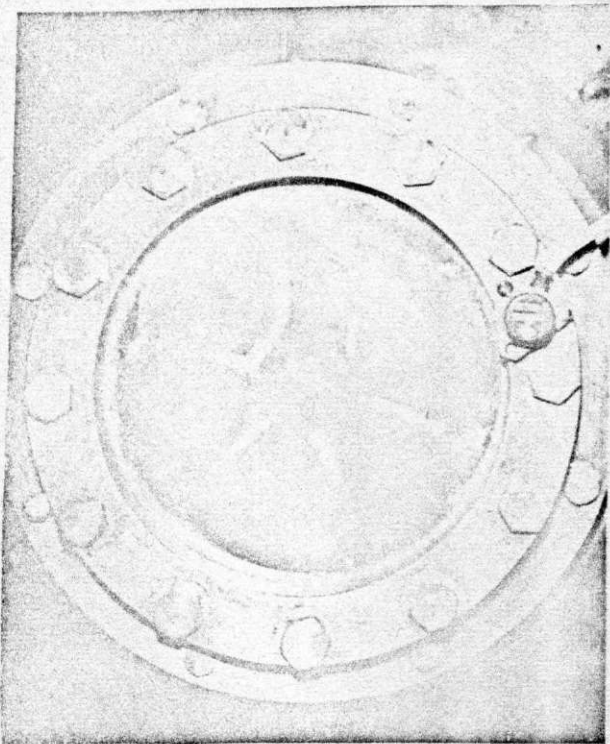


Рис. 5.14. 690 Гц, 3 ц, (3,0)

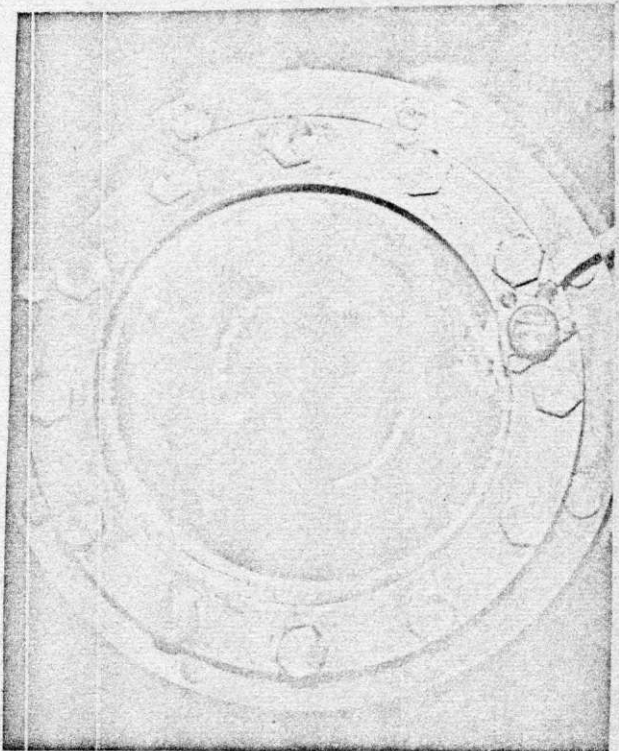


Рис. 5.15. 800 Гц, 4,5 ц, (1,1)

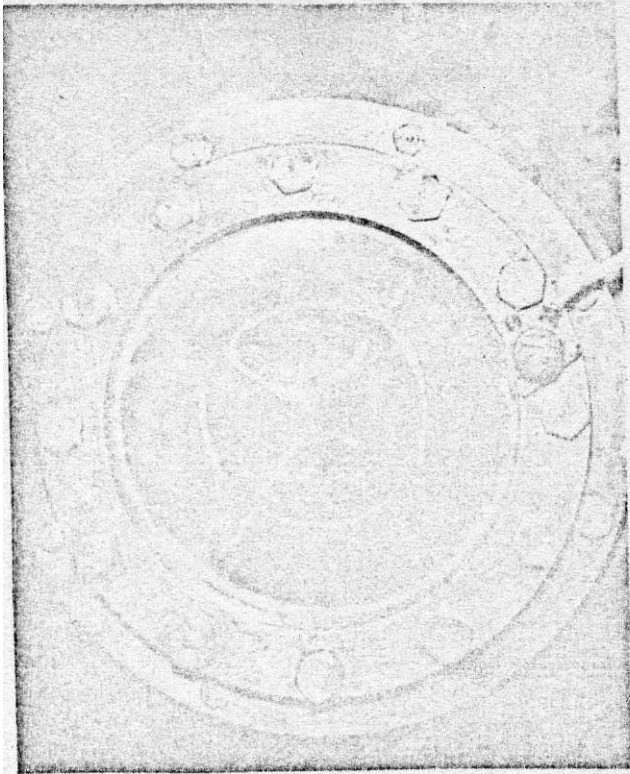


Рис. 5.16 1100 Гц, 3ϕ, (2,1)



Рис. 5.17 1230 Гц, 1ϕ, (5,2)

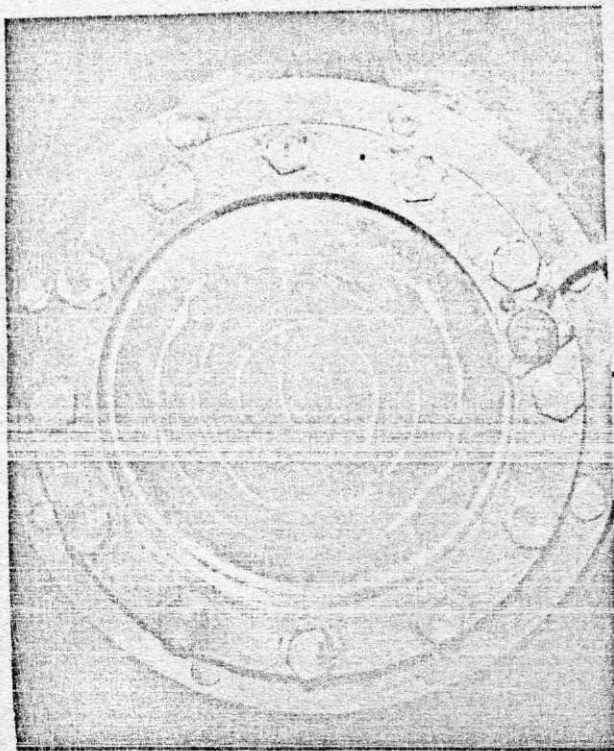


Рис. 5.18 3500, 3ϕ, (0,4)



Рис. 5.19 4000 Гц, 3ϕ, (1,4)

Таблица 5.7

Собственные частоты (Гц) колебаний пакета пластин

Количество узловых линий	Статический прогиб : $10^{-3}$ м	Виброускорение : прогиб, : $10^{-3}$ м	Статический прогиб, : $10^{-3}$ м	Виброускорение : прогиб, : $10^{-3}$ м	Статический прогиб, : $10^{-3}$ м	Виброускорение : прогиб, : $10^{-3}$ м
: : 0	: : 0,5	: : 0,85	: : 0,9	: : 0,9	: : 0,9	: : 0,9
: : 0	: : 220	: : 330	: : 360	: : 360	: : 360	: : -
: : 1	: : 395	: : 360/400	: : I/I	: : 400	: : 400	: : I
: : 2	: : 490/500	: : I/2	: : 445	: : I	: : 450/480	: : 3/I,5
: : 0	: : 600	: : I	: : 585	: : 0,5	: : 590	: : 0,5
: : 1	: : 880	: : 3	: : -	: : -	: : 830	: : 3
: : 2	: : 1120	: : 2	: : 1080	: : I,5	: : 1080	: : 3
: : 0	: : 1260	: : 2	: : 1220	: : I	: : 1220	: : I,5

формы пакета более "размытые", их узловые линии более толстые, что связано со взаимодействием слоев. В подрисуночных подписях первая цифра в скобках означает число узловых окружностей, а вторая соответствует числу узловых диаметров.

Как показывают результаты измерений (см. табл. 5.7 и рис. 5.12 - 5.19), для регистрации форм колебаний пакета необходимы значения виброускорения, которые несколько превышают соответствующие значения его в опытах с одной пластиной.

Также, как и в опытах с однородной пластиной, у пакета наблюдается расслоение спектра собственных частот колебаний, при котором происходит поворот узловых диаметров (рис. 5.20), а значения частот немного отличаются друг от друга.

Расчеты, проведенные по пластинчатой модели, показали, что теоретические и экспериментальные значения частот близки друг к другу при различных значениях статического прогиба (рис. 3.3). Это подтверждает справедливость введенного допущения о равенстве поперечных смещений слоев пакета.

Осесимметричность формы статического прогиба пакета в опытах соблюдена. Об этом свидетельствует осесимметричная форма колебаний, вид которой незначительно отличается от окружности (рис. 5.13).

Экспериментальное исследование собственных колебаний пакета подтвердило возможность возбуждения на практике форм колебаний, прогнозируемых с помощью ЭЦВМ по мембранной модели. Основой для такого заключения является совпадение конфигураций зарегистрированных в опытах форм колебаний пакета из ортотропного материала и форм колебаний, вычисленных методом конечных элементов. В качестве примера укажем на опытные формы, изображенные на рис. 5.20, и теоретические, представлен-

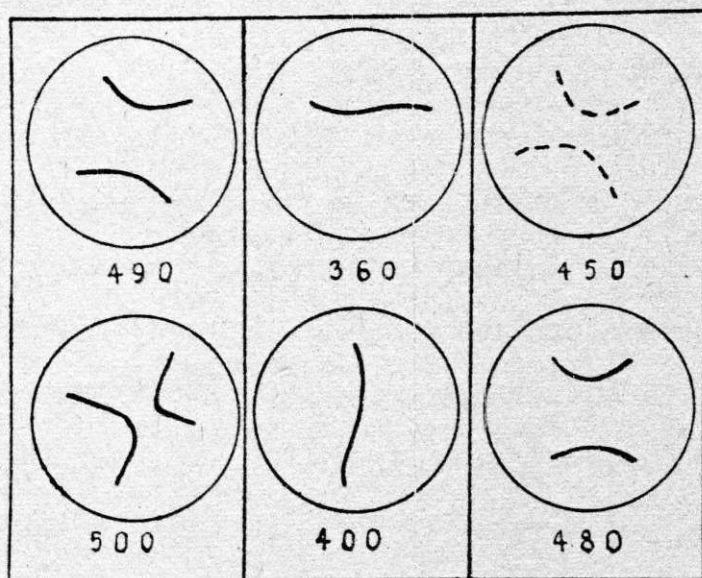


Рис. 5.20. Формы и частоты (Гц) колебаний пакета пластины при расслоении

ные на рис. 4.8 и 4.9. Необходимо заметить, что многие теоретические формы колебаний пакета пластин с асимметрией одинаковы с опытными формами колебаний однородной ортотропной пластины. Это указывает на возможность использования полученных обширных экспериментальных данных по колебаниям однородной круглой пластины при анализе форм колебаний пакета.

Практическая ценность проведенных в настоящей работе теоретических и экспериментальных исследований заключается в том, что с их помощью установлено влияние ряда факторов на формы колебаний. В работе выявлены три основных фактора: несимметричность граничных условий, статический прогиб, обусловленный смещениями опорного устройства, ортотропность материала пластин. Полученные данные позволяют идентифицировать зарегистрированные опытным путём формы колебаний и определять повлиявшие на них факторы. С другой стороны, расположение узловых линий в формах колебаний аналогично расположению пластических гофров и трещин на поверхности круглых пластин / 21 /. Это даёт основание утверждать, что систематизированные и обобщённые в диссертации результаты по собственным колебаниям круглых однородных пластин и пакета можно использовать для анализа причин поломок гибких элементов эксплуатируемых мембранных установок / 2, 37, 79, 80 /.

Анализ смещений прижимного кольца опытного приспособления методом конечных элементов показал, что причина сжатия пакета связана с перемещениями верхнего прижимного кольца в зоне закрепления пакета (Приложение 3). На основе сопоставления особенностей деформирования трех вариантов конструкций прижимных колец и соответствующих им экспериментальных форм и

частот колебаний гибкого элемента разработаны рекомендации по конструктивному исполнению ограничительного диска мембранного блока:

1. С целью уменьшения краевых смещений пакета пластин перемещения ограничительного диска в плоскости защемления пакета должны быть минимальными.

2. Предлагается в ограничительном и распределительном дисках выполнять кольцевые бурт и выточку, необходимые для уменьшения относительных смещений дисков в плоскости защемления пакета. При этом контактирующие между собой цилиндрические поверхности бурта и выточки необходимо тщательно подгонять друг к другу.

3. С точки зрения уменьшения изгибных деформаций наиболее предпочтительны те конструкции мембранного блока, где линия действия усилия затяжки проходит через зону защемления круглого гибкого элемента мембранной установки.

Сформулированные выше рекомендации использованы в новой конструкции мембранного блока, спроектированного ВНИИкомпрессоршамом (рис. 5.21). Созданная конструкция обеспечивает существенное уменьшение краевых смещений (Приложение 3) пакета и симметричность граничных условий, что обуславливает равномерное распределение напряжений в его слоях и, в свою очередь, приводит к повышению долговечности. Благодаря равномерному распределению напряжений динамический прогиб пакета под действием равномерно распределенного перепада давлений является осесимметричным. Тогда пакет при своем движении плотно прилегает к профилированной поверхности ограничительного диска, устраняя возможность образования мертвых объемов. Отсюда следует, что при осесимметричном движении пакета, обеспеченном конст -

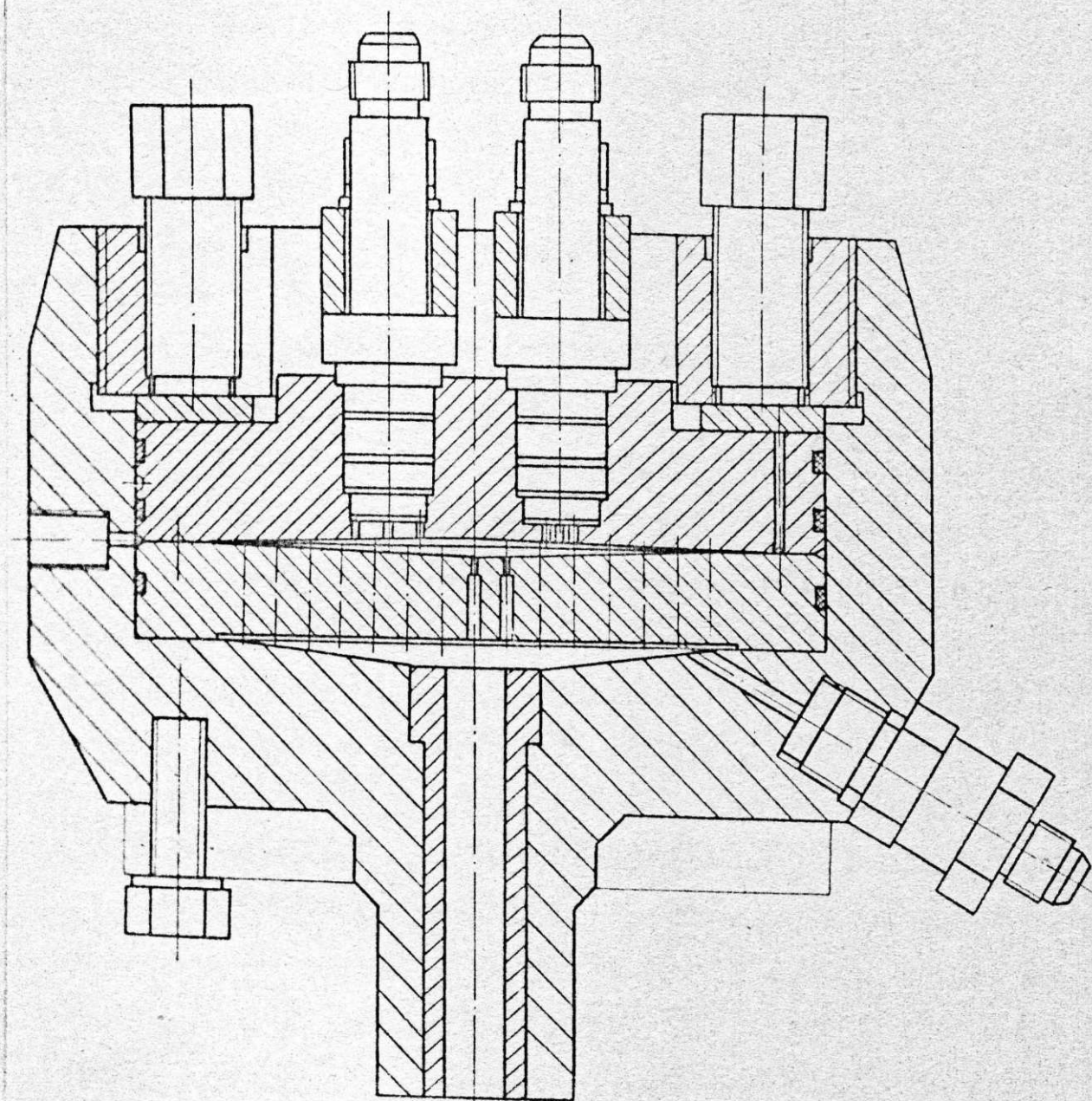


Рис. 5.21. Конструкция мембранного блока компрессора,  
в которой использованы рекомендации, сформулирован-  
ные по результатам диссертационной работы



руктивными мероприятиями, можно ожидать и повышения производительности мембранной установки.

По сравнению с конструкциями серийных мембранных компрессоров, приведенными в книге С.М.Алтухова и В.А.Румянцева / 2 /, а также с конструктивными решениями, предложенными в ряде авторских свидетельств / 84, 85, 86 /, преимущества данной конструкции заключаются в компактности и более низкой материалоемкости, обеспечении герметичности.

#### 5.4. Выводы

В настоящей главе изложены результаты экспериментального исследования собственных колебаний пакета из трех пластин и однородной пластины при больших прогибах. В процессе проведения экспериментов были исследованы факторы, оказывающие наибольшее влияние на параметры собственных колебаний. К ним относятся: статический прогиб от смещений прижимных колец; несимметричность граничных условий, вызванная несоосностью прижимных колец; ортотропность материала пластин. С использованием в качестве критерия сравнения частот и форм собственных колебаний подтверждена адекватность математической модели пакета и реальной конструкции.

Основные итоги экспериментальных исследований формулируются в нижеследующих выводах.

I. Относительное смещение (несоосность) геометрических центров прижимных колец нарушает осесимметричность распределения сжимающих усилий, действующих по контуру пластины. Указанный вид асимметрии приводит к появлению форм колебаний, смещенных относительно центра круглой пластины / 65, 37 /.

В спектре собственных частот пластины с несимметричными граничными условиями превалирует общая тенденция к понижению их значений по сравнению со значениями собственных частот малых изгибных колебаний заземленной круглой пластины.

2. Из всех типов резонансных состояний наибольшее влияние статический прогиб оказывает на резонанс с безузловой формой колебаний. С увеличением порядка резонанса значения частот с ростом значения прогиба практически не изменяются, хотя каждое из них и превышает соответствующее значение частоты малых изгибных колебаний заземленной круглой пластины.

Существенное изменение значений частот объясняется влиянием мембранных усилий, возникающих в пластине при больших прогибах. Экспериментальные значения частот близки к вычисленным значениям частот, учитывающих влияние только мембранных усилий при значениях статического прогиба больше удвоенной толщины пластины. При меньших значениях прогиба близкие с экспериментом значения частот получаются по формуле, учитывающей и изгибную жесткость пластины.

3. Практически во всех проведенных опытах при сравнительно малых амплитудах колебаний наблюдалось расслоение спектра собственных частот. При расслоении каждой паре значений собственных частот соответствовали рисунки узловых линий, которые отличались взаимными относительным смещением или конфигурацией узловых линий. Экспериментально зарегистрированы неизвестные до сих пор в литературе конфигурации форм колебаний.

Причиной расслоения частот является, по данным автора, асимметрия свойств пластины. Основным источником нарушения циклической симметрии пластины является ортотропность свойств ее материала. На справедливость последнего утверждения указы-

вает совпадение экспериментальных и теоретических форм колебаний, вычисленных методом конечных элементов.

4. Анализ результатов исследования собственных колебаний пакета пластин показывает, что теоретические и экспериментальные значения частот при соответствующих значениях статического прогиба близки друг к другу. Близость сравниваемых значений частот подтверждает справедливость введенного допущения о равенстве поперечных смещений слоев пакета.

5. Большинство конфигураций форм колебаний пакета, вычисленных методом конечных элементов по мембранной модели с учетом ортотропности материала, имеет свои аналоги среди конфигураций экспериментальных форм колебаний. Подобие расчетных и экспериментальных конфигураций узловых линий свидетельствует об адекватности математической модели пакета и реальной конструкции.

6. Параметры собственных колебаний пакета пластин несколько отличаются от однородной пластины с толщиной одного слоя. Особенности его колебаний заключаются в следующем:

а) значения собственных частот пакета при безузловой форме колебаний для соответствующих значений статического прогиба несколько выше значений частот однородной пластины. Однако с увеличением номера резонанса указанное различие исчезает;

б) из-за взаимодействия слоев пакета друг с другом формы его колебаний "размытые" и для их возбуждения требуется более высокое значение вибрационной нагрузки.

7. Установлено, что причиной сжатия пакета являются смещения опорного устройства. Разработаны рекомендации по конструктивному исполнению мембранного блока, которые использованы в новой конструкции мембранного блока, созданного ВНИИкомпрессоромашем для КС специального назначения по теме "Станция 35Б".

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации изложены результаты теоретического и экспериментального исследований колебаний пакета круглых гибких пластин современных мембранных компрессорных установок. Основные выводы по результатам проведенных исследований можно сформулировать следующим образом:

1. На основе уравнений типа Кармана впервые построена математическая модель пакета круглых пластин с различными механическими и геометрическими параметрами, допускающая проскальзывание слоев пакета друг относительно друга. Уравнения модели учитывают краевые смещения, начальные несовершенства слоев, геометрическую нелинейность, реакции со стороны жидкости и газа, контактирующих с пакетом.

Предложена конечноэлементная модель пакета, допускающая проскальзывание слоев, где каждый слой рассматривается как мембрана. С её помощью можно исследовать влияние асимметрии распределения мембранных усилий на частоты и формы собственных колебаний круглых гибких элементов мембранных установок.

2. Разработан алгоритм и составлена ФОРТРАН-программа расчета параметров собственных колебаний пакета с использованием уравнений его конечноэлементной модели. По результатам расчетов трех вариантов сетки пакета, отличающихся количеством конечных элементов, выбран рациональный вариант, обеспечивающий наиболее высокую точность вычисляемых значений частот и форм собственных колебаний. Погрешность счета по программе увеличивается с номером частоты, однако максимальная погрешность вычислений значений первых пяти частот не превышает десяти процентов.

Выполнено численное исследование собственных колебаний пакета с учетом асимметрии распределения мембранных усилий. Установлено, что рассматриваемая система обладает новым спектром собственных колебаний. Каждой частоте с симметричным распределением мембранных усилий соответствуют две частоты пакета с асимметрией. Новые формы колебаний отличаются между собой взаимным расположением узловых линий, которые могут иметь криволинейную конфигурацию или представляют собой узловые диаметры.

3. Создана методика расчета характеристик собственных, вынужденных и нестационарных колебаний пакета на базе его пластинчатой модели. Составлена ФОРТРАН-программа, позволяющая вычислять частоты собственных колебаний пакета с учетом его геометрически нелинейного напряженно-деформированного состояния, прогибы под действием динамической нагрузки, амплитудно-частотные характеристики при прохождении через резонанс.

4. Анализ колебаний пакета пластин показал, что краевые смещения изменяют значения частот собственных колебаний в широком диапазоне и создают тем самым опасность возникновения резонансного состояния. Сжимающие краевые смещения при определенных своих значениях приводят к переходу пакета в закритическое состояние. Под действием внешнего давления на поверхности прогнувшегося пакета могут образовываться вмятины, снижающие производительность мембранной установки и долговечность гибкого элемента.

5. Выявлены особенности нестационарных колебаний пакета. Они состоят в том, что амплитудно-частотные характеристики прохождения через резонанс в прямом и обратном направлениях отличаются друг от друга, переход через резонанс в прямом направ-

лении сопровождается большей амплитудой колебаний, у резонансных кривых отсутствует симметрия, характерная для линейных систем, максимум амплитуды и соответствующее значение возмущающей частоты зависят от скорости прохождения через резонанс. Названные особенности учтены при проведении экспериментального исследования гибких элементов на вибростенде.

6. Выполнено исследование смещений различных конструкций опорных устройств для пакета методом конечных элементов. Показано, что при защемлении пакета контактирующие с ним поверхности опорного устройства смещаются к центру в плоскости заделки, вызывая сжатие пакета. При потере устойчивости пакет приобретает статический прогиб, оказывающий вредное влияние на показатели мембранной компрессорной установки, поэтому необходимо уменьшать сжимающие смещения или предусматривать натяжение пакета. В диссертации разработаны рекомендации по конструктивному исполнению опорных устройств мембранных установок, направленные на уменьшение и обеспечение осесимметричности распределения краевых перемещений гибкого элемента. Составленная для расчетов смещений ФОРТРАН-программа предусматривает автоматизированную подготовку исходных данных, графическое представление конечноэлементной информации, что значительно сокращает время на подготовку исходных данных.

7. Экспериментально выявлены три основных фактора, существенно влияющих на собственные колебания однородной пластины и пакета: ортотропность материала пластин, статический прогиб, обусловленный смещениями опорного устройства, несимметричность распределения краевых перемещений. Подтверждена возможность расслоения спектра собственных колебаний однородных

пластин и пакета из ортотропного материала, предсказанная расчетами по мембранной модели. Обнаружено, что несимметричное распределение краевых перемещений приводит к искажению конфигураций узловых линий и смещению их к внешнему контуру гибкого элемента. Показано, что экспериментальные значения частот круглой пластины, находящейся в закритическом состоянии, достаточно близки к значениям её частот, вычисленным на основе мембранной модели, при статических прогибах, превышающих толщину пластины в два раза.

Получены и систематизированы экспериментальные и расчетные данные по собственным колебаниям круглых однородной пластины и пакета. Они наглядно показывают закономерности изменений форм и частот колебаний в зависимости от статического прогиба, ортотропности материала, несимметричности распределения краевых смещений, позволяют идентифицировать зарегистрированные экспериментально формы колебаний и устанавливать повлиявшие на них факторы. Представленные данные можно использовать для анализа причин поломок круглых гибких элементов эксплуатируемых мембранных установок, пользуясь аналогичностью расположения узловых линий в формах колебаний и расположения пластических гофров и трещин на поверхности гибких элементов.

8. Теоретические и экспериментальные результаты диссертационной работы могут быть использованы для исследования колебаний круглых однородных и многослойных гибких элементов мембранных компрессоров и насосов, измерительных приборов, предохранительных устройств химических производств, авиационных и судовых конструкций.

Созданные прикладные программы расчетов характеристик ко-

лебаний гибкого элемента на основе пластинчатой и мембранной моделей, расчетов смещений опорного устройства, внедрены в практику инженерных расчетов Всесоюзного научно-исследовательского и конструкторско-технологического института компрессорного машиностроения.

Представленные в диссертации систематизированные данные по собственным колебаниям однородной пластины и пакета применяются в лаборатории мембранных компрессоров названного института для анализа причин поломок гибких элементов мембранных установок.

С использованием предложенных в работе рекомендаций по конструированию опорных устройств во ВНИИкомпрессормаше создан новый мембранный блок компрессора специального назначения, который превосходит по ряду показателей аналогичные зарубежные машины.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Материалы XXVI съезда КПСС. - М.: Политиздат, 1980. - 256 с.
2. Алтухов С.М., Румянцев В.А. Мембранные компрессоры. - М.: Машиностроение, 1967. - 128 с.
3. Алтухов С.М. и др. Передвижные компрессорные станции, поршневые и мембранные компрессоры. - М., 1976. - 52 с. - (Обзорная информ./ЦИНТИхимнефтемаш; Сер. ХМ-5)
4. Алтухов С.М. и др. Современное состояние и направление развития мембранных компрессорных установок в СССР и за рубежом. - М., 1982. - 41 с. - (Обзорная информ./ЦИНТИхимнефтемаш; Сер. ХМ-5)
5. Алтухов С.М., Левин Э.И. Измерительные системы для исследования мембранных компрессоров высокого давления. - Хим. и нефт. машиностроение, 1974, № 5, с. 42-45
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1967. - 268 с.
7. Андервуд и др. Нестационарное поведение многослойных оболочек с мягким связующим. - Ракетная техника и космонавтика, 1975, Т.13, № 3, с. 127-135.
8. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. - М.: Машиностроение, 1981. - 392 с.
9. Аникьев И.И., Воротникова М.И. Нелинейное осесимметричное деформирование круглых мембран при импульсных нагрузках. - Прикладная механика, 1977, Т.13, № 9, с. 85-91
10. Анурьев В.И. Справочник конструктора-машиностроителя. - М.: Машиностроение, 1978, Т.1. - 728 с.

11. Бабаков И.М. Теория колебаний. - М.:Наука, 1968. - 560 с.
12. Балтавичюс И.Б. и др. Осесимметричные свободные колебания круглой пластины, соприкасающейся со сжимаемой жидкостью. - Вибротехника, 1977, т. I, № 25, с. 146-149.
13. Балтавичюс И.Б. и др. Свободные колебания круглой мембраны, соприкасающейся с несжимаемой жидкостью. - Вибротехника, 1977, т. I, № 25, с. 89-93.
14. Бауер. Нелинейные вынужденные колебания упругих пластинок при импульсном нагружении. - Тр. Амер. о-ва инж.-мех.; Сер. Прикладная механика, 1968, № II, с. 52-58.
15. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. - М.:Высшая школа, 1972. - 416 с.
16. Биргер И.А. Круглые пластинки и оболочки вращения. - М.:Оборонгиз, 1961. - 368 с.
17. Богомолов С.И., Журавлева А.М. Колебания сложных механических систем, - Харьков: Вища школа, 1978. - 136 с.
18. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. - М.: Машиностроение, 1980. - 376 с.
19. Болотин В.В. Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин. - В кн.: Расчеты на прочность. - М.: Машиностроение, 1965, № II, с. 31-63.
20. Бондарь Н.М., Добрынин Е.М. Смирнов Ю.Н. Определение частотных характеристик мембранных чувствительных элементов с учетом турбулентного деформирования. - Изв. вузов; Сер. Приборостроение, 1978, т. 21, № 9, с. 85-88.
21. Буслев Е.П. Исследование динамического деформирования го состояния двухслойных пластин с дефектами структуры. - В кн.: Тр. XII Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин, 1980,

т. I, с. 247-253.

22. Валишвили Н.В., Силкин В.Б. Расчет круглых пластин при больших перемещениях. - В кн.: Расчеты на прочность, 1975, № 16, с. 50-65.

23. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. - М.: Машиностроение, 1976. - 278 с.

24. Варвак П.М., Медведева Н.М., Перельмутер А.В. Особенности численной реализации методом конечных элементов задачи осесимметричной деформации тонких оболочек вращения в геометрически нелинейной постановке. - В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. - К.: БудІвельник, 1978, № 23, с. 41-46.

25. Варвак П.М., Медведева Н.М., Перельмутер А.В. Осесимметричная задача о контакте нескольких тонких оболочек при конечных перемещениях. - В кн.: IV Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике: Аннот. докл. (г. Киев, 21-28 мая 1976 г.). - К.: Наук. думка, 1976, с. 85.

26. Воеводин В.В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. - М.: Наука, 1966. - 248 с.

27. Водяник В.И. и др. Предохранительные мембраны. - М.: Химия, 1982. - 144 с.

28. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. - М.: Наука, 1967. - 984 с.

29. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. - М.: Наука, 1976. - 416 с.

30. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. - М.: Наука, 1972. - 432 с.

31. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. - М.: Гос - техиздат, 1956. - 419 с.

32. Галиев Ш.У. Динамика гидроупругопластических систем. - К.:Наук. думка, 1981. - 276 с.

33. Галиев Ш.У. Динамические взаимодействия элементов конструкций с волной давления в жидкости. - К.: Наук. думка, 1977. - 172 с.

34. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания деформируемых систем. - К.: Наук. думка, 1977. - 340 с.

35. Голоскоков Е.Г., Кунцев С.В. О колебаниях круглых многослойных пластин. - В кн.: Тез. докл. III Всесоюзного науч.-техн. совещания по уплотнительной технике (г. Сумы, сентябрь, 1982 г.). - Сумы, 1982, с. 174.

36. Голоскоков Е.Г., Кунцев С.В. Об исследовании методом песочных фигур нелинейных собственных колебаний однородных и неоднородных круглых пластин. - Сумы, 1983. - 8 с. - Рукопись деп. в ЦИТИХимнефтемаше 13.06.83. № 1047-83.

37. Голоскоков Е.Г., Кунцев С.В. Экспериментальное исследование нелинейных колебаний пакета круглых тонких пластин. - В кн.: Динамика и прочность машин, 1982, № 35, с. 14-17.

38. Голоскоков Е.Г., Кунцев С.В. Моделирование гибкого элемента мембранного компрессора. - В кн.: Тез. докл. науч.-техн. семинара "Пути повышения эффективности поршневых и центробежных компрессоров высокого давления" (г. Сумы, сентябрь 1981 г.). - М.: ЦИТИХимнефтемаш, 1981, с. 52-53.

39. Голоскоков Е.Г., Кунцев С.В. Теоретическое и экспериментальное исследование нелинейных колебаний пакета круглых тонких пластин. - В кн.: Тез. докл. Всесоюзной конф. по вибрационной технике (г. Кутаиси, ноябрь 1981 г.). - Тбилиси, 1981, с. 67.

40. Голоскоков Е.Г., Кунцев С.В. Вынужденные нелинейные

колебания пакета тонких круглых пластин мембранного компрессора. - В кн.: Тез. докл. VI Всесоюзной науч.-техн. конф. по компрессоростроению "Повышение технического уровня, надежности и долговечности компрессоров и компрессорных установок" (г. Ленинград, декабрь 1981 г.). - Л., 1981, с. 141-142.

41. Голоскоков Е.Г., Кунцев С.В. Собственные колебания пакета круглых тонких пластин при скольжении между слоями. - В кн. Динамика и прочность машин, 1983, № 37, с. 3-8.

42. Гонткевич В.С. Собственные колебания оболочек в жидкости. - К.:Наук.думка, 1964. - 104 с.

43. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. - М.: Машиностроение, 1973. - 171 с.

44. Григолюк Э.И., Горшков А.Г., Коган Ф.А. О динамическом изгибе трехслойных круговых пластин с сжимаемым наполнителем. - Прикладная механика, 1978, т. 14, № 1, с. 78-87.

45. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Взаимодействия упругих конструкций с жидкостью. - Л.:Судостроение, 1976. - 208 с.

46. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение задач теории оболочек на ЭВМ. - К.: Вища школа, 1979. - 280 с.

47. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Расчет некруговых цилиндрических оболочек. - К.:Наук. думка, 1977. - 104 с.

48. Гун, Пао. Нелинейные изгибные колебания защемленной круглой пластины. - Тр. Амер. о-ва инж.-мех.; Сер. Прикладная механика, 1972, № 4, с. 194-198.

49. Дергунов В.П., Заякин С.П., Тарабасов Н.Д. Устойчивость упругих цилиндрических панелей при нагружении газом конечного объема. - В кн.: Расчеты на прочность. - М., 1979, № 20, с. 140-151.

50. Джонс. Импульсное нагружение свободно опертой круговой жестко-пластической пластины. - Тр. Амер. о-ва инж.-мех.; Сер. Прикладная механика, 1968, № 1, с. 66-73.
51. Дрейфус М., Ганглоф К. Практика программирования на ФОРТРАНЕ. - М.: Мир, 1978. - 224 с.
52. Журавлева Н.М., Лукин Б.С. Применение метода конечных элементов для исследования вибрации некоторых типов пластинчатых конструкций. - В кн.: Динамика и прочность машин. - Харьков, 1976, № 23, с. 13-19.
53. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. - 541 с.
54. Кабельский М.И. и др. Исследование характера разрушения слоев многослойных сильфонов. - Хим. и нефт. машиностроение, 1977, № 1, с. 41-42.
55. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. - 512 с.
56. Кандидов В.П., Чесноков С.С., Выслоух В.А. Метод конечных элементов в задачах динамики. - М.: Изд-во МГУ, 1980. - 166 с.
57. Кармишин А.В., Скурлатов Э.Д., Старцев В.Г. Уравнения неоднородных тонкостенных элементов на основе принципа минимальных жесткостей. - Прикладная механика, 1974, т. 10, № 6, с. 34-42.
58. Кармишин А.В., Скурлатов Э.Д., Старцев В.Г. Нестационарная аэроупругость тонкостенных конструкций. - М.: Машиностроение, 1982. - 240 с.
59. Киселев В.А. Плоская задача теории упругости. - М.: Высш. школа, 1976. - 152 с.
60. Корнев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. -

М.: Наука, 1971. - 288 с.

61. Коренев Б.Г. Некоторые уравнения теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. - М.: Физматгиз, 1960. - 458 с.

62. Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко Л.Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. - К.: Наук. думка, 1980. - 232 с.

63. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. - М.: Физматгиз, 1962. - 768 с.

64. Кунцев С.В. О колебаниях многослойных мембран предохранительных устройств аппаратов низкого давления. - В кн.: Тез. докл. II Всесоюзного науч.-техн. совещания "Пути совершенствования, интенсификации и повышения надежности аппаратов в основной химии" (г. Сумы, июль 1982 г.). - Сумы, 1982, с. 127.

65. Кунцев С.В. О рациональном проектировании пакета круглых пластин на основе нелинейной математической модели колебаний. - В кн.: Тез докл. семинара-совещания "Проблемы оптимизации в машиностроении". - Харьков, 1982, ч. I, с. 60.

66. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. - М.: Гостехиздат, 1950. - 464 с.

67. Лукаш П.А. Конструктивно-нелинейные системы. - Тр. МИСИ, 1965, № 47, с. 46-52.

68. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. - М.: Мир, 1981. - 216 с.

69. Мяченков В.И., Григорьев И.В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ. - М.: Машиностроение, 1981. - 216 с.

70. НИР и ОКР по совершенствованию мембранных компрессоров. - М., 1983. - 8 с. - (Экспресс-информ./ЦИНТИхимнефтемаш;

Сер. ХМ-5, № 1).

71. Новичков Ю.Н. О распространении волн в многослойных пластинах. - Тр. МЭИ, 1970, вып. 74, с. 69-80.

72. Операционная система ДОС ЕС: Справочник. - М.: Статистика, 1977. - 272 с.

73. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. - М.: Наука, 1971. - 240 с.

74. Петунин А.Н. Методы и техника измерений параметров газового потока. - М.: Машиностроение, 1972. - 332 с.

75. Пикуль В.В. Общая техническая теория тонких упругих пластин и оболочек. - М.: Наука, 1977. - 152 с.

76. Пластинин П.И. Расчет и исследование компрессоров с использованием ЭВМ. - М., 1981, т. 2. - 168 с. - (Обзорная информ./ВИНИТИ; Итоги науки и техники; Сер. Насосостроение и компрессоростроение. Холодильное машиностроение).

77. Программное обеспечение ЭВМ "Мир-1" и "Мир-2": Программы для ЭВМ "Мир-2". - К.: Наук. думка, 1976, т. 3. - 223 с.

78. Прусаков А.П. Основные уравнения изгиба и устойчивости трехслойных пластин с легким заполнителем. - Прикладная математика и механика, 1951, т. 15, № 1, с. 27-36.

79. Пчелинцев В.А. Исследование структуры и свойств материалов упругих элементов компрессорных машин с целью повышения их эксплуатационной долговечности: Дис. ... канд. техн. наук. - Харьков, 1979. - 185 с.

80. Пчелинцев В.А., Марченко В.Г., Тананко И.А. Особенности разрушения мембран мембранных компрессоров. - В кн.: Тез. докл. У Всесоюзной науч.-техн. конф. по компрессоростроению "Повышение эффективности и совершенствование компрессорных машин и установок" (г. Москва, 1-3 февраля 1978 г.). - М., 1978,



с. 133-134.

81. Рабинович И.М. Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. - М.: Стройиздат, 1975. - 145 с.

82. Рабинович Р.И. Свободные колебания круглых пластинок с защемленно-подвижными краями при больших прогибах. - Прикладная механика, 1967, № 3, с. 70-76.

83. Рецкер И.Я. Деформация круглой гибкой пластинки при действии ударной нагрузки. - Изв. вузов; Сер. Машиностроение, 1959, № 12, с. 81-89.

84. А.с. 524006 (СССР). Мембранный блок гидравлического компрессора высокого давления/ В.А.Соколов, А.Ю.Налетов, А.А.Рязанов. - Оpubл. в Б.И., 1976, № 29.

85. А.с. 606002 (СССР). Мембранный компрессор/Ю.А.Юрин, Л.В.Трубина. - Оpubл. в Б.И., 1978, № 17.

86. А.с. 687255 (СССР). Мембранный компрессор/В.П.Маламыжев. - Оpubл. в Б.И., 1979, № 35.

87. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. - М.: Мир, 1979. - 392 с.

88. Селезнев К.П., Нуждин А.С. Перспективные направления научных исследований и конструкторских работ в компрессоростроении. - Хим. нефт. машиностроение, 1981, № 9, с. 6-9.

89. Селезнев К.П., Нуждин А.С., Зуев А.В. Научно-технические проблемы развития компрессоростроения в СССР (по материалам VI Всесоюзной науч.-техн. конф. по компрессоростроению). - М., 1982. - 16 с. - (Экспресс-информ./ЦИНТИхимнефтемаш; Сер. ХМ-5, № 4).

90. Смирнов М.М. Нелинейные колебания предварительно напряженных тонких дисков: Автореф. Дис. ... канд. техн. наук. -

Харьков, 1982. - 24 с.

91. Теория гибких круглых пластинок. - М.: ИЛ, 1907. - 207 с.

92. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. - М.: Наука, 1967. - 444 с.

93. Толстов Г.П. Ряды Фурье. - М.:Наука, 1980. - 384 с.

94. Трапезон А.Г. О частотах и формах колебаний свободной по контуру круглой пластинки с точечным закруглением. - Проблемы прочности, 1976, № 8, с. 100-105.

95. Троценко В.А. К исследованию колебаний жидкости в сосуде, поверхность которой ограничена пологой мембраной. - Прикладная механика, 1978, т. 14, № 1, с. 102-110.

96. Фарнсуот С.Е., Ивен-Ивановский Р.М. Вынужденные резонансные колебания нелинейных круглых пластинок при наличии равномерной статической нагрузки. - Тр. Амер. о-ва инж.-мех.; Сер. Прикладная механика, 1970, № 4, с. 141-148.

97. Феодосьев В.И. Упругие элементы точного приборостроения. - М.:Оборонгиз, 1949. - 344 с.

98. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. - М.: Машиностроение, 1970, - 736 с.

99. Филиппов А.П., Бизюк В.Б. Динамика геометрически нелинейной круглой пластинки под действием импульсной нагрузки. - В кн. Проблемы машиностроения. - М., 1976, вып. 2, с. 3-5.

100. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. - М.:Мир, 1980. - 280 с.

101. Фролов К.В., Фурман Ф.А. Прикладная теория виброзащитных систем. - М.:Машиностроение, 1980. - 280 с.

102. Хопмэнн, Баронет. Исследование колебаний пологих сферических оболочек. - Тр. Амер. о-ва инж.-мех.; Сер. Прикладная

механика, 1963, № 3, с. 13-18.

I03. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. - М.:Мир, 1982. - 240 с.

I04. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. - М.:Наука, 1977. - 344 с.

I05. Archer D. S., Asce M. Consistent Mass Matrix for distributed Mass Systems. - Journal of the Structural Division. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 1963, August, ST4, I61-I77.

I06. Barbanson G.B.J. Ontwikkeling van dosserpompen voor vloeistoffen. - Technovisie, 1981, II, N 6, 256-259.

I07. Beards C.F., Imam I.M. The damping of plate vibration by interfacial slip between layers. - Int. J. Mach. Tool Des. and Res., 1978, 18, N 3, p. 131-137.

I08. Chuh Mei. Free Vibrations of circular membrane under arbitrary tension by the finite-element method. - The journal of the Acoustical Society of America, 1969, v.46, N 3, part 2, 693-700.

I09. Henry Remi. Calcul des coques minces en grandes deformations par elements finis application aux aubes de compresseur en rotation. - Lyon, 1973, p. 110.

I10. Hoppmann W.H., Greenspon J. An experimental device for obtaining elastic rotational constraint on boundary of a plate. - Proceedings, Second National Congress of Applied Mechanics, 1954, p. 187-191.

I11. Irie I., Yomada G., Aomura S. Vibratory modes of damped plates. - J. Sound and Vibr., 1979, 67, N 4, p. 550-555.

I12. Jamaki N., Otomo K., ChbAM. Non-linear vibrations of

a clamped circular plate with initial deflection and initial edge displacement, Part I: Theory. - J. Sound and Vibr., 1981, 79 (I), p. 23-42.

II3. Jamaki N., Otomo K, Chiba M. Non-linear vibrations of a clamped circular plate with initial deflection and initial edge displacement, Part 2: Experiment. - J. Sound and Vibr., 1981, 79 (I), p. 43-59.

II4. Jasuda K., Hayashi N. Subharmonic oscillations of a Pressed circular plate. - Trans. Jap. Soc. Mech. Eng., 1981, C47, N 420, p. 987-998.

II5. Khurasia H.B., Rawtani S. Vibration analysis of circular segment shaped plates. - J. Sound and Vibr., 1979, 67 (3), p. 307-313.

II6. Kunukkaseril V.X., Venkateson S. Axisymmetric non-linear oscillation of isotropic layered circular plates. - J. Sound and Vibr., 1979, 64, N 2, p. 295-302.

II7. Parzygnat W.J., Pao J.-H. Resonance phenomena in the non-linear vibration of plates governed by duffing's equation. - Int. J. Eng. Sci, 1978, 16, N 12, P. 999-1017.

II8. Rao G.V., Raju K.K. Large amplitude axisymmetric vibrations of orthotropic circular plates elastically restrained against rotation. - J. of Sound and Vibr., 1980, 69(2), p.175-180.

II9. Stridhar S., Mock D.I., Nayfeh A.N. Non-linear resonances in the forced responses of plates. Part 2. Exisysmmetric responses of circular plates. - J. Sound and Vibr., 1978, 59, N 2, p. 159-170.

I20. Symonds P.S., Wierzbicki I. Membrane mode solutions for impulsively loaded circular plates. - Trans. ASME, J. Appl.

Mech., 1979, 46, N I, p. 58-64.

I21. Venkatesan S., Kunukkasseril V.X. Free vibration of layered circular plates. - J. Sound and Vibr., 1978, 60, N 4, p. 511-534.

I22. Wellford L.C., Dib G.M., Mindle W. Free and steady state vibration of non/- linear structures using a finite-element-non-linear eigen value technique. - Earthquake engineering and structural dynamics, 1980, vol. 8, 97-115.

ПРИЛОЖЕНИЯ

## ПРИЛОЖЕНИЕ I

СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЕ ПОДПРОГРАММЫ И ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ  
ПАКЕТА ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

```

SUBROUTINE TSTIFT(M, TX, TY, TXY)
COMMON/CONTR/TITLE(12), NP, NE, NB, NDF, NCN, NSZF, NBAND
COMMON HE, E, RO, HU, OMEGA, SE
A, NOP(160,3)
1, CORD(85,2), NFIX(24), NBO(24)
2, SK(144,48), SM(144,48), A(48,144)
3, D(144), B(144)
4, ES(3,3), EM(3,3)
5, R0, T0, T1, NT1
0 АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТЯЖЕНИЯ В УЗЛЕ
N=NT1
RT=SQRT(CORD(M,1)**2+CORD(M,2)**2)
R=RT/R0
IF(RT) 12,10,12
10 YP=1,
SINYP=0,
COSYP=1,
12 CONTINUE
IF(RT.EQ.0.) GO TO 13
SINYP=CORD(M,2)/RT
COSYP=CORD(M,1)/RT
IF(CORD(M,1).EQ.0) GO TO 13
TGYP=SINYP/COSYP
YP=ATAN(TGYP)
13 CONTINUE
PI=3.14159
IF(CORD(M,1).NE.0) GO TO 11
IF(CORD(M,2).GT.0) YP=PI/2
IF(CORD(M,2).LT.0.) YP=PI*3./2.
11 CONTINUE
IF((CORD(M,1)+1.).EQ.CORD(M,2)) YP=PI
YPN=N*YP
IF(R) 22,20,22
22 CONTINUE
TR=T0+T1/2*((N+2.)/(N+1.)*R**N-N/(N-1.)*R**(N-2))*COS(YPN)
TFT=-T1/2*(R**N/(N+1.)-R**(N-2)/(N-1.))*N**2*COS(YPN)
TR=TR+TFT
TT=T0+T1/2*((N+2.)*R**N-N*R**(N-2))*COS(YPN)
TRT=T1/2*(R**N-R**(N-2))*SIN(YPN)
TRT=TRT*N
S=SINYP**2
C=COSYP**2
SC=SINYP*COSYP
TX=TR*C+TT*S-2*TRT*SC
TY=TR*S+TT*C+2*TRT*SC
TXY=(TR-TT)*SC+TRT*(C-S)
GO TO 21
20 CONTINUE
TX=T0
TY=T0
TXY=0.
21 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE STIFT3(N)
COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NSZF,NBAND
COMMON HE,E,RO,HU,OMEGA,SE
A,NOP(160,3)
1,XYGK(85,2),NFIK(24),NBK(24)
2,SK(144,48),SM(144,48),A(48,144)
3,D(144),B(144)
4,ES(3,3),EM(3,3)
5,R0,T0,T1,NT1
REAL IX,IY,IXY
DIMENSION CORD(3,2)
I=NOP(N,1)
J=NOP(N,2)
K=NOP(N,3)
D СРЕДНЕЕ НАТЯЖЕНИЕ В ЭЛЕМЕНТЕ
CALL TSTIFT(I,IXI,IYI,IXYI)
CALL TSTIFT(J,IXJ,IYJ,IXYJ)
CALL TSTIFT(K,IXK,IYK,IXYK)
TX=(IXI+IXJ+IXK)/3.
TY=(IYI+IYJ+IYK)/3.
TXY=(IXYI+IXYJ+IXYK)/3.
C ВЫЧИСЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ КООРДИНАТ
XI=XYGK(I,1)
XJ=XYGK(J,1)
XK=XYGK(K,1)
YI=XYGK(I,2)
YJ=XYGK(J,2)
YK=XYGK(K,2)
I=1
J=2
K=3
XC=(XI+XJ+XK)/3.
YC=(YI+YJ+YK)/3.
CORD(I,1)=XI-XC
CORD(J,1)=XJ-XC
CORD(K,1)=XK-XC
CORD(I,2)=YI-YC
CORD(J,2)=YJ-YC
CORD(K,2)=YK-YC
AJ=CORD(J,1)-CORD(I,1)
AK=CORD(K,1)-CORD(I,1)
BJ=CORD(J,2)-CORD(I,2)
BK=CORD(K,2)-CORD(I,2)
A0=(AJ*BK-AK*BJ)/2.
IF(A0-LE.0.) GO TO 220

```



## 0 INTEGRALY

```

IX=A0/12*(CORD(I,1)**2+CORD(J,1)**2+CORD(K,1)**2)
IY=A0/12*(CORD(I,2)**2+CORD(J,2)**2+CORD(K,2)**2)
AI=CORD(I,1)*CORD(I,2)
AJ=CORD(J,1)*CORD(J,2)
AK=CORD(K,1)*CORD(K,2)
IXY=A0/12*(AI+AJ+AK)
XY12=CORD(I,1)*CORD(J,2)-CORD(J,1)*CORD(I,2)
XY13=CORD(I,1)*CORD(K,2)-CORD(K,1)*CORD(I,2)
XY31=-XY13
XY23=CORD(J,1)*CORD(K,2)-CORD(K,1)*CORD(J,2)
X13=CORD(I,1)-CORD(K,1)
X12=CORD(I,1)-CORD(J,1)
X21=-X12
X23=CORD(J,1)-CORD(K,1)
X32=-X23
Y13=CORD(I,2)-CORD(K,2)
Y31=-Y13
Y12=CORD(I,2)-CORD(J,2)
Y23=CORD(J,2)-CORD(K,2)
ES(1,1)=Y23**2*TX+X23**2*TY-2*Y23*X23*TX
ES(1,2)=Y23*Y13-Y131*TX-X23*X13*TY+(X23*Y13+Y23*X13)*TX
ES(1,3)=Y23*Y12*TX+X23*X12*TY-(X23*Y12+Y23*X12)*TX
ES(2,1)=Y13**2*TX+X13**2*TY-2*Y13*X13*TX
ES(2,2)=Y13*Y12*TX-X13*X12*TY+(X13*Y12+Y13*X12)*TX
ES(2,3)=Y12**2*TX+X21**2*TY-2*Y12*X12*TX
EM(1,1)=Y23**2*IX+X23**2*IY-2*Y23*X23*IXY+XY23**2*A0
EM(1,2)=-Y23*Y13*IX-X23*X13*IY+(X32*Y31+Y23*X13)*IXY+XY23*XY31*A0
EM(1,3)=Y23*Y12*IX+X23*X12*IY-(X23*Y12+Y23*X12)*IXY+XY23*XY12*A0
EM(2,1)=Y13**2*IX+X13**2*IY-2*Y13*X13*IXY+XY13**2*A0
EM(2,2)=-Y13*Y12*IX-X13*X12*IY+(X13*Y12+Y13*X12)*IXY+XY31*XY12*A0
EM(2,3)=Y12**2*IX+X21**2*IY-2*Y12*X12*IXY+XY12**2*A0
ES(2,1)=ES(1,2)
ES(3,1)=ES(1,3)
ES(3,2)=ES(2,3)
EM(2,1)=EM(1,2)
EM(3,1)=EM(1,3)
EM(3,2)=EM(2,3)
DO 1 I=1,3
DO 1 J=1,3
ES(I,J)=ES(I,J)/4/A0
1 EM(I,J)=EM(I,J)*R0/4/A0**2
GO TO 101
220 PRINT 100
PRINT 102,N
100 FORMAT(28H0ZERO OR NEGATIVE A0 ELEMENT)
102 FORMAT(1H,15)
STOP
101 CONTINUE
RETURN
END

```

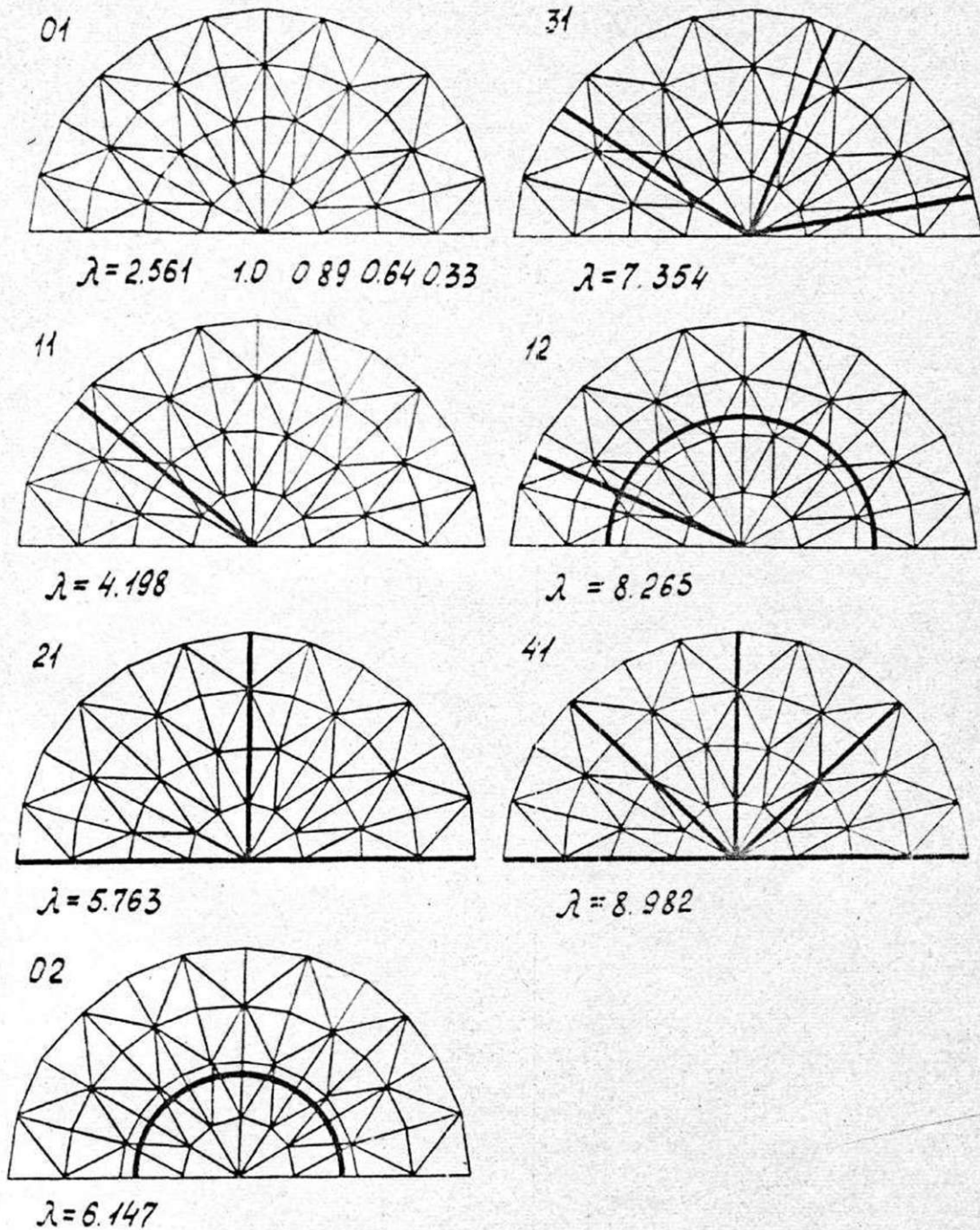


Рис. П.І.І. Формы колебаний пакета изотропных пластин, моделированного I44 элементами (относительная точность вычисления частотного параметра  $10^{-6}$ )

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН ПРИ  
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ И РЕЗУЛЬТАТЫ  
ИЗМЕРЕНИЙ СТАТИЧЕСКИХ ПРОГИБОВ ПЛАСТИНЫ И ПАКЕТА

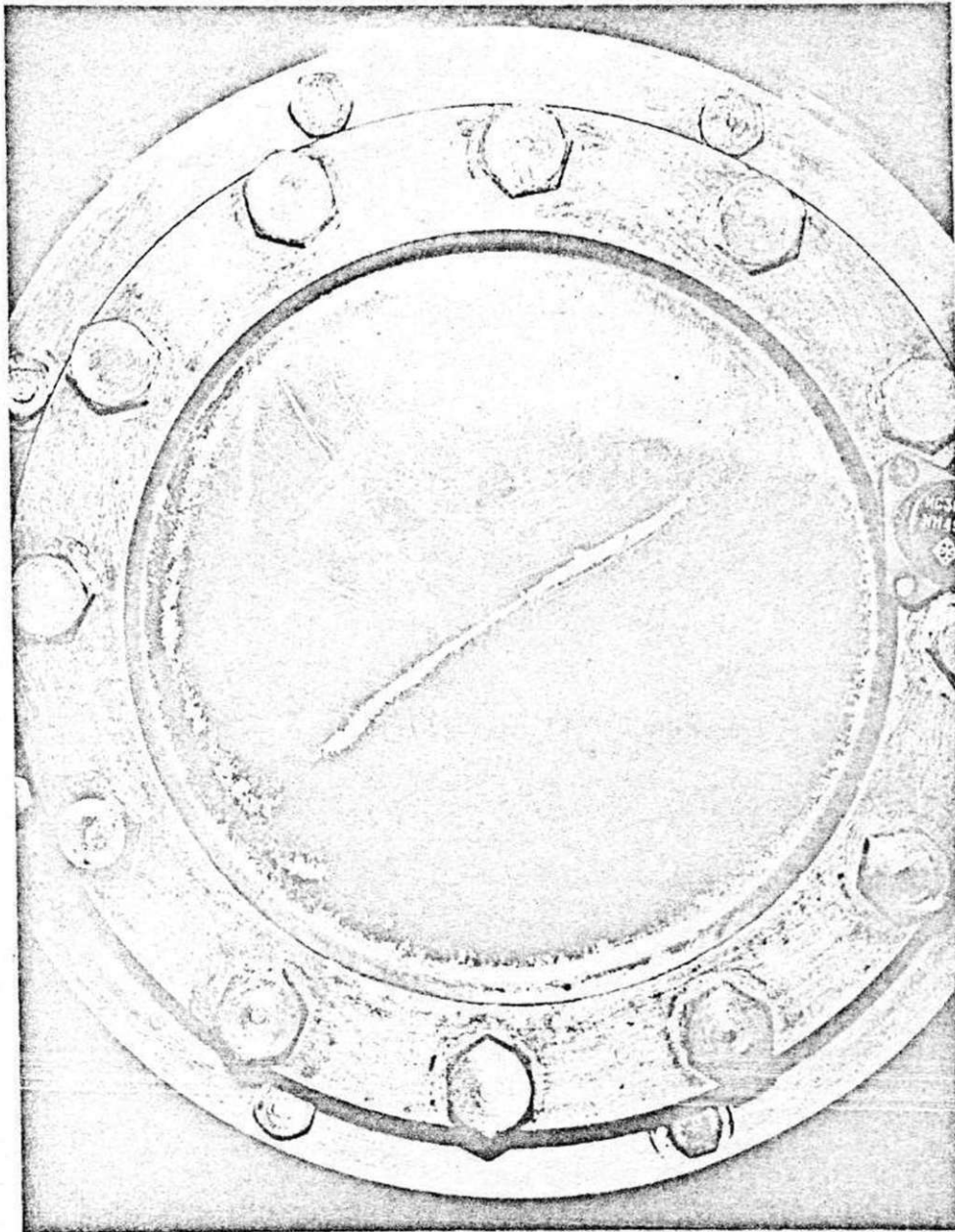


Рис. П.2.1. Форма колебаний с одним узловым диаметром  
(Частота 400 Гц)

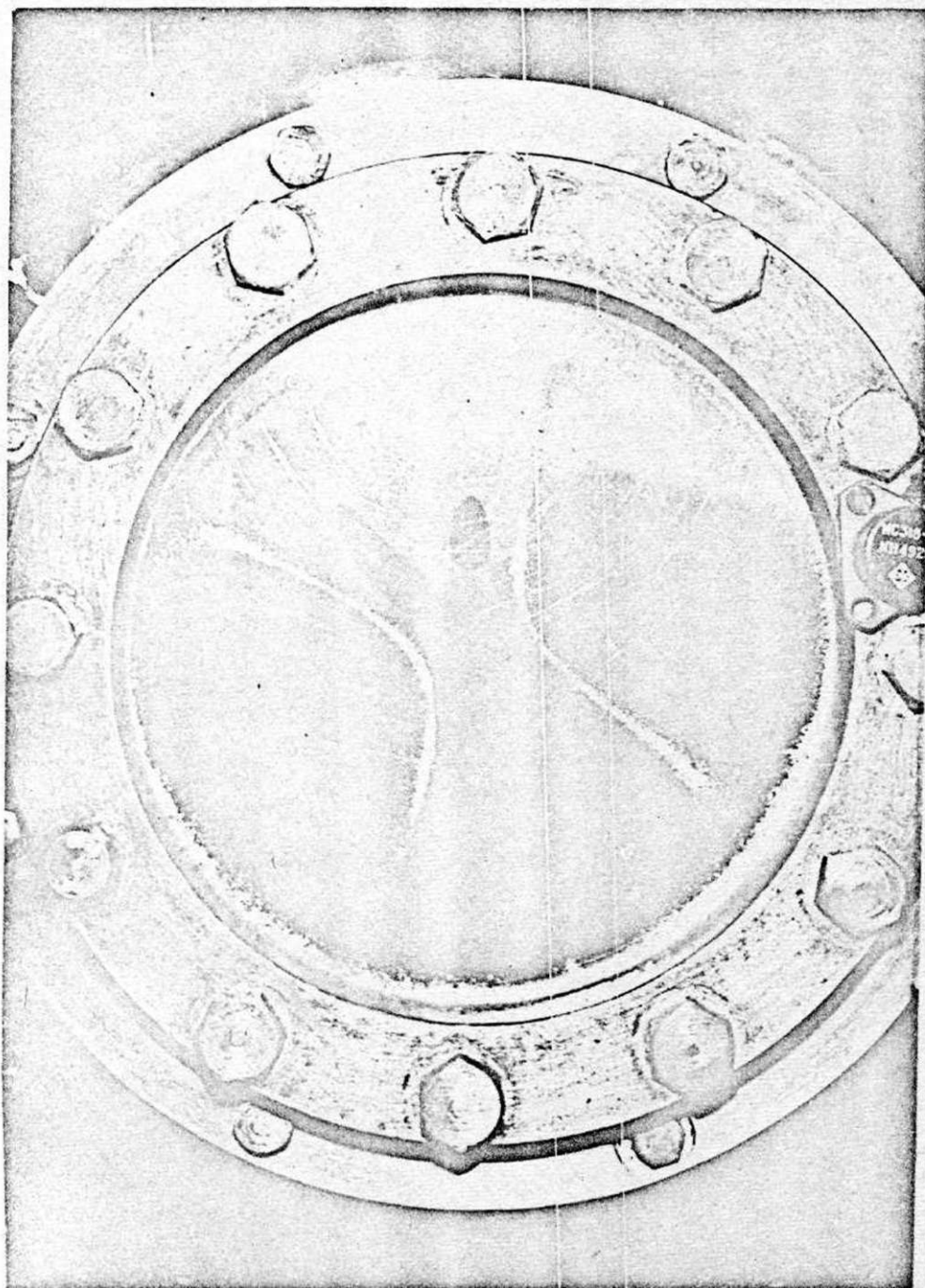


Рис. П.2.2. Формы колебаний с двумя узловыми диаметрами  
(Частота 540 Гц)

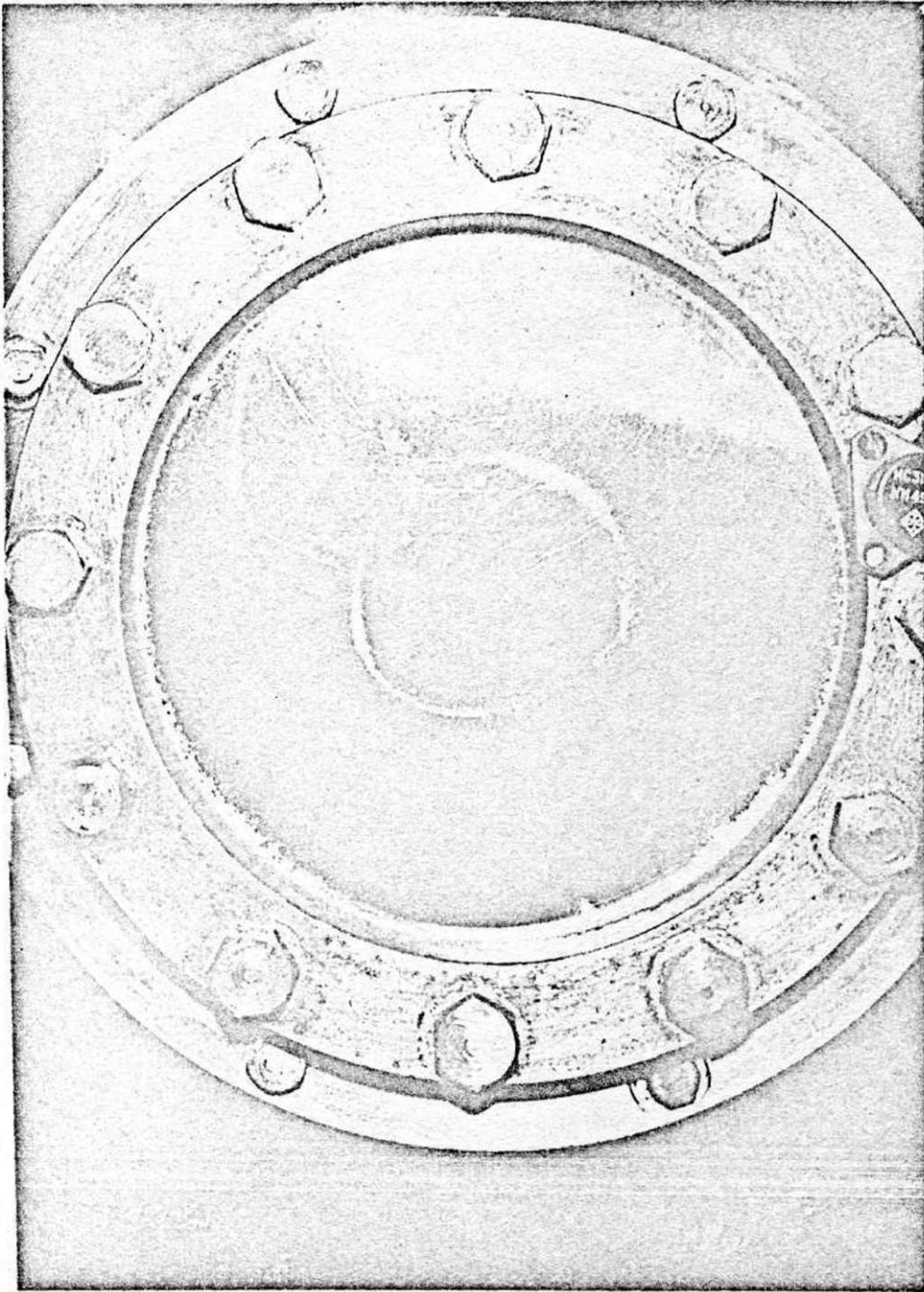


Рис. П.2.3. Форма колебаний с одной узловой окружностью  
(Частота 615 Гц)

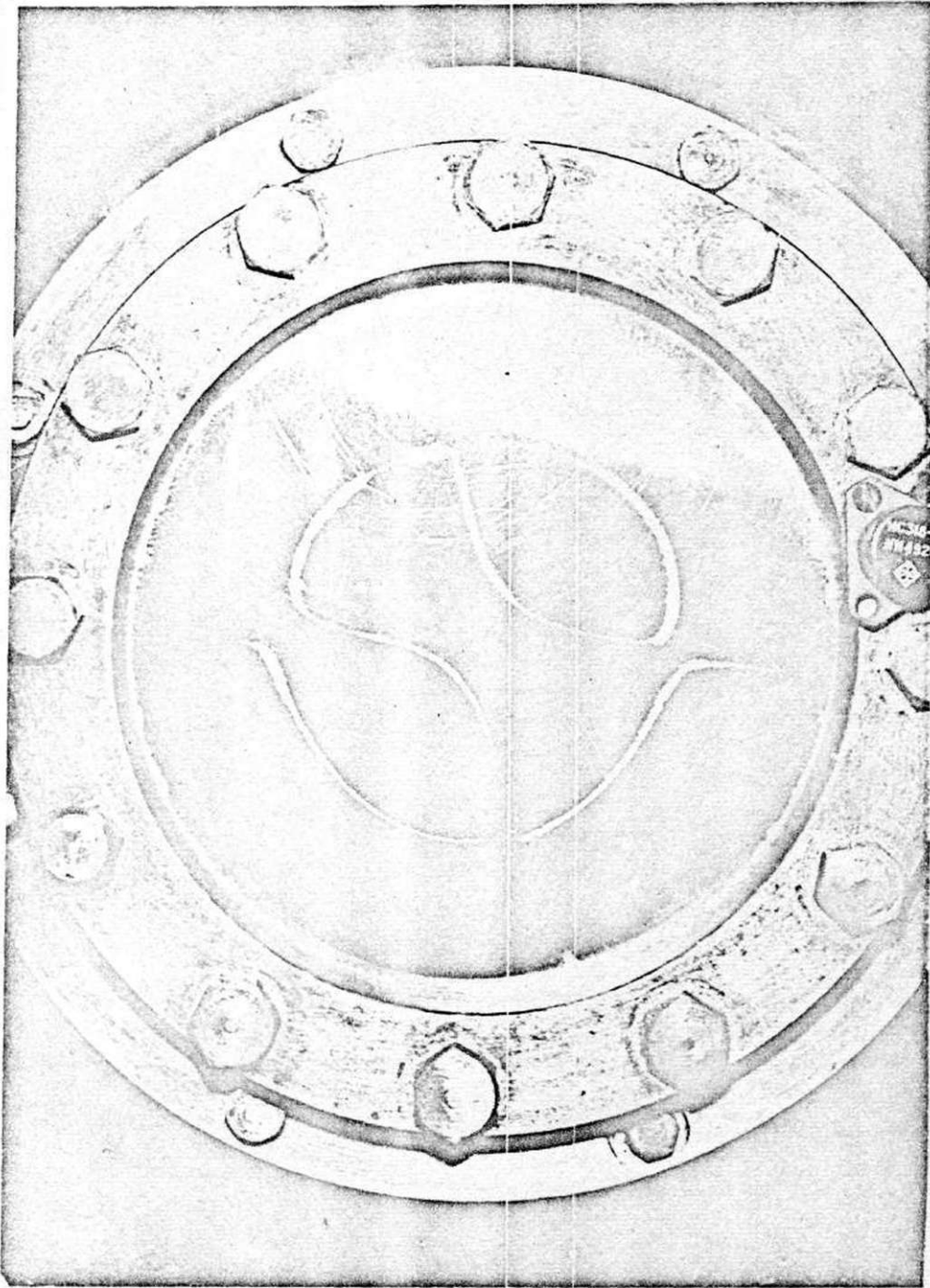


Рис. П.2.4. Формы колебаний с одной окружностью и двумя диаметрами (Частота 1180 Гц)

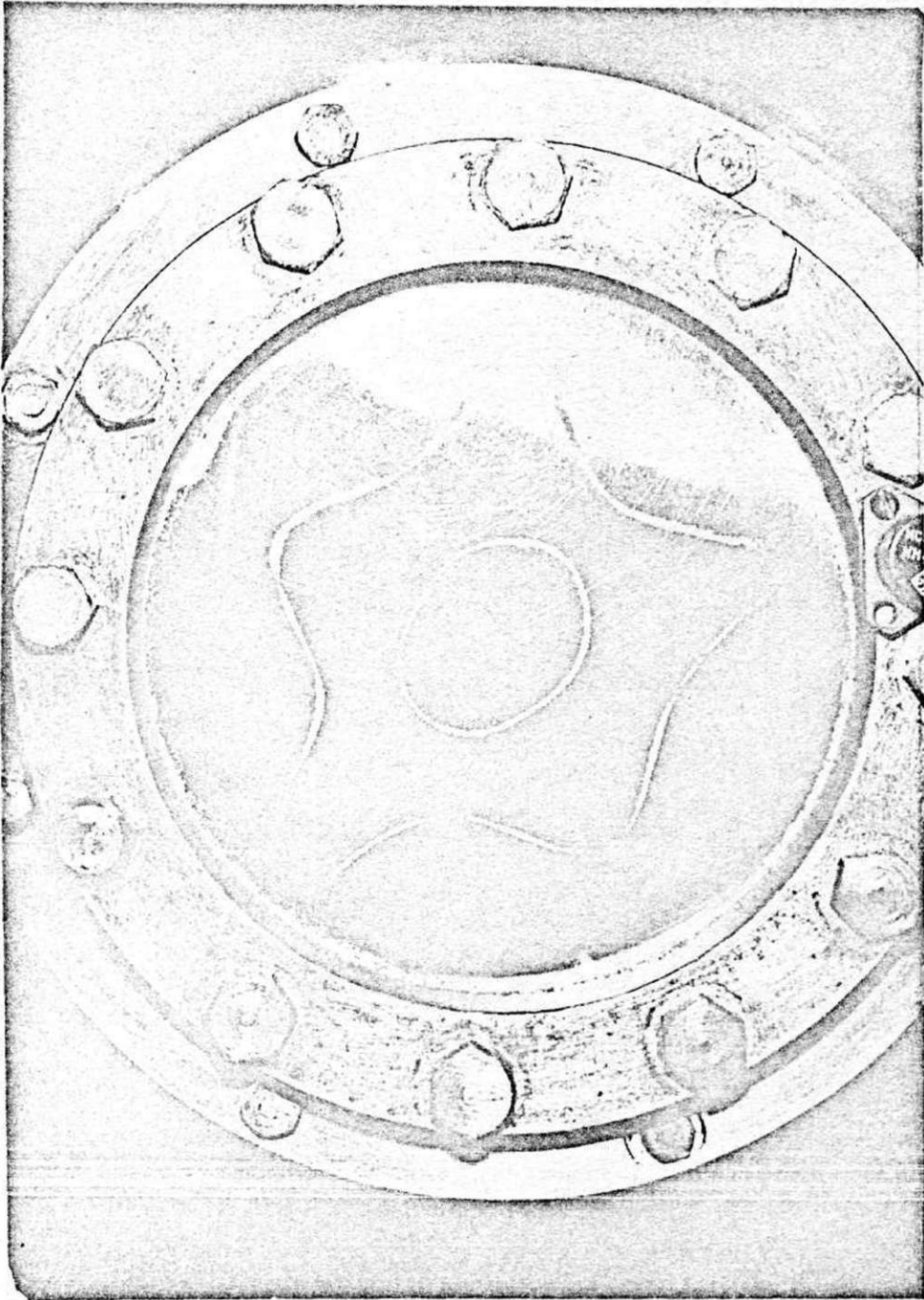


Рис. П.2.5. Формы колебаний с одной окружностью и пятью диаметрами (Частота 1270 Гц)

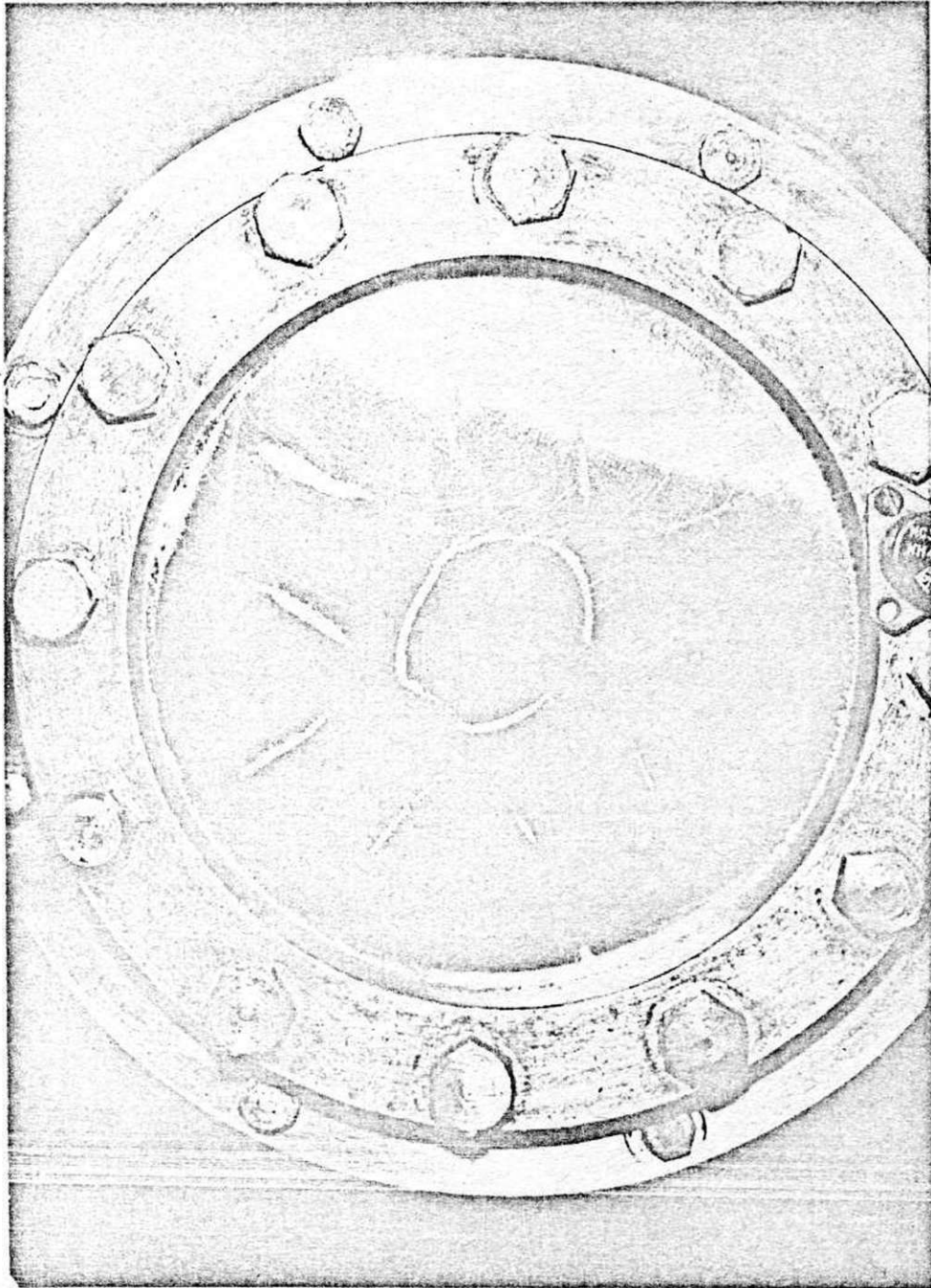


Рис. П.2.6. Формы колебаний с одной окружностью и пятью диаметрами (Частота 1280 Гц)



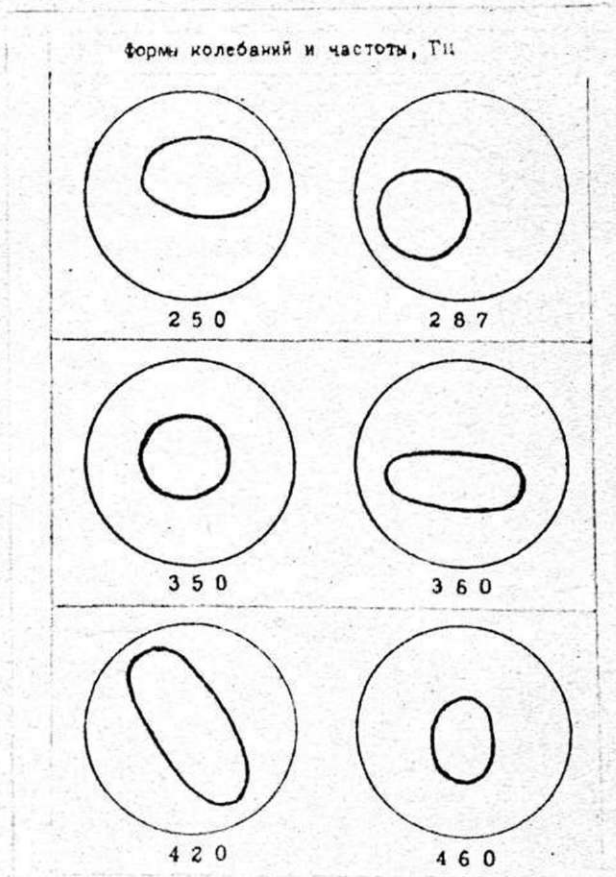
Таблица П.2.1

Результаты измерений статических прогибов пластины № 2 и пакета

Угол, $\pi$ рад	Пластина № 2												Пакет		
	66	83	77	84	103	88	94	95	150	171	50	83	93		
0	71	77	73	-	-	-	89	90	154	171	49	80	90		
1/6	68	76	72	72	95	94	96	97	158	171	49	81	88		
1/3	70	75	72	-	-	-	99	99	158	173	49	81	89		
1/2	71	75	72	73	94	92	98	99	158	173	46	85	86		
2/3	68	75	72	-	-	-	98	99	158	169	46	83	88		
5/6	65	75	72	83	92	91	98	99	158	172	49	87	90		
1	66	76	72	-	-	-	98	99	151	180	48	91	90		
7/6	67	84	76	88	104	95	90	92	145	173	51	92	91		
4/3	68	79	85	-	-	-	90	90	146	173	54	87	92		
3/2	68	79	79	88	104	85	84	85	153	178	54	88	92		
5/3	63	79	81	-	-	-	85	87	146	174	50	86	93		
11/6	67	84	84	84	103	88	94	93	153	171	49	83	93		
2															
Среднее арифметич.	68	76	78	82	99	90	93	94	153	173	50	85	90		
Натяг в центре	22	26	26	22	20	0	0	0	21	0	0	0	0		
Прогиб, деление	46	51	51	60	79	90	93	94	130	173	50	85	90		
Прогиб, $10^{-3}$	0,5	0,5	0,6	0,8	0,9	0,9	0,9	0,9	1,3	1,7	0,5	0,85	0,9		

Таблица П.2.2

Расслоение спектра частот при форме колебаний с одной узловой окружностью (пластина № 3)



## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

АНАЛИЗ СМЕЩЕНИЙ ОПОРНОГО УСТРОЙСТВА ПАКЕТА  
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Опытными испытаниями установлено влияние смещений ограничительного диска на объемные показатели мембранной компрессорной установки / 2 /. Считается, что при деформации диска между ним и пакетом пластин возникают дополнительные "мертвые" объемы, где газ не сжимается. Образование "мертвых" объемов является причиной снижения производительности и других показателей установки.

Теоретическое и экспериментальное исследования, проведенные соискателем, достаточно подробно показали, что смещения прижимных колец опытного приспособления в зоне заземления оказывают весьма значительное влияние на статический прогиб и параметры собственных колебаний пакета пластин.

Однако в практике конструирования мембранных установок расчет прогиба и напряжений ограничительного диска сводится к расчету его как жесткой круглой пластины постоянного сечения, заземленной по контуру и нагруженной равномерным давлением / 2 /. Такой подход является весьма упрощенным. При этом не учитывается ступенчатость формы сечения диска (см. рис. I введения), влияние усилий, возникающих при затяжке шпилек. Расчет диска как пластины не дает информации о смещениях ограничительного диска в зоне его контакта с пакетом пластин.

Для определения основных закономерностей деформирования ограничительного диска и повышения точности расчета поля перемещений наиболее пригодным является метод конечных элементов,

реализующий решение осесимметричной задачи теории упругости для конструкций в виде колец со ступенчатой формой поперечного сечения / 53 /. Проведенные с помощью метода конечных элементов расчеты можно выделить в две основные группы:

1) расчеты поля перемещений верхнего прижимного кольца приспособления, использованного в экспериментах (см. рис. П.3.1). Здесь исследуется влияние способа крепления кольца на его перемещения в зоне контакта с пакетом пластин;

2) расчет ограничительного диска мембранного компрессора. Цель этого расчета заключается в численной проверке правильности принятого конструктивного решения.

Для оценки влияния граничных условий на перемещения прижимного кольца рассмотрим три варианта закрепления, отличающиеся различной деформируемостью (см. рис. П.3.1). В первом варианте кольцевой бурт верхнего кольца частично входит в кольцевую выточку нижнего кольца. При этом между кольцами остается зазор, допускающий возможность осевого перемещения верхнего кольца. Во 2-ом варианте верхнее и нижнее кольца соединяются друг с другом без зазора. В 3-м варианте верхнее кольцо кольцевым буртом опирается на нижнее кольцо и имеет возможность свободно перемещаться в плоскости заделки.

Поперечное сечение верхнего прижимного кольца разбивается на треугольные конечные элементы (рис. П.3.2). Наибольшая густота сетки приходится на кольцевой опорный бурт, где предполагается самый высокий градиент напряжений. Дискретная модель кольца включает 53 конечных элемента и 43 узла. Усилие от затяжки болтов прикладывается в виде сосредоточенной силы в 33 узле (в расчетах усилие затяжки принято равным 500 Н).

В расчетах приняты следующие значения параметров нижнего

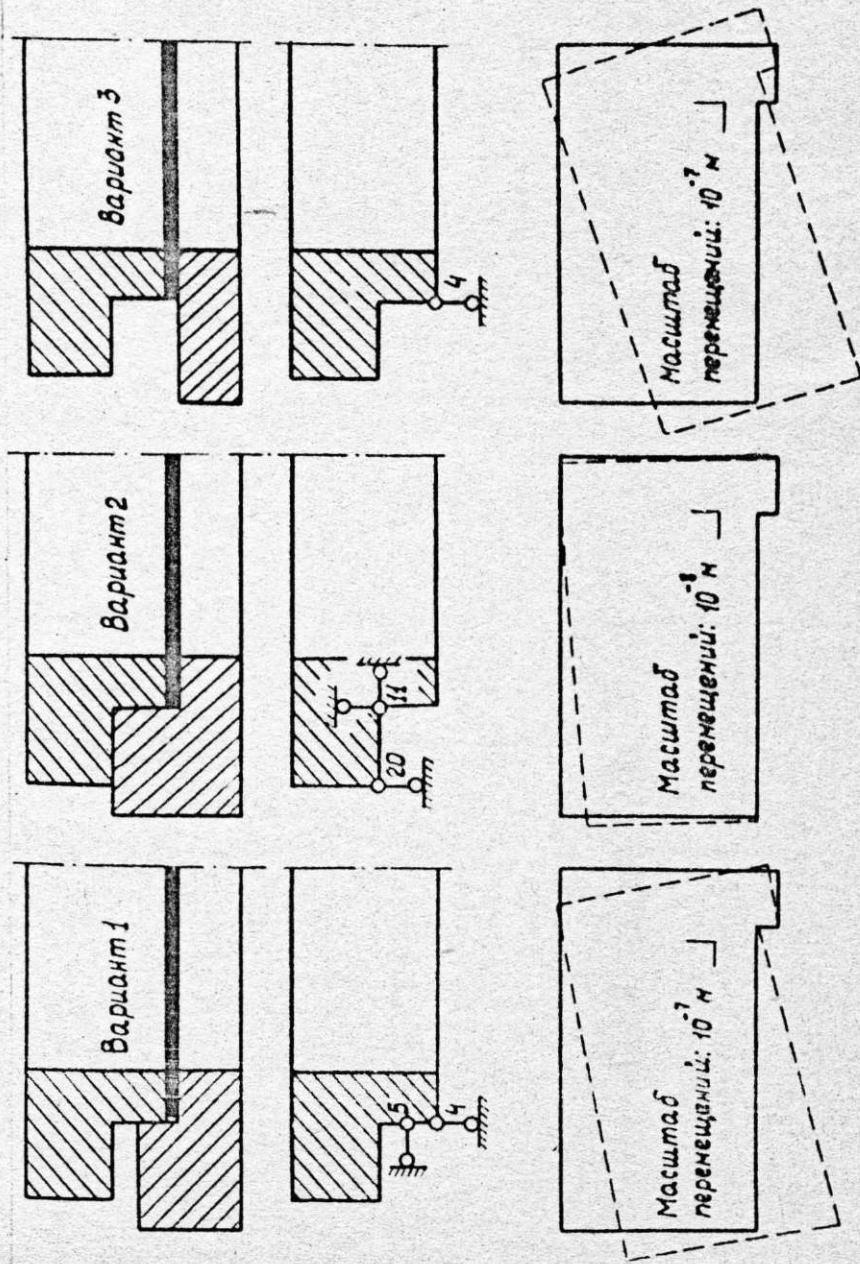


Рис. П.3.1

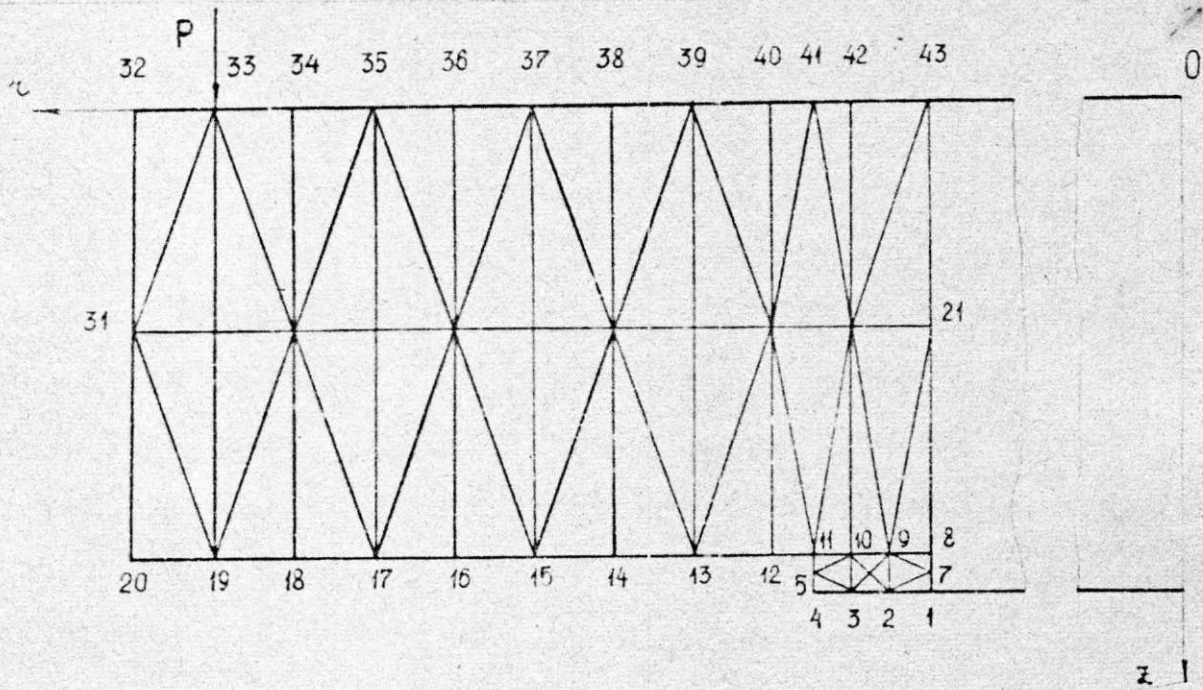


Рис. П.3.2

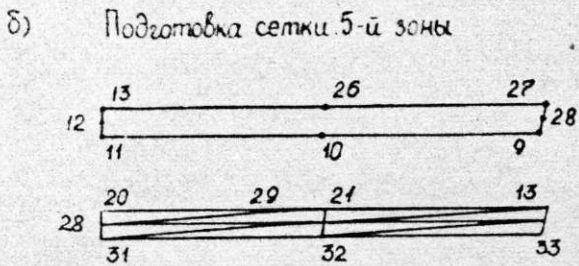
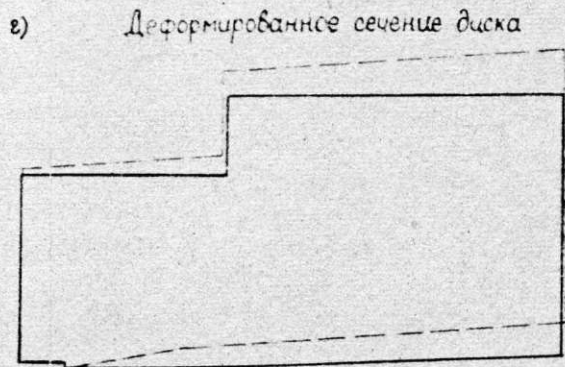
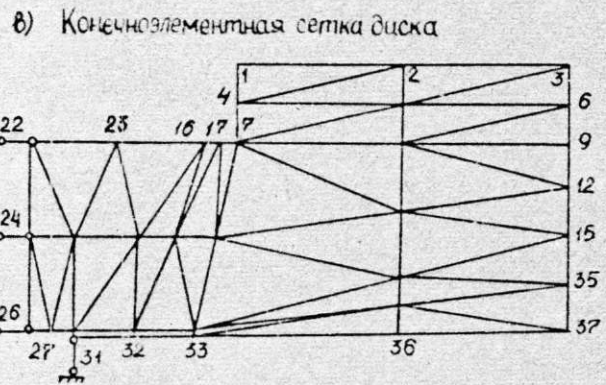
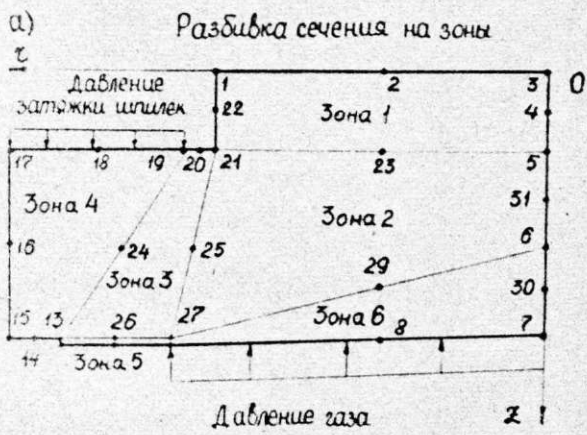


Рис. П.3.3

прижимного кольца: внутренний радиус 0,085 м; внешний радиус 0,135 м; ширина кольца на внутреннем радиусе 0,03 м; ширина кольца на внешнем радиусе 0,028 м; модуль упругости  $2,1 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>; коэффициент Пуассона 0,3.

Расчет кольца методом конечных элементов производится с помощью пакета подпрограмм на языке ФОРТРАН для ЭЦВМ серии ЕС (подпрограммы составлены и реализованы совместно с канд. техн. наук А.Н.Нацвиным). Пакет включает подпрограммы ввода исходных данных, вычисления матрицы жесткости элемента, формирования глобальной матрицы жесткости, вычисления эквивалентных нагрузок на цилиндрической и боковой поверхностях, решения системы линейных алгебраических уравнений с компактной матрицей.

Чтобы учесть граничные условия, в исходных данных вместе с номером граничного узла указывается наличие ограничений (обозначается единицей) на соответствующую степень свободы / 53 /. Например, II - означает, что узел полностью закреплен; IO - узел закреплен в радиальном направлении (см. рис. П.3.1); OI - узел закреплен в осевом направлении. Соответствующие граничные условия для трех рассматриваемых вариантов указаны в табл. П.3.1.

Узлы 1 и 4 располагаются в крайних точках кольцевого бурта верхнего прижимного кольца (см. рис. П.3.1). По перемещениям этих узлов можно судить о деформировании кольцевого бурта в зоне контакта с пакетом пластин. Согласно данным табл. П.3.1 наибольшие значения радиальных и осевых перемещений в узлах 1 и 4 соответствуют третьему варианту.

На рис. П.3.1 сплошной линией показана исходная конфигурация поперечного сечения кольца, а пунктирной - деформированная, построенная по результатам расчета методом конечных эле-

ментов.

Вид деформированного сечения в первом варианте показывает (см. рис. П.3.1), что кольцо изгибается под действием нагрузки, однако ответная кольцевая выточка в нижнем кольце препятствует смещению верхнего кольца в плоскости заземления пакета. Во втором варианте (см. рис. П.3.1) прижимное кольцо сжимается в области приложения усилия затяжки. В третьем варианте (см. рис. П.3.1) радиальное перемещение (см. табл. П.3.1, узел 4) кольцевого бурта в плоскости заземления пакета на порядок превышает аналогичное перемещение в первом варианте.

Таблица П.3.1

Перемещения в характерных точках кольца  
(узлы I и 4, рис. П.3.1) при трех вариантах  
граничных условий

Вариант	: Граничные условия :		Перемещения, м			
	: Номер узла :	: Тип ус- : : ло- : : вия :	: Узел I :		: Узел 4 :	
			: Радиальное :	: Осевое :	: Радиальное :	: Осевое :
1	: 4 :	: 0I :	: $-0,32 \cdot 10^{-7}$ :	: 0 :	: $-0,12 \cdot 10^{-7}$ :	: $-0,25 \cdot 10^{-7}$ :
	: 5 :	: IO :	: :	: :	: :	: :
2	: II :	: II :	: $-0,22 \cdot 10^{-9}$ :	: 0 :	: $-0,27 \cdot 10^{-9}$ :	: $-0,85 \cdot 10^{-9}$ :
	: 20 :	: 0I :	: :	: :	: :	: :
3	: 4 :	: 0I :	: $-0,29 \cdot 10^{-6}$ :	: 0 :	: $-0,3 \cdot 10^{-6}$ :	: $-0,13 \cdot 10^{-6}$ :

Таким образом, в третьем варианте компоновки приспособления верхнее прижимное кольцо является наиболее деформируемым.



Важно отметить, что узлы I и 4 смещаются к центру кольца. Очевидно, что это приводит к возникновению сжимающих перемещений на контуре пакета пластин.

Как следует из результатов расчетов, приведенных в главе 3, для многослойного пакета, составленного из весьма тонких пластин, достаточно весьма малых сжимающих перемещений на контуре, чтобы он потерял устойчивость и в закритическом состоянии приобрел конечные поперечные статические прогибы. Возникновение дополнительного статического прогиба (кроме погрешностей от изготовления) при деформации ограничительного диска нежелательно для мембранной установки. Поэтому третий вариант считаем наихудшим. Лучшим является второй вариант – здесь кольцо не изгибается и отсутствуют перемещения в плоскости заземления пакета. Однако условия закрепления по второму варианту трудно реализовать в реальной мембранной установке. К "золотой середине" между двумя вариантами следует отнести первый вариант, в котором благодаря наличию кольцевой выточки в нижнем кольце перемещения верхнего в плоскости заделки пакета значительно уменьшены, хотя и не устранены полностью. Перемещения в плоскости заземления пакета возникают здесь при изгибе кольца.

Результаты экспериментального исследования подтверждают влияние смещений прижимного кольца на собственные колебания пакета. В третьем варианте компоновки прижимных колец пакет ведет себя как хлопающая мембрана. Во втором варианте соединения колец хлопки пакета наблюдались только после износа контактных цилиндрических поверхностей бурта верхнего кольца и выточки нижнего.

Следует отметить, что при деформации кольца в I-ом и 3-ем вариантах в области контакта с пакетом пластин образуется кони-

ческий зазор. Возникновение зазора в реальной мембранной установке может послужить также причиной нарушения ее герметичности.

На основе расчета методом конечных элементов ограничительного диска реальной мембранной установки, спроектированной во ВНИИкомпрессормаше, проанализируем правильность конструктивного исполнения мембранного блока.

Форма поперечного сечения ограничительного диска более сложная, чем у прижимного кольца приспособления (рис. П.3.3). Здесь несколько "ступенек", нижняя часть диска ограничена конической профилированной поверхностью. С целью облегчения процесса построения сетки из конечных элементов и повышения точности расчета за счет уменьшения ошибок при составлении, подготовке и вводе в ЭЦВМ исходных данных, используем программу автоматического построения сетки конечных элементов / 87 /. Для подготовки исходной информации к этой программе диск разбивается на 6 зон, нумеруются все узлы, составляются данные соединения зон друг с другом и т.д. Конечноэлементная сетка ограничительного диска, построенная с помощью ЭЦВМ, показана на рис. П.3.3.в.

Полагаем, что ограничительный диск нагружен давлением (1МПа), возникающим при затяжке силовых шпилек, и давлением (40 МПа) сжатого газа (см. рис. П.3.3а). В узлах 22, 24, 26 (см. рис. П.2.3в) накладываем ограничения на перемещения в радиальном направлении, а в узле 31 ограничиваем перемещение в осевом направлении.

Таблица П.3.2

Расчетные радиальные и осевые перемещения узлов ограничительного диска, расположенных в зоне заземления

Перемещения, $10^{-7}$ м								
Узел 31	:	Узел 32	:	Узел 33				
Радиальное	:	Радиальное	:	Осевое	:	Радиальное	:	Осевое
- 27	:	- 43	:	- 72	:	- 55	:	- 140

По результатам расчета построена конфигурация поперечного сечения деформированного диска. Сплошной линией на рис. П.3.3г показана исходная форма сечения, а пунктирной – расчетная конфигурация. Значения перемещений в узловых точках, расположенных в зоне заземления пакета приведены в табл. П.3.2. Нетрудно видеть, что ограничительный диск деформируется со смещением кольцевого бурта к оси симметрии диска и образованием конусного зазора в зоне заземления пакета пластин. Значения радиальных перемещений диска в плоскости заземления пакета пренебрежимо малы. С другой стороны, достаточно малы и осевые перемещения диска (см. табл. П.3.2), благодаря чему обеспечивается заземление пакета и герметичность газовой полости. Перемещения центра диска (узел 37, радиальное:  $-21 \cdot 10^{-7}$  м, осевое:  $-400 \cdot 10^{-7}$  м) также малы, что обеспечивает неизменность профиля рассматриваемого диска. Таким образом, результаты расчета подтверждают правильность принятого конструктивного решения мембранного блока (рис. 5.21).



# ВНИИКОМПРЕССОРМАШ

Адреса: 244609, г. Сумы, ГСП, ул. Курская, 6; телеграфный—Сумы НАУКА телетайп 147  
Реквизиты: повагонные грузы—ст. Сумы ЮЖД, код 4673, ветка ВНИИкомпрессормаша; мелкие и контейнеры  
—ст. Васильевка ЮЖД, код 4674; ж.-д. код ВНИИкомпрессормаша—4411  
Расчетные счета: № 26405 в Сумской горконторе Госбанка; № 060006 в Сумской областной конторе Стройбанка  
Телефоны: секретариата—22481, зам. директора—25361, 294292, для справок—299433.

№ \_\_\_\_\_  
На № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ

Директор института, к.т.н.  
В.Д.Васильев  
" 10 " 05 1984 г.

## А К Т

о внедрении результатов диссертационной работы  
Кунцева С.В. " Колебания пакета круглых гибких  
пластин мембранных установок с учетом анизотропности  
материала и смещений опорного устройства"

За период с 1980 г. по 1981 г. в соответствии с договором  
№ 58003 от 1.06.80 о научно-техническом содружестве между  
ХПИ им. В.И. Ленина и ВНИИкомпрессормашем проведены работы по теоре-  
тическому и экспериментальному исследованию динамики пакета мембран  
мембранного компрессора. В 1984 году в рамках договора о научно-  
техническом содружестве между Сумским филиалом ХПИ им. В.И.Ленина  
и ВНИИкомпрессормашем Кунцевым С.В. выполнено исследование напря-  
женно-деформированного состояния ограничительного диска мембран-  
ного компрессора высокого давления методом конечных элементов.

Кунцевым С.В. предложены рекомендации по анализу причин по-  
ломов пакетов пластин мембранных установок по конфигурациям плас-  
тических гофров и трещин. В настоящее время эти рекомендации ис-  
пользуются в лаборатории исследования мембранных компрессоров при

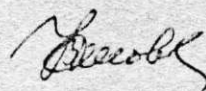
обследовании разрушенных в эксплуатации пакетов.

Созданные автором программы, ориентированные на ЭЦВМ серии ЕС, внедрены в практику инженерных расчетов института.

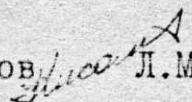
На основе практических рекомендаций, разработанных в диссертационной работе Кунцева С.В., сконструирован новый мембранный блок кислородного компрессора с индексом КГД-400 по тематике "Станция 35Б". Благодаря учету обоснованных и предложенных в диссертации конструктивных мер сокращены габариты и снижена металлоёмкость компрессора, обеспечена герметичность газовой полости. По ряду показателей созданный компрессор превосходит аналогичные зарубежные машины. Изготовленный опытный образец компрессора в настоящее время проходит доводочные испытания.

Компрессорная установка, создаваемая по тематике "Станция-35Б", имеет целевое назначение и экономический эффект от её использования не определяется. Внедрение результатов диссертационной работы Кунцева С.В. способствовало созданию компрессора, удовлетворяющего требованиям технического задания.

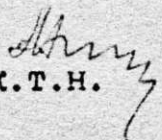
Зав. лабораторией исследования  
мембранных копрессоров

 Н.В. Шовкун

Зав. группой лаборатории  
исследования мембранных компрессоров

 Л.М. Киселев

Зав. лабораторией прочности и  
надёжности компрессорных машин, к.т.н.

 А.Н. Нацвин