УДК 336.71.001.57

***М.М. Квасній**, Львівський банківський інститут НБУ*

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ БАНКІВСЬКОЇ СИСТЕМИ НА ОСНОВІ МОДЕЛІ СОЛОУ

У довготерміновому періоді поведінку економіки можна змоделювати використавши модель Солоу. У статті розглядається економічна динаміка банківської системи на основі кількісного дослідження впливу чинників моделі Солоу.

Ключові слова: банківська система, модель Солоу, траєкторія збалансованого росту, споживання, інвестиції.

Постановка проблеми і мета статті. Поведінку економіки в довготерміновому періоді можна змоделювати використавши модель Солоу. В даній статті розглянуто економічну динаміку банківської системи на основі кількісного дослідження впливу чинників моделі Солоу.

Виклад основного матеріалу. Модель Солоу банківської системи опишемо чотирма ендогенними змінними [2]. Це Y – продукт виробництва банківської системи (банківські послуги), K – грошова маса, L – робоча сила, A – знання або ефективність праці.

В кожний момент часу банківська система володіє певним засобом грошової маси, робочою силою, знаннями і використовує їх з метою приросту виробництва банківських послуг. Оскільки банківська система змінюється в часі, то більш ефективно зосередити увагу на засобах грошової маси на одиницю ефективної робочої сили k, ніж на нескоригованому засобі грошової маси K. Взявши за основу $k=\dfrac{K}{AL}$, можемо скористатись правилом ланцюга, яке стверджує:

$$
\begin{aligned}
k^{\bullet}(t) &= \frac{K^{\bullet}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{\left[A(t)L(t)\right]^2} \cdot \\
&\cdot \left[A(t)L^{\bullet}(t) + L(t)A^{\bullet}(t)\right] = \\
&= \frac{K^{\bullet}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)L^{\bullet}(t)}{A(t)L^2(t)} - \frac{K(t)A^{\bullet}(t)}{A^2(t)L(t)}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

На підставі рівнянь $L^{\bullet}(t)=nL(t)$; $\dfrac{L^{\bullet}(t)}{L(t)}=n$;

$$A^{\bullet}(t)=gA(t);\ \frac{A^{\bullet}(t)}{A(t)}=g;$$

$$K^{\bullet}(t)=sY(t)-\delta K(t)$$

можемо переписати (1) у такому вигляді:

$$
\begin{aligned}
k^{\bullet}(t) &= \frac{sY(t)-\delta K(t)}{A(t)L(t)} - k(t)\cdot n - k(t)g = \\
&= s\frac{Y(t)}{A(t)L(t)} - \delta K(t) - nK(t) - gK(t)
\end{aligned}
$$

Скористаємось тим, що $\dfrac{Y}{AL}$ подається як $f(k)$, маємо:

$$k^{\bullet}(t)=sf(k(t))-(n+g+\delta)k(t). \qquad (2)$$

Рівняння (2) є основним рівнянням моделі Солоу, яке описує динаміку росту банківської системи [4].

Модель Солоу банківської системи передбачає, що без врахування точки відліку система прямує в напрямку траєкторії збалансованого росту (ТЗР) – тобто це ситуація, в котрій кожна змінна моделі зростає із сталими темпами [5].

На траєкторії збалансованого росту темп росту виробництва банківських послуг на працівника – це величина, яка визначається через ступінь технічного прогресу.

На траєкторії збалансованого росту темпи росту виробництва банківських послуг і грошової маси є менш-більш рівними і вищими від темпу росту робочої сили. Це спостерігається тому, що виробництво на одиницю робочої сили і грошова маса на одиницю робочої сили збільшуються.

Із вищесказаного можна зробити висновок, що банківська система перебуває на траєкторії збалансованого росту, коли точка k^* є розв'язком рівняння: $sf\left(k^*\right) = \left(n+g+\delta\right)k^*$. Точка k^* буде стійкою точкою рівноваги.

Параметром у моделі Солоу банківської системи, на який може впливати політика уряду, є норма заощадження. Природно буде дослідити ефект зміни норми заощаджень.

Економічну модель Солоу розглядатимемо на траєкторії збалансованого росту при припущеннях, що s має сталий ріст. Також дослідимо властивості моделі, коли банківська система не є на траєкторії збалансованого росту.

Зростання норми заощаджень s переміщує лінію фактичних інвестицій вверх так, що k^* росте. Це показано на графіку (рис. 1).

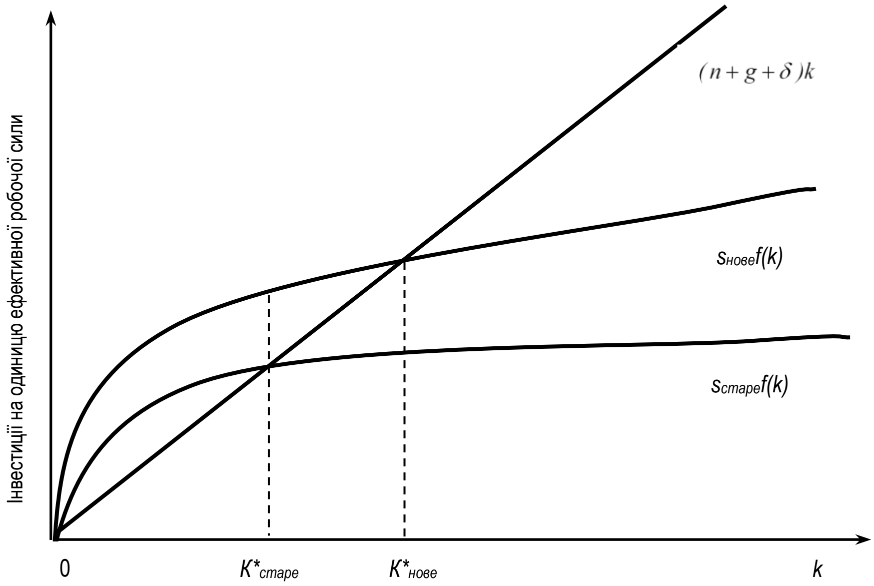

Рис. 1

Однак k не одразу здійснює стрибок до нового значення $k^*_{нове}$. Спочатку k прямує до старого $k^*_{старе}$. На цьому рівні фактичні інвестиції перевищують реституційні. Для інвестицій передбачено більше засобів, ніж їх потрібно для утримання сталого k. В результаті $k^{\bullet}$ додатне.

У такий спосіб k починає рости і зростає так довго, поки не досягне нового значення $k^*_{нове}$, у якому точка стабілізується.

Розглянемо формування продукту банківської системи на працівника, тобто $\frac{Y}{L} = Af\left(k\right)$. Коли k стале, то $\frac{Y}{L}$ має темп росту g, тобто відповідає темпу росту A.

Норма заощаджень зростає, на нашу думку, стрибкоподібно в момент часу t_0, після чого залишається сталою; k зростає поступово від $k^*_{старе}$ до $k^*_{нове}$; ступінь росту продукту банківської системи на працівника, який спочатку дорівнював g, зростає стрибкоподібно в t_0, після чого поступово повертається назад до свого початкового рівня; так продукт на працівника починає рости понад рівень, на якому знаходиться, і поступово осідає до підвищеного рівня, рівно прилеглого до його початкового рівня.

Отже, зміна норми заощаджень має вплив на рівень функціонування банківської системи, а не на її зростання: змінюються дані на траєкторії збалансованого росту банківської системи, через те і змінюється рівень продукту банківської системи на працівника в кожен момент часу, але це не впливає на норму росту продукту на працівника на траєкторії збалансованого росту.

Розглянемо споживання продукту виробництва банківської системи на одиницю ефективної робочої сили. Це продукт виробництва банківської системи на одиницю ефективної робочої сили $f(k)$, помножений на частку спожитого продукту $(1 - s)$. Згодом норма заощаджень s змінюється в момент часу t_0, а k не змінюється, і початкове споживання на одиницю ефективної праці стрибкоподібно спадає. Поступово, оскільки k зростає, то s утримується на своєму підвищеному рівні.

Подивимось чи споживання остаточно перевищить свій рівень в околі k^* перед зростанням *s*. Нехай c – це споживання на одиницю ефективної робочої сили на траєкторії збалансованого росту. Тоді c^* дорівнює продукту на одиницю ефективної робочої сили $f(k^*)$, помноженому на (1 – *s*). На траєкторії збалансованого росту фактичні інвестиції дорівнюють відновлюваним $(n+g+\delta)k^*$. Тому

$$c^* = f(k^*) - (n+g+\delta)k^*, \qquad (3)$$

де k^* визначене через параметри моделі s, n, g, δ .

Запишемо наступну рівність:

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = \left[f'\left(k^*(s,n,g,\delta)\right) - (n+g+\delta) \right] \frac{\partial k^*(s,n,g,\delta)}{\partial s}. \qquad (4)$$

Відомо, що зростання *s* спричиняє зростання k^*. Збільшення чи зменшення споживання в довготерміновий період залежить від того, чи $f'(k^*)$ – кінцевий продукт виробництва банківської системи – буде меншим чи більшим за $(n+g+\delta)$.

Якщо $f'(k^*)$ є меншим ніж $(n+g+\delta)$, то додатковий продукт показує, що збільшеної грошової маси не вистачить на утримання засобів виробництва банківської системи на підвищеному рівні. Якщо $f'(k^*)$ перевищує $(n+g+\delta)$, то отримується більше додаткового продукту банківської системи, ніж потрібно на утримання *k* на підвищеному рівні, в результаті споживання зростає.

Очевидно, в моделі Солоу банківської системи, де заощадження екзогенні, очікується, що засіб грошової маси на траєкторії збалансованого зростання знаходиться на рівні, який відповідає "золотому правилу" [3].

Часто менеджмент банківської системи зацікавлений не лише в якісних імплікаціях моделі, але й у кількості виробництва банківських послуг. У більшості моделей отримання докладних кількісних результатів вимагає певного виду функцій і змінних та їх параметрів. У багатьох випадках можна багато дізнатися, розглянувши довготермінові наближення рівноваги. Використаємо саме такий підхід.

Розглянемо довготривалий вплив зростання норми заощаджень на виробництво банківських послуг.

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = f'(k^*) \frac{\partial k^*(s,n,g,\delta)}{\partial s}, \qquad (5)$$

де $y^* = f(k^*)$ є рівнем банківського продукту на одиницю ефективної робочої сили на траєкторії збалансованого росту.

Щоб знайти $\frac{\partial y^*}{\partial s}$, потрібно знати $\frac{\partial k^*}{\partial s}$. У зв'язку із цим необхідно зауважити, що k^* обмежене умовою $\dot{k} = 0$ і задовольняє рівняння:

$$sf(k^*(s,n,g,\delta)) = (n+g+\delta)k^*(s,n,g,\delta). \quad (6)$$

Рівняння (6) виконується для всіх змінних s, n, g, δ .

Отже, ми отримаємо:

$$sf'(k^*) \frac{\partial k^*}{\partial s} + f(k^*) = (n+g+\delta) \frac{\partial k^*}{\partial s}. \qquad (7)$$

Перепишемо рівняння таким чином:

$$\frac{\partial k^*}{\partial s} = \frac{f(k^*)}{(n+g+\delta) - sf'(k^*)}, \text{ тоді } \frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{\partial y^*}{\partial k^*} \frac{\partial k^*}{\partial s} .$$

В інтерпретації цього виразу можуть допомогти дві модифікації: перша полягає у його зміні в еластичності через домноження обох сторін на $\frac{s}{y^*}$; друга – у використанні факту, що $sf(k^*) = (n+g+\delta)k^*$ із метою підстановки.

Після цих змін отримаємо:

$$\frac{s}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{s}{f(k^*)} \cdot \frac{f'(k^*)f(k^*)}{(n+g+\delta) - sf'(k^*)} =$$

$$= \frac{(n+g+\delta)k^* f'(k^*)}{f(k^*)\ (n+g+\delta) - (n+g+\delta)k^* f'(k^*)/f(k^*)} = \qquad (8)$$

$$= \frac{k^* f'(k^*)/f(k^*)}{1 - k^* f'(k^*)/f(k^*)} \ ,$$

де $\frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)}$ – еластичність виробництва банківської системи, коли $k = k^*$.

Позначимо цей вираз через $a_k(k^*)$ і отримаємо:

$$\frac{s}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{a_k(k^*)}{1 - a_k(k^*)}. \qquad (9)$$

Якщо ринки є конкурентними і немає зовнішнього прибутку, то кінцевий продукт, отриманий способом обороту грошової маси на траєкторії збалансованого росту, становить $k^* f'(k^*)$, а його частина в кількості доходу є $\frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)}$, тобто $a_k(k^*)$.

Інтуїтивно розмірковуючи, маємо, що низька вартість $a_k(k^*)$ спричиняє малий вплив заощаджень на виробництво. Тут є дві причини. По-перше, крива фактичних інвестицій $sf(k)$ спадає досить "гостро", а це призводить до того, що коли крива посувається вгору, то точка перетину з кривою відновлювальних інвестицій переміщується несуттєво. В результаті вплив змінної s на k^* невеликий. По-друге, низька вартість $a_k(k^*)$ означає, що вплив змінної k^* на y^* теж невеликий.

На практиці ми зацікавлені не тільки в кінцевому ефекті від певної зміни (наприклад, норми заощаджень), а також і в швидкодії цих ефектів.

Будемо розглядати дану проблему в довгостроковому періоді. Для спрощення досліджень зосередимо увагу швидше на грошовій масі k, ніж на виробництві банківських послуг y.

Встановимо як швидко величина k прямує до k^* на траєкторії збалансованого росту.

Оскільки $k^{\bullet}$ можна виразити в термінах k:

$$k^{\bullet}(t) = sf(k(t)) - (n+g+\delta)k(t), \qquad (10)$$

то правильним буде запис $k^{\bullet} = k^{\bullet}(k)$.

Для $k^{\bullet}(k)$ запишемо лінійний член розкладу в ряд Тейлора в околі точки $k = k^*$:

$$k^{\bullet} \approx \left(\left. \frac{\partial k^{\bullet}(k)}{\partial k} \right|_{k = k^*} \right) \cdot (k - k^*). \qquad (11)$$

Зосередимо увагу на рівнянні (10) на $k^{\bullet}(k)$ і проведемо оцінки, якщо $k = k^*$.

Отримаємо:

$$\left. \frac{\partial k^{\bullet}(k)}{\partial k} \right|_{k = k^*} = sf'(k^*) - (n+g+\delta) =$$

$$= \frac{(n+g+\delta)k^* f'(k^*)}{f(k^*)} -$$

$$-(n+g+\delta) = (n+g+\delta) \cdot \left[\frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)} - 1 \right]$$

Використаймо той факт, що

$$\frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)} = a_k(k^*)$$

і тоді матимемо:

$$\left.\frac{\partial k^{\bullet}(k)}{\partial k}\right|_{k=k^*} = (n+g+\delta)\left[a_k(k^*)-1\right]. \qquad (12)$$

Вираз (12) підставимо в (11) і отримаємо:

$$k^{\bullet}(t) \approx -\left[1-a_k(k^*)\right](n+g+\delta)(k-k^*) \qquad (13)$$

Рівняння (13) показує, що в околі траєкторії збалансованого росту грошова маса на одиницю ефективної робочої сили прямує до k^* зі швидкістю, пропорційною до його відстані від k^*.

Приймемо деякі позначення:

$$x(t) = k(t) - k^*,$$
$$\lambda = \left[1-a_k(k^*)\right](n+g+\delta).$$

В термінах цих позначень рівняння (13) перепишеться так:

$$\dot{x}(t) \approx -\lambda x(t).$$

Змінну *x* визначимо як $x(t) \approx x(o)e^{-\lambda t}$, де *x(0)* – початкове значення.

В термінах *k* це означає:

$$k(t)-k^* \approx e^{-\left[1-a_k(k^*)\right](n+g+\delta)t} \cdot \left[k(0)-k^*\right]. \qquad (14)$$

Провівши аналітичні міркування, можемо стверджувати, що *y* прямує до y^* з тими ж темпами, що й *k* прямує до k^*.

Тобто:

$$y(t)-y^* \approx e^{-\left[1-a_k(k^*)\right](n+g+\delta)t} \cdot \left[y(0)-y^*\right].$$

Щоб побачити, як швидко банківська система може прямувати до своєї траєкторії збалансованого росту, дослідимо детальніше рівняння (14). Розглянемо впливи *n, g* та δ на ріст банківської системи.

Вплив темпів росту працівників за відсутності технічного прогресу можна дослідити наступним чином.

Розглянемо модель Солоу в припущенні відсутності технічного прогресу, тобто темп росту знань *g* = 0. Тоді $A \equiv const$ і ми можемо проводити аналіз моделі в термінах грошової маси та виробництва банківської системи в розрахунку на одного працівника замість грошової маси та виробництва банківської системи на одиницю ефективної робочої сили. З огляду на те, що $A \equiv const$, це можна стверджувати з точністю до сталого множника. Тому в даному випадку через y та k позначимо:

$$y = \frac{Y(t)}{L(t)}, \; k = \frac{K(t)}{L(t)}. \qquad (15)$$

Модель має вигляд:

$$Y(t) = F(K(t), AL(t)), \qquad (16)$$

$$L^{\bullet}(t) = nL(t), \qquad (17)$$

$$K^{\bullet}(t) = sY(t) - \delta K(t). \qquad (18)$$

Виробництво банківських послуг на одного працівника описується рівністю

$$y = f(k), \qquad (19)$$

а динаміка грошової маси на одиницю робочої сили описується диференціальним рівнянням

$$k^{\bullet} = sf(k) - (n+\delta)k, \qquad (20)$$

де $f(k) = F(k,1)$.

З'ясуємо вплив зменшення темпу росту робочої сили на банківську систему за умови, що вона знаходиться на траєкторії збалансованого росту.

На ТЗР маємо $k(t) \equiv k^*$.

Згідно з (19), $y(t) = f(k^*) \equiv y^*$, де k^* – стійка точка рівноваги рівняння (20) (рис. 2).

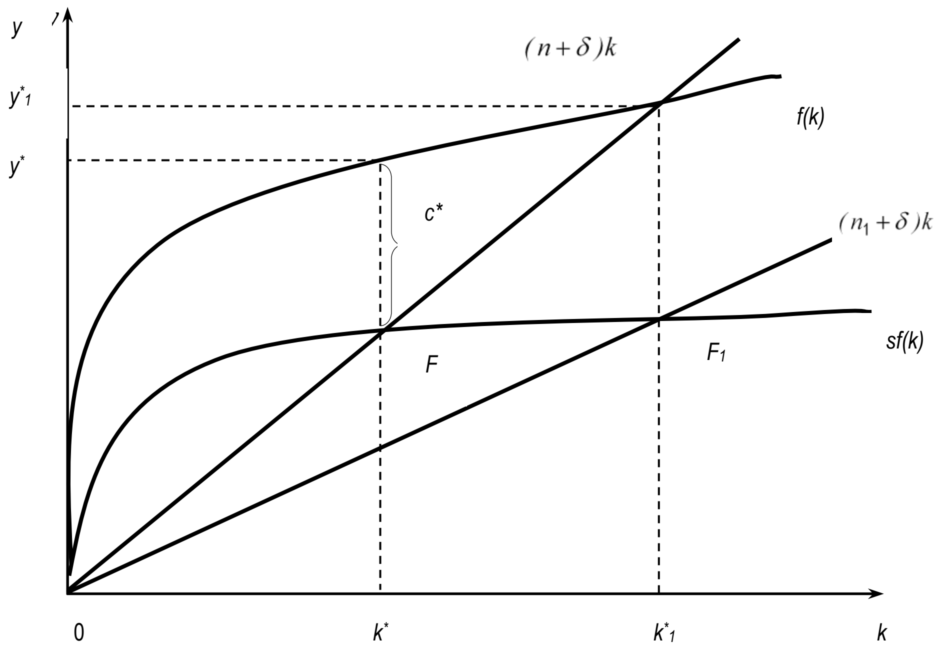

Рис. 2

Споживання можна подати формулою $c^* = f(k^*) - sf(k^*) = f(k^*) - (n+\delta)k^*$.

Нехай при $t < t_0$ темп зростання робочої сили дорівнював *n*, а в момент $t = t_0$ стрибком зменшився до n_1, де $n_1 < n$.

При зменшенні *n* пряма реституційних інвестицій $(n_1 + \delta)k$ стає більш пологою, як це показано на рис. 2, і перетинається з кривою фактичних інвестицій $sf(k)$ в точці F_1 з абсцисою k_1^* ($k_1^* > k^*$), яка відповідає новій ТЗР на вищому, ніж до моменту t_0, рівні. В момент t_0 банківська система, яка знаходилась на ТЗР в точці *F*, перестає знаходитись на ТЗР і, з огляду на стійкість точки k_1^*, починає еволюціонувати з точки *F* в точку F_1. Грошова маса на одиницю робочої сили збільшується і наближається до k_1^*, відповідно виробництво банківських послуг y на одного працівника $y = f(k)$ теж збільшується (бо f – зростаюча функція), наближаючись до нового вищого значення $y_1^* = f(k_1^*)$. Тому збільшується і споживання c на працівника, оскільки $c = (1-s)y(k)$ і c росте разом зі зростанням y. З економічної точки зору, це пояснюється наступним чином.

До моменту t_0 банківська система була на ТЗР, $\dot{k} = 0$, тобто $sf(k^*) = (n+\delta)k^*$, а в момент t_0 при зменшенні n до n_1 отримуємо, що $sf(k^*) > (n_1+\delta)k^*$, тобто фактичні інвестиції перевищують реституційні і тому k починає зростати з часом $(\dot{k} > 0)$, виходячи на новий вищий рівень $k_1^* > k^*$.

Зобразимо графічно вплив зменшення n в момент часу $t = t_0$ до величини n_1 на грошову масу k, виробництво y та споживання c на одного працівника.

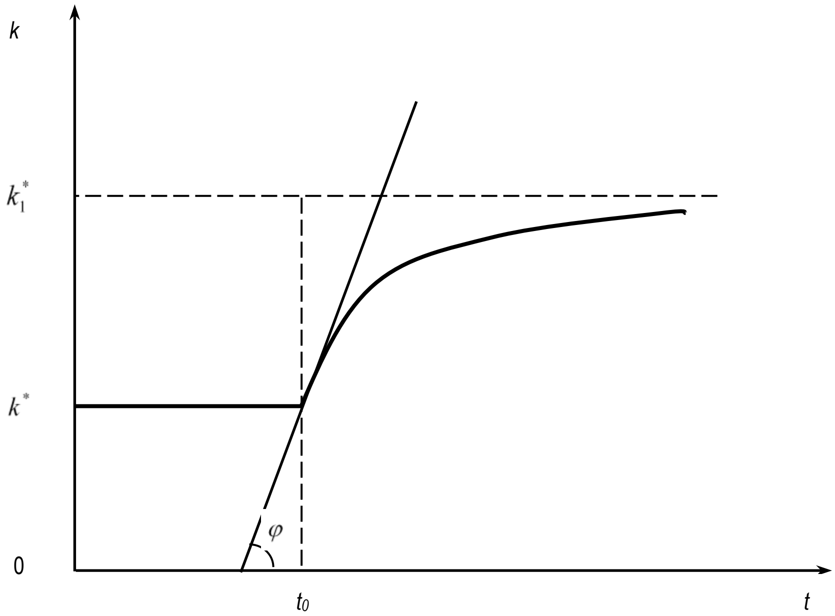

Рис. 3

При $t < t_0$ $k(t) = k^*$. В момент часу t_0 маємо:

$$k^{\bullet}(t) = sf(k(t)) - (n_1+\delta)k(t) \xrightarrow[t\to t_0+0]{} sf(k^*) -$$

$$-(n_1+\delta)k^* = sf(k^*) - (n+\delta)k^* + (n-n_1)k^* =$$

$= (n-n_1)k^*$, тобто $k^{\bullet}(t_0+0) = (n-n_1)k^* = tg\varphi$.

З моменту $t = t_0$ $k^{\bullet}(t)$ починає зростати зі швидкістю $(n-n_1)k^*$.

На рис. 4 зобразимо поведінку виробництва та споживання в часі за умови зменшення темпу росту робочої сили банківської системи.

Можна порахувати кут нахилу $(tg\psi)$ кривої в точці t_0+0.

Це є $y^{\bullet}(t_0+0)$, і оскільки $y = f(k)$, то

$y^{\bullet} = (f(k))^{\bullet} = f'(k)k^{\bullet} = f'(k)[sf(k) - (n_1+\delta)k]$ і $y^{\bullet}(t_0+0) = f'(k^*)\left[sf(k^*) - (n_1+\delta)k^*\right] = tg\psi$.

З'ясуємо наслідок зменшення темпу росту працівників банківської системи на динаміку виробництва банківських послуг $Y(t)$. Згідно з (15) $Y \equiv Ly$, тому темп росту Y дорівнює $g_Y = g_L + g_y = n + g_y$ або інакше: $\frac{Y^{\bullet}}{Y} = \frac{L^{\bullet}}{L} + \frac{y^{\bullet}}{y}$.

На ТЗР $y^{\bullet} = 0$ (бо $y \equiv y^* = f(k^*) = const$), тому $\frac{y^{\bullet}}{y} = 0$ (виробництво на одного працівника є сталим) і $\frac{Y^{\bullet}}{Y} = \frac{L^{\bullet}}{L} = n$. При зменшенні n до величини n_1 на новій ТЗР аналогічно $g_y = \frac{y^{\bullet}}{y} = 0$ і $\frac{Y^{\bullet}}{Y} = \frac{L^{\bullet}}{L} = n_1 < n$.

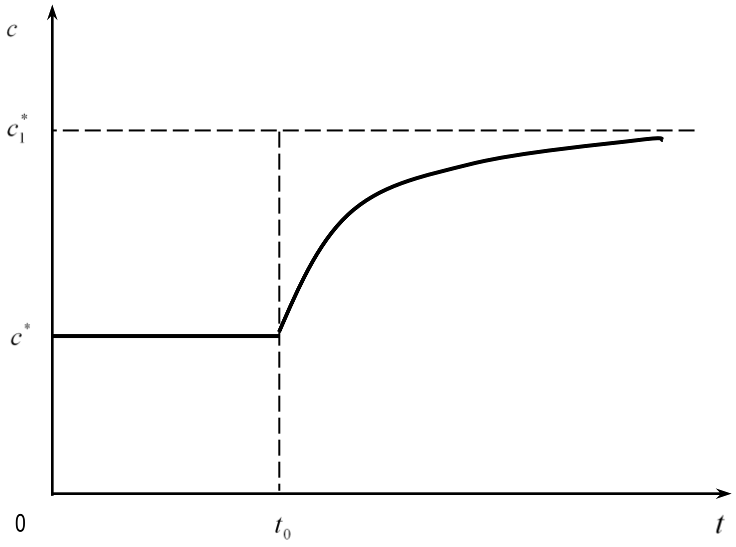

Рис. 4

Отже, зростаючи до моменту t_0 сталим темпом n, після цього моменту часу темпи росту виробництва неперервно падають, стабілізуючись з часом на новому, меншому рівні n_1.

Графічно зручно зобразити залежність $\ln Y$ від часу, а не *Y*, оскільки $g_y = (\ln Y)^{\bullet} = \frac{y^{\bullet}}{y}$ і темп росту *Y* в момент часу *t* характеризує нахил дотичної до графіка $\ln Y$ в точці t.

Якщо $g_y = const$, то графіком $\ln Y$ є пряма з кутовим коефіцієнтом g_y.

Зобразимо схематично залежність $\ln Y$ від t.

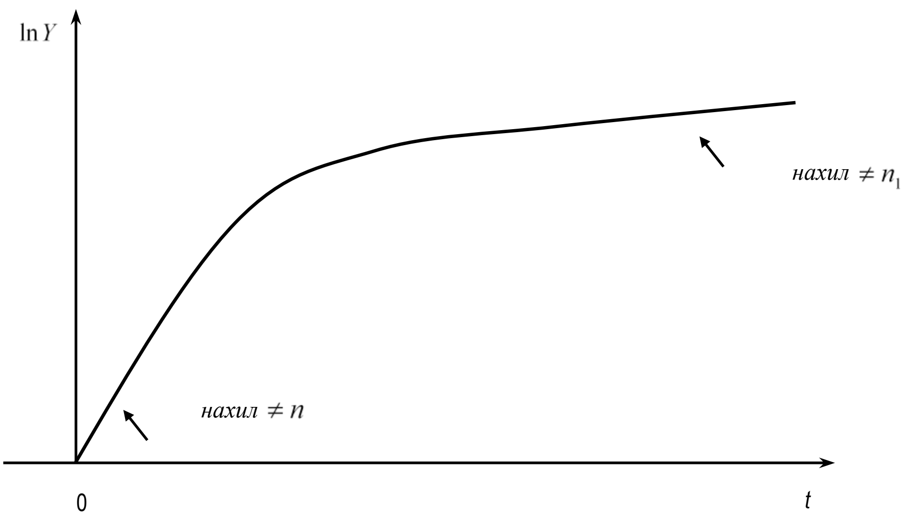

Рис. 5

Висновки. Отже, якщо банківська система перебуває на траєкторії збалансованого росту і відсутній технічний прогрес, то при стрибкоподібному зменшенні темпу росту робочої сили грошова маса, виробництво та споживання на одного працівника, які були на сталому рівні, неперервно зростають до нового вищого сталого рівня, а довгострокові темпи росту виробництва неперервно спадають від величини *n* до n_1, тобто в довгостроковому періоді дорівнюють темпу росту робочої сили.

Список літератури

1. Квасній М.М. Моделювання динаміки росту на основі кількісного дослідження впливу чинників моделі Солоу // Теорії мікро- макроекономіки: Збірник наукових праць. Випуск 21 / МОНУ. Академія муніципального управління. Редкол.: Відп. ред. проф. Мальвин Ю.М., Ніколенко Ю.В. – Київ, 2005. – С. 88-93.
2. Колемаев В.А. Математические модели макроэкономики. – М.: ГАУ им. С. Орджоникидзе, 1994.
3. Solow R.M. A Contribution to the Theory of Economic Growth, "Quarterly Journal of Economics", t. 70 (February). Przedruk w: Sriglitz i Uzawa, 1969. – P. 65-94.
4. Solow R.M. Investment and technical Progress, W: Kenneth I. Arrow, Samuel Korbin, Patrick Suppers (red.) Mathematical Methods in the Social Sciences. Stanford University Press. – 1959. – P. 89-104.
5. Solow R.M. Technical Change and the Aggregate production Function, "Review of Economics and statistics", t. 39, 1957. – P. 312-320.

Summary

The behavior of economy in the long-term period can be designed using Solow model. Economic dynamics of banking system is considered in the given article on the basis of quantitative investigated of the influence of factors of Solow model.

Отримано 23.03.2006

Квасній, М.М. Моделювання динаміки банківської системи на основі моделі Солоу [Текст] / М.М. Квасній // Вісник Української академії банківської справи. - 2006. - N 1. - С. 71 – 78.