

УДК 519. 71:336.767

КП

№ госрегистрации 0111U006334

Инв. №

Министерство образования и науки Украины

Сумский государственный университет

(СумГУ)

40007, г. Сумы, ул. Римского-Корсакова, 2; тел. 33-40-49,

info@nis.sumdu.edu.ua

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе

д. ф.-м. н., профессор

\_\_\_\_\_ А.Н. Черноус

ОТЧЕТ

ОБ НАУЧНО – ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ СЛАБО  
ФОРМАЛИЗИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(заключительный)

Начальник НИЧ

к.ф.-м.н., с.н.с.

Д.И. Курбатов

Руководитель НИР

к.ф.-м.н., доцент кафедры МСС

А.М. Назаренко

2015

Рукопись закончена 20 декабря 2015 г.

Результаты этой работы рассмотрены научным советом СумГУ,

протокол от 2015.12.24 №5

**СПИСОК АВТОРОВ**

Доцент каф. МСС		Назаренко А.М. (Введение, раздел 1-5, выводы)
	2015.12.20	
Ассистент каф. МСС		Карпуша М.В. (Раздел 2)
	2015.12.20	
Ст. преподаватель каф. МСС		Маринич Т.А. (Раздел 1, 2)
	2015.12.20	
Студент, гр. ПМ-31/2		Потапенко Е.А. (Раздел 1, 5)
	2015.12.20	
Доцент каф. МСС		Фильченко Д.В. (Раздел 1)
	2015.12.20	

## СОДЕРЖАНИЕ

ВСТУП.....	6
1 ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ СЛАБО ФОРМАЛИЗОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ В КЛАССЕ СТАЦИОНАРНЫХ LQ МОДЕЛЕЙ.....	8
1.1 Постановка задачи.....	10
1.2 Метод решения.....	13
1.3 Задача идентификации модели оптимального управления.....	22
1.4 Численный эксперимент.....	24
1.5 Динамическая модель Леонтьева.....	25
1.6 Модель имитации и прогнозирования макроэкономической динамики.....	27
1.7 Модель оптимизации макроэкономической динамики.....	29
2 МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ И КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЯМИ КАЧЕСТВА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ.....	32
2.1 Постановка задачи.....	32
2.2 Методы скаляризации.....	33
2.3 Методы идентификации.....	34
2.4 Практические результаты.....	45
3 МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ВОЛН СДВИГА НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ.....	50
3.1 Основные соотношения динамической теории упругости в случае антиплоской деформации. Постановка краевых задач.....	50
3.2 Сведение краевых задач к интегральным уравнениям.....	56
3.3 Дискретизация систем интегральных уравнений.....	62
3.4 Численные результаты в случае системы эллиптических неоднородностей....	64

4 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ СДВИГА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ РЕШЕТКАМИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ .....	74
4.1 Постановка краевых задач для периодических решеток .....	74
4.2 Периодическая функция источника уравнения Гельмгольца .....	76
4.3 Интегральные уравнения в случае периодических решеток в полупространстве .....	80
4.4 Системы линейных алгебраических уравнений .....	85
4.5 Численная реализация построенных алгоритмов .....	88
5 МЕТОД СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ .....	95
5.1 Основные соотношения динамической теории упругости в случае плоской деформации.....	95
5.2 Гармонические функции источника в условиях плоской деформации.....	98
5.3 Постановка краевых задач.....	101
5.4 Интегральные представления компонент дифрагированного волнового поля	105
5.5 Граничные условия по перемещениям и соответствующие интегральные уравнения с логарифмическими особенностями .....	107
5.6 Сведение краевых задач к сингулярным интегральным уравнениям .....	110
5.7 Численная реализация построенных алгоритмов .....	114
5.8 Численные результаты в случае системы эллиптических неоднородностей ..	118
5.9 Численные результаты в случае системы ромбических неоднородностей .....	121
ВЫВОДЫ .....	125
ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК.....	128

## РЕФЕРАТ

Отчет об НИР: 130 с., 51 рис., 223 формул, 7 табл., 15 источников.

Объект исследования – динамические системы механического и экономического направления.

Цель работы – компьютерное моделирование динамических систем для разработки программного комплекса, позволяющего рассчитывать основные характеристики функционирования механических и экономических объектов.

Методы исследования – метод дискретных особенностей исследования дифракции упругих волн, эконометрические методы идентификации экономических систем.

Исследованы задачи дифракции стационарных упругих волн на конечных и периодических решетках. Построены модели управления слабо формализованными экономическими системами.

Развивается новый концептуальный подход к моделированию дифракции упругих волн на конечных и периодических решетках, основанный на методе сингулярных интегральных уравнений, который заключается в построении интегральных представлений амплитуд перемещений и сведению возникающих краевых задач к системам СИУ. Предложены методы параметрической идентификации макроэкономических и финансово-экономических систем.

Обосновывается выбор дополнительных условий, необходимых для однозначной разрешимости сингулярных интегральных уравнений первого рода в задачах дифракции упругих волн на различного типа включениях.

Численная реализация построенных алгоритмов проводится методами дискретных особенностей и механических квадратур в задачах дифракции и методами эконометрического моделирования в задачах идентификации, прогнозирования и оптимизации слабо формализованных систем.

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ЭКОНОМЕТРИКА, АДЕКВАТНОСТЬ МОДЕЛИ, ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ.

## ВСТУП

Задачи многокритериальной оптимизации возникают в разных сферах науки, техники и экономики [1, 2]. Это обусловлено тем, что на практике, как правило, трудно установить очевидный критерий качества. Иногда более очевидна постановка нескольких противоречивых критериев. В этом случае для нахождения оптимального решения нужно находить компромисс между критериями, который зависит от конкретных условий.

В практических приложениях распространены многокритериальные задачи, описываемые линейными и квадратичными критериями качества. Такие критерии являются наиболее изученными и не требуют сложных алгоритмов для решения. Особенно это актуально при оптимизации сложных систем, для адекватного описания которых требуется обработка большого количества информации за незначительный промежуток времени.

В большинстве случаев идентификация параметров функций, описывающих некоторый критерий качества оптимизационной задачи, возникает из известных законов функционирования исследуемой системы. Но для некоторых систем идентификация параметров должна зависеть не только от анализа статистической информации эволюции системы, но и учитывать фактор неопределенности в оцениваемой модели.

В данной работе рассматривается моделирование и идентификация слабо формализованных динамических систем.

Особенностью задач такого типа является то, что при использовании их на практике должны быть учтены погрешности во входных данных, которые описывают динамику развития системы на историческом периоде и используются при идентификации параметров оптимизационной задачи. Фактор неопределенности при моделировании такой системы обусловлен неизвестным законом ее эволюции, и оптимизационные модели, используемые для анализа

системы, должны устанавливать рациональный компромисс между адекватностью и сложностью модели.

Неполнота построенной модели может существенно повлиять на результат при использовании детерминированных методов. Поэтому актуальным является развитие методов, которые как нельзя лучше бы учитывали фактор неопределенности. При решении практических задач целью исследования может быть уменьшение влияния неопределенных факторов [3, 4].

# 1 ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ СЛАБО ФОРМАЛИЗОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ В КЛАССЕ СТАЦИОНАРНЫХ LQ МОДЕЛЕЙ

Пусть состояние системы в любой момент непрерывного времени  $\tau \in [\tau_0, \tau_f]$  характеризуется базовым вектором столбцом  $x(\tau) = [x_{11}(\tau), x_{12}(\tau), \dots, x_{1m}(\tau)]^T$ , а вход системы — вектор-столбцом управления  $v(\tau) = [v_{11}(\tau), v_{12}(\tau), \dots, v_{1m}(\tau)]^T$  из  $m$ -мерного евклидова пространства  $E^m$ . Фазовая траектория  $\{x(\tau)\}$  и траектория управления  $\{v(\tau)\}$  считаются непрерывными вектор-функциями времени и в общем случае определяются задачей Коши:

$$\dot{x}(\tau) = f(x(\tau), v(\tau) | \theta_1), \quad x(\tau_*) = x_*, \quad (1.1)$$

$$\dot{v}(\tau) = g(x(\tau), v(\tau) | \theta_2), \quad v(\tau_*) = v_*, \quad (1.2)$$

где  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$  — непрерывно дифференцируемые вектор-функции,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — векторы неизвестных коэффициентов, подлежащие идентификации.

Обозначим  $\{x_\tau\}, \{v_\tau\}$  множество данных наблюдений за динамикой траекторий  $\{x(\tau)\}, \{v(\tau)\}$  в  $N$  дискретных точках промежутка времени  $[\tau_0, \tau_1]$  ( $\tau_1 < \tau_f$ ), который назовем базовым (периодом идентификации), промежуток времени  $[\tau_1, \tau_f]$  — периодом прогнозирования или оптимизации. При этом предположим, что  $\tau_f - \tau_1 \ll N$ . Тогда если доказать свойство стационарности модели, то вектор  $\theta$  параметров, на которые модель будет настроена на периоде идентификации в силу инерционности динамической системы, можно переносить на период прогнозирования или оптимизации [5]. Следуя подходу, устоявшемуся в теории идентификации, стационарность модели можно характеризовать следующим мультикритерием: высокое качество аппроксимации и прогнозирования и робастность. В зависимости от целей моделирования обратные задачи динамики делятся на задачи идентификации моделей имитации и прогнозирования и задачи идентификации моделей оптимального управления.



В зависимости от входной информации обратные задачи делятся на задачи чистой параметрической идентификации ( $\{x_\tau\}, \{v_\tau\}$  известны), задачи совместной идентификации управлений и параметров ( $\{v_\tau\}$  неизвестно), а также задачи совместной идентификации состояния и параметров ( $\{x_\tau\}$  неизвестно).

Задача чистой параметрической идентификации модели в целях имитации и прогнозирования, как и любая обратная задача, вообще говоря, является некорректно поставленной (чаще всего из-за вопроса устойчивости полученных оценок). Поэтому в данной работе предлагается ввести в постановку задачи мультикритерий, призванный регуляризовать исходную задачу, сузив область ее решений, а также построить такую схему оценивания, которая позволила бы управлять процессом «настройки» модели.

Для задачи совместной идентификации управления (состояния) и параметров в целях имитации и прогнозирования некорректность задачи лишь усиливается, а значит, требуются дополнительные стратегии ее регуляризации. Одна из них — введение в рассмотрение непрерывной скалярной функции  $F(x(\tau), v(\tau))$ , которая задает поверхность, вдоль которой движется динамическая система. Конструировать  $F(\cdot)$  необходимо так, чтобы она аккумулировала всю предысторию движения динамической системы, была глобальной характеристикой движения и существовала статистическая информация  $F_\tau$  о ее динамике в  $N$  дискретных точках промежутка времени  $[\tau_0, \tau_1]$ .

Пусть задача Коши для функции  $F(\tau)$  имеет вид

$$\dot{F}(\tau) = G(x(\tau), v(\tau) | \theta_3), F(\tau_*) = F_*, \quad (1.3)$$

где  $G(\cdot)$  — непрерывно-дифференцируемая функция, называемая потенциалом системы,  $\theta_3$  — вектор неизвестных коэффициентов, подлежащий идентификации. В данной работе предлагается подход к спецификации потенциала  $G(\cdot)$ , призванный ликвидировать некорректность исходной задачи и замкнуть алгоритм оценивания модели (1.1)–(1.3).

Функция  $F(\tau)$ , называемая функцией качества системы, может использоваться для постановки задач оптимизации, в которых некоторый функционал от  $F(\tau)$

целевой. Так возникают задачи совместной идентификации управлений и параметров модели (1.1)–(1.3) в целях оптимизации. В отличие от ряда работ, посвященных вопросу идентификации оптимизационных задач, в данной работе предлагается следующая трактовка роли управления  $v(\tau)$ . На базовом периоде  $[\tau_0, \tau_1]$  управление «настраивает» модель на заданный набор свойств. При этом успешный подбор такого управления служит веским аргументом в пользу стационарности модели. На периоде же оптимизации  $(\tau_1, \tau_f]$  управление должно обеспечить оптимальный режим функционирования системы.

### 1.1 Постановка задачи

Как показывают исследования, многие объекты управления достаточно точно описываются линейными динамическими моделями. Путем рационального выбора квадратичных функций качества часто удается построить эффективные имитационные, прогнозные или оптимизационные модели. Поэтому в данной работе исследование проводится в рамках стационарных линейно-квадратичных (LQ) моделей. При численной реализации моделей, цель которых — прогнозирование или оптимизация, граничные значения дифференциальных уравнений (1.1)–(1.3) удобно удовлетворять в момент времени, следующий за периодом идентификации. Поэтому в качестве  $\tau_*$  выберем момент времени  $\tau_1 + 1$ . Тогда, сделав замену  $t = \tau - \tau_*$ , идентификацию модели будем проводить на промежутке времени  $[-N, -1]$ , а прогнозирование и оптимизацию — на  $[0, t_f]$ ,  $t_f = \tau_f - \tau_*$ .

Имитационные, прогнозные и робастные свойства модели будем характеризовать следующими показателями (здесь  $q(t) = [x(t), v(t), F(t)]^T$ ,  $q_t = [x_t, v_t, F_t]^T$ ; наполняемость указанных векторов в каждой задаче может быть разной):

а) высокая точность выполнения соотношения  $q(t) \approx q_t$  в дискретных точках промежутка времени  $[-N, -1]$ , например, в смысле евклидовой  $L^2$ -нормы;

б) прогнозы координат вектора  $q(t)$  имеют как можно б?льшую точность в дискретных точках промежутка времени  $[0, t_f]$ ;

в) оценки  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  параметров модели минимально чувствительны к незначительным колебаниям входной информации  $q_t$ .

При практическом моделировании могут возникать следующие задачи.

Задача 1. Пусть на промежутке времени  $[-N, -1]$  известна статистическая информация  $\{x_t\}, \{v_t\}$  о динамике векторов переменных  $x(t), v(t)$  линейной стационарной задачи Коши:

$$\begin{cases} \bullet \\ x(t) = Ax(t) + Bv(t), x(0) = x_*, \\ \bullet \\ v(t) = Cx(t) + Dv(t), v(0) = v_*, \end{cases} \quad (1.4)$$

где  $A, B, C, D$  — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами, которые вместе с граничными значениями,  $x_*, v_*$  неизвестны. Необходимо найти такие параметры модели (1.4), которые обеспечивают выполнение мультикритерия а)–в). Сформулированная задача — задача чистой параметрической идентификации для имитации и прогнозирования.

Задача 2. Пусть на промежутке времени  $[-N, -1]$  известна статистическая информация  $\{x_t\}, \{F_t\}$  о динамике векторов переменных  $x(t), F(t)$  стационарной LQ-задачи Коши:

$$\begin{cases} \bullet \\ x(t) = Ax(t) + Bv(t), x(0) = x_*, \\ \bullet \\ v(t) = Dv(t), v(0) = v_*, \\ \bullet \\ F(t) = G(x(t) + v(t) | \theta_3), F(0) = F, \end{cases} \quad (1.5)$$

где  $G(\cdot)$  — функция, подлежащая спецификации и состоящая из линейных, квадратичных и билинейных форм своих аргументов;  $A, B, D$  — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами, которые вместе с граничными

значениями  $x_*$ ,  $F_*$  и вектором  $\theta_3$  коэффициентов функции потенциала  $G$  неизвестны.

Необходимо специфицировать функцию  $G(\cdot)$ , идентифицировать неизвестные параметры модели (1.5) и найти такое непрерывно дифференцируемое управление  $v(t)$ , чтобы при переведении системы из некоторого начального состояния в момент времени  $t = -N$  в конечную желаемую точку  $(x_*, F_*)$  в момент времени  $t = 0$ , траектория фазового вектора  $x(t)$  и функции качества  $F(t)$  удовлетворяли ряду свойств.

Во-первых, как и в задаче (1.1), будем требовать выполнения мультикритерия а)–в), во-вторых, траектория управления  $v(t)$  должна принадлежать некоторому допустимому множеству  $V$ , неизбежно возникающему в ходе решения. Данная постановка соответствует задаче совместной идентификации управления и параметров модели для имитации и прогнозирования.

Задача 3. Пусть на промежутке времени  $[-N, -1]$  известна статистическая информация  $\{x_t\}$ ,  $\{F_t\}$  о динамике векторов переменных  $x(t)$ ,  $F(t)$  LQ-задачи оптимального управления в форме Лагранжа:

$$\begin{cases} J = \int_0^t G(x(t) + v(t) | \theta_3) dt \rightarrow \max_{\{v(t)\}}, \\ \bullet \\ x(t) = Ax(t) + Bv(t), \quad x(0) = x_*. \end{cases} \quad (1.6)$$

Здесь, как и ранее,  $G(\cdot)$  — функция, подлежащая спецификации и состоящая из линейных, квадратичных и билинейных форм своих аргументов;  $A$ ,  $B$  — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами, которые вместе с граничным значениям  $x_*$  и вектором  $\theta_3$  коэффициентов подынтегральной функции  $G$  неизвестны.

Необходимо найти такое управления и такую фазовую траекторию, которые обеспечивали бы максимальное значение целевого функционала. Однако перед этим возникает проблема спецификации функции  $G(\cdot)$ , идентификации неизвестных параметров модели (1.6) на базовом периоде  $[-N, -1]$ . Здесь отличие от задачи 2

заключается в постановке дополнительных ограничений на множество  $V$  допустимых управлений. Во-первых, возникает необходимость «сшивания» базисного  $v(t)$  и оптимального управлений в точке  $t = 0$ ; во-вторых, требуется выполнение достаточных условий экстремума целевого функционала  $J$ . Сформулированная задача — задача идентификации модели оптимального управления. Что касается размерности  $m$  фазового пространства, то отображение свойств реальных динамических систем возможно в случае  $m \geq 3$ . Развиваемая в данной работе методология также допускает размерность  $m \geq 3$ . Практические исследования показывают, что адекватные результаты можно получить в случае трехмерного фазового пространства, поэтому далее предполагаем  $m = 3$ .

## 1.2 Метод решения

Основные методы идентификации дифференциальных уравнений — методы дискретизации (разностные, интегральные) и методы колокации. В данной работе предлагается объединить эти два метода в одну интегрально-колокационную схему, избежав таким образом проблемы точности методов дискретизации и нелинейного оценивания, которая неизбежно возникает в методах колокации.

Базовым методом статистического оценивания выступает метод наименьших квадратов (МНК) для линейных регрессий, поэтому описанный выше мультикритерий, имеющийся в постановке задач (1.1)–(1.3), можно формализовать так.

Показателем качества аппроксимации исходных данных  $\{q_t\}$  будем считать коэффициенты детерминации  $R_i^2$  соответствующих уравнений регрессии. Критерий максимизации имитационных свойств имеет вид ( $i = \overline{1, n}$ , где  $n$ –размерность вектора  $q$ ):

$$\min_i R_i^2 \rightarrow \max.$$

Прогнозные свойства будем характеризовать с помощью относительных длин  $\zeta_{it}$  доверительных интервалов  $\Delta_{it}$  точечных прогнозов  $q_{it}$  на промежутке . Критерий максимизации прогнозных свойств представим в виде

$$\max_i \zeta_{it} \rightarrow \min, \zeta_{it} = \left| \frac{\Delta_{it}}{q_{it}} \right|, t \in [0, t_f]. \quad (1.8)$$

Показателем чувствительности полученных оценок к незначительным колебаниям входной информации  $\{q_t\}$  предлагается считать индексы обусловленности  $CI_i$  информационных матриц соответствующих уравнений регрессии. Тогда критерий максимизации робастных свойств можно записать

$$\max_i CI_i \rightarrow \min. \quad (1.9)$$

К мультикритерию (1.7)–(1.9) в процессе решения задач идентификации могут добавляться и другие локальные критерии, необходимые для регуляризации обратной задачи динамики.

Начальные оценки неизвестных матриц модели (1.4) можно получить из интегральной схемы. Для этого перейдем от системы (1.4) к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} x(t) = A \int_0^t x(\tau) d\tau + B \int_0^t v(\tau) d\tau + x_*, \\ v(t) = C \int_0^t x(\tau) d\tau + D \int_0^t v(\tau) d\tau + v_*. \end{cases} \quad (1.10)$$

Начальное приближение решения системы (1.10) можно записать в виде

$$\begin{cases} x^{(0)}(t) = A \int_0^t x^*(\tau) d\tau + B \int_0^t v^*(\tau) d\tau + x_*, \\ v^{(0)}(t) = C \int_0^t x^*(\tau) d\tau + D \int_0^t v^*(\tau) d\tau + v_*. \end{cases} \quad (1.11)$$

Здесь  $x^*(t), v^*(t)$  — некоторые функции, проходящие через базисные точки  $\{x_t, x_*\}, \{v_t, v_*\}, t = \overline{-N, -1}$ . Если информация в нецелочисленных точках промежутка  $[-N, 0]$  отсутствует, то логично предположить, что статистическая информация между базисными точками распределена равномерно. Тогда в качестве функций

$x^*(t), v^*(t)$  могут быть выбраны ломаные, соединяющие базисные точки, и интегралы в правых частях (1.10) будут вычисляться по формуле трапеции. Проводя численное интегрирование от 0 до  $-N$ , получим дискретный аналог модели (1.11), который записываем в виде уравнений регрессии:

$$\begin{cases} x_{-i} = a_* + A \sum_{j=1}^i \delta_{ij} x_{-j} + B \sum_{j=1}^i \delta_{ij} v_{-j} + \varepsilon_{-i}, \\ v_{-i} = \beta_* + C \sum_{j=1}^i \delta_{ij} x_{-j} + D \sum_{j=1}^i \delta_{ij} v_{-j} + v_{-i}, \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} a_* = (I - \frac{1}{2}A)x_* - \frac{1}{2}Cx_*, \\ \beta_* = (I - \frac{1}{2}D)v_* - \frac{1}{2}Cx_*, \end{cases} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} -1, & i \neq j, \\ -\frac{1}{2}, & i = j. \end{cases}$$

Здесь  $\varepsilon_{-i}, v_{-i}$  — случайные возмущения на  $i$ -м уровне ряда динамики  $\overline{i = (1, N)}$ ,  $I$  — единичная матрица.

Полученные из (1.12) оценки неизвестных матриц модели (1.4) называются приближенными и могут быть уточнены с помощью метода колокаций.

В задаче 1 фазовый вектор  $x(t)$  и управление  $v(t)$  с математической точки зрения — равноправные величины, поэтому модель (1.4) можно записать в блочном виде

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = Qq(t), & Q = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, & q_* = \begin{bmatrix} x_* \\ v_* \end{bmatrix}. \\ q(0) = q_*, \end{cases} \quad (1.13)$$

Поскольку предполагается  $m = 3$ , то нас интересует спектр матрицы  $Q$  вида

$$\Lambda(Q) = \{0, \lambda_1, \lambda_2 \pm i\omega, \lambda_3 \pm i\mu\}, \quad (1.14)$$

где наличие нулевого собственного числа необходимо для выполнения условий Гаусса–Маркова регрессионного анализа. В случае спектра (1.14) общее решение задачи Коши (1.13) можно записать в виде декомпозиции на трендовую  $q_{tr}(t)$  и колебательную  $q_{osc}(t)$  составляющие:

$$q(t) = q_{tr}(t) + q_{osc}(t), \quad (1.15)$$

$$q_{tr}(t) = \begin{cases} n_1 + n_2 e^{\lambda_1 t}, & \lambda_1 \neq 0, \\ n_1 + n_2 t, & \lambda_1 = 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

$$q_{osc}(t) = n_3 e^{\lambda_2 t} \cos \omega t + n_4 e^{\lambda_2 t} \sin \omega t + n_5 e^{\lambda_3 t} \cos \mu t + n_6 e^{\lambda_3 t} \sin \mu t. \quad (1.17)$$

В следующей теореме, ключевой для колокационной схемы, рассмотрен вопрос соответствия между декомпозицией (1.15)–(1.17) и задачей Коши (1.13).

Теорема 1. Пусть задана задача Коши (1.13). Функция (1.15)–(1.17) — решение этой задачи тогда и только тогда, когда

$$Q = NJN^{-1} \quad (\det N \neq 0), \quad q_* = \sum_i n_i, \quad N = [n_1, n_2, \dots, n_6], \quad J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3), \quad (1.18)$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \delta & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & -\omega \\ \omega & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} \lambda_3 & -\mu \\ \mu & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \lambda_1 \neq 0, \\ 1, & \lambda_1 = 0, \end{cases} \quad i = \begin{cases} 1, 2, 3, 5, & \lambda_1 \neq 0, \\ 1, 3, 5, & \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Доказательство.

Вначале докажем необходимое условие. Декомпозицию (1.15)–(1.17) можно записать в матричном виде

$$q(t) = Nf(t), \quad f(t) = [f_{tr}(t), e^{\lambda_1 t} \cos \omega t, e^{\lambda_2 t} \sin \omega t, e^{\lambda_3 t} \cos \mu t, e^{\lambda_3 t} \sin \mu t]^T, \quad (1.19)$$

где  $f_{tr}(t) = [1, e^{\lambda_1 t}]$  в случае экспоненциального тренда ( $\lambda_1 \neq 0$ ) и  $f_{tr}(t) = [1, t]$  в случае линейного тренда ( $\lambda_1 = 0$ ). Тогда производная вектор-функции (1.19) равняется

$$\dot{q}(t) = N\dot{f}(t). \quad (1.20)$$

Учитывая (1.13), (1.19), находим  $\dot{q}(t) = QNf(t)$ . Сравнивая последнее выражение с (1.20), получаем, что  $Q = NJN^{-1}$  ( $\det N \neq 0$ ). Граничное значение,  $q_*$  фигурирующее в условии (1.18), очевидно, следует из декомпозиции (1.15)–(1.17) при  $t = 0$ .

Чтобы доказать достаточное условие, будем исходить из того, что задача Коши (1.13) имеет единственное решение. В противном случае функция (1.15)–(1.17) является решением задачи Коши (1.13).

Теорема доказана.



При заданных значениях управляющих параметров,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\omega$ ,  $\mu$  декомпозиция (1.15)–(1.17) линейна относительно своих коэффициентов, а значит, применим аппарат линейного регрессионного анализа. Численная реализация интегрально-колокационной схемы состоит в построении такого регулятора, который, действуя по принципу обратной связи, на основании текущих выходов  $q(t)$  вырабатывает такие входы (значения управляющих параметров), которые обеспечили бы выполнение мультикритерия (1.7)–(1.9).

Для решения задачи 2 удобно искать неизвестное управление  $v(t)$  в виде суммы переменной  $u(t)$  и постоянной  $v$  компонент. Поскольку  $v$  фигурирует в граничном условии задачи Коши (1.5), то для переменной компоненты  $u(t)$  вытекает следующая интерпретация: если достигнута поставленная цель, т.е. система переведена в конечную желаемую точку  $(x_*, F_*)$ , то переменная компонента управления  $v(t)$  обращается в ноль («затухает»).

Положим  $z(t) = Bv(t)$ . Функция  $z(t)$  называется входным сигналом системы (1.4) и согласно (1.5) вместе с фазовым вектором  $x(t)$  удовлетворяет задаче Коши ( $\det(B) \neq 0$ ):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + z(t), & x(0) = x_*, \\ \dot{z}(t) = Rz(t), & z(0) = z_*, \end{cases} \quad R = BDB^{-1}, \quad z_* = Bv_*. \quad (1.21)$$

Относительно спектров матриц  $A$ ,  $D$  системы (1.5) для случая фазового пространства размерности  $m = 3$  предполагаем, что

$$\Lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2 \pm i\omega\}, \quad \Lambda(D) = \{0, v \pm i\mu\}. \quad (1.22)$$

Такое допущение вполне логично, так как для большинства реальных динамических систем входной сигнал лишь корректирует динамику, задаваемую внутренними силами системы, и является гармоникой с постоянной ( $v = 0$ ) или переменной ( $v \neq 0$ ) амплитудами:

$$z(t) = \begin{cases} c_1 + c_2 \cos \mu t, & v = 0, \\ c_1 + c_2 e^{vt} \cos \mu t + c_3 e^{vt} \sin \mu t, & v \neq 0. \end{cases}$$

Здесь  $c_1, c_2, c_3$  — векторы неизвестных коэффициентов.

Воспользуемся интегральной схемой для нахождения начальных оценок спектров (1.22). Проинтегрировав первое уравнение системы (1.5) с учетом представления (1.23) и перейдя к соответствующему дискретному аналогу модели, получим следующее уравнение регрессии ( $\varepsilon_{-i}$  – случайное возмущение на  $i$ -м уровне ряда динамики,  $i = \overline{1, N}$ ):

$$x_{-i} = c_0 + A \sum_{j=1}^i \delta_{ij} x_{-j} - c_1 i + h(i) + \varepsilon_{-i}, \quad (1.24)$$

$$c_0 = (I - \frac{1}{2}A)x_*. \quad \delta_{ij} = \begin{cases} -1, & i \neq j, \\ -\frac{1}{2}, & i = j, \end{cases}$$

$$h(i) = \begin{cases} -c_2 \frac{1}{\mu} \sin \mu i + c_3 \frac{1}{\mu} (1 - \cos \mu i), & v = 0, \\ c_2 \frac{1}{v^2 + \mu^2} \{e^{-vi} (v \cos \mu i - \mu \sin \mu i) - v\} + & v \neq 0, \\ c_3 \frac{1}{v^2 + \mu^2} \{e^{-vi} (-v \sin \mu i - \mu \cos \mu i) + \mu\}, \end{cases}$$

Уточнение спектров (1.22) и идентификацию модели (1.21) будем проводить по колокационной схеме. Из (1.21), (1.22) следует декомпозиция решения фазового вектора  $x(t)$  ( $M, N$  — квадратные матрицы размерности  $m$ ):

$$x(t) = Mf(t) + Ng(t), \quad (1.25)$$

$$g(t) = [1, e^{vt} \cos \mu t, e^{vt} \sin \mu t]^T, \quad f(t) = [f_{tr}(t), e^{\lambda_1 t} \cos \omega t, e^{\lambda_1 t} \sin \omega t]^T,$$

$$f_{tr}(t) = \begin{cases} e^{\lambda_1 t}, & \lambda_1 \neq 0, \\ t, & \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть задана задача Коши (1.21). Функция (1.25) — решение этой задачи тогда и только тогда, когда

$$A = MJ_\omega M^{-1} (\det M \neq 0), \quad R = CJ_\mu C^{-1} (\det C \neq 0), \quad C = NJ_\mu - AN + MJ_0, \quad (1.26)$$

$$x_* = Mf(0) + Ng(0), \quad z_* = Cg(0),$$

$$J_\omega = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -\omega \\ 0 & \omega & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad J_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & -\mu \\ 0 & \mu & v \end{bmatrix}, \quad J_0 = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{cases} 0, & \lambda_1 \neq 0, \\ 1, & \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Доказательство.

Вначале докажем необходимое условие. Производная функции (1.25) равна  $\dot{x}(t) = MJ_\omega f(t) + MJ_0 g(t) + NJ_\mu g(t)$ . Иначе если (1.25) является решением задачи (1.21), то  $\dot{x}(t) = AMJ_\omega f(t) + ANJ_\mu g(t) + z(t)$ . Сравнивая получившиеся выражения при вектор-функциях  $f(t)$  и  $g(t)$ , получаем, что  $A = MJ_\omega M^{-1}$  ( $\det M \neq 0$ ), а входной сигнал должен удовлетворять равенству

$$z(t) = Cg(t), \quad C = NJ_\mu - AN + MJ_0. \quad (1.27)$$

Производная от (1.27) равна  $\dot{z}(t) = CJ_\mu g(t)$ . В противном случае, если функция (1.27) — решение задачи (1.21), то  $\dot{z}(t) = RCg(t)$ . Сравнение соответствующих выражений при вектор-функции  $g(t)$  дает  $R = CJ_\mu C^{-1}$  ( $\det C \neq 0$ ). Граничные значения  $x_*, z_*$ , фигурирующие в условии (1.26), очевидно, следуют из декомпозиции (1.25), (1.27) при  $t = 0$ .

Доказательство достаточного условия аналогично приведенному в теореме 1.

Теорема доказана.

Несмотря на то, что задача Коши (1.21) полностью идентифицирована, управление  $v(t)$  по-прежнему остается неопределенным. Воспользуемся последним уравнением системы (1.5). В постановке задачи 2 отмечалась тесная связь функции качества  $F(t)$  с задачами оптимизации. Поэтому в данной работе для спецификации функции  $G(\cdot)$  предлагается подход, основанный на результате следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + v_*), \\ \dot{u}(t) = D(u(t) + v_*). \end{cases} \quad (1.28)$$

Если  $B = B^T$ , то для системы (1.28) существует первый интеграл  $\Phi(x(t), u(t))$ , который при условии  $D = -A^T$  также является ее гамильтонианом  $H(x(t), u(t))$ .

Доказательство.

Умножим первое уравнение системы (1.28) на  $\dot{u}(t)$  второе — на  $\dot{x}(t)$  и найдем разность получившихся выражений:

$$\dot{x}^T(t)(Ax(t) + B(u(t) + v_*)) - \dot{x}^T(t)(D(u(t) + v_*)) = 0,$$

или после тождественных преобразований —

$$\begin{aligned} & \dot{u}^T(t)Ax(t) + u^T(t)A\dot{x}(t) + \dot{u}^T(t)B(u(t) + v_*) - \\ & - \dot{x}^T(t)(D + A^T)(u(t) + v_*) + v_*^T A\dot{x}(t) = 0. \end{aligned}$$

Далее, выделяя производную по времени, при условии  $B = B^T$  получим

$$\frac{d}{dt}\Phi(x(t), u(t)) = 0,$$

$$\Phi(\cdot) = u^T(t)\dot{x}(t) + v_*^T Ax(t) - \frac{1}{2}u^T(t)Bu(t) - \int_0^t \dot{x}^T(\tau)(D + A^T)(u(\tau) + v_*)d\tau.$$

Как видно, функция  $\Phi(\cdot)$  — первый интеграл системы (1.28), так как принимает постоянное значение на траекториях, задаваемых этой системой дифференциальных уравнений.

Если  $D = -A^T$ , то первый интеграл системы (1.28) принимает вид

$$H(x(t), u(t)) = u^T(t)\dot{x}(t) + v_*^T Ax(t) - \frac{1}{2}u^T(t)Bu(t). \quad (1.29)$$

Нетрудно проверить, что при  $D = -A^T$  для функции (1.29) выполняются условия

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial u^T}, \quad \dot{u} = -\frac{\partial H}{\partial x^T}$$

а значит, первый интеграл (1.29) — также гамильтониан системы (1.28).

Теорема доказана.

Как известно, гамильтоновы системы возникают в задачах оптимизации при их решении по принципу максимума Понтрягина, а по виду гамильтониана часто удается определить вид функции качества системы. Так, из гамильтониана (1.29) следует вид подынтегральной функции возможной задачи оптимизации (1.6).

Положим

$$G(x(t), v(t)) = \alpha_0 + v_*^T Ax(t) - \frac{1}{2}u^T(t)Bu(t),$$

или в идентифицированных выше координатах  $(x, z)$  —

$$G(x(t), z(t)) = \beta_0 + v_*^T \dot{x}(t) - \frac{1}{2}z^T(t)Kz(t), \quad (1.30)$$

$$\beta_0 = \alpha_0 - \frac{1}{2} v_*^T B v_*, \quad K = B^{-1} \quad (\det B \neq 0).$$

Здесь для выполнения условия «затухания» переменной компоненты управления необходимо ввести ограничение на вектор  $v_*$  в виде  $v_* = Kz_*$ .

Если предположить, что физические размерности координат управления и фазовых координат совпадают, то размерность левой части (1.30) равна размерности квадрата фазовой координаты в единицу времени. Очевидно, что на практике реальные величины с такой размерностью встречаются крайне редко. Поэтому для практической идентификации потенциала (1.30) сделаем следующее предположение. Пусть существует некоторая величина  $Y(t)$ , имеющая размерность фазовой координаты и являющаяся глобальной характеристикой движения системы. Тогда потенциал системы можно представить в виде

$$G(t) = 2kY(t)\dot{Y}(t), \quad k > 0, \quad (1.31)$$

где  $k$  — безразмерный коэффициент, подлежащий оцениванию. Спецификация функции качества ( $c_0$  — константа интегрирования)

$$kY^2(t) = c_0 + \beta_0 t + z_*^T Kx(t) - \frac{1}{2} \int_0^t z^T(\tau) Kz(\tau) d\tau. \quad (1.32)$$

Дополнительным ограничением на решение задачи 2 может быть множество допустимых управлений  $V$ , которое предлагается задать в виде ограничений на масштаб управления ( $r_1, r_2$  — наперед заданные числа):

$$V = \left\{ v(t) : 0 \leq r_1 \leq \left| \frac{v_i(t)}{x_i(t)} \right| \leq r_2, \quad i = \overline{1, 3}, \quad t = \overline{-N, -1} \right\}. \quad (1.33)$$

Разделив обе части выражения (1.32) на  $k$ , придем к идентифицируемой модели

$$Y^2(t) = \bar{c}_0 + \bar{\beta}_0 t + z_*^T \bar{K}x(t) - \frac{1}{2} \int_0^t z^T(\tau) \bar{K}z(\tau) d\tau, \quad \bar{c}_0 = \frac{c_0}{k}, \quad \bar{\beta}_0 = \frac{\beta_0}{k}, \quad \bar{K} = \frac{1}{k} K. \quad (1.34)$$

Оценив в (1.34) матрицу  $\bar{K}$  получим следующее условие на параметр  $k$ :

$$\frac{r_1}{\min_{i,t} \left| \frac{[\bar{K}z(t)]_i}{x_i(t)} \right|} \leq k \leq \frac{r_2}{\max_{i,t} \left| \frac{[\bar{K}z(t)]_i}{x_i(t)} \right|}. \quad (1.35)$$

Функция регрессии в виде (1.34) и условие (1.35) полностью замыкают алгоритм решения задачи 2, при этом задача Коши (1.5) становится полностью идентифицированной.

При заданных значениях управляющих параметров  $\lambda_1, \lambda_2, v, \omega, \mu$  функции (1.25), (1.34) линейны относительно своих коэффициентов, а значит, применим аппарат линейного регрессионного анализа. Численная реализация предложенного алгоритма, как и в случае задачи 1, состоит в построении такого регулятора, который, действуя по принципу обратной связи, на основании текущих выходов  $x(t), F(t)$  вырабатывает такие входы (значения управляющих параметров), которые обеспечили бы выполнение заданного мультикритерия. Последний по постановке задачи состоит из локальных критериев (1.7)–(1.9) и процедуры обработки исключительных ситуаций.

### 1.3 Задача идентификации модели оптимального управления

Для удобства идентификации модели (1.6) перейдем от задачи Лагранжа к эквивалентной задаче Больца [7]. Используя спецификацию потенциала  $G(\cdot)$  системы в виде (1.30), получаем

$$\begin{cases} J = F(t_f) \rightarrow \max_{\{v(t)\}}, \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), \quad x(0) = x_*, \\ \dot{F}(t) = \beta_0 + v_*^T \dot{x}(t) - \frac{1}{2} v^T(t) B v(t), \quad F(0) = F_*. \end{cases} \quad (1.36)$$

Теорема 4. Пусть задана LQ задача оптимального управления (1.36). Если  $B = B^T$  и  $B > 0$ , то решение задачи (1.36) имеет вид

$$x^{onm}(t) = e^{At} x_* + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B e^{-A^T(\tau-t_f)} v_* d\tau, \quad v^{onm}(t) = e^{-A^T(t-t_f)} v_*. \quad (1.37)$$

Доказательство

Пусть, согласно принципу максимума Понтрягина,  $y(t) \in E^m$ ,  $y_{m+1}(t)$  — двойственные переменные, соответствующие уравнениям движения фазового вектора  $x(t)$  и функции качества  $F(t)$  соответственно. Тогда гамильтониан задачи (1.36) принимает вид

$$H(x(t), v(t), y(t), y_{m+1}(t)) = y^T(t)(Ax(t) + Bv(t)) + y_{m+1}(t)(\beta_0 + v_*^T \dot{x}(t) - \frac{1}{2}v^T(t)Bv(t)).$$

При  $B = B^T$  необходимые условия экстремума функционала  $J$  представляют собой уравнения движения из (1.36), а также уравнения движения для двойственной переменной  $y(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -A^T(y(t) + v_*), & y(t_f) = 0, \\ y(t) = v(t) - v_*, \end{cases}$$

откуда находим

$$\dot{v}(t) = -A^T v(t), \quad v(t_f) = v_*. \quad (1.38)$$

Решая двухточечную краевую задачу (1.36), (1.38), приходим к оптимальным решениям (37). Условие  $B > 0$  — достаточное условие экстремума функционала  $J$  [7].

Теорема доказана.

Итак, на периоде оптимизации  $[0, t_f]$  выполняются уравнения движения (1.36), (1.38). Логично предположить, что на периоде идентификации  $[-N, -1]$  уравнения движения фазового вектора  $x(t)$  и функции качества  $F(t)$  остаются теми же, меняется лишь задача Коши для управления  $v(t)$ . На базовом периоде она имеет вид ( $\alpha_0$  — вектор граничных значений)

$$\dot{v}(t) = Dv(t), \quad v(0) = \alpha_0. \quad (1.39)$$

Идентифицируем уравнения движения (1.36), (1.39) на промежутке времени  $[-N, -1]$  с помощью метода колокаций. Выберем класс траекторий фазового вектора  $x(t)$  так, чтобы на периоде оптимизации  $[0, t_f]$  не возникала проблема двойственной неустойчивости. Для этого относительно спектра матрицы  $A$  (спектр  $D$  предполагается таким же, как и в задаче 2) достаточно предположить следующее:

$$\Lambda(A) = \{0, \pm i\omega\}, \quad \Lambda(D) = \{0, \pm i\mu\}. \quad (1.40)$$

Тогда декомпозиция фазовой траектории на составляющие будет иметь вид

$$x(t) = n_1 + m_1 t + m_2 \cos \omega t + m_3 \sin \omega t + n_2 e^{\nu t} \cos \mu t + n_3 e^{\nu t} \sin \mu t. \quad (1.41)$$

Оценив функцию (1.41), следуя теореме 2, можно восстановить некоторые параметры модели (1.36), (1.39). Для полной идентификации задачи, как и в задаче 2, необходимо идентифицировать функцию качества  $F(t)$ . Поскольку управление  $v(t)$  в точке  $t = 0$  должно быть непрерывным то с учетом (1.37) получаем, что  $v_* = e^{-A^T t_f} K z_*$ , а значит, потенциал (1.30) после интегрирования дает следующую спецификацию функции качества:

$$kY^2(t) = c_0 + \beta_0 t + z_*^T K e^{-At_f} x(t) - \frac{1}{2} \int_0^t z^T(\tau) K z(\tau) d\tau. \quad (1.42)$$

Здесь, как и ранее, параметр управления  $k > 0$  выбирается из условия (1.35), в котором матрица  $K$  соответствует функции (1.42), обе части которой разделены на  $k$ .

Настройка модели на заданный набор свойств происходит с помощью регулятора, к которому помимо критериев (1.7)–(1.9) при оценивании функции (1.42) добавляется ограничение-неравенство  $K > 0$ . Двухстороннее взаимодействие динамической модели и регулятора влияет на энергетический баланс системы, который в оптимальном режиме можно записать  $H(x(t), v(t)) = const$ . В режиме идентификации регулятор выступает в роли фильтра, который настраивает функцию  $H(x(t), v(t))$  на значения, соответствующие данному процессу.

## 1.4 Численный эксперимент

В данной работе апробацию предложенных моделей и методов предлагается проводить на примере макроэкономических систем. Последние, как известно, слабо формализованы [1, 8] и отличаются доступностью баз данных их динамики [13]. Поскольку макроэкономическая информация в [13] приводится в млрд евро, то графическая иллюстрация полученных результатов осуществляется в



обезразмеренном виде путем деления каждой переменной на соответствующие значения в начальный момент времени ( $t = -N$ ) базового периода.

Отметим, что поскольку идентификация моделей проводится на периоде с отрицательным временем, то устойчивость решений рассматриваемых задач Коши будет обеспечиваться требованием  $\text{Re } \lambda \geq 0$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Характерной особенностью рассматриваемых моделей является наличие условия  $\text{Re } \lambda = 0$ . Поэтому нечувствительность получаемых решений к незначительным изменениям входной информации достигается настройкой регулятора на небольшие значения индексов обусловленности ( $CI < 20$  для фазовых координат и управлений и  $CI < 80$  для функции качества).

### 1.5 Динамическая модель Леонтьева

Задачу 1 данной работы можно рассматривать как задачу мультикритериальной параметрической идентификации модели динамического межотраслевого баланса. Координатами фазового вектора  $x(t)$  модели выступают валовые выпуски каждой отрасли, а координатами управления  $v(t)$  — конечные потребительские расходы на продукцию каждой отрасли. Коши (1.4). В качестве макроэкономической системы выбрана Великобритания: 1971–2004 гг. — период идентификации ( $N = 34$ ), 2005–2006 гг. — период прогнозирования. Начальное приближение спектра матрицы  $Q$  модели (1.13), найденное согласно интегральной схеме из регрессий (1.12), равняется

$$\Lambda(Q) = \{-0,0056, -0,0027, 0,1145 \pm 0,3393i, 0,0529 \pm 0,1778i\}.$$

Как видно, первых два собственных числа, задающих трендовую составляющую, близки к нулю. Тогда логично предположение (1.14) о спектре матрицы  $Q$ . С помощью мультикритериального регулятора найдены оптимальные

оценки параметров модели (4). При этом оптимальный спектр матрицы  $Q$  оказался равным:

$$\Lambda(Q) = \{0, 0, 0,1223 \pm 0,3301i, 0,0704 \pm 0,2120i\}.$$

Численные исследования показали, что модель с линейный трендом не только не уступает модели с экспоненциальным трендом, но даже демонстрирует лучшие имитационные и робастные свойства.

Приведенные в табл. 1.1 основные характеристики траекторий фазового вектора  $x(t)$  и управления  $v(t)$  свидетельствуют о высоких имитационных, робастных и прогнозных свойствах модели (1.4). Сравнение с реальными данными (в этом случае они известны) в прогнозные моменты времени, отображенное в фактической относительной ошибке  $\delta_{it}$  прогноза в моменты времени  $t = 0$  (2005 г.) и  $t = 1$  (2006 г.), также указывает на адекватность полученных результатов

Таблица 1.1 – Основные характеристики траекторий

	$R_i^2$	$CI_i$	$\zeta_{i0}$	$\delta_{i0}$	$\zeta_{i1}$	$\delta_{i1}$
$x_1(t)$	0.9811	4.3368	6.2563 %	2.9145 %	6.8561 %	3.3564 %
$x_2(t)$	0.9862	8.9133	5.5892 %	2.8253 %	5.9212 %	1.0212 %
$x_3(t)$	0.9937	10.824	5.1563 %	1.1562 %	5.6478 %	0.9232 %
$v_1(t)$	0.9707	9.7359	7.1531 %	3.1045 %	7.2852 %	5.7852 %
$v_2(t)$	0.9796	9.7359	4.2531 %	0.8523 %	4.8014 %	2.6254 %
$v_3(t)$	0.9875	5.8749	4.0212 %	0.7142 %	4.5232 %	1.3562 %

На рисунке 1.1 приведены графики фазовых траекторий и траекторий управления, на которые настроена модель Леонтьева. Здесь точками изображена статистическая информация, пунктиром — начальные приближения, полученные из интегральной схемы, а сплошной линией — траектории движения, удовлетворяющие заданному мультикритерию. Как видно, качество аппроксимации и прогнозных свойства модели (1.4) удовлетворительны и, следовательно, ее можно использовать при макроэкономическом моделировании.

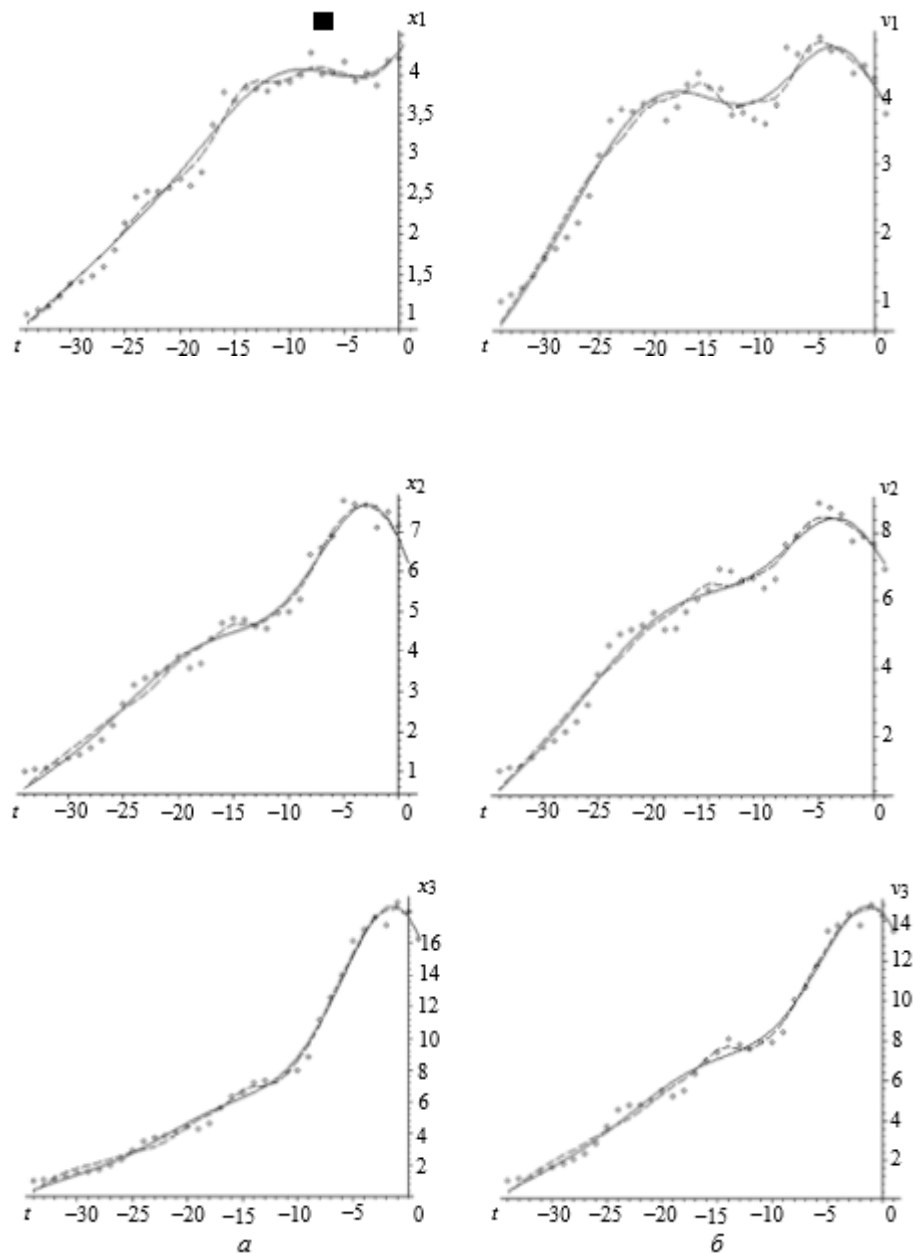


Рисунок 1.1 – Графики фазовых траекторий и траекторий управления

## 1.6 Модель имитации и прогнозирования макроэкономической динамики

Модель (1.5), рассмотренная в задаче 2, с точки зрения макроэкономического моделирования представляет собой LQ модель общей макроэкономической динамики. Как показывает практика, координатами такой модели могут быть ( $m = 3$ ): потребительские расходы  $x_1(t)$ , валовые инвестиции  $x_2(t)$ , экспорт товаров и

услуг  $x_2(t)$ . Глобальной характеристикой  $Y(t)$  движения может выступать валовой внутренний продукт. Пусть множество (1.33) допустимых управлений  $v(t)$  задается с помощью границ  $r_1 = 0$  и  $r_2 = 0,1$ . В качестве макроэкономической системы выбраны США: 1971–1998 гг. — период идентификации ( $N = 28$ ), 1999–2000 гг. — период прогнозирования.

Рассмотрены различные случаи входного сигнала (1.23). Оказалось, что входной сигнал в виде колебаний с постоянной амплитудой обеспечивает лучшие прогнозные и робастные свойства модели. Мультикритериальный регулятор настроил модель (5) на следующий оптимальный набор параметров спектра (1.22):

$$\lambda_1 = 0,0456 ; \quad \lambda_2 = 0.0933 ; \quad \omega = 0.2986 ; \quad \nu=0; \quad \mu = 0.5650 .$$

Параметр масштаба  $k$  для выполнения условия (1.33) должен принадлежать отрезку  $[0, 3,1 \cdot 10^{-5}]$ . В этом случае значение ни одной из координат вектора управлений не может составлять больше 10 % от значения соответствующей фазовой координаты на промежутке времени  $[-N, 0]$ .

Как и в задаче 1, случай линейного тренда в разложении (1.25) фазовой траектории оказался не хуже экспоненциального.

В табл. 1.2 представлены основные характеристики фазовых траекторий и траектории функции качества, которые соответствуют оптимальному набору управляющих параметров, найденному с помощью мультикритериального регулятора.

Таблица 1.2 – Основные характеристики фазовых траекторий

	$R_i^2$	$CI_i$	$\zeta_{i0}$	$\delta_{i0}$	$\zeta_{i1}$	$\delta_{i1}$
$x_1(t)$	0.9885	7.2156	8.0236	1.1254	8.2124	3.1156
$x_2(t)$	0.9851	6.5234	7.2351	1.0542	7.6584	1.0212
$y(t)$	0.9907	4.1254	5.2153	0.9855	7.0542	2.5872
$F(t)$	0.9765	72.126	9.8972	2.0542	10.012	2.9871

На рисунку 1.2 изображены графики фазовых траекторий и функции качества, на которые настроена модель (1.5). Здесь, как и ранее, точками показана статистическая информация, пунктиром — начальные приближения, полученные из интегральной схемы, а сплошной — траектории движения, удовлетворяющие заданному мультикритерию.

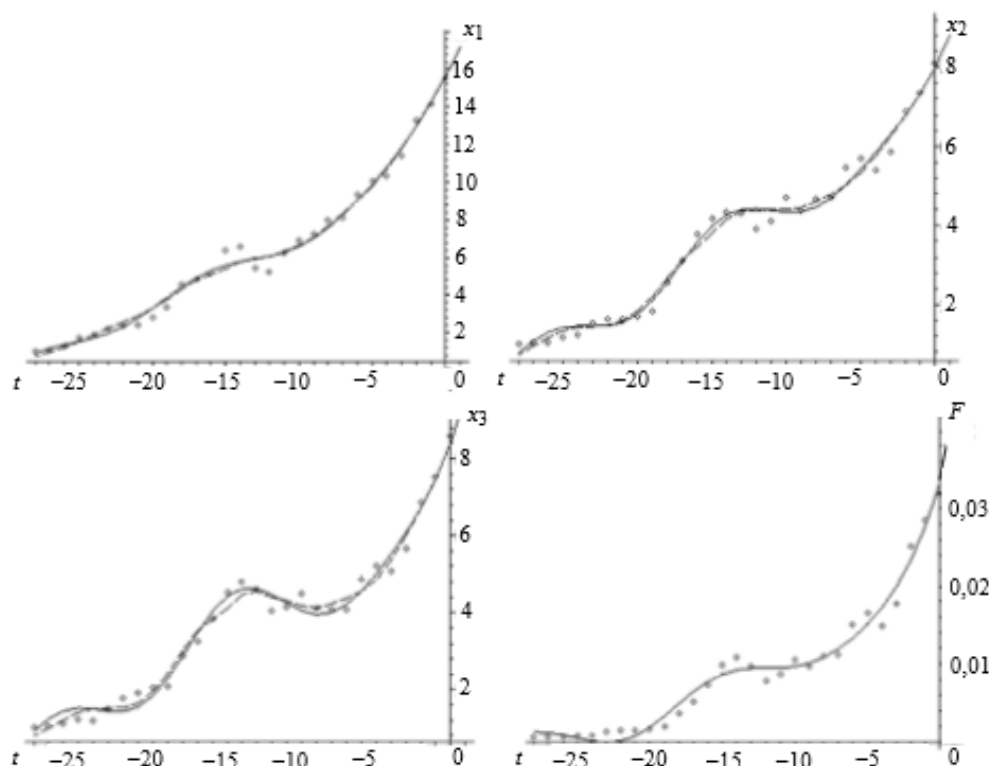


Рисунок 1.2 – Графики фазовых траекторий и функции качества

### 1.7 Модель оптимизации макроэкономической динамики

Модель (1.6), рассмотренная в задаче 1.3, может быть рассмотрена как LQ модель оптимизации макроэкономической динамики. Координатами такой модели выберем ( $m = 3$ ): валовой прирост основных фондов  $x_1(t)$ , экспорт товаров и услуг  $x_2(t)$ , фонд заработной платы  $x_3(t)$ . Показателем качества  $Y(t)$  функционирования системы может выступать валовой внутренний продукт (ВВП). Пусть, как и ранее,

множество (1.33) допустимых управлений  $v(t)$  на базовом периоде задается с помощью границ  $r_1 = 0$  и  $r_2 = 0,1$ . В качестве макроэкономической системы выбраны Нидерланды: 1971–2001 гг. — период идентификации ( $N = 31$ ), 2002–2006 гг. — период оптимизации ( $t_f = 5$ ) Тогда задачу оптимального управления (1.6) сформулируем так: необходимо найти такие оптимальные траектории макроэкономических величин  $x_1, x_2, x_3$ , чтобы ВВП системы в 2006 г. был максимальным. Параметры управления модели (1.6), которые позволили настроить модель на заданный набор свойств на базовом промежутке времени, принимают значения:  $\mu=5050, \nu=0,0513, \omega=0,2274, 0 \leq k \leq 2.5 \cdot 10^{-4}$ .

Имитационные, прогнозные и робастные свойства модели (1.6) на периоде идентификации приведены в табл.1.3. Как видно, высокие коэффициенты детерминации, низкие значения относительных ошибок прогнозов и индексов обусловленности позволяют считать модель (1.6) стационарной и проводить оптимизацию на промежутке времени  $[0, t_f]$ .

Таблица 1.3 – Имитационные, прогнозные и робастные свойства модели

	$R_i^2$	$CI_i$	$\zeta_{i0}$	$\delta_{i0}$
$x_1(t)$	0.9942	8,1254	4,1254	0,575 4
$x_2(t)$	0.9924	7,0512	5,0254	1,524 9
$x_3(t)$	0.9977	5,1245	5,8562	2,125 1
$F(t)$	0.9821	41,124	6,5248	1,325 4

На рисунке 1.3 приведены траектории движения макроэкономической системы. Здесь точками изображены реальные данные; сплошной линией — траектории движения на базовом периоде; пунктиром — траектории движения в

оптимальном режиме функционирования. Видно, что когда распределение ресурсов приближается к оптимальному, очевидным становится существенное увеличение экономического эффекта от их использования.

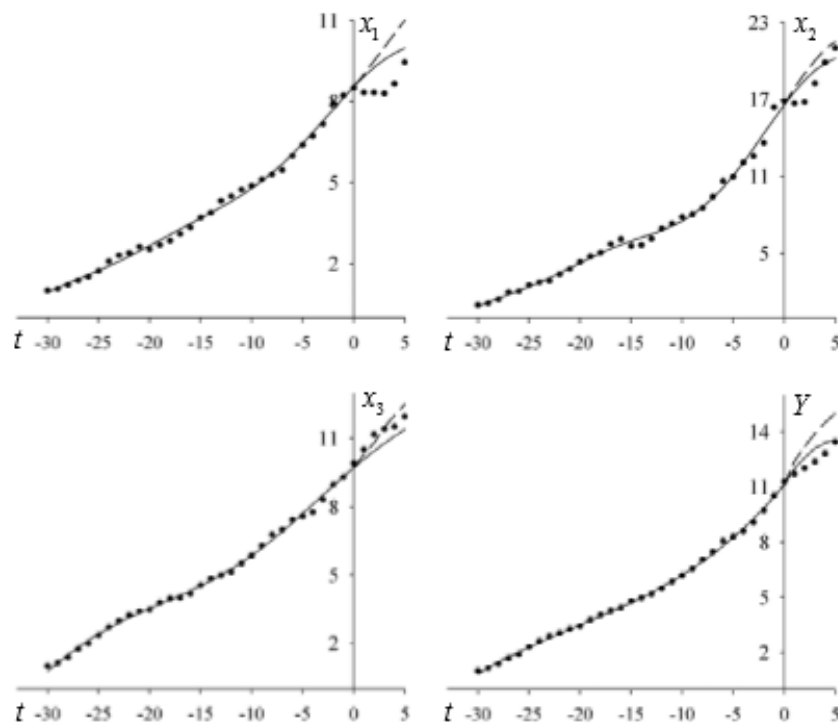


Рисунок 1.3 – Траектории движения макроэкономической системы

## 2 МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ И КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЯМИ КАЧЕСТВА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Предлагаются различные методы идентификации неизвестных параметров в задачах многокритериальной оптимизации с линейным и квадратичным критериями качества в условиях неопределенности. Развивается подход, который основан на построении функциональных форм и учитывает эффекты второго порядка.

### 2.1 Постановка задачи

Пусть некоторая система характеризуется вектором-столбцом фазовых координат  $\mathbf{x} \in R^n$ . Введем в рассмотрение квадратичную  $f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x}$  и линейную  $f_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{c}$  функции качества, которые являются характеристиками состояния данной системы и существенно зависят от фазовых координат. Рассмотрим следующую задачу многокритериальной оптимизации:

$$\begin{cases} \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\} \rightarrow \min, \\ \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь  $\Omega$  – допустимое множество, которое входит в область определения  $D_1(f_1) \subset R^n, D_2(f_2) \subset R^n$  функций  $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})$ . Его будем задавать в виде:

$$\Omega = \{ \mathbf{x} \in R^n : g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m} \}. \quad (2.2)$$

В данной главе необходимые ограничения (2.2) задаются в классе линейных форм.

Если идентифицированы параметры  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{c}$  и определена система ограничений (2.2), то целью решения задачи (2.1) будет нахождение множества оптимальных по



Парето решений (множества Парето) или некоторой точки из этого множества. Точка  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  является оптимальным по Парето решением задачи (2.1), если для некоторой окрестности точки  $\mathbf{x}^*$  не существует такого  $\Delta \mathbf{x}$ , что  $(\mathbf{x}^* + \Delta \mathbf{x}) \in \Omega$ ,  $f_i(\mathbf{x}^* + \Delta \mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{x}^*)$ ,  $i = \{1, 2, \dots, k\}$  и  $f_j(\mathbf{x}^* + \Delta \mathbf{x}) < f_j(\mathbf{x}^*)$  для некоторого  $j \neq i$  [9].

Наиболее распространенными методами, которые используются для решения задачи (2.1), есть методы скаляризации.

## 2.2 Методы скаляризации

Метод взвешенных сумм.

Этот метод устанавливает компромисс между противоречивыми критериями путем построения взвешенных сумм. В результате задачу (2.1) можно свести к следующей задаче квадратичного программирования:

$$\begin{cases} f_2(\mathbf{x}) + \lambda f_1(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \\ \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

Перебирая значения  $\lambda$  с выбранного из каких-то соображений промежутка, можно найти множество оптимальных по Парето решений.

Метод  $\varepsilon$  – ограничений.

В этом случае осуществляется минимизация одной из целевых функций, а другие целевые функции представляются в форме ограничений типа неравенств. Тогда задача (2.1) может быть сформулирована двумя способами:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \\ f_2(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_1, \\ \mathbf{x} \in \Omega \end{cases} \quad (2.4)$$

или

$$\begin{cases} f_2(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \\ f_1(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_2, \\ \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (2.5)$$

## 2.3 Методы идентификации

В данном пункте предлагается два метода идентификации параметров  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{c}$  оптимизационной задачи (2.1). Выбор одного из методов зависит от характера доступной информации о функционировании системы в прошлом.

### Метод 1.

Предполагаем, что существует временной ряд наблюдений неизвестных параметров вектора  $\mathbf{c} \{c_t, t = -N, \dots, -1, 0\}$  линейного критерия качества и матрицы  $\mathbf{Q} \{Q_t, t = -N, \dots, -1, 0\}$  квадратичного критерия на промежутке  $t \in [-N, 0]$  (период идентификации). Первым этапом при решении задачи (2.1) является идентификация параметров  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{Q}$  для момента оптимизации  $t^* = 1$ . Наиболее простым методом есть использование усредненных значений. Но в этом случае при решении задачи (2.1) можно получить неадекватные результаты [10]. Это можно объяснить тем, что решения задачи (2.1) чувствительны к незначительным изменениям параметров  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{Q}$ . Причем, как показано в работах Беста М., Грауэра Р., Чопра В., Зиемба В., Каллберга Ж., неправильная идентификация компонент вектора  $\mathbf{c}$  намного больше влияет на устойчивость решения  $\mathbf{x}^*$ , чем неправильная идентификация элементов матрицы  $\mathbf{Q}$  [8]. Поэтому актуальным является получение более точных оценок вектора  $\mathbf{c}$ .

В данной работе предлагается дискретно-непрерывная модель для идентификации элементов вектора  $\mathbf{c}$ . Используется статистическая информация  $c_{jt}$ ,  $j=1, 2, \dots, n$  в моменты времени  $t = -N, \dots, -1, 0$ , а задача идентификации компонент вектора  $\mathbf{c}$  рассматривается в контексте моделирования и прогнозирования соответствующих временных рядов. Именно через призму высокоточных прогнозных значений в момент времени  $t^* = 1$  рассматривается правильность идентификации компонент вектора  $\mathbf{c}$ .

В первую очередь данные временные ряды исследуются на стационарность. Анализ временных рядов на стационарность или нестационарность проводится с

помощью расширенного теста Дики-Фуллера и теста Филлипса-Перрона [9]. Для правильной спецификации нулевой и альтернативных гипотез в указанных тестах используется информационный критерий Шварца [10] и процедура Долада.

После приведения данного временного ряда к стационарному следующим этапом является построение дискретно-непрерывной модели. В общем случае для каждого  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  рассматривается следующая регрессионная модель:

$$c_t = f(t, \mathbf{a}) + \mathbf{d}'\mathbf{z} + \varepsilon_t, \quad (2.6)$$

где  $c_t$  – значения ряда в момент времени  $t$ ,  $f(t, \mathbf{a})$  – непрерывная составляющая,  $\mathbf{d}'\mathbf{z}$  – дискретная составляющая,  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_l)'$ ,  $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots, d_m)'$  – векторы оцениваемых параметров,  $\mathbf{z} = (z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{mt})'$  – вектор переменных дискретной составляющей;  $\varepsilon_t$  – случайное возмущение.

В качестве непрерывной составляющей используются авторегрессионные модели, если между элементами исследуемых рядов присутствует корреляция. При наличии во временном ряде переменного математического ожидания непрерывная составляющая описывается с помощью тренда.

Рассмотрим более подробно, каким образом оценивается дискретная составляющая модели. После оценивания непрерывной составляющей регрессионной модели (2.6) и вычисления остатков  $\varepsilon_t^{(1)} = c_t - f(t, \hat{\mathbf{a}})$  на первом шаге дискретная переменная формируется следующим образом:

$$z_{1t} = \begin{cases} +T^{(1)}, & \varepsilon_t^{(1)} > \xi^{(1)}, \\ 0, & -\xi^{(1)} \leq \varepsilon_t^{(1)} \leq \xi^{(1)}, \\ -S^{(1)}, & \varepsilon_t^{(1)} < -\xi^{(1)}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Здесь  $\xi^{(1)}$  – точность приближения,  $S^{(1)}$  и  $T^{(1)}$  – количество точек с данного промежутка, в которых выполняются неравенства  $\varepsilon_t^{(1)} > \xi^{(1)}$  и  $\varepsilon_t^{(1)} < -\xi^{(1)}$  соответственно. Далее оценивается регрессионная модель  $\varepsilon_t^{(1)} = d_1 z_{1t} + \varepsilon_t^{(2)}$ . На  $k$ -шаге ( $k=2, 3, \dots, m$ ) вычисляются остатки  $\varepsilon_t^{(k)} = \varepsilon_t^{(k-1)} - \hat{d}_{(k-1)} z_{(k-1)t}$ , новая фиктивная переменная равна

$$z_{kt} = \begin{cases} +T^{(k)}, & \varepsilon_t^{(k)} > \xi^{(k)}, \\ 0, & -\xi^{(k)} \leq \varepsilon_t^{(k)} \leq \xi^{(k)}, \\ -S^{(k)}, & \varepsilon_t^{(k)} < -\xi^{(k)} \end{cases} \quad (2.8)$$

и оценивается регрессионная модель  $\varepsilon_t^{(k)} = d_k z_{kt} + \varepsilon_t^{(k+1)}$ . Практические исследования показывают, что для достижения высокого значения коэффициента детерминации  $R^2$  регрессионной модели (2.6) достаточно 2-3 итерации.

При определении каждой из фиктивных переменных неизвестными остаются значения точности  $\xi^{(k)}, k=1, \dots, m$  на каждом шаге итерации. В данной работе предлагается следующая процедура определения точности  $\xi^{(k)}$ . Пусть задан некоторый временной ряд  $c_t, t=-N, \dots, -1, 0$  и необходимо найти прогнозное значение  $c_1^*$  в момент времени  $t^* = 1$ . Для определения неизвестных значений точности  $\xi^{(k)}, k=1, \dots, m$  каждой из фиктивных переменных проведем идентификацию неизвестных параметров в периоде  $[-N, -3]$  и построим прогнозные значения  $c_{(-2)}^*, c_{(-1)}^*, c_0^*$ . Из всех возможных значений  $\xi^{(k)}, k=1, \dots, m$  выбираем те, для которых:

- значение  $s = (c_{(-2)}^* - c_{(-2)})^2 + (c_{(-1)}^* - c_{(-1)})^2 + (c_0^* - c_0)^2$  является минимальным;
- остатки соответствующей регрессионной модели (2.6) неавтокорелированы, гомоскедастичны и нормально распределены;
- оцененная регрессионная модель является устойчивой к незначительным изменениям входной информации. В этом случае индекс обусловленности матрицы, обращающейся в методе наименьших квадратов, должен быть меньше 20 [12].

Оптимальные значения фиктивных переменных в прогнозной точке (каждая из фиктивных переменных в момент времени  $t^* = 1$  может принимать  $3m$  значений) определяются с помощью множественной логит-модели или множественной пробит-модели. Полученные прогнозные значения вектора  $s$  используются в задаче оптимизации (2.1). Далее преимущества предложенной методики будут рассмотрены в контексте задачи оптимизации инвестиционного портфеля.

Практическая часть.

Рассмотрим задачу оптимизации инвестиционного портфеля, доходность которого в момент времени  $t^* = 1$

$$R = \sum_{j=1}^n x_j c_j, \quad (2.9)$$

является случайной величиной с математическим ожиданием  $\mu = \mathbf{x}'\mathbf{c}$  и дисперсией  $\sigma^2 = \mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x}$ . Здесь  $x_j$  – доля капитала, вложенная в  $j$ -ю акцию ( $j = 1, 2, \dots, n$ ),  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  – вектор ожидаемых доходностей каждой из акций в момент времени  $t^* = 1$ ,  $\mathbf{Q}$  – ковариационная матрица, показывающая зависимость между доходностями различных акций. Так как  $\mathbf{x}$  – вектор, определяющий структуру портфеля, то  $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ . Распространенным ограничением является  $x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$ .

Задача статической оптимизации портфеля состоит в том, чтобы минимизировать риск ( $\sigma^2 = \mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x}$ ) и максимизировать доходность ( $\mu = \mathbf{x}'\mathbf{c}$ ). Поскольку величины  $\mu$  и  $\sigma^2$  имеют разную размерность, то вместо них целесообразно рассматривать безразмерные величины. Пусть  $\mathbf{x}_p = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})'$  – портфель с равными компонентами. Выберем

$$f_1(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}'\mathbf{c}}{\mathbf{x}'_p\mathbf{c}}, \quad f_2(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'_p\mathbf{Q}\mathbf{x}_p}. \quad (2.10)$$

Задачу оптимизации инвестиционного портфеля можно записать как следующую задачу многокритериальной оптимизации:

$$\begin{cases} \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\} \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\ 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2.11)$$

Будем рассматривать портфель, который может состоять из следующих акций украинских компаний: Kernel Holding S.A. (KER), Astarta Holding N.V. (AST), Coal Energy S.A. (CLE), Milkiland N.V. (MLK), Agroton Public Limited (AGT), KSG Agro S.A. (KSG), Industrial Milk Company S.A. (IMC), Sadovaya Group S.A. (SGR), Ovostar Union N.V. (OVO), Westa ISIC S.A. (WES) (в скобках указаны котировки акций на

Варшавской фондовой бирже). Для нахождения оптимального портфеля на 20.02.2012 используем статистическую информацию цен ( $p_t$ ) и доходностей ( $c_t = \Delta p_t / p_{t-1}$ ,  $\Delta p_t = p_t - p_{t-1}$ ) этих акций за период с 03.10.2011 г. до 17.02.2012 г. (объем выборки  $N = 100$ ).

Рассмотрим детально моделирования цен на примере KSG и AST. Анализ на стационарность или нестационарность исследуемых временных рядов приводит к следующим результатам.

Для цен акций компании KSG расчеты формируют непрерывную составляющую модели (2.6) в виде

$$\hat{p}_t = 0,5034 + 0,0040t + 0,9671 p_{t-1}, \quad R^2 = 0,95. \quad (2.12)$$

(0,2647)      (0,0015)      (0,2285)

Здесь под значениями МНК-оценок указаны соответствующие значения стандартных ошибок этих оценок.

Проверка значимости оценок по критерию Стьюдента показывает, что этому критерию удовлетворяют все оценки. После наращивания по указанному алгоритму дискретной составляющей после двух итераций приходим к следующей дискретно-непрерывной модели:

$$\hat{p}_t = 0,5034 + 0,0040t + 0,9671 p_{t-1} + 0,0129 z_1 + 0,0217 z_2, \quad R^2 = 0,99. \quad (2.13)$$

(с.н.)      (0,2647)      (0,0015)      (0,2285)      (0,0001)      (0,0023)

Анализ остатков модели (2.13) указывает на отсутствие автокорреляции ( $P$ -значение статистики Дарбина-Уотсона равно 1,85), значимых отклонений от нормального распределения ( $P$ -значение критерия Жака-Бера равно 1,48), гетероскедастичности

( $P$ -значение критерия Бройша-Пагана равно 0,04), поэтому обоснованным является использование результатов  $t$ - и  $F$ -критериев [14]. Видно, что в результате двух итераций достигается высокое значение коэффициента детерминации  $R^2$ .

Рассмотрим теперь моделирование приращений цен акций компании AST. Соответствующая непрерывная составляющая модели (2.6) такова:

$$\Delta \hat{p}_t = -0,0010 + 0,2984 \Delta p_{t-1}, \quad R^2 = 0,10. \quad (2.14)$$

(0,0007)      (0,0356)

После наращивания дискретной составляющей по указанному алгоритму после трех итераций дискретно-непрерывная модель принимает вид:

$$\Delta \hat{p}_t = \underset{(c.n.)}{-0,0010} + \underset{(0,0007)}{0,2984} \Delta p_{t-1} + \underset{(0,0356)}{0,0314} z_1 + \underset{(0,0024)}{0,0264} z_2 + \underset{(0,0017)}{0,0603} z_2, R^2 = 0,98. \quad (2.15)$$

В модели (2.15) отсутствуют автокорреляция остатков ( $P$ -значение статистики Дарбина-Уотсона равно 2,03), значимые отклонения от нормального распределения ( $P$ -значение критерия Жака-Бера равно 0,14), гетероскедастичность ( $P$ -значение критерия Бройша-Пагана равно 1,94).

На рисунке 2.1 показаны модельные и реальные значения цен акций KSG ( $a$ ) и доходностей акций AST ( $b$ ) на исследуемом промежутке времени. Прогнозные значения вычислялись в точках  $t_1^* = 1$  и  $t_2^* = 2$ , что соответствует 20.02.2012 г. и 21.02.2012 г.

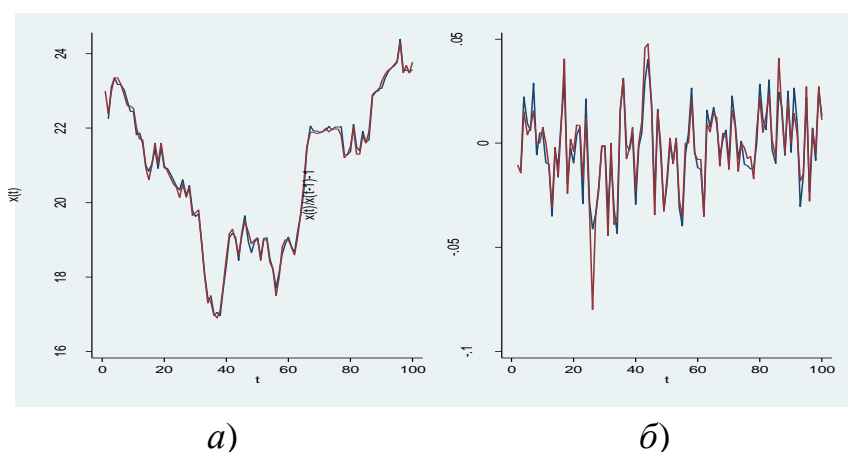


Рисунок 2.1 – Модельные и реальные значения цен акций KSG ( $a$ ) и доходностей акций AST ( $b$ )

По разработанной методике было проведено моделирование цен и доходностей акций других указанных компаний. В табл. 2.1 представлены реальные ( $y_r$ ), полученные прогнозные ( $y_p$ ) значения цен и относительные погрешности прогноза ( $h$ ) на два дня.

Таблица 2.1 – Результаты прогнозирования дискретно-непрерывной модели

	20.02.2012			21.02.2012		
	$y_r$	$y_p$	$H$	$y_r$	$y_p$	$H$
KER	71,10	71,77	0,94%	70,80	70,25	0,77%
AST	65,05	64,97	0,13%	65,05	65,26	0,33%
CLE	27,50	27,17	1,20%	27,00	26,65	1,29%
MLK	18,10	18,11	0,05%	18,50	18,38	0,63%
AGT	21,31	21,49	0,82%	21,45	21,40	0,22%
KSG	23,80	23,67	0,55%	24,15	23,94	0,87%
IMC	10,15	10,25	0,99%	10,15	10,25	1,02%
SGR	10,33	10,46	1,28%	10,44	10,45	0,07%
OVO	95,30	95,46	0,16%	95,30	96,19	0,93%
WES	4,47	4,46	0,12%	4,36	4,47	2,52%

Анализ полученных результатов свидетельствует о высоком качестве аппроксимации и достаточно точных краткосрочных прогнозах для цен акций украинских компаний. Для всех регрессионных моделей с помощью итерационного введения фиктивных переменных получено высокое качество аппроксимации ( $R^2 > 97\%$ ). Низкое значение индекса обусловленности ( $CI < 5$ ) свидетельствует о нечувствительности полученных результатов к незначительным изменениям входной информации. Следовательно, модель (2.6) может быть использована для получения краткосрочных прогнозов. Наибольшая относительная погрешность прогноза на один шаг составляет 1,28%, а среднее значение относительной погрешности для всех компаний равно 0,65%.

Решим теперь оптимизационную задачу (2.11), рассматривая ее в виде (2.3), (2.4) или (2.5). Значение  $\lambda$  в задаче (2.3) выбиралось от 2 до 100, при таких значениях  $\lambda$  структура портфеля не будет состоять из одного-двух активов. Для нахождения того же множества оптимальных по Парето решений в задаче (2.4)



значение  $\varepsilon_1$  находится на промежутке  $[0,011; 0,015]$ , а в задаче (2.5) значение  $\varepsilon_2$  – на промежутке  $[0,02; 0,07]$ .

На рис. 2.2 а) пунктирной линией представлено множество оптимальных по Парето решений в виде фронта эффективных портфелей. Фронт эффективных портфелей - это графическое представление зависимости доходности  $\mathbf{x}^* \mathbf{c}$  от риска  $\sigma = \sqrt{\mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x}^*}$  портфеля для каждой точки  $\mathbf{x}^*$  полученного множества оптимальных по Парето решений. Точками здесь изображен фронт эффективных портфелей в случае, если вектор  $\mathbf{c}$  идентифицирован методом усреднения прошлых значений, а сплошной линией - если в качестве компонент вектора  $\mathbf{c}$  взяты их реальные значения.

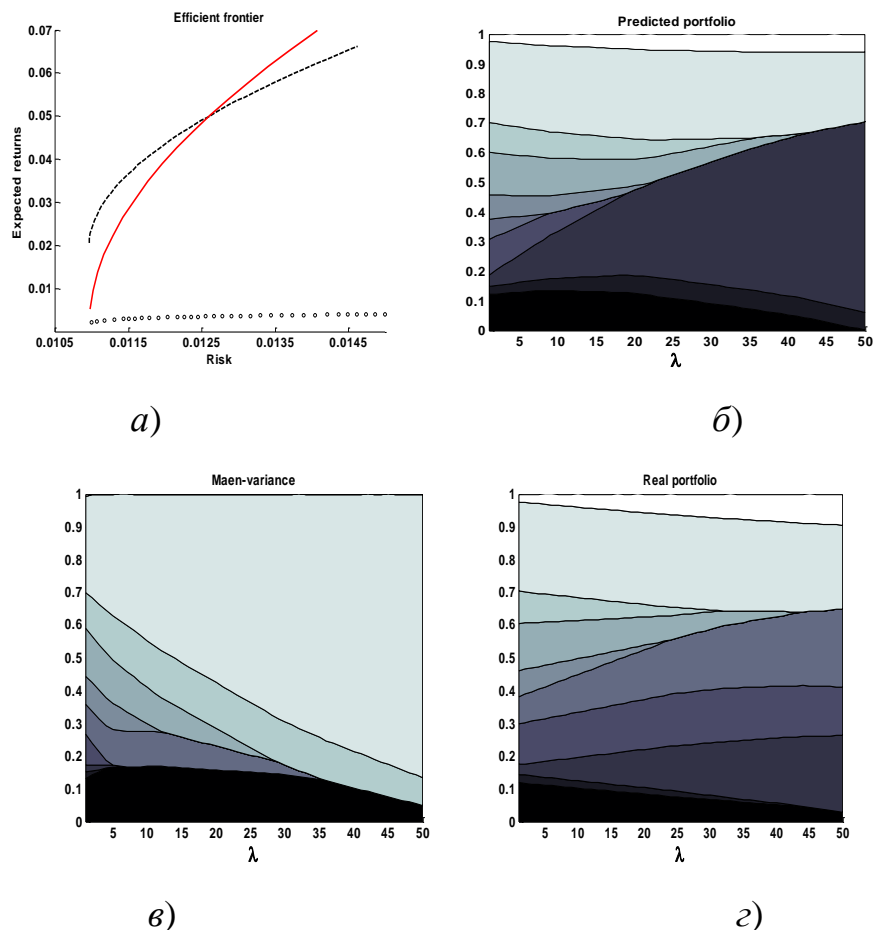


Рисунок 2.2 – Оптимальные портфели задачи (2.3)

На рисунках 2.2 б), 2.2 в), 2.2 г) представлены структуры оптимальных решений задачи (2.3) в зависимости от использованной методики идентификации

вектора  $\mathbf{c}$ . Здесь на правой оси координат отложены доли каждой из акций в портфеле для определенного значения  $\lambda$ . Рис. 2.2 б) соответствует случаю, когда вектор  $\mathbf{c}$  идентифицируется предложенным методом, рис. 2.2 в) - методике усреднения, рис. 2.2 г) - реальным значениям  $\mathbf{c}$ . Как видим, предложенная методика позволяет уменьшить влияние фактора неопределенности при определении компонент вектора.

Отметим, что полученные результаты могут влиять на реальный доход инвестора. Чем более рискованный инвестор, тем выше разница между доходами, которые достигаются с учетом разных методик. Проанализируем реальную доходность, которую инвестор может получить, используя полученное нами множество оптимальных по Парето решений. Пусть для инвестора максимальный уровень риска составляет 12,88% (для задачи (2.4)). Если инвестор будет использовать методику усреднения, его собственный капитал увеличится на 1,15%, в нашем же случае - на 1,34%.

## Метод 2.

Рассматриваемый ниже метод позволяет проводить идентификацию задачи оптимизации (2.1) для систем, для которых неизвестны значения параметров  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{Q}$  на историческом периоде. Для таких систем существует лишь информация по некоторым показателям системы, при этом значениями фазовых координат можно управлять на промежутке небольшой длины.

Предположим, что существует временной ряд наблюдений каждой фазовой координаты  $\{\mathbf{x}_t, t = -N, \dots, -1, 0\}$  и некоторой функции  $F(\mathbf{x}) = \{F_t, t = -N, \dots, -1, 0\}$  на промежутке  $t \in [-N, 0]$  (период идентификации). Считаем, что функция  $F(\mathbf{x})$  устанавливает компромисс между различными критериями посредством нахождения  $\lambda$  в прошлом:  $F(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) + \lambda f_1(\mathbf{x})$ . Поэтому логично искать оптимальное решение задачи (2.1), используя (3). Момент времени  $t^* = 1$  будем считать моментом оптимизации.

Будем искать целевую функцию задачи (2.3) в виде [15]:

$$F(\mathbf{x}) = c_0 + \mathbf{c}'\mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}, \quad \mathbf{D} = 2\lambda\mathbf{Q}. \quad (2.16)$$

Для достижения более высокого качества аппроксимации для некоторых систем предлагается переходить к транслогарифмичной форме:

$$\ln F(\mathbf{x}) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \ln x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \ln x_i \ln x_j. \quad (2.17)$$

Как показывают практические исследования реальных макроэкономических систем, именно транслогарифмичные формы более адекватно описывают реальные процессы. Они дают более высокие коэффициенты детерминации и более точно характеризуют эффекты второго порядка по сравнению с классическими формами (линейная, логарифмически-линейная, полулогарифмичная, обратная).

На практике при применении модели (2.16) для построения оптимизационной модели (2.3) возникают трудности с идентификацией неизвестных параметров  $c_0$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{D}$ . В данном случае оптимизационная задача формулируется для некоторого момента времени  $t^* = 1$ , для которого значения фазовых координат и целевой функции неизвестны. Однако, используя статистическую информацию на базовом периоде  $[-N, 0]$ , с помощью метода наименьших квадратов можно оценить значения элементов  $c_0$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{D}$ . Тогда, считая, что закон развития системы не меняется в следующий за базовым периодом момент времени  $t^*$ , можно использовать найденные МНК-оценки  $\hat{c}_0$ ,  $\hat{\mathbf{c}}$ ,  $\hat{\mathbf{D}}$  и для момента оптимизации  $t^*$ .

Допустимые промежутки изменения фазовых координат можно определить, например, построив доверительные интервалы для них на периоде идентификации. Найдем эти интервалы, тем самым определим систему ограничений (2.2). В классе линейных форм систему ограничений (2.2) задаем в виде  $\mathbf{a}'_i \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_i$ ,  $i = \overline{1, l}$  (или в виде  $\mathbf{a}'_i \mathbf{z} \leq \mathbf{b}_i$ ,  $i = \overline{1, l}$ ,  $z_j = \ln x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , если критерий качества описывается транслогарифмичной функциональной формой). Здесь неизвестными являются векторы  $\mathbf{a}_i$  и  $\mathbf{b}_i$ .

Для идентификации неизвестных параметров введем в рассмотрение  $l$  вспомогательных показателей  $w_i, i = \overline{1, l}$  (случай (2.16)) или  $v_i = \ln w_i, i = \overline{1, l}$  (случай (2.17)), которые неразрывно связаны с данной системой, существенно зависят от  $\mathbf{x}$  и для которых существует временной ряд наблюдений  $\{w_i, t = -N, \dots, -1, 0\}$ .

Сначала на периоде идентификации оценим функции регрессии

$$\hat{w}_i = \hat{a}_{i0} + \hat{\mathbf{a}}_i' \mathbf{x}, i = \overline{1, l}. \quad (2.18)$$

Однако неизвестным остается значение вектора  $\mathbf{x}$  в точке  $t^* = 1$ , поэтому прогнозное значение вектора  $\hat{\mathbf{w}}(t^*)$  пока неизвестно. Оно может быть найдено путем построения вспомогательных функций регрессии для  $x$ . В данной работе для этого использовались полиномиальные функции регрессии

$$x_i = p_{i0} + p_{i1}t + p_{i2}t^2 + \dots + p_{ik_i}t^{k_i}, i = \overline{1, n}. \quad (2.19)$$

Для нахождения оптимальной степени  $k_i$   $i$ -й функции регрессии используем такой подход: если при увеличении степени полинома, начиная с  $m$ -й степени, два соседних коэффициента разложения оказываются равными нулю (соответствующие МНК-оценки незначимы), то степень  $m$  считается оптимальной.

Построим доверительный интервал для вектора  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_l)'$ :

$$\hat{\mathbf{w}}(t^*) - \Delta \leq \mathbf{w} \leq \hat{\mathbf{w}}(t^*) + \Delta, \Delta = \delta \cdot t_{kp}. \quad (2.20)$$

Здесь  $\hat{\mathbf{w}}(t^*) = (\hat{w}_1(t^*), \hat{w}_2(t^*), \dots, \hat{w}_l(t^*))'$ ,  $\delta$  – вектор среднеквадратических погрешностей прогноза,  $t_{kp}$  – соответствующий квантиль Стьюдента.

Теперь, учитывая (2.20), приходим к следующей задаче математического программирования (все параметры задачи идентифицированы):

$$\begin{cases} F(\mathbf{x}) = c_0 + \mathbf{c}'\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x} \rightarrow \min, \\ \hat{w}_i(t^*) - \Delta_i \leq \hat{a}_{i0} + \hat{\mathbf{a}}_i'\mathbf{x} \leq \hat{w}_i(t^*) + \Delta_i, i = 1, \dots, l. \end{cases} \quad (2.21)$$

## 2.4 Практические результаты

Апробация построенных алгоритмов проводилась на примере макроэкономического развития Франции и Великобритании. В качестве фазовых координат выбирались прирост основных фондов  $x_1$ , фонд заработной платы  $x_2$ , экспорт товаров и услуг  $x_3$ . Для определения системы ограничений использовались валовой выпуск реального сектора экономики  $w_1$  и потребительские расходы домохозяйств  $w_2$ , а для определения функции цели - чистый национальный доход  $f(F(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}))$ .

Идентификация неизвестных параметров осуществлялась на базовом периоде: 1978-2007 г. для Франции ( $N = 30$ ) и 1971-2006 г. для Великобритании ( $N = 36$ ). Оптимизация проводилась в следующий за базовым периодом 2008 г. для Франции и 2007 г. для Великобритании. Расчеты показывают, что среди указанных функций цели предпочтение следует отдать транслогарифмической функции. Тогда положим  $y = \ln(f)$ ,  $z_1 = \ln(x_1)$ ,  $z_2 = \ln(x_2)$ ,  $z_3 = \ln(x_3)$ ,  $v_1 = \ln(w_1)$ ,  $v_2 = \ln(w_2)$ . Значения коэффициентов детерминации всех построенных регрессионных моделей ( $R^2 > 0,99$ ) указывают на высокие имитационные свойства, что должно обеспечивать качественные прогнозные свойства. В результате получены следующие доверительные интервалы для  $v_1$  и  $v_2$  в прогнозный момент  $t^*$ :  $v_1 \in [1,4369; 1,4463]$  и  $v_2 \in [1,4533; 1,4555]$  в случае Франции (реальные значения за 2008 год составляют 1,4392 и 1,4535);  $v_1 \in [2,5308; 2,5411]$  и  $v_2 \in [2,4331; 2,4453]$  в случае Великобритании (реальные значения за 2007 год составляют 2,5389 и 2,4401).

На рисунку 2.3 приведены результаты аппроксимации транслогарифмической функции для Франции (а) и Великобритании (б). Здесь точками изображены реальные статистические данные, сплошной кривой – полученная траектория движения.

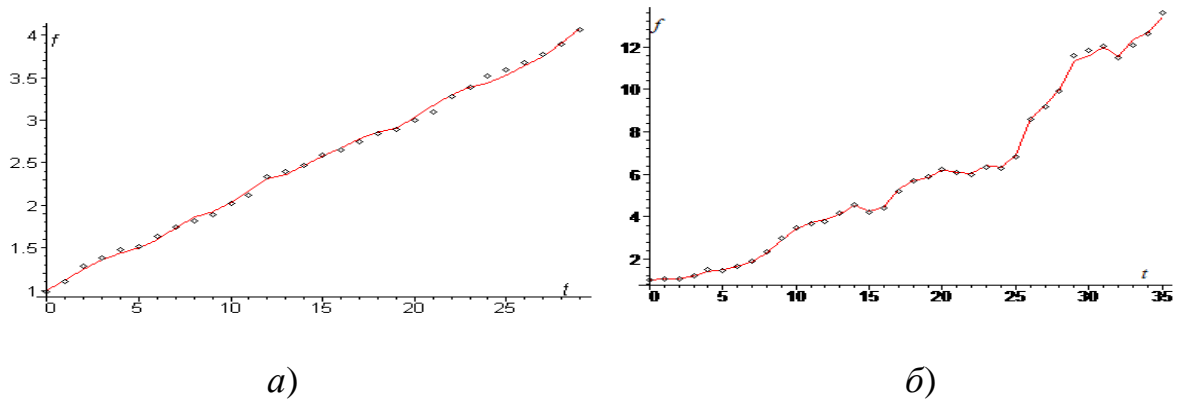


Рисунок 2.3 – Результаты аппроксимации чистого национального дохода

Анализ функций регрессий показывает, что они с высокой точностью аппроксимируют чистый национальный доход Франции и Великобритании за исследуемые промежутки времени. Учитывая найденные МНК-оценки неизвестных параметров, сформулируем теперь полученные задачи оптимизации.

В случае Франции имеем:

$$\begin{cases} 0,0215 - 0,5425 z_1 - 0,5495 z_3 + \\ + 1,8097 (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) - 3,7038 z_1^2 - 2,8268 z_2^2 - 4,4915 z_3^2 \rightarrow \max, \\ 0,0723 z_1 - 0,0933 z_2 + 1,1104 z_3 \geq 1,4392, \\ 0,0723 z_1 - 0,0933 z_2 + 1,1104 z_3 \leq 1,4486, \\ 0,0387 z_1 - 0,2102 z_2 + 1,2679 z_3 \geq 1,4421, \\ 0,0387 z_1 - 0,2102 z_2 + 1,2679 z_3 \leq 1,4399. \end{cases}$$

Оптимальные значения фазовых координат равны  $z_1^* = 1,4567$ ,  $z_2^* = 1,7139$ ,  $z_3^* = 1,3873$ .

В случае Великобритании расчеты дают:

$$\begin{cases} -0,0218 - 0,6212 z_1 + 0,4889 z_2 + 0,9911 z_3 + \\ + 0,4480 (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) - 1,3525 z_1^2 - 2,1848 z_2^2 - 1,6441 z_3^2 \rightarrow \max, \\ 0,2338 z_1 + 0,8399 z_3 \geq 2,5571, \\ 0,2338 z_1 + 0,8399 z_3 \leq 2,5674, \\ 0,1523 z_1 - 0,0949 z_2 + 0,7687 z_3 \geq 2,4737, \\ 0,1523 z_1 - 0,0949 z_2 + 0,7687 z_3 \leq 2,4859. \end{cases}$$

Решение задачи оптимизации таково:  $z_1^* = 2,4849$ ,  $z_2^* = 2,8991$ ,  $z_3^* = 2,5708$ .

Поскольку расчеты проводились для безразмерных данных, полученных делением статистических данных на соответствующее значение  $x_0$  в начальном

году, фактические данные  $x$  находились по формуле  $x_i = e^{z_i} \cdot x_{i0}$ ,  $i = \overline{1,3}$ . Оптимальные решения задач оптимизации приведены в табл.2.2 (случай Франции) и табл.2.3 (случай Великобритании).

Таблица 2.2 – Оптимальные макроэкономические показатели Франции в 2008 г.

Макроэкономические показатели Франции	Оптимальные значения, € на одного жителя	Реальные значения, € на одного жителя		Относительный прирост, %	
		2007р.	2008р.	2007р.	2008р.
Прирост основных фондов	6866,83	6400	6700	6,80	2,43
Фонд заработной платы	8325,85	7900	8000	5,11	3,91
Экспорт	16016,10	15300	15700	4,47	1,97
Валовой выпуск реального сектора экономики	17263,18	16400	16900	5,00	2,10
Потребительские расходы домохозяйств	28623,20	26600	27300	7,07	4,62
Чистый национальный доход	27957,38	25700	26400	8,07	5,57

Таблица 2.3 – Макроэкономические показатели Великобритании в 2007

Макроэкономические показатели Великобритании	Оптимальные значения, € на одного жителя	Реальные значения, € на одного жителя		Относительный прирост, %	
		2006р.	2007р.	2006р.	2007р.
Прирост основных фондов	6182,68	5500	6000	11,04	2,95
Фондзаработной платы	9170,14	9100	8900	0,76	2,95
Экспорт	18307,34	17200	17900	6,05	2,23
Валовой выпуск реального сектора экономики	35000,28	33100	34600	5,43	1,14
Потребительские расходы домохозяйств	30400,25	28600	29900	5,92	1,65
Чистый национальный доход	34840,09	32100	33500	7,86	3,85

Из таблицы 2.2 видно, что для достижения максимального прироста чистого национального дохода Франции в 2008 году (по сравнению с 2007 годом он составляет 8,07%) необходимо придерживаться следующих рекомендаций: прирост основных фондов должен составлять 6,80%, прирост фонда заработной платы - 5,11%, прирост экспорта - 4,47%. При этом валовой выпуск реального сектора экономики растет на 5,00%, а потребительские расходы домохозяйств - на 7,07% .

Анализ табл. 2.3 показывает, что для достижения максимального прироста чистого национального дохода Великобритании в 2007 году (по сравнению с 2006 годом он составляет 7,86%) необходимо придерживаться следующих рекомендаций: прирост основных фондов должен составлять 11,04%, прирост фонда заработной платы - 0,76%, прирост экспорта - 6,05%. При этом валовой выпуск реального сектора экономики растет на 5,43%, а потребительские расходы домохозяйств - на 5,92%.

В данной работе рассмотрены два подхода параметрической идентификации в задачах многокритериальной оптимизации с линейным и квадратичным критериями



качества. Первый подход базируется на дискретно-непрерывных моделях с фиктивными переменными, второй метод основан на построении функциональных форм и учитывает эффекты второго порядка. Апробация построенных алгоритмов проводится на статистических данных финансовых и макроэкономических систем. Полученные результаты свидетельствуют об эффективности предложенных подходов.

### 3 МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ВОЛН СДВИГА НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

#### 3.1 Основные соотношения динамической теории упругости в случае антиплоской деформации. Постановка краевых задач

Под продольным сдвигом или антиплоской деформацией понимают напряженно-деформированное состояние цилиндрического тела, нагруженного по боковой поверхности усилиями, направленными и равномерно распределенными вдоль образующей. В предположении, что ось цилиндра направлена вдоль оси  $Ox_3$  декартовой прямоугольной системы координат  $Ox_1x_2x_3$ , отличными от нуля являются две компоненты тензора напряжений  $\tau_{13}, \tau_{23}$  и одна компонента смещения  $u_3(x_1, x_2, t)$ , причем

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + f = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad \tau_{13} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \tau_{23} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2}. \quad (3.1)$$

Здесь  $\rho$  – плотность,  $\mu$  – модуль сдвига среды,  $f$  – объемная сила,  $t$  – время.

Из (3.1) вытекает, что смещение  $u_3$  удовлетворяет неоднородному волновому уравнению ( $c$  – скорость волны сдвига или  $SH$ -волны)

$$\Delta u_3 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu} f, \quad c^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим упругое полупространство  $x_2 \geq 0$ , содержащее систему бесконечно длинных вдоль оси  $Ox_3$  цилиндров, поперечные сечения которых ограничены замкнутыми контурами (без общих точек)  $L_j, j = \overline{1, M}$  типа Ляпунова (кривизна  $L_j$  удовлетворяет условию Гельдера). Пусть  $L$  – совокупность этих контуров и положительное направление обхода выбрано так, что при движении вдоль  $L$  область  $D_1$  (матрица) остается слева (рис. 3.1).

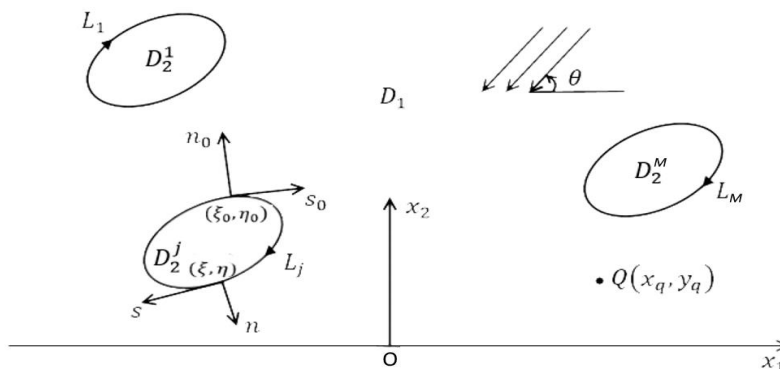


Рисунок 3.1 – Система неоднородностей в полупространстве

Будем считать, что внутренности цилиндров (область  $D_2$ ) представляют собой полости, неподвижные, жесткие (впаянные в полупространство) или упругие включения. В качестве тако источника может быть излучающаяся из бесконечности гармоническая волна сдвига ( $\omega$  – частота колебаний)

$$u_3^{(0)}(x_1, x_2, t) = W_0(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \quad (3.3)$$

нормаль к фронту которой составляет угол  $\theta$  с осью  $Ox_1$ . Амплитуду  $w_0$  такой волны можно задать в виде

$$W_0 = \tau e^{-i\gamma_1(x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta)}, \quad \tau = \text{const} \quad (3.4)$$

Тогда при взаимодействии с границей полупространства  $x_2 = 0$  возникает отраженная волна с амплитудой

$$U_0 = \tau e^{-i\gamma_1(x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta)}. \quad (3.5)$$

Возбуждающее волновое поле в матрице может быть также вызвано действием сосредоточенного в некоторой точке  $Q(x_q, y_q)$  гармонического источника, для которого положим

$$f = \tau \mu_1 \delta(x_1 - x_q, x_2 - y_q) e^{-i\omega t}. \quad (3.6)$$

В случае (3.3), (3.6) из (3.2) вытекает, что амплитуда падающей волны  $w_0$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta W_0 + \gamma_1^2 W_0 = -\tau \delta(x_1 - x_q, x_2 - y_q), \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}. \quad (3.7)$$

Здесь  $\mu_1$  – модуль сдвига,  $\rho_1$  – плотность матрицы,  $\delta(x, y)$  – функция Дирака. Решение уравнения (3.7) будем задавать в виде

$$W_0 = -\frac{\tau}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_1 r_q), \quad (3.8)$$

$$r_q = |z - z_q|, \quad z = x_1 + ix_2, \quad z_q = x_q + iy_q,$$

где  $H_0^{(1)}(x)$  – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка. Тогда отраженная от границы полупространства  $x_2 = 0$  волна имеет амплитуду

$$U_0 = -\frac{\tau}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_1 r_q^*), \quad (3.9)$$

$$r_q^* = |z - \bar{z}_q|, \quad \bar{z}_q = x_q - iy_q.$$

В случае внешнего воздействия вида (3.3) в областях  $D_1$  и  $D_2$  (если  $L$  – граница раздела двух сред) образуется установившийся режим, когда у всех величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние, зависимость от времени выражается множителем  $e^{-i\omega t}$ . Например, перемещение  $u_3$  представимо в виде

$$u_3(x_1, x_2, t) = W(x_1, x_2) e^{-i\omega t}. \quad (3.10)$$

Границу полупространства  $x_2 = 0$  будем считать заземленной или свободной от сил. Свойства границы  $x_2 = 0$  будем описывать с помощью параметра  $A$ .

$A = 1$  – граница  $x_2 = 0$  заземлена:  $W|_{x_2=0} = 0$ ;

$A = -1$  – граница  $x_2 = 0$  свободна от сил:  $\frac{\partial W}{\partial x_2}|_{x_2=0} = 0$ ; (3.11)

$A = 0$  – случай неограниченного пространства.

При отсутствии неоднородностей общее волновое поле в полупространстве  $x_2 \geq 0$  равно

$$V_0 = W_0 - AU_0. \quad (3.12)$$

Здесь в случае (3.4), (3.5) и в случае (3.8), (3.9) при  $A = 1$  на границе  $x_2 = 0$  выполняется равенство  $V_0 = 0$ , а при  $A = -1$  имеем  $\frac{\partial V_0}{\partial x_2} = 0$ , если  $x_2 = 0$ .

В результате взаимодействия волн  $w_0$  и  $U_0$  с цилиндрами в области  $D_1$  возникает рассеянное волновое поле  $w_1$ . Общее поле перемещений в матрице запишем в виде

$$W = W_1 + V_0, \quad (x_1, x_2) \in D_1. \quad (3.13)$$

Если  $D_2$  – совокупность упругих включений, то для проникающего внутрь цилиндров волнового поля положим  $w = w_2$ . Из волнового уравнения (3.2) вытекает, что амплитуды перемещений  $w_1$  и  $w_2$  в областях  $D_1$  и  $D_2$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta W_k + \gamma_k^2 W_k = 0, \quad \gamma_k = \frac{\omega}{c_k}, \quad c_k = \sqrt{\frac{\mu_k}{\rho_k}}, \quad (3.14)$$

где  $\rho_k$  и  $\mu_k$  – плотность и модуль сдвига матрицы ( $k=1$ ) и упругих включений ( $k=2$ ),  $c_k$  – скорость волны сдвига в области  $D_k$ .

Сформулируем теперь краевые условия для разрешающих уравнений Гельмгольца (3.14). Будем предполагать, что сечение цилиндра  $D_j$  описывается гладкой замкнутой кривой  $L_j$ , ( $j = \overline{1, M}$ ), параметрическое уравнение которой  $\xi = \xi(s)$ ,  $\eta = \eta(s)$ . Пусть  $(\xi_0, \eta_0) = (\xi(s_0), \eta(s_0))$  – точка кривой  $L_j$ , в которой мы будем выполнять граничные условия (рис. 3.1).

Выделим также граничный элемент и укажем на нем компоненты результирующего напряжения, действующего на  $L_j$  (рис. 3.2).

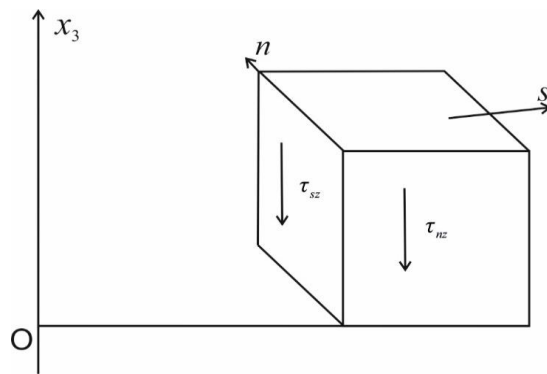


Рисунок 3.2 – Напряжения, действующие на контуре  $L_j$

Пусть  $\tau_{nz} = \sigma_n e^{-i\omega t}$ ,  $\tau_{sz} = \sigma_s e^{-i\omega t}$ . Тогда, если  $L_j$  – граница  $D_2^j$ , то со стороны матрицы

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \mu_1 \frac{\partial W}{\partial n}, & \sigma_s &= \mu_1 \frac{\partial W}{\partial s}; \\ \sigma_n &= \mu_2 \frac{\partial W}{\partial n}, & \sigma_s &= \mu_2 \frac{\partial W}{\partial s} \end{aligned} \quad (3.15)$$

со стороны упругого включения  $D_2^j$ .

Приходим к следующим граничным условиям на  $L$ .

**1.** Если  $D_2$  – совокупность упругих включений, то на контурах  $L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) будем требовать выполнения условий сопряжения, вытекающих из непрерывности амплитуд перемещений и сдвиговых напряжений на границе раздела двух сред. В этом случае граничные условия на  $L$  таковы ( $n_0$  – положительная нормаль к  $L$ ):

$$W_1 + V_0 = W_2, \quad \mu_1 \frac{\partial}{\partial n_0} (W_1 + V_0) = \mu_2 \frac{\partial W_2}{\partial n_0}. \quad (3.16)$$

Соотношения (3.16) следует понимать как равенства граничных значений соответствующих величин при стремлении точки наблюдения к  $L$  из области  $D_1$  или  $D_2$ .

**2.** В случае, когда  $D_2$  – совокупность неподвижных включений,

$$W_1 + V_0 = 0 \quad \text{на } L. \quad (3.17)$$

**3.** Если цилиндр  $D_2^j$  перемещается как абсолютно жесткое тело,

$$W_1 + V_0 = B_j \quad \text{на } L_j, \quad (3.18)$$

где  $B_j$  – неизвестная комплексная постоянная ( $j = \overline{1, M}$ ).

Дополнительное условие, необходимое для определения неизвестной постоянной  $B_j$  вытекает из закона Ньютона, описывающего движение  $j$ -го включения как абсолютно жесткого тела. Уравнение движения включения  $D_2^j$  приобретает вид

$$\mu_1 \int_{L_j} \frac{\partial}{\partial n_0} (W_1 + V_0) ds_0 = -\rho_e S_e^j \omega^2 B_j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (3.19)$$

Здесь  $\rho_e$  – плотность,  $S_e^j$  – площадь  $j$ -го включения.

4. В случае, когда  $D_2$  – совокупность полостей, границы цилиндров свободны от сил. Граничное условие на  $L$  имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial n_0}(W_1 + V_0) = 0. \quad (3.20)$$

Итак, решение антиплоской задачи динамической теории упругости о дифракции гармонической волны сдвига на цилиндрических неоднородностях сводится к решению уравнений Гельмгольца (3.14) с заданными краевыми условиями на границе неоднородностей. Отметим, что в области  $D_1$  решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее указанным граничным условиям, неоднозначно. Единственность решения обеспечивается удовлетворением рассеянной волной  $W_1$  условий излучения на бесконечности. В предположении, что зависимость от времени имеет вид  $e^{-i\omega t}$ , такими являются условия Зоммерфельда:

$$W_1 = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial W_1}{\partial r} - i\gamma_1 W_1 = O\left(\frac{1}{\sqrt{r^3}}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

Условиям (3.21) удовлетворяют, например, функции Ханкеля первого рода  $m$ -го порядка  $H_m^{(1)}(\gamma_1 r)$ . Для них справедливы следующие асимптотические представления (при  $x \gg m$ )

$$H_m^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}m - \frac{\pi}{4}\right)} + \dots \quad (3.22)$$

Тот факт, что функция  $H_0^{(1)}(\gamma_1 r)$  является фундаментальным решением (с точностью до постоянного множителя) уравнения Гельмгольца в области  $D_1$  и наряду с другими функциями Ханкеля первого рода удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда (3.21), обычно используют при построении интегральных представлений амплитуды дифрагированного волнового поля.

На границе полупространства  $x_2 = 0$  должны выполняться условия:

- $w_1 = 0$ , если граница  $x_2 = 0$  закреплена ( $A = 1$ );
- $\partial W_1 / \partial x_2 = 0$ , если граница  $x_2 = 0$  свободна от сил ( $A = -1$ ).

Далее будем решать задачу (3.16). Другие краевые задачи будут вытекать из неё как частные случаи.

### 3.2 Сведение краевых задач к интегральным уравнениям

1 Случай упругих включений.

Представим функции  $W_1$  и  $W_2$ , характеризующие дифрагированные волновые поля перемещений в областях  $D_1$  и  $D_2$ , в виде потенциалов типа простого слоя:

$$W_k(x_1, x_2) = \int_L f_k(s) G_k(x_1, x_2, \xi, \eta) ds, \quad k=1,2, \quad (3.23)$$

$$G_1 = \frac{1}{4i} (H_0^{(1)}(\gamma_1 r) - A H_0^{(1)}(\gamma_1 r_1)), \quad G_2 = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_2 r),$$

$$r = |z - \zeta|, \quad r_1 = |z - \bar{\zeta}|, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad \bar{\zeta} = \xi - i\eta, \quad \zeta \in L.$$

Здесь интегрирование проводится по  $L$  – совокупности  $L_l$  ( $l = \overline{1, M}$ ).

Учитывая свойства функций Ханкеля  $H_0^{(1)}(\gamma r)$ , отмечаем, что представление (3.23) удовлетворяет уравнению Гельмгольца (3.14) в области  $D_k$  и условиям на границе полупространства  $x_2 = 0$  (3.11). Кроме того, оно обеспечивает выполнение условий излучения на бесконечности (3.21).

Используем интегральное представление (3.23) для сведения краевой задачи (3.16) к интегральным уравнениям. Пусть параметрическое уравнение контура  $L_l$  ( $l = \overline{1, M}$ ) имеет вид:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(\beta), \quad \eta = \eta(\beta), \quad \zeta = \xi + i\eta = \zeta(\beta), \\ \zeta(\beta + 2\pi) &= \zeta(\beta), \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Подставляя вместо  $z$  в (3.23) значение  $\zeta_0 = \xi(\beta_0^j) + i\eta(\beta_0^j) \in L_j$  из первого граничного условия в (3.16) получим  $M$  интегральных уравнений:



$$\int_L (p_1(\beta)K_1(\beta_0^j, \beta) - p_2(\beta)K_2(\beta_0^j, \beta))d\beta = -V_0(\beta_0^j), \quad j = \overline{1, M}, \quad (3.25)$$

$$p_k(\beta) = f_k(s(\beta)) \cdot s'(\beta), \quad s'(\beta) = ds/d\beta, \quad k = 1, 2,$$

$$K_k(\beta_0^j, \beta) = \frac{1}{4i} (H_0^{(1)}(\gamma_k r_0) - \delta_{1k} A H_0^{(1)}(\gamma_k r_{10})), \quad r_0 = |\zeta_0 - \zeta|, \quad r_{10} = |\zeta_0 - \bar{\zeta}|.$$

Здесь  $\delta_{1k}$  – символ Кронекера (1 при  $k=1$  и 0 при  $k=2$ ); функция  $V_0(\beta_0^j)$  вычисляется согласно (3.12) и равна

$$V_0(\beta_0^j) = \tau e^{-i\gamma_1 \zeta_0 \cos \theta} (e^{-i\gamma_1 \eta_0 \sin \theta} - A e^{i\gamma_1 \eta_0 \sin \theta}), \quad \zeta_0 \in L_j, \quad (3.26)$$

в случае излучения из бесконечности волны сдвига ( $NV=1$ ) и

$$V_0(\beta_0^j) = -\frac{\tau}{4i} (H_0^{(1)}(\gamma_1 r_{q0}) - A H_0^{(1)}(\gamma_1 r_{q0}^*)), \quad \zeta_0 \in L_j, \quad (3.27)$$

$$r_{q0} = |\zeta_0 - z_q|, \quad r_{q0}^* = |\zeta_0 - \bar{z}_q|,$$

в случае действия сосредоточенного в точке  $Q(x_q, y_q)$  гармонического источника ( $NV=2$ ).

Функция Ханкеля  $H_0^{(1)}(\gamma r_0)$  в нуле имеет логарифмическую особенность

$$H_0^{(1)}(\gamma r_0) = \frac{2i}{\pi} \ln r_0 + H_0(\gamma r_0), \quad (3.28)$$

где  $H_0(\gamma r_0)$  – непрерывная функция. В случае замкнутых контуров, если точки  $\zeta$  и  $\zeta_0$  принадлежат одному контуру (контур интегрирования  $L_l$  совпадает с контуром  $L_j$ ), логарифмическую особенность удобно выделять в виде

$$H_0^{(1)}(\gamma r_0) = \frac{2i}{\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta^j - \beta_0^j}{2} \right| + H_0(\beta_0^j, \beta^j). \quad (3.29)$$

Следовательно, интегральные уравнения (3.25) являются интегральными уравнениями с логарифмическими ядрами (суммирование по  $k=1, 2$ ):

$$\begin{aligned} & (-1)^{k-1} \left( -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_k(\beta^j) \ln \left| \sin \frac{\beta^j - \beta_0^j}{2} \right| d\beta^j + \right. \\ & \left. + \int_L p_k(\beta) A_k(\beta_0^j, \beta) d\beta \right) = -V_0(\beta_0^j), \quad j = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$A_k(\beta_0^j, \beta) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_k r_0) - \frac{\delta_{1k}}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0^j}{2} \right| - \delta_{1k} A \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_k r_{10}).$$

Здесь логарифмические ядра возникают в том случае, если контур  $L_l$  совпадает с контуром  $L_j$ , т.е. когда  $l=j$  (при  $\beta = \beta^j$  символ Кронекера  $\delta_{lj}$  становится равным единице); интегрирование по  $L_j$  осуществляется по часовой стрелке (см. рис. 3.1), а по  $\beta^j$  в пределах от 0 до  $2\pi$  против часовой стрелки.

С целью получения сингулярных интегральных уравнений первого рода, схема численной реализации которых более эффективна по сравнению с численной реализацией интегральных уравнений с логарифмической особенностью, первое граничное условие (3.16) целесообразно продифференцировать по дуговой координате  $s_0 \in L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ).

Будем пользоваться следующими равенствами:

$$\frac{\partial W}{\partial s_0} = (e^{i\varphi_0} \frac{\partial W}{\partial z} + e^{-i\varphi_0} \frac{\partial W}{\partial \bar{z}})_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial W}{\partial n_0} = i(e^{i\varphi_0} \frac{\partial W}{\partial z} - e^{-i\varphi_0} \frac{\partial W}{\partial \bar{z}})_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad e^{i\varphi_0} = \frac{d\zeta_0}{ds_0},$$

где  $\varphi_0$  – угол положительной касательной  $s_0$  к  $L_j$  в точке  $\zeta_0 \in L_j$  с осью  $Ox_1$ .

Необходимые производные функций Ханкеля будем вычислять с помощью известных соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma r) &= -\frac{\gamma}{2} e^{-i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r), \quad z - \zeta = re^{i\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma r) &= -\frac{\gamma}{2} e^{i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r), \quad \bar{z} - \bar{\zeta} = re^{-i\alpha}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Здесь  $H_1^{(1)}(\gamma r)$  – функция Ханкеля первого рода первого порядка. Она имеет в нуле особенность типа Коши:

$$H_1^{(1)}(\gamma r) = -\frac{2}{i\pi\gamma r} + H_1(\gamma r), \quad (3.33)$$

где  $H_1(\gamma r)$  – непрерывная функция.

Используя (3.32), для функции  $w_k(x_1, x_2)$ , представленной в виде (3.23), находим

$$\begin{aligned}
& e^{i\varphi_0} \frac{\partial W_k}{\partial z} + e^{-i\varphi_0} \frac{\partial W_k}{\partial \bar{z}} = \tag{3.34} \\
& = \frac{i\gamma_k}{4} \int_L f_k(s) (H_1^{(1)}(\gamma_k r) \cos(\varphi_0 - \alpha) - \delta_{1k} A H_1^{(1)}(\gamma_k r_1) \cos(\varphi_0 - \alpha_1)) ds, \\
& i \left( e^{i\varphi_0} \frac{\partial W_k}{\partial z} - e^{-i\varphi_0} \frac{\partial W_k}{\partial \bar{z}} \right) = \\
& = -\frac{i\gamma_k}{4} \int_L f_k(s) (H_1^{(1)}(\gamma_k r) \sin(\varphi_0 - \alpha) - \delta_{1k} A H_1^{(1)}(\gamma_k r_1) \sin(\varphi_0 - \alpha_1)) ds, \\
& z - \zeta = r e^{i\alpha}, \quad z - \bar{\zeta} = r_1 e^{i\alpha_1}.
\end{aligned}$$

При осуществлении предельного перехода  $z \rightarrow \zeta_0 \in L_j$  в (3.34) особенность в нуле функции Ханкеля  $H_1^{(1)}(\gamma r)$ , указанную в (3.33), будем выделять только в том случае, когда контур интегрирования  $L_i$  совпадает с контуром  $L_j$ . Тогда, если использовать предельные соотношения (1.38), то в соответствии с равенствами (3.31) получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_k}{\partial s_0} &= \frac{i\gamma_k}{4} \int_L f_k(s) (H_1^{(1)}(\gamma_k r_0) \cos(\varphi_0 - \alpha_0) - \delta_{1k} A H_1^{(1)}(\gamma_k r_{10}) \cos(\varphi_0 - \alpha_{10})) ds, \\
\frac{\partial W_k}{\partial n_0} &= \pm \frac{\delta_{ij}}{2} f_k(s_0) - \frac{i\gamma_k}{4} \int_L f_k(s) (H_1^{(1)}(\gamma_k r_0) \sin(\varphi_0 - \alpha_0) - \delta_{1k} A H_1^{(1)}(\gamma_k r_{10}) \sin(\varphi_0 - \alpha_{10})) ds, \tag{3.35} \\
\zeta_0 - \zeta &= r_0 e^{i\alpha_0}, \quad \zeta_0 - \bar{\zeta} = r_{10} e^{i\alpha_{10}}, \quad \zeta_0 \in L_j.
\end{aligned}$$

Здесь символ Кронекера  $\delta_{ij}$  становится равным единице, когда контур интегрирования  $L_i$  совпадает с контуром  $L_j$ ; верхний знак в выражении для  $\partial W_k / \partial n_0$  соответствует случаю  $z \in D_1$ , нижний – случаю  $z \in D_2^j$ .

Таким образом, удовлетворение модифицированного граничного условия по перемещениям (равенство производных перемещений по  $s_0 \in L_j$ ) и второго граничного условия в (3.16) приводит к системе  $2M$  интегральных уравнений (суммирование по  $k=1, 2$ ):

$$\int_L p_k(\beta) B_k(\beta_0^j, \beta) d\beta = N(\beta_0^j), \quad j = \overline{1, M}, \quad \frac{\mu_k}{2} p_k(\beta_0^j) + \int_L p_k(\beta) C_k(\beta_0^j, \beta) d\beta = T(\beta_0^j), \tag{3.36}$$

$$\begin{pmatrix} B_k \\ \frac{1}{\mu_k} C_k \end{pmatrix} = (-1)^{k-1} \frac{i\gamma_k}{4} \left[ \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 - \alpha_0) \\ -\sin(\varphi_0 - \alpha_0) \end{pmatrix} H_1^{(1)}(\gamma_k r_0) - A \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 - \alpha_{10}) \\ -\sin(\varphi_0 - \alpha_{10}) \end{pmatrix} H_1^{(1)}(\gamma_k r_{10}) \right] s'_0,$$

$$\begin{pmatrix} N \\ \frac{1}{\mu_1} T \end{pmatrix} = i\gamma_1 \tau e^{-i\gamma_1 \xi_0 \cos \theta} \left[ \begin{pmatrix} \xi'_0 \\ -\eta'_0 \end{pmatrix} Q_1(\eta_0) \cos \theta + \begin{pmatrix} \eta'_0 \\ \xi'_0 \end{pmatrix} Q_2(\eta_0) \sin \theta \right],$$

$$Q_n = e^{-i\gamma_1 \eta_0 \sin \theta} + (-1)^n A e^{i\gamma_1 \eta_0 \sin \theta}, \quad \text{если } NV = 1;$$

$$\begin{pmatrix} N \\ \frac{1}{\mu_1} T \end{pmatrix} = \frac{i\gamma_1 \tau}{4} \left[ \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 - \alpha_{q0}) \\ -\sin(\varphi_0 - \alpha_{q0}) \end{pmatrix} H_1^{(1)}(\gamma_1 r_{q0}) - A \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 - \alpha_{q0}^*) \\ -\sin(\varphi_0 - \alpha_{q0}^*) \end{pmatrix} H_1^{(1)}(\gamma_1 r_{q0}^*) \right] s'_0,$$

$$\zeta_0 - z_q = r_{q0} e^{i\alpha_{q0}}, \quad \zeta_0 - \bar{z}_q = r_{q0}^* e^{i\alpha_{q0}^*}, \quad \text{если } NV = 2.$$

Здесь ядра  $C_1(\beta_0^j, \beta^l)$  и  $C_2(\beta_0^j, \beta^l)$  непрерывны при любых значениях  $l, j = \overline{1, M}$ ; ядра  $B_1(\beta_0^j, \beta^l)$  и  $B_2(\beta_0^j, \beta^l)$  становятся сингулярными, если  $l = j$ . В этом случае

$$B_k(\beta_0^j, \beta^j) = (-1)^k \frac{1}{4\pi} \operatorname{ctg} \frac{\beta^j - \beta_0^j}{2} + F_k(\beta_0^j, \beta^j), \quad k = 1, 2, \quad (3.37)$$

где  $F_k(\beta_0^j, \beta^j)$  – непрерывная функция.

Следовательно, первые  $M$  уравнений в (3.36) являются сингулярными интегральными уравнениями первого рода.

Сделаем важное замечание. Условия типа склейки для перемещений и для производных перемещений по  $\beta_0^j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) на границе раздела двух сред будут эквивалентными, если к последним присовокупить  $M$  дополнительных условий. Здесь и в дальнейшем в качестве таковых выбираются условия равенства средних перемещений на  $L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ). Интегрирование (3.30) по  $\beta_0^j$  в пределах от 0 до  $2\pi$  дает (суммирование по  $k = 1, 2$ ):

$$\int_L p_k(\beta) A_k^j(\beta) d\beta = M^j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (3.38)$$

$$A_k^j = (-1)^{k-1} \left( -\delta_j \ln 2 + \int_0^{2\pi} A_k(\beta_0^j, \beta) d\beta_0^j \right), \quad M^j = -\int_0^{2\pi} V_0(\beta_0^j) d\beta_0^j.$$

Соотношение (3.38) следует использовать в качестве дополнительных условий, необходимых для однозначной разрешимости сингулярных интегральных уравнений первого рода в (3.36).

## 2 Случай неподвижных включений.

Если  $D_2$  – совокупность неподвижных включений, то интегральные уравнения краевой задачи с модифицированными граничными условиями получаются из первых  $M$  уравнений (3.36), если в них положить  $p_2(\beta) \equiv 0$ . Соответствующие  $M$  сингулярных интегральных уравнений и  $M$  необходимых для их однозначной разрешимости дополнительных условий приобретают вид:

$$\int_L p_1(\beta) B_1(\beta_0^j, \beta) d\beta = N(\beta_0^j), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0^j) \in L_j, \quad (3.39)$$

$$\int_L p_1(\beta) A_1^j(\beta) d\beta = M^j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (3.40)$$

Отметим, что сингулярные интегральные уравнения (3.39) и дополнительные условия (3.40) вытекают из (3.36) и (3.38) при  $\rho_2 \rightarrow \infty$ . Поэтому задача дифракции волн сдвига на системе  $M$  неподвижных включений может рассматриваться как частный случай соответствующей задачи дифракции на системе  $M$  упругих включений при  $\rho_1/\rho_2 \rightarrow 0$ .

## 3 Случай жестких включений.

Дифракция гармонических волн сдвига на системе жестких включений описывается системой сингулярных интегральных уравнений первого рода (3.39). Необходимые дополнительные условия для их однозначной разрешимости вытекают из (3.19) и записываются в виде:

$$\int_L p_1(\beta) R^j(\beta) d\beta = Q^j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (3.41)$$

$$R^j = \frac{1}{2} \delta_{ij} + \frac{1}{\mu_1} \int_0^{2\pi} C_1(\beta_0^j, \beta) d\beta_0^j + \frac{\rho_6}{\rho_1} S_6^j \gamma_1^2 \frac{1}{2\pi} A_1^j(\beta), \quad Q^j = \frac{1}{\mu_1} \int_0^{2\pi} T(\beta_0^j) d\beta_0^j + \frac{\rho_6}{\rho_1} S_6^j \gamma_1^2 \frac{1}{2\pi} M^j.$$

Случай (3.39), (3.41) вытекает из (3.36), (3.38) предельным переходом при  $\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$ .

## 4 Случай полостей.

В случае дифракции гармонических  $SH$ -волн на системе  $M$  цилиндрических полостей интегральные уравнения краевой задачи (3.20) могут быть получены

непосредственно из  $M$  последних уравнений (3.36) при  $\mu_2 = 0$ . В результате получается система  $M$  интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\frac{\mu_1}{2} p_1(\beta_0^j) + \int_L p_1(\beta) C_1(\beta_0^j, \beta) d\beta = T(\beta_0^j), \quad j = \overline{1, M}. \quad (3.42)$$

Краевая задача для системы полостей в полупространстве может рассматриваться также как предельный случай соответствующей задачи для упругих включений при  $\mu_2/\mu_1 \rightarrow 0$ .

### 3.3 Дискретизация систем интегральных уравнений

Численная реализация полученных интегральных уравнений осуществлялась двумя способами: методом механических квадратур и методом дискретных особенностей. Внутренние и внешние узлы определялись из уравнений  $\sin \frac{N}{2}(\beta_v - \beta_*) = 0$  и  $\cos \frac{N}{2}(\beta_v - \beta_{0m}) = 0$  соответственно, т. е. они задавались соотношениями

$$\beta_v = \beta_* + \frac{2\pi}{N}v, \quad \beta_{0v} = \beta_v - \frac{\pi}{N}, \quad \frac{\pi}{N} \leq \beta_* \leq \frac{2\pi}{N}, \quad v = \overline{0, 2n}. \quad (3.43)$$

Запишем интерполяционный тригонометрический полином порядка точно  $n$  для функции  $p_k(\beta)$ . В случае нечетного  $N$  он имеет вид (2.81)

$$p_{kn}(\beta_0) = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{2n} p_k^N(\beta_v) \frac{\sin \frac{N}{2}(\beta_v - \beta_0)}{\sin \frac{1}{2}(\beta_v - \beta_0)}, \quad k = 1, 2, \quad (3.44)$$

где  $p_k^N(\beta_v)$  – значение плотности  $p_k(\beta)$  в узле  $\beta_v$  при заданном  $N$ .

**1.** В соответствии с методом дискретных особенностей составим для уравнений (3.36), (3.38), которые отвечают совокупности упругих включений в полупространстве, систему  $(2N+1)M$  линейных алгебраических уравнений с  $(2N+1)M$  неизвестными  $\gamma_{0N}^j$ ,  $p_k^N(\beta_v)$  (суммирование по  $k = 1, 2$ ):

$$\gamma_{0N}^j - \frac{2\pi}{N} \sum_{l=1}^M \sum_{\nu=0}^{2n} p_k^N(\beta_\nu^l) B_k(\beta_{0m}^j, \beta_\nu^l) = N(\beta_{0m}^j), \quad j = \overline{1, M}, \quad (3.45)$$

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{l=1}^M \sum_{\nu=0}^{2n} p_k^N(\beta_\nu^l) D_k(\beta_{0m}^j, \beta_\nu^l) = T(\beta_{0m}^j), \quad m = \overline{0, 2n}, \quad (3.46)$$

$$\sum_{l=1}^M \sum_{\nu=0}^{2n} p_k^N(\beta_\nu^l) A_k^j(\beta_\nu^l) = \sum_{m=0}^{2n} V_0(\beta_{0m}^j), \quad (3.47)$$

$$D_k(\beta_{0m}^j, \beta_\nu^l) = \frac{\mu_k}{4\pi} \frac{\sin \frac{N}{2}(\beta_\nu^l - \beta_{0m}^j)}{\sin \frac{1}{2}(\beta_\nu^l - \beta_{0m}^j)} - C_k(\beta_{0m}^j, \beta_\nu^l), \quad A_k^j(\beta_\nu^l) = (-1)^{k-1} \left( -\delta_{lj} \ln 2 + \frac{2\pi}{N} \sum_{m=0}^{2n} A_k(\beta_{0m}^j, \beta_\nu^l) \right).$$

Здесь  $\gamma_{0N}^j$  – регуляризующие постоянные, которые вводятся в дискретную модель сингулярных интегральных уравнений первого рода, чтобы получить невырожденную систему линейных алгебраических уравнений (3.45)-(3.47). С увеличением  $N$  решение этой системы  $p_k^N(\beta_\nu^l)$  приближается к точному значению плотности  $p_k(\beta)$  в узле  $\beta_\nu^l$ , а постоянные  $\gamma_{0N}^j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) уменьшаются и стремятся к нулю при  $N \rightarrow \infty$ .

В методе механических квадратур дискретной моделью сингулярных интегральных уравнений первого рода является модель (3.45), в которой постоянные  $\gamma_{0N}^j$  отсутствуют. Тогда ранг системы (3.45) будет равен  $M(N-1)$  и для выделения единственного решения требуется  $M$  дополнительных условий. Они имеют вид (3.47) и вытекают из дискретизации  $M$  условий эквивалентности (3.38). Если для каждого  $j = \overline{1, M}$  одно из  $M$  соответствующих уравнений в (3.45) заменить  $j$ -м соотношением в (3.47), то получится система  $MN$  уравнений с рангом  $MN$ , которая вместе с  $MN$  уравнениями (3.46) образует совместную систему линейных алгебраических уравнений с полным рангом. Тогда, решая эту систему, однозначно определим значения  $p_k^N(\beta_\nu)$  во внутренних узлах совокупности  $L$ . Далее увеличивая  $N$ , получим искомое решение  $p_k(\beta)$  в узловых точках с заданной точностью.

Аналогично составляются дискретные модели других краевых задач.

**2.** В случае  $M$  неподвижных включений система  $M$  сингулярных интегральных уравнений первого рода (3.39) с  $M$  необходимыми дополнительными условиями (3.40) дискретизируется в виде (3.45), (3.47), если последние

рассматривать в случае  $k=1$ . Однозначное решение, которое получается после решения возникающей системы линейных алгебраических уравнений, должно совпадать с соответствующим решением системы (3.45)-(3.47) при  $\rho_1/\rho_2 \rightarrow 0$ .

3. Если рассматривается совокупность жестких включений, то система сингулярных интегральных первого рода (3.39) имеет дискретную модель (3.45) при значении  $k=1$ , которая дополняется необходимыми условиями разрешимости. Последние получают после дискретизации соотношений (3.41). Здесь значения плотности  $p_1(\beta)$  в узлах интерполяции должны совпадать с соответствующими значениями плотности  $p_1(\beta)$  – решения системы (3.45)-(3.47) при  $\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$ .

4. Совокупности полостей в полупространстве отвечает система  $M$  уравнений Фредгольма второго рода (3.42). Ее дискретная модель вытекает из (3.46) при  $k=1$ . Значения внеинтегральной плотности во внешних узлах выражаются с помощью интерполяционного полинома. В результате получается система  $MN$  линейных алгебраических уравнений с  $MN$  неизвестными, которая имеет единственное решение. Оно должно совпадать с соответствующим решением системы (3.45)-(3.47) при  $\mu_2/\mu_1 \rightarrow 0$ .

### 3.4 Численные результаты в случае системы эллиптических неоднородностей

С целью исследования сходимости построенных алгоритмов рассматривалась система однородных эллиптических неоднородностей. В ходе численной реализации на контурах эллипсов вычислялись безразмерные напряжения  $\sigma_n$  и  $\sigma_s$  путем деления соответствующих напряжений на  $\tau\mu$ . Точность вычислений проверялась сравнением результатов, полученных при различных значениях  $N$ .

Тестирование полученных результатов проводилось в случае дифракции нормально падающей ( $\theta = \pi/2$ ) волны сдвига (3.4) на одиночных эллиптических



отверстии и упругом включении в неограниченной среде. Сравнение построенных кривых распределений напряжений на контуре одиночных эллипсов с аналогичными кривыми и полученными методом конформных отображений и последующим разложением решений уравнений Гельмгольца в ряд по собственным функциям, свидетельствует о практической достоверности разработанных алгоритмов.

На одиночных эллиптических неоднородностях проверялась также эффективность метода дискретных особенностей. Расчеты показывают, что при воздействии на эллиптическое (с полуосями  $a$  и  $b$ ) неподвижное, подвижное жесткое или упругое включение гармонической волны сдвига (3.4) или (3.8) постоянная  $\gamma_{0N}$ , фигурирующая в соответствующих системах линейных алгебраических уравнений, быстро уменьшается с увеличением  $N$ , и уже при  $N=25$  во всех рассмотренных случаях значение  $|\gamma_{0N}|$  не превосходит  $10^{-8}$ . В табл. 3.1 приводятся максимальные значения  $|\gamma_{0N}|$  в зависимости от числа узлов  $N$  на контуре эллиптического упругого включения ( $b/a=2$ ,  $\rho_2/\rho_1=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\gamma_1 a=1$ ) при изменении угла  $\theta$  в (3.4) от  $0$  до  $\pi/2$  и решении соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (3.45) – (3.47).

Таблица 3.1 – Эффективность метода дискретных особенностей

$N$	3	7	11	15	25	35	55
$\max \gamma_{0N} $	2,61	0,035	0,00087	$3,3 \cdot 10^{-5}$	$10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-12}$	$3,9 \cdot 10^{-14}$

Отметим, что при  $N \geq 21$  значения напряжений  $\sigma_n$  и  $\sigma_s$  на контуре эллиптического упругого включения, вычисленные двумя методами – дискретных особенностей и механических квадратур – практически не отличаются: с точностью  $10^{-3}$  результаты совпадают при  $N=25$ , а для достижения точности  $10^{-8}$  требуется около 600 узлов. Это означает, что метод дискретных особенностей и метод

механических квадратур имеют практически одинаковую эффективность и сходятся с заданной точностью приблизительно при одном и том же количестве узлов на контуре включения. При этом замена метода никак не отражается на потере вычислительных ресурсов (память, быстродействие).

Эффективность построенных алгоритмов проверялась также в случае решетки, составленной из однородных эллипсов, поочередно расположенных на одинаковом расстоянии один от другого и ориентированных вдоль границы полупространства  $x_2 = 0$ . При нормальном падении волны сдвига (3.4) или действии гармонического сосредоточенного источника (3.8), расположенного на оси симметрии системы, рассматриваемые дифракционные задачи обладают свойством симметрии относительно оси  $ox_2$  (рис. 3.3). Свойство симметрии решетки позволяет осуществить первичное самотестирование полученных результатов и уменьшить количество решаемых линейных алгебраических уравнений. Здесь целесообразно разбиение всех контуров на нечетное число точек  $N = 2n + 1$  так, чтобы на каждом эллипсе одна из точек, в которых удовлетворяются уравнения соответствующей дискретной модели, была ближайшей к границе полупространства. Тогда при численной реализации сингулярных интегральных уравнений первого рода методом механических квадратур те из линейных алгебраических уравнений, которые отвечают указанным точкам эллипсов, удобно заменить на соответствующие дополнительные условия. Таким образом увеличивается эффективность численной схемы.

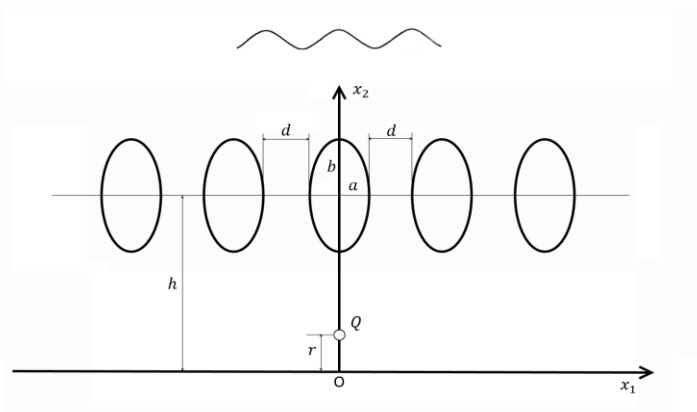


Рисунок 3.3 – Система эллиптических неоднородностей в полупространстве

Параметрическое уравнение эллипса  $L_l (l=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ , представленного в решетке, изображенной на рис. 3.3, запишем в виде

$$\begin{aligned} \xi &= a \sin \beta + (2a + d)l, \\ \eta &= -b \cos \beta, \quad \beta \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Здесь  $L_0$  – центральный эллипс, а эллипсы  $L_{-l}$  и  $L_l (l=1, 2, \dots)$  симметричны относительно оси  $Ox_2$ ; значение  $\beta=0$  на каждом эллипсе отвечает нижней точке, значение  $\beta=\pi$  соответствует верхней точке на каждом эллипсе.

Внутренние и внешние узлы на контурах эллипсов определяем формулами

$$\begin{aligned} \beta_\nu &= \frac{2\pi}{N}(2\nu - 1), \quad \nu = \overline{1, N}, \\ \beta_{0m} &= \frac{2\pi}{N}(m - 1), \quad m = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

причем в случае необходимости эти узлы можно произвольно смещать вдоль контуров эллипсов (против часовой или по часовой стрелке).

Численные исследования показали, что в пространстве ( $A=0$ ) и в полупространстве ( $A=\pm 1$ ) при воздействии на решетку  $SH$ -волны в распределении напряжений на контуре центральной эллиптической неоднородности наблюдается эффект насыщения. Это означает, что значения напряжений на контуре центрального эллипса стабилизируются уже, начиная с  $M=9$ , и дальнейшее увеличение количества объектов в решетке практически не влияет на указанные значения напряжений. Стабилизированные значения напряжений, очевидно, будут совпадать с аналогичными значениями соответствующей периодической задачи.

В качестве примеров рассмотрим прикладные задачи о распределении контурных напряжений  $\sigma_n$  и  $\sigma_s$  на решетке, состоящей из пяти эллиптических неоднородностей (рис. 3.3). Интерес представляют центральный и крайние объекты. Отсчет внешних узлов будем вести от уже указанных точек, ближайших к границе полупространства. Они являются теньвыми в случае набегания на решетку волны сдвига (3.4) или лобовыми при действии гармонического источника,

сосредоточенного в точке  $Q$  (3.8). Угол  $\beta$  будет изменяться от нуля (теньевая или лобовая точка) до  $\pi$  (лобовая или теньевая точка) для центрального эллипса в силу симметрии рассматриваемых задач и от 0 до  $2\pi$  для крайнего слева эллипса (распределения напряжений на контурах, симметричных относительно центра центрального эллипса, зеркальны). Выбраны следующие геометрические параметры системы: полуоси эллипса  $a=0,6$  и  $b=1,4$ ; расстояние между эллипсами  $d=2$ ; удаленности от границы  $x_2=0$  центров эллипсов и точки  $Q$  равны  $h=4$  и  $r=1$  соответственно. На всех рисунках кривая 1 соответствует защемленному полупространству, кривая 2 – полупространству с границей, свободной от сил, и кривая 3 – неограниченной среде. Во всех случаях полагается  $\gamma_1 d = 3$ .

Рисунок 3.4 и рисунок 3.5 характеризуют распределения  $\sigma_n$  и  $\sigma_s$  на центральном (a) и крайнем (b) эллипсах при нормальном падении волны сдвига ( $NV=1$ ) и действии гармонического сосредоточенного источника ( $NV=2$ ) на решетку, составленную из пяти упругих волокон ( $\rho_2/\rho_1=2$ ,  $\mu_2/\mu_1=5$ ).

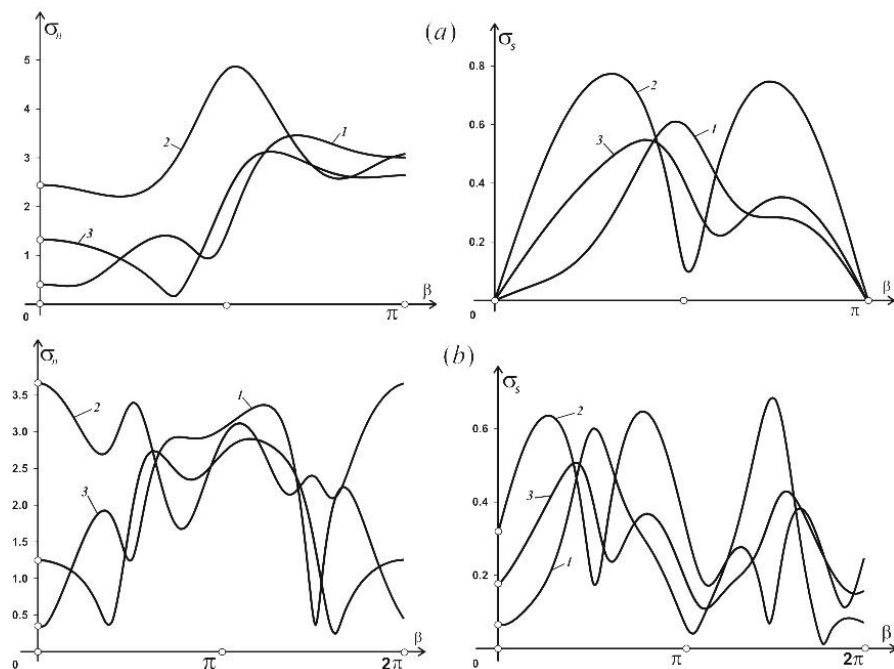


Рисунок 3.4 – Распределения контурных напряжений на центральном (a) и крайнем (b) эллиптических упругих включениях в случае  $NV=1$

Стабильность результатов (точность  $\varepsilon = 10^{-3}$ ) здесь достигается при  $N = 55$ , что с учетом симметрии соответствует системе 280 линейных комплексных алгебраических уравнений в случае метода дискретных особенностей и 275 уравнений в случае метода механических квадратур. Расчеты подтверждают существенное влияние границы полупространства на напряженное состояние упругих включений, особенно это проявляется в случае границы  $x_2 = 0$ , свободной от сил. Преобладающими на границе матрица-волокно являются напряжения  $\sigma_n$ , которые значительно превосходят напряжения  $\sigma_s$ .

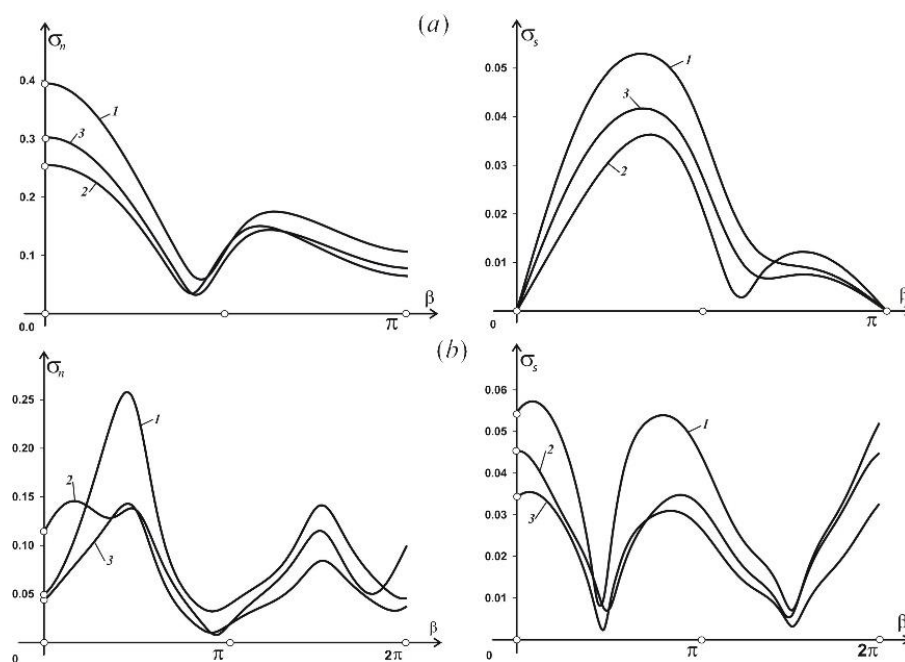


Рисунок 3.5 – Распределения контурных напряжений на центральном (а) и крайнем (b) эллиптических упругих включениях в случае  $NV=2$

Влияние нормально падающей волны сдвига на распределение напряжения  $\sigma_n$  на центральном (а) и крайнем (b) эллипсах в случае решетки из пяти неподвижных включений иллюстрирует рис. 3.6, а в случае решетки из пяти подвижных жестких включений  $\left(\frac{\rho_B}{\rho_1} = 2\right)$  – рис. 3.7.

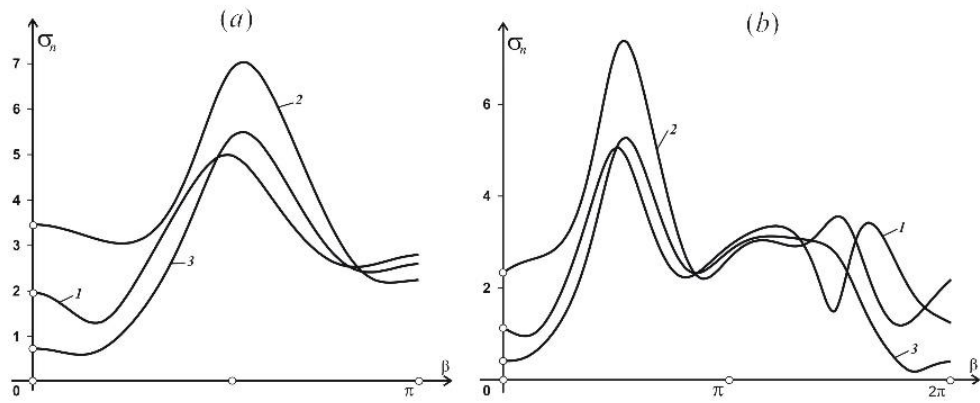


Рисунок 3.6 – Распределения напряжения  $\sigma_n$  на центральном (a) и крайнем (b) эллиптических неподвижных включениях в случае  $NV=1$

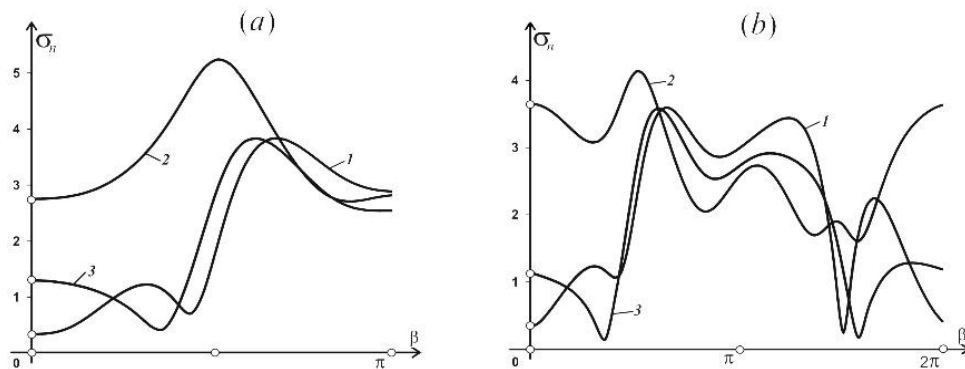


Рисунок 3.7 – Распределения напряжения  $\sigma_n$  на центральном (a) и крайнем (b) эллиптических жестких включениях в случае  $NV=1$

Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что с удалением эллипса от оси симметрии характер изменения контурных напряжений усложняется, причем максимальные значения  $\sigma_n$  уменьшаются. Как и в случае упругих включений, значительное увеличение амплитуд напряжений наблюдается в полупространстве со свободной от сил границей. Отметим, что в случае действия гармонического сосредоточенного источника напряжения  $\sigma_n$  на порядок меньше, поэтому их распределения здесь не приводятся.

На рисунке 3.8 и рис. 3.9 приведены распределения напряжения  $\sigma_s$  на центральном (a) и крайнем (b) эллипсах при нормальном падении волны сдвига ( $NV=1$ ) и действии сосредоточенного источника ( $NV=2$ ) на решетку, составленную из пяти эллиптических отверстий.

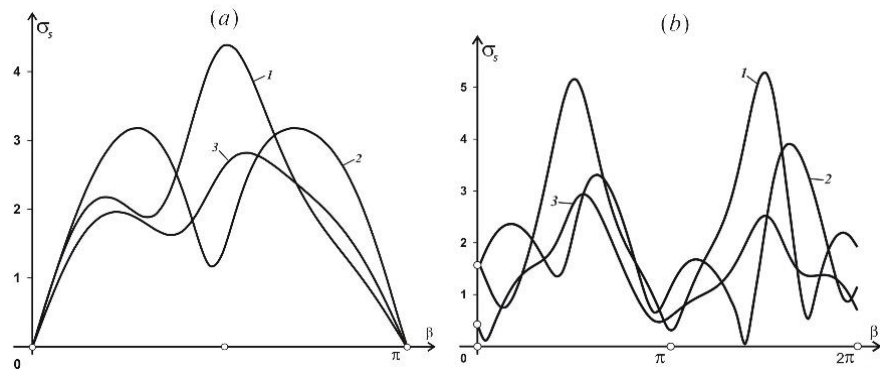


Рисунок 3.8 – Распределения напряжения  $\sigma_s$  на центральном (a) и крайнем (b) эллиптических отверстиях в случае  $NV=1$

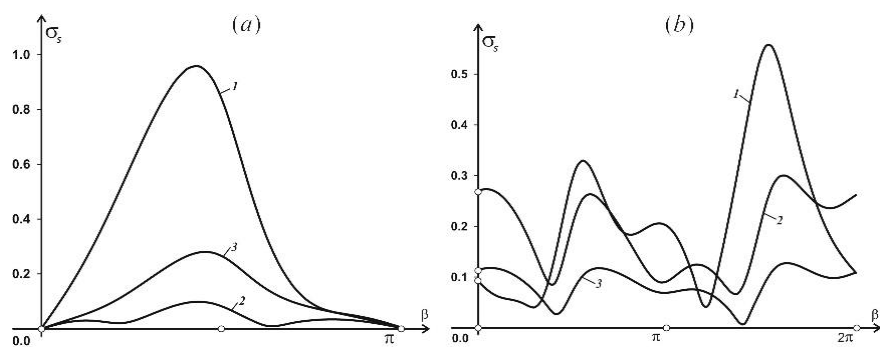


Рисунок. 3.9 – Распределения напряжения  $\sigma_s$  на центральном (a) и крайнем (b) эллиптических отверстиях в случае  $NV=2$

Как видно, в отличие от предыдущих случаев, наиболее сильно себя проявляют напряжения  $\sigma_s$  в защемленном полупространстве. Здесь на центральном и крайних отверстиях  $\max \sigma_s$  достигается вблизи точек соскальзывания, причем при удалении от оси симметрии  $\max \sigma_s$  увеличивается.

Для практических исследований с точки зрения механики разрушения важно знать максимальные значения напряжений на границе объекта, которые при изменении входных параметров достигаются в тех или иных точках границы. На рис. 3.10 приведены зависимости максимальных амплитуд напряжений от относительного модуля сдвига одиночного эллиптического упругого включения

$\left(\frac{a}{b} = 2; \frac{h}{b} = 4; \frac{\rho_2}{\rho_1} = 2; \gamma_1 b = 0.8\right)$ . Кривые 1, 2 и 3 отвечают случаям  $A = 0, 1$  и  $-1$ ; сплошные линии - напряжение  $-\sigma_s$ ; пунктирные - напряжение  $\sigma_n$ .

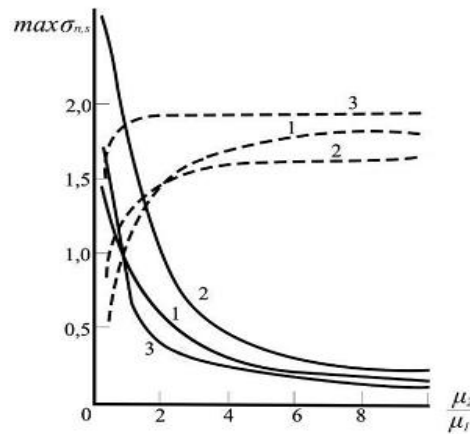


Рисунок 3.10 – Зависимости максимальных напряжений на контуре эллиптического волокна от относительного модуля сдвига волокна

В результате расчетов установлено, что при отношении  $\frac{\mu_2}{\mu_1} < 1,5$  преобладающими на границе раздела матрица-волокно могут быть напряжения  $\sigma_s$ . Если же  $\frac{\mu_2}{\mu_1} > 1,5$ , то во всех рассмотренных случаях преобладают контактные напряжения  $\sigma_n$ . Этот факт согласуется с результатами для случая пространства ( $A = 0$ ), и свидетельствует о возможности разрушения в композитном материале вследствие отрыва по границе раздела матрица - армирующий элемент. Отметим, что случай  $\mu_2 = 0$  отвечает дифракции волны сдвига на эллиптической полости, поэтому при  $\frac{\mu_2}{\mu_1} \rightarrow 0$  напряжение  $\sigma_n$  стремится к нулю. Случай  $\mu_2 = \infty$  соответствует подвижному жесткому включению, поэтому при  $\frac{\mu_2}{\mu_1} \rightarrow \infty$  напряжение  $\sigma_s$  стремится к нулю, а напряжение  $\sigma_n$  стремится к значениям, соответствующим аналогичным значениям на контуре эллиптического жесткого включения.

Проблема идентификации неоднородностей требует расчёта концентрации перемещений на некоторых участках среды в зависимости от волновых характеристик. В случае свободной границы  $x_2 = 0$  можно помещать сосредоточенный источник в некоторую точку оси  $0x_1$  и рассчитывать дифрагированное поле перемещений в точках этой прямой. Знание коэффициента концентрации  $\left| \frac{W}{V_0} \right|$  может помочь установить свойства объекта, расположенного в упругой среде. На рис. 3.11 показано изменение концентрации амплитуд



перемещений  $\left| \frac{W}{V_0} \right|$  в точках свободной границы полупространства  $x_2 = 0$  ( $A = -1; \frac{a}{b} = 2; \frac{h}{b} = 4; \frac{\mu_2}{\mu_1} = 2$ ). Кривые 1 и 2 отвечают случаям  $\gamma_1 b = 0,8$  и  $\gamma_1 b = 0,9$ ; для сплошных линий  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 2$ , для пунктирных  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 5$ .

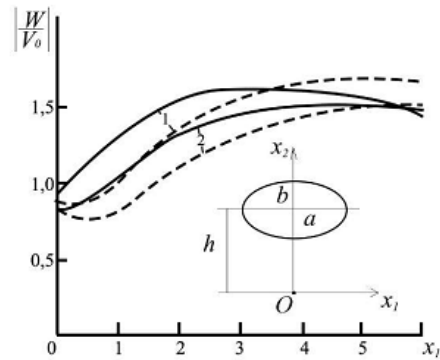


Рисунок 3.11 – Изменение концентрации амплитуд перемещений на границе  $x_2 = 0$  при действии в точке  $O(0,0)$  гармонического источника

Полученные результаты можно использовать при идентификации упругих включений, когда по зависимости коэффициента концентрации амплитуд перемещений точек границы тела от частоты устанавливаются геометрические характеристики упругих включений.

## 4 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ СДВИГА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ РЕШЕТКАМИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

### 4.1 Постановка краевых задач для периодических решеток

Рассмотрим полупространство  $x_2 \geq 0$ , ось антиплоской деформации которого направлена вдоль оси  $Ox_3$ , содержащее  $2d$  – периодическую систему цилиндров, причем считаем, что в основной полосе периодов имеется только один цилиндр. Пусть  $D_2$  – поперечное сечение такого цилиндра, ограниченное замкнутым контуром  $L$  ( $L$  – кривая Ляпунова). Внешнюю область обозначим  $D_1$  и будем называть её матрицей. Положительное направление обхода  $L$  выбираем так, чтобы при движении вдоль  $L$  область  $D_1$  оставалась слева. Источники возбуждающего волнового поля полагаем заданными вне цилиндров, т.е. в области  $D_1$ .

Предположим, что из бесконечности на данную структуру падает монохроматическая волна сдвига (рис. 4.1)

$$u_3^{(0)}(x_1, x_2, t) = W_0(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \quad (4.1)$$

амплитуду которой будем задавать в виде ( $\tau = \text{const}$ )

$$W_0 = \tau e^{-i\gamma_1 x_2}, \quad (4.2)$$

где  $\gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}$  – волновое число,  $c_1$  – скорость распространения волны сдвига в области  $D_1$ .

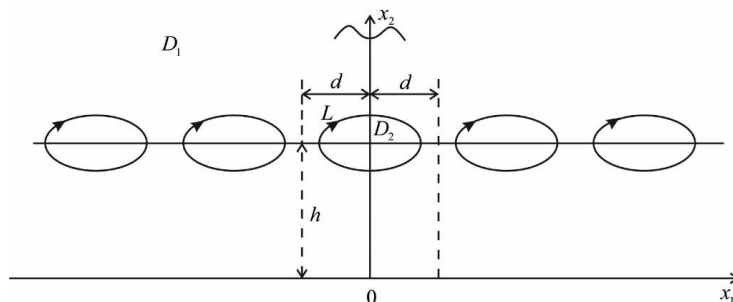


Рисунок 4.1 – Периодическая система неоднородностей в полупространстве

При взаимодействии волны (4.2) с границей  $x_2=0$  возникает отраженная волна сдвига с амплитудой

$$U_0 = \tau e^{i\gamma x_2}. \quad (4.3)$$

Тогда общее волновое поле в полупространстве  $x_2 \geq 0$  при отсутствии неоднородностей равно

$$V_0 = W_0 - AU_0. \quad (4.4)$$

Здесь и в дальнейшем значение  $A=1$  соответствует заземленному полупространству; значение  $A=-1$  – полупространству со свободной от сил границей  $x_2=0$ ; случай  $A=0$  отвечает неограниченной среде.

В результате взаимодействия волн  $W_0$  и  $U_0$  с цилиндрами в области  $D_1$  возникает рассеянное волновое поле  $W_1$ . Общее поле перемещений в матрице запишем в виде

$$W = W_1 + V_0, \quad (x_1, x_2) \in D_1. \quad (4.5)$$

Если  $D_2$  – упругое включение, то для проникающего внутрь цилиндров волнового поля положим  $W = W_2$ . Аналогично (3.14) амплитуды  $w_1$  и  $w_2$  в областях  $D_1$  ( $k=1$ ) и  $D_2$  ( $k=2$ ) удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\Delta W_k + \gamma_k^2 W_k = 0, \quad \gamma_k = \frac{\omega}{c_k}, \quad c_k = \sqrt{\frac{\mu_k}{\rho_k}}, \quad k=1,2. \quad (4.6)$$

Граничные условия на контуре  $L$  неоднородностей.

**1.** В случае периодической системы упругих включений в полупространстве на  $L$  выполняем условия типа «склейки», т.е. требуем непрерывность при переходе через  $L$  амплитуд перемещения  $W$  и сдвигового напряжения  $\sigma_n$ . Тогда на  $L$  имеем

$$W_1 + V_0 = W_2, \quad \mu_1 \frac{\partial}{\partial n_0} (W_1 + V_0) = \mu_2 \frac{\partial W_2}{\partial n_0}, \quad (4.7)$$

где  $n_0$  - положительная нормаль к  $L$ .

**2.** Если  $D_2$  – неподвижное включение, то на  $L$  (со стороны матрицы) перемещение равно нулю, т.е.

$$W_1 + V_0 = 0. \quad (4.8)$$

3. Если  $D_2$  – жесткое включение, то на контуре  $L$  выполняется равенство

$$W_1 + V_0 = B.$$

Здесь для определения неизвестной комплексной постоянной  $B$  необходимо привлечь дополнительное условие. Оно вытекает из закона Ньютона движения включения как абсолютно жесткого тела и имеет вид

$$\mu_1 \int_L \frac{\partial}{\partial n_0} (W_1 + V_0) ds_0 = -\rho_s S_s \omega^2 B, \quad (4.9)$$

где  $\rho_s$  – плотность,  $S_s$  – площадь включения  $D_2$ .

4. В случае, когда  $D_2$  – полость, контур  $L$  свободен от сил, и на  $L$  имеем

$$\frac{\partial}{\partial n_0} (W_1 + V_0) = 0. \quad (4.10)$$

Таким образом, задача сводится к отысканию  $2d$ - периодических решений уравнения Гельмгольца (4.6), которые удовлетворяют соответствующим условиям на контуре  $L$  и границе  $x_2 = 0$ . Кроме того, функция  $W_1(x_1, x_2)$  должна выполнять условия излучения на бесконечности, т. е. представлять собой расходящуюся волну или суперпозицию расходящихся волн.

## 4.2 Периодическая функция источника уравнения Гельмгольца

Рассмотрим сначала неограниченную среду и в ней  $2d$ -периодическую систему линейных вдоль оси  $Ox_3$  гармонических источников (зависимость от времени  $e^{-i\omega t}$ ), сосредоточенных в точках  $(\xi + 2ld, \eta)$ , где  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Периодическая функция источника уравнения Гельмгольца удовлетворяет уравнению

$$\Delta G + \gamma^2 G = - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x_1 - \xi - 2ld, x_2 - \eta) \quad (4.11)$$

и имеет вид

$$G(x_1, x_2, \xi, \eta) = \frac{1}{2di} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{i\lambda_l |x_2 - \eta|}}{(1 + \delta_{l_0}) \lambda_l} \cos \alpha_l (x_1 - \xi). \quad (4.12)$$

$$\alpha_l = \frac{\pi l}{d}, \quad \lambda_l = \sqrt{\gamma^2 - \alpha_l^2}, \quad \gamma > \alpha_l; \quad \lambda_l = i\sqrt{\alpha_l^2 - \gamma^2}, \quad \gamma < \alpha_l,$$

где  $\delta_{l_0}$  – символ Кронекера,  $\delta(x, y)$  – дельта-функция Дирака.

Анализ формулы (4.12) показывает, что периодическая функция источника для уравнения Гельмгольца есть суперпозиция распространяющихся ( $\gamma > \alpha_l$ ) и нераспространяющихся ( $\gamma < \alpha_l$ ) волн. Поле, порождаемое нераспространяющимися волнами, уменьшается в направлении оси  $Ox_2$  по экспоненциальному закону (неоднородные волны). Число неоднородных волн бесконечно и средний поток энергии для этих волн равен нулю.

Число распространяющихся (однородных) волн конечно, и оно зависит от волнового числа  $\gamma$ . Чем больше  $\gamma$ , тем больше однородных волн распространяется в среде. Уравнение

$$\alpha_l^2 + \lambda_l^2 = \gamma^2, \quad \alpha_l = \frac{\pi l}{d} \quad (4.13)$$

называется дисперсионным соотношением. Если  $\gamma > \alpha_l$ , то  $\lambda_l$  – вещественно и в полосе периодов возникает однородная волна, бегущая в направлении оси  $Ox_2$  с фазовой скоростью

$$c_\phi = \frac{\omega}{\lambda_l} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_l^2}{\gamma^2}}} > c. \quad (4.14)$$

Групповая скорость (скорость переноса энергии) равна

$$c_r = \frac{d\omega}{d\lambda_l} = c \sqrt{1 - \frac{\alpha_l^2}{\gamma^2}} < c. \quad (4.15)$$

Здесь  $c$  – скорость распространения волны сдвига в среде.

Поскольку  $c_\phi \neq c_r$ , то в среде наблюдается явление дисперсии. Вместе с тем, из формул (4.14), (4.15) вытекает, что знаки фазовой и групповой скоростей в  $l$ -й волне совпадают во всей области частот ( $\omega > c\alpha_l$ ). Одинаковая направленность фазовой и групповой скоростей обеспечивает выполнение условий излучения. Распространяющиеся волны переносят энергию, причем средний по времени поток

энергии через поперечное сечение полосы периодов в направлении оси  $Ox_2$  в этих волнах положителен.

Итак, при указанном в (4.12) выборе знаков для  $\lambda_l$  поле, порождаемое периодической системой источников, носит характер расходящихся волн, что соответствует условиям излучения. Отметим здесь также, что при выполнении условия  $\gamma = \alpha_l$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) ряды (4.12) являются расходящимися. В этом случае соответствующая волна распространяется перпендикулярно оси  $Ox_2$  и для этой волны отсутствует какое-либо изменение поля вдоль этой оси. По этой причине точки (частоты), в которых  $\gamma = \alpha_l \left( \omega = \frac{\pi l}{d} c \right)$ , часто называют точками скольжения.

Ряд в (4.12) расходится в точке приложения сосредоточенного источника, расположенной в основном периоде ( $x_1 = \xi, x_2 = \eta$ ). Для выделения особенности функции  $G$  (4.12) в точке  $(\xi, \eta)$  в явном виде рассмотрим фундаментальное  $2d$ -периодическое решение  $G_0(x_1, x_2, \xi, \eta)$  уравнения Лапласа, соответствующего статической задаче ( $\omega = 0$ ).

Периодическая функция источника уравнения Лапласа удовлетворяет уравнению

$$\Delta G = - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x_1 - \xi - 2ld, x_2 - \eta) \quad (4.16)$$

и имеет вид

$$G_0(x_1, x_2, \xi, \eta) = \frac{|x_2 - \eta|}{4d} - \frac{1}{2d} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_l |x_2 - \eta|}}{\alpha_l} \cos \alpha_l (x_1 - \xi). \quad (4.17)$$

Последнее выражение можно просуммировать в явном виде. Тогда получим

$$G_0(x_1, x_2, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi r}{2d} \right|, \quad r = |z - \zeta|, \quad (4.18)$$

$$z = x_1 + ix_2, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Как и следовало ожидать, в точке  $z = \zeta$  функция  $G_0$  имеет логарифмическую особенность, которую представим следующим образом

$$\begin{aligned}
G_0(x_1, x_2, \xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\pi(z-\zeta)}{2d} \right| + \frac{\ln 2}{2\pi} = \\
&= \frac{1}{4\pi} \ln \sin \frac{\pi(z-\zeta)}{2d} \sin \frac{\pi(\bar{z}-\bar{\zeta})}{2d} + \frac{\ln 2}{2\pi}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Запишем теперь функцию  $G$  (4.12) в виде

$$G = G_0 + (G - G_0). \tag{4.20}$$

Используя представления (4.12) и (4.17), (4.19), приходим, с учетом (4.20), к следующему выражению для  $2d$ -периодической функции источника уравнения Гельмгольца (4.11):

$$\begin{aligned}
G(P, Q) &= \frac{1}{2\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi(z-\zeta)}{2d} \right| + \frac{1}{2d} \sum_{l=0}^{\infty} f_l(x_2 - \eta) \cos \alpha_l(x_1 - \xi), \\
f_0(t) &= \frac{e^{i\gamma|t|}}{2i\gamma} - \frac{|t|}{2}, \quad f_l(t) = \frac{e^{i\lambda_l|t|}}{i\lambda_l} + \frac{e^{-\alpha_l|t|}}{\alpha_l}, \quad l \neq 0.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Здесь  $P(x_1, x_2)$  – точка области, в которой вычисляется функция  $G$ ;

$Q(\xi, \eta)$  – точка приложения сосредоточенного источника в основном периоде.

Если в точке  $P=Q$  ряд в (4.12) расходился (общий член ряда ведёт себя как  $1/l$ ), то фигурирующий в (4.21) ряд сходится равномерно и абсолютно: при  $P \neq Q$  в силу присутствия затухающих экспонент, а при  $P=Q$  общий член ряда ведет себя как  $1/l^3$ . Действительно, в случае  $P=Q$  при больших  $l$  имеем

$$\frac{1}{\alpha_l} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_l^2 - \gamma^2}} = \frac{\sqrt{\alpha_l^2 - \gamma^2} - \alpha_l}{\alpha_l \sqrt{\alpha_l^2 - \gamma^2}} = \frac{-\gamma^2}{\alpha_l \sqrt{\alpha_l^2 - \gamma^2} (\sqrt{\alpha_l^2 - \gamma^2} + \alpha_l)} \approx -\frac{\gamma^2}{2\alpha_l^3}. \tag{4.22}$$

Итак, при  $P=Q$  периодическая функция источника уравнения Гельмгольца имеет логарифмическую особенность, соответствующую периодической функции источника уравнения Лапласа.

Возвращаемся к уравнениям Гельмгольца (4.6). Запишем для них периодические функции источника в областях  $D_1$  и  $D_2$ . Имеем в виду, что функция  $G_k(P, Q)$  должна удовлетворять условиям на границе  $x_2=0$  и условиям излучения на бесконечности. В соответствии с (4.21) получим ( $k=1, 2$ )

$$G_k(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi(z - \zeta)}{2d} \right| + \frac{1}{2d} \sum_{l=0}^{\infty} \{f_l^{(k)}(x_2 - \eta) - \delta_{lk} A g_l^{(k)}(x_2 + \eta)\} \cos \alpha_l (x_1 - \xi), \quad (4.23)$$

$$f_0^{(k)}(t) = \frac{e^{i\gamma_k |t|}}{2i\gamma_k} - \frac{|t|}{2}, \quad g_0^{(k)}(t) = \frac{e^{i\gamma_k t}}{2i\gamma_k},$$

$$f_l^{(k)}(t) = \frac{e^{i\lambda_{kl}|t|}}{i\lambda_{kl}} + \frac{e^{-\alpha_l |t|}}{\alpha_l}, \quad g_l^{(k)}(t) = \frac{e^{i\lambda_{kl} t}}{i\lambda_{kl}}, \quad l \neq 0,$$

$$\lambda_{kl} = \sqrt{\gamma_k^2 - \alpha_l^2}, \quad \gamma_k > \alpha_l; \quad \lambda_{kl} = i\sqrt{\alpha_l^2 - \gamma_k^2}, \quad \gamma_k < \alpha_l.$$

Здесь для точек  $P(x_1, 0)$  границы  $x_2 = 0$  выполняются равенства:

$$G_1|_{x_2=0} = 0 \quad \text{при } A = 1; \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0 \quad \text{при } A = -1.$$

Отметим также, что функция  $G_1(P, Q)$  является суперпозицией конечного числа распространяющихся гармоник, для которых знаки фазовых и групповых скоростей совпадают. Этим обеспечивается выполнение условий излучения на бесконечности.

### 4.3 Интегральные уравнения в случае периодических решеток в полупространстве

Следуя принятой нами методике, представим функции  $W_1$  и  $W_2$ , которые характеризуют дифрагированные волновые поля в областях  $D_1$  и  $D_2$ , в виде потенциалов типа простого слоя. Имеем

$$W_k(x_1, x_2) = \int_L \rho_k(s) G_k(x_1, x_2, \xi, \eta) ds, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L, \quad k = 1, 2, \quad (4.25)$$

$$G_k = \frac{1}{2di} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{i\lambda_{kl}|x_2 - \eta|} - \delta_{lk} A e^{i\lambda_{kl}(x_2 + \eta)}}{(1 + \delta_{lo}) \lambda_{kl}} \cos \alpha_l (x_1 - \xi),$$

$$\alpha_l = \frac{\pi l}{d}, \quad \lambda_{kl} = \sqrt{\gamma_k^2 - \alpha_l^2}, \quad \gamma_k > \alpha_l; \quad \lambda_{kl} = i\sqrt{\alpha_l^2 - \gamma_k^2}, \quad \gamma_k < \alpha_l.$$



Здесь  $G_1$  и  $G_2$  - периодические функции источника в областях  $D_1$  и  $D_2$ , записанные в соответствии с (4.12).

Интегральные представления (4.25) автоматически удовлетворяют соответствующим уравнениям Гельмгольца (4.6), обеспечивают периодичность волновых полей, выполнение условий на границе полупространства  $x_2 = 0$  (4.24) и условий излучения на бесконечности.

Отметим, что в точках контура  $L$  ( $x_1 = \xi, x_2 = \eta$ ) ряды, фигурирующие в (4.25), являются расходящимися (общие члены рядов ведут себя как  $1/l$ ). Поэтому целесообразно выделение логарифмической особенности в периодических функциях источника и одновременное ускорение сходимости возникающих функциональных рядов. С этой целью функции  $G_1$  и  $G_2$  будем представлять в виде (4.23), где присутствующие ряды сходятся абсолютно (при  $x_1 = \xi, x_2 = \eta$  общие члены рядов здесь ведут себя как  $1/l^3$ ).

Будем решать краевую задачу (4.6), (4.7). Остальные задачи можно получать из неё как частные случаи. Пусть параметрическое уравнение контура  $L$  задаётся равенствами

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(\beta), \quad \eta = \eta(\beta), \quad \zeta = \xi + i\eta = \zeta(\beta), \\ \zeta(\beta + 2\pi) &= \zeta(\beta), \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Подстановка интегральных представлений (4.25), с учетом выделения логарифмической особенности у подынтегральных ядер (4.23), в первое из граничных условий (4.7) приводит к интегральному уравнению с логарифмическими ядрами (суммирование по  $k = 1, 2$ ):

$$(-1)^k \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_k(\beta) \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0}{2} \right| d\beta + \int_0^{2\pi} p_k(\beta) A_k(\beta_0, \beta) d\beta \right) = -V_0(\beta_0), \quad (4.27)$$

$$A_k(\beta_0, \beta) = G_k(\beta_0, \beta) - \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0}{2} \right|, \quad p_k(\beta) = p_k(s(\beta)) \cdot s'(\beta),$$

$$V_0(\beta_0) = \tau(e^{-i\gamma_0 \eta_0} - A e^{i\gamma_0 \eta_0}), \quad \beta_0 \in [0, 2\pi].$$

Здесь функции  $G_k(\beta_0, \beta)$ ,  $k = 1, 2$  определяются выражениями (4.23) и

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \left( \ln \left| 2 \sin \frac{\pi(\zeta - \zeta_0)}{2d} \right| - \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0}{2} \right| \right) = \ln \left( \frac{2\pi}{d} s'(\beta_0) \right).$$

Следуя принятому нами подходу, с целью получения сингулярного интегрального уравнения, продифференцируем уравнение (4.27) по переменной  $\beta_0$ .

При этом используем следующие правила дифференцирования:

$$\frac{d}{d\beta_0} = \xi'_0 \frac{d}{d\xi_0} + \eta'_0 \frac{d}{d\eta_0} = \zeta'_0 \frac{d}{d\zeta_0} + \bar{\zeta}'_0 \frac{d}{d\bar{\zeta}_0}. \quad (4.28)$$

В результате приходим к сингулярному интегральному уравнению первого рода (суммирование по  $k=1, 2$ ):

$$\int_0^{2\pi} p_k(\beta) B_k(\beta, \beta_0) d\beta = N(\beta_0), \quad \beta_0 \in [0, 2\pi], \quad (4.29)$$

$$(-1)^k B_k(\beta_0, \beta) = \frac{1}{4d} \operatorname{Re} \left\{ \zeta'_0 \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2d} \right\} -$$

$$- \frac{\xi'_0}{2d} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l \left\{ \frac{e^{i\lambda_{kl}|\eta_0 - \eta|}}{i\lambda_{kl}} + \frac{e^{-\alpha_l|\eta_0 - \eta|}}{\alpha_l} - \delta_{1k} A \frac{e^{i\lambda_{kl}(\eta_0 + \eta)}}{i\lambda_{kl}} \right\} \sin \alpha_l (\xi_0 - \xi) +$$

$$+ \frac{\eta'_0}{2d} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (e^{i\lambda_{kl}|\eta_0 - \eta|} - e^{-\alpha_l|\eta_0 - \eta|}) \operatorname{sign}(\eta_0 - \eta) - \delta_{1k} A e^{i\lambda_{kl}(\eta_0 + \eta)} \right\} \frac{\cos \alpha_l (\xi_0 - \xi)}{1 + \delta_{l0}},$$

$$N(\beta_0) = \bar{a} \gamma_1 \eta'_0 (e^{-i\gamma_1 \eta_0} + A e^{i\gamma_1 \eta_0}).$$

Здесь ядра  $B_1(\beta_0, \beta)$  и  $B_2(\beta_0, \beta)$  сингулярны, причем

$$\frac{1}{4d} \operatorname{Re} \left\{ \zeta'_0 \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2d} \right\} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{ctg} \frac{\beta - \beta_0}{2} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\pi}{d} \zeta'_0 \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2d} - \operatorname{ctg} \frac{\beta_0 - \beta}{2} \right\}, \quad (4.30)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \left( \frac{\pi}{d} \zeta'_0 \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2d} - \operatorname{ctg} \frac{\beta_0 - \beta}{2} \right) = \frac{\xi''(\beta_0)}{\xi'(\beta_0)}.$$

Дополнительное условие, необходимое для однозначной разрешимости сингулярного интегрального уравнения (4.29), вытекает из условия эквивалентности уравнений (4.29) и (4.27). Получим его из равенства средних перемещений на  $L$ . Для этого проинтегрируем (4.27) по  $\beta_0$  в пределах от 0 до  $2\pi$ . Имеем (суммирование по  $k=1, 2$ ):

$$\int_0^{2\pi} p_k(\beta) R_k(\beta) d\beta = - \int_0^{2\pi} V_0(\beta_0) d\beta_0, \quad (4.31)$$

$$R_k(\beta) = (-1)^k \left( -\ln 2 + \int_0^{2\pi} A_k(\beta_0, \beta) d\beta_0 \right).$$

Если присовокупить равенство (4.31) к уравнению (4.29), то это уравнение становится эквивалентным уравнению (4.27). Сингулярное интегральное уравнение первого рода (4.29) необходимо рассматривать совместно с дополнительным соотношением (4.31).

Выполним теперь второе граничное условие в (4.7). Если производная по дуговой координате  $s_0$  непрерывна на  $L$ , то производная по нормали  $n_0$  при переходе через  $L$  терпит разрыв. Для подынтегральных ядер будем использовать следующие формулы дифференцирования:

$$s'_0 \frac{\partial}{\partial n_0} = -\eta'_0 \frac{\partial}{\partial \xi_0} + \xi'_0 \frac{\partial}{\partial \eta_0} = i \left( \zeta'_0 \frac{\partial}{\partial \zeta_0} - \bar{\zeta}'_0 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_0} \right). \quad (4.32)$$

Подстановка (4.25) в равенство сдвиговых напряжений на  $L$  (4.7) даёт (суммирование по  $k=1, 2$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\mu_k}{2} \rho_k(\beta_0) + \int_0^{2\pi} \rho_k(\beta) C_k(\beta_0, \beta) d\beta = T(\beta_0), \quad \beta_0 \in [0, 2\pi], \quad (4.33) \\ \frac{1}{\mu_k} (-1)^k C_k(\beta_0, \beta) = -\frac{1}{4d} \operatorname{Im} \left\{ \zeta'_0 \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2d} \right\} + \\ + \frac{\eta'_0}{2d} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l \left\{ \frac{e^{i\lambda_{kl}|\eta_0 - \eta|}}{i\lambda_{kl}} + \frac{e^{-\alpha_l|\eta_0 - \eta|}}{\alpha_l} - \delta_{1k} A \frac{e^{i\lambda_{kl}(\eta_0 + \eta)}}{i\lambda_{kl}} \right\} \sin \alpha_l (\xi_0 - \xi) + \\ + \frac{\xi'_0}{2d} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \left( e^{i\lambda_{kl}|\eta_0 - \eta|} - e^{-\alpha_l|\eta_0 - \eta|} \right) \operatorname{sign}(\eta_0 - \eta) - \delta_{1k} A e^{i\lambda_{kl}(\eta_0 + \eta)} \right\} \frac{\cos \alpha_l (\xi_0 - \xi)}{1 + \delta_{10}}, \\ T(\beta_0) = \tau \mu_1 i \gamma_1 \xi'_0 (e^{-i\gamma_1 \eta_0} + A e^{i\gamma_1 \eta_0}). \end{aligned}$$

Здесь в силу предельного равенства в (4.30) ядра  $C_1(\beta_0, \beta)$  и  $C_2(\beta_0, \beta)$  являются непрерывными. Поэтому уравнение (4.33) – интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

Сделаем следующие выводы.

**1.** Задача дифракции гармонической волны сдвига (4.2) на периодической решетке, составленной из упругих включений, сводится к решению системы сингулярного интегрального уравнения первого рода (4.29), которое необходимо рассматривать совместно с дополнительным условием (4.31), и интегрального уравнения Фредгольма второго рода (4.33).

2. В случае периодической системы неподвижных включений в полупространстве возникает сингулярное интегральное уравнение первого рода

$$\int_0^{2\pi} p_1(\beta) B_1(\beta_0, \beta) d\beta = N(\beta_0), \quad \beta_0 \in [0, 2\pi]. \quad (4.34)$$

Для выделения единственного решения уравнения (4.34) к нему необходимо присовокупить дополнительное условие

$$\int_0^{2\pi} p_1(\beta) R_1(\beta) d\beta = - \int_0^{2\pi} V_0(\beta_0) d\beta_0. \quad (4.35)$$

Решение системы уравнений (4.34), (4.35) может быть получено из решения системы уравнений (4.29), (4.31), (4.33) предельным переходом при  $\rho_1/\rho_2 \rightarrow 0$ .

3. Дифракция гармонической волны сдвига на периодической системе жестких включений также описывается сингулярным интегральным уравнением первого рода (4.34). Необходимое дополнительное условие вытекает из (4.9) и записывается в виде

$$\int_0^{2\pi} p_1(\beta) R(\beta) d\beta = Q, \quad (4.36)$$

$$R(\beta) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu_1} \int_0^{2\pi} C_1(\beta_0, \beta) d\beta_0 + \frac{\rho_0}{\rho_1} S_0 \gamma_1^2 \frac{1}{2\pi} R_1(\beta),$$

$$Q = -\frac{1}{\mu_1} \int_0^{2\pi} T(\beta_0) d\beta_0 - \frac{\rho_0}{\rho_1} S_0 \gamma_1^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_0(\beta_0) d\beta_0.$$

Случай (4.34), (4.36) следует непосредственно из (4.29), (4.31), (4.33) предельным переходом при  $\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$ .

4. Взаимодействие гармонической волны сдвига (4.2) с периодической системой полостей в полупространстве  $x_2 \geq 0$  описывается интегральным уравнением Фредгольма второго рода

$$\frac{\mu_1}{2} p_1(\beta_0) + \int_0^{2\pi} p_1(\beta) C_1(\beta_0, \beta) d\beta = T(\beta_0), \quad \beta_0 \in [0, 2\pi]. \quad (4.37)$$

Краевую задачу для периодической решетки, составленной из полостей, можно рассматривать также как предельный случай соответствующей задачи для периодической системы упругих включений в полупространстве при  $\mu_2/\mu_1 \rightarrow 0$ .

#### 4.4 Системы линейных алгебраических уравнений

При численной реализации интегральных уравнений на замкнутом контуре  $L$ , расположенном в основном периоде, выбиралось нечетное число  $N = 2n + 1$  внутренних и внешних узлов, которые определялись равенствами

$$\beta_\nu = \frac{2\nu + 1}{N} \pi, \quad \beta_{0m} = \frac{2\pi}{N} m, \quad \nu, m = \overline{0, 2n}. \quad (4.38)$$

Внеинтегральные плотности в уравнениях Фредгольма второго рода (4.33) и (4.37) приближались интерполяционными тригонометрическими полиномами порядка  $n$  (3.44):

$$p_{kn}(\beta_0) = \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{2n} p_k^N(\beta_\nu) \frac{\sin \frac{N}{2}(\beta_\nu - \beta_0)}{\sin \frac{1}{2}(\beta_\nu - \beta_0)}, \quad k = 1, 2, \quad (4.39)$$

где  $p_k^N(\beta_\nu)$  – значение плотности  $p_k(\beta)$  в узле  $\beta_\nu$ .

**1.** В случае периодической решетки, составленной из упругих включений, ядро Гильберта (4.30) в сингулярном интегральном уравнении первого рода (4.29) в явном виде не выделялось, и интегралы в (4.29) заменялись квадратурными формулами по правилу прямоугольников, что соответствует квадратурным формулам вычисления регулярных (2.85) и сингулярного (2.96) интегралов.

Следуя методу дискретных особенностей, к квадратурным формулам, соответствующим интегралам в (4.29), добавлялась регуляризирующая постоянная  $\gamma_{0N}$ , которая выступает дополнительной неизвестной и позволяет получить невырожденную систему линейных алгебраических уравнений. Если теперь записать дискретную модель дополнительного условия (4.31), то интегральным уравнениям (4.29), (4.31) будет соответствовать система  $N + 1$  линейных алгебраических уравнений. Аналогично составляем дискретную модель интегрального уравнения Фредгольма второго рода (4.33) с учетом (4.39). В результате метод дискретных особенностей приводит к системе  $2N + 1$  линейных

алгебраических уравнений с  $2N+1$  неизвестными  $\gamma_{0N}$ ,  $p_k^N(\beta_\nu)$  ( $k=1,2; \nu=\overline{0,2n}$ ), которая имеет полный ранг, равный  $2N+1$ :

$$\gamma_{0N} + \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^2 \sum_{\nu=0}^{2n} p_k^N(\beta_\nu) B_k(\beta_{0m}, \beta_\nu) = N(\beta_{0m}), \quad (4.40)$$

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{\nu=0}^{2n} p_k^N(\beta_\nu) R_k(\beta_\nu) = -\sum_{m=0}^{2n} V_0(\beta_{0m}), \quad (4.41)$$

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^2 \sum_{\nu=0}^{2n} p_k^N(\beta_\nu) D_k(\beta_{0m}, \beta_\nu) = T(\beta_{0m}), \quad (4.42)$$

$$R_k(\beta_\nu) = (-1)^k \left( -\ln 2 + \frac{2\pi}{N} \sum_{m=0}^{2n} A_k(\beta_{0m}, \beta_\nu) \right),$$

$$D_k(\beta_{0m}, \beta_\nu) = \frac{\mu_k}{4\pi} \frac{\sin \frac{N}{2}(\beta_\nu - \beta_{0m})}{\sin \frac{1}{2}(\beta_\nu - \beta_{0m})} + C_k(\beta_{0m}, \beta_\nu).$$

С увеличением  $N$  решение системы уравнений (4.40) – (4.42)  $p_k^N(\beta_\nu)$  должно приближаться к точному значению плотности  $p_k(\beta)$  в узле  $\beta_\nu$  ( $\nu=\overline{0,2n}$ ), а значение регулирующей постоянной  $\gamma_{0N}$  должно при этом уменьшаться и стремиться к нулю при  $N \rightarrow \infty$ .

В методе дискретных особенностей дискретная модель сингулярного интегрального уравнения первого рода (4.29) имеет вид системы линейных алгебраических уравнений (4.40), в которой постоянная  $\gamma_{0N}$  отсутствует. В этом случае ( $\gamma_{0N}=0$ ) ранг системы уравнений (4.40) равен  $N-1$ . Однако, если одно из линейных уравнений здесь заменить равенством (4.41), то полученная система уравнений будет иметь ранг  $N$  и вместе с уравнениями (4.42) образует систему  $2N$  линейных алгебраических уравнений с  $2N$  неизвестными  $p_k(\beta_\nu)$ ,  $k=1,2; \nu=\overline{0,2n}$ . Ранг этой системы уравнений должен равняться  $2N$ , что обеспечивает единственное решение, которое с увлечением  $N$  должно стремиться к точному решению  $p_k(\beta)$  на контуре  $L$ .

**2.** В случае периодической решетки, составленной из неподвижных включений, дискретная модель сингулярного уравнения первого рода (4.34) и необходимого для его однозначной разрешимости дополнительного условия (4.35) в методе дискретных особенностей имеет вид

$$\gamma_{0N} + \frac{2\pi}{N} \sum_{\nu=0}^{2n} p_1^N(\beta_\nu) B_1(\beta_{0m}, \beta_\nu) = N(\beta_{0m}), \quad m = \overline{0, 2n}, \quad (4.43)$$

$$\sum_{\nu=0}^{2n} p_1^N(\beta_\nu) R_1(\beta_\nu) = -\sum_{m=0}^{2n} V_0(\beta_{0m}). \quad (4.44)$$

Система (4.43), (4.44) представляет собой систему  $N+1$  линейных алгебраических уравнений с  $N+1$  неизвестными  $\gamma_{0N}$ ,  $p_1^N(\beta_\nu)$ ,  $\nu = \overline{0, 2n}$ . С увеличением  $N$  постоянная  $\gamma_{0N}$  должна уменьшаться и стремиться к нулю при  $N \rightarrow \infty$ , а решение  $p_1^N(\beta_\nu)$ ,  $\nu = \overline{0, 2n}$  должно сходиться и совпадать с соответствующим решением системы уравнений (4.40) – (4.42) при  $\rho_1/\rho_2 \rightarrow 0$ .

Если численную реализацию сингулярного интегрального уравнения первого рода (4.34) осуществлять методом механических квадратур, то соответствующая дискретная модель имеет вид системы линейных алгебраических уравнений (4.43), в которой постоянная  $\gamma_{0N}$  отсутствует. Если одно из уравнений этой системы заменить равенством (4.44), то возникающая система  $N$  линейных уравнений с  $N$  неизвестными  $p_1^N(\beta_\nu)$ ,  $\nu = \overline{0, 2n}$  должна иметь единственное решение, которое также должно совпадать с соответствующим решением системы линейных алгебраических уравнений (4.40) – (4.42) при  $\rho_1/\rho_2 \rightarrow 0$ .

**3.** Если рассматривается периодическая система жестких включений в полупространстве, то дискретным аналогом сингулярного интегрального уравнения первого рода (4.34) и дополнительного соотношения (4.36) в методе дискретных особенностей является система линейных алгебраических уравнений

$$\gamma_{0N} + \frac{2\pi}{N} \sum_{\nu=0}^{2n} p_1^N(\beta_\nu) B_1(\beta_{0m}, \beta_\nu) = N(\beta_{0m}), \quad m = \overline{0, 2n}, \quad (4.45)$$

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{\nu=0}^{2n} p_1^N(\beta_\nu) R(\beta_\nu) = Q, \quad (4.46)$$

$$R(\beta_\nu) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu_1} \frac{2\pi}{N} \sum_{m=0}^{2n} C_1(\beta_{0m}, \beta_\nu) + \frac{\rho_6}{\rho_1} S_6 \gamma_1^2 \frac{1}{2\pi} R_1(\beta_\nu),$$

$$Q = -\frac{1}{\mu_1} \frac{2\pi}{N} \sum_{m=0}^{2n} T(\beta_{0m}) - \frac{\rho_6}{\rho_1} S_6 \gamma_1^2 \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2n} V_0(\beta_{0m}).$$

Здесь, как и в случае (4.43), (4.44), постоянная  $\gamma_{0N}$  должна стремиться к нулю при  $N \rightarrow \infty$ , а решение  $p_1^N(\beta_\nu)$  с увеличением  $N$  должно сходиться к точному

решению  $p_1(\beta)$  в узлах интерполяции  $\beta_\nu$ ,  $\nu = \overline{0, 2n}$  и совпадать с соответствующим решением системы уравнений (4.40) – (4.42) при  $\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$ .

Дискретная модель метода механических квадратур совпадает с системой линейных алгебраических уравнений (4.45), если в ней отсутствует постоянная  $\gamma_{0N}$  и одно из уравнений заменено равенством (4.46). Для проверки построенного алгоритма здесь также следует осуществлять предельный переход в (4.40) – (4.42) при  $\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$ .

**4.** Дифракция гармонической волны сдвига на периодической системе полостей в полупространстве описывается интегральным уравнением Фредгольма второго рода (4.37), которое имеет единственное решение. Соответствующая система линейных алгебраических уравнений вытекает из (4.42) при  $k=1$ . Она имеет вид

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{\nu=0}^{2n} p_1^N(\beta_\nu) D_1(\beta_{0m}, \beta_\nu) = T(\beta_{0m}), \quad m = \overline{0, 2n}. \quad (4.47)$$

Решение  $p_1^N(\beta_\nu)$ ,  $\nu = \overline{0, 2n}$  должно сходиться с увеличением  $N$  и совпадать с соответствующим решением системы линейных алгебраических уравнений (4.40) – (4.42) при  $\mu_2/\mu_1 \rightarrow 0$ .

#### 4.5 Численная реализация построенных алгоритмов

Численные эксперименты проводились для периодической решетки, составленной из эллиптических полостей, неподвижных, подвижных жестких или упругих включений. Системы интегральных уравнений решались методами механических квадратур и дискретных особенностей. Как и в случае конечной системы неоднородностей оба метода показали свою эффективность и сходятся с одинаковой точностью приблизительно при одном и том же количестве точек коллокации на центральном эллиптическом рассеивателе. Рассмотрим сначала численные результаты в случае периодической решетки, составленной из



эллиптических неоднородностей (рис. 4.1), в пространстве ( $A = 0, h = 0$ ). Далее при расчете учитывалась симметрия задачи, и поэтому при построении распределений контурных напряжений на границе центрального эллипса отсчет угла  $\beta$  осуществлялся от значения 0 (теневая точка - нижняя) до значения  $\pi$  (лобовая точка - верхняя).

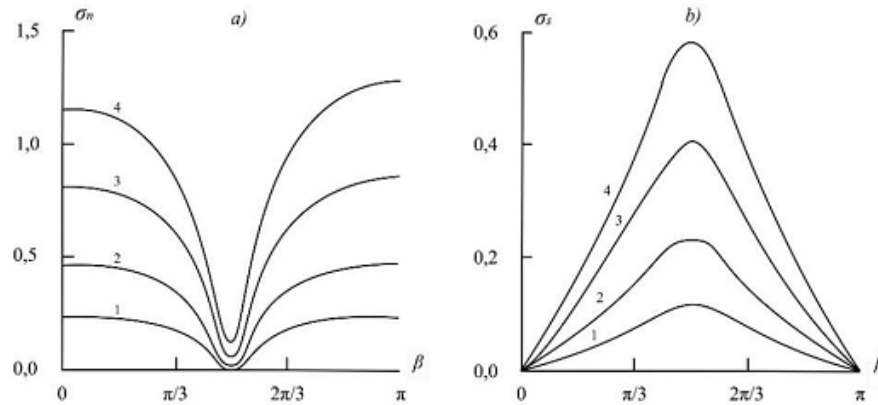


Рисунок 4.2 – Распределения контурных напряжений на центральном эллиптическом упругом включении в случае излучения волны сдвига

На рисунке 4.2 показаны распределения контурных напряжений на границе центрального эллиптического упругого включения (см. рис. 4.1) в случае излучения из бесконечности волны сдвига ( $b/a = 0,5$ ;  $d/a = 4$ ;  $\mu_2 / \mu_1 = 2$ ;  $\rho_2 / \rho_1 = 2$ ) при докритических частотах. Для кривых 1, 2, 3 и 4 значения параметра  $\gamma_1 a$  соответственно равны 0,2; 0,4; 0,7 и 1,0.

Расчеты показывают, что как и в случае одиночного упругого включения превалирующим на границе является напряжение  $\sigma_n$ . Оно достигает своих максимальных значений в лобовой точке, а в точке соскальзывания ( $\beta = \pi/2$ ) оно принимает минимальные значения. Как и следовало ожидать, напряжение  $\sigma_s$  в теневой и лобовой точках обращается в нуль, а в точках соскальзывания оно достигает максимальных значений.

Рисунок 4.3 иллюстрирует зависимости максимальных значений напряжений  $\sigma_n$  (a) и  $\sigma_s$  (b) на центральном эллиптическом упругом включении

( $b/a = 0,5$ ;  $d/a = 4$ ;  $\rho_2 / \rho_1 = 2$ ) от отношения модулей сдвига волокон и матрицы.

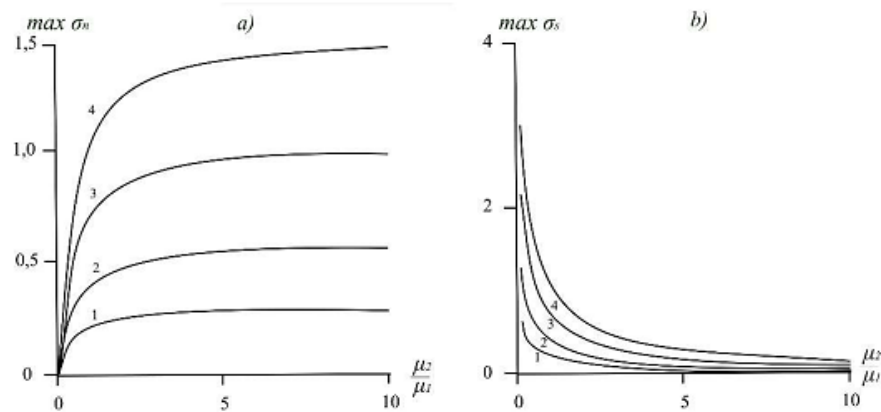


Рисунок 4.3 – Зависимости максимальных напряжений на контуре эллиптического волокна от относительного модуля сдвига волокна

Видно, что как и в случае одиночного упругого включения (см. рис. 3.10), при небольших отношениях модулей сдвига ( $\frac{(\mu_2)_2}{\mu_1} < 1$ ) преобладающим на границе раздела матрица - волокно является напряжение  $\sigma_s$ . Если же  $\frac{\mu_2}{\mu_1} > 1$ , то преобладающим является напряжение  $\sigma_n$ .

На рисунке 4.4 приведены распределения контурного напряжения  $\sigma_n$  на границе центрального эллиптического неподвижного (a) и подвижного жесткого (b) включений ( $b/a = 0,5$ ;  $d/a = 4$ ), в случае жесткого включения  $\frac{\rho_B}{\rho_1} = 2$ . Кривые 1, 2, 3 и 4 отвечают значениям  $\gamma_1 a$  равным 0,2; 0,4; 0,7 и 1,0 соответственно. Видно, что наибольшие значения напряжения  $\sigma_n$  достигаются в лобовой точке. В случае жесткого включения вблизи точки соскальзывания напряжение  $\sigma_n$  близко к нулю.

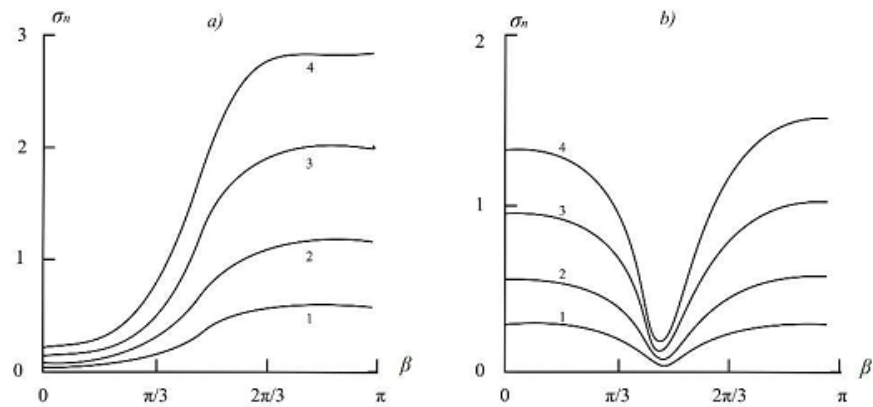


Рисунок 4.4 – Распределения напряжения  $\sigma_n$  на контуре эллиптических неподвижного (a) и жесткого (b) включений

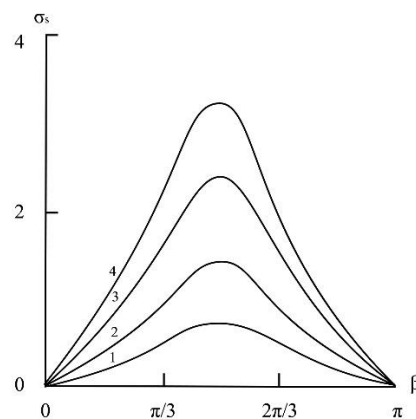


Рисунок. 4.5 – Распределения напряжения  $\sigma_n$  на контуре центральной эллиптической полости

На рисунку 4.5 показаны распределения контурного напряжения  $\sigma_s$  на центральной эллиптической полости ( $b/a = 0,5$ ;  $d/a = 4$ ). Кривые 1, 2, 3 и 4 отвечают значениям  $\gamma_1 a$  равным 0,2; 0,4; 0,7 и 1,0 соответственно. Как и следовало ожидать, характер изменения кривых аналогичен соответствующим изменениям кривых в случае одиночной полости. Видно, что максимальное значение напряжения  $\sigma_s$  принимает вблизи точки соскальзывания, а в теневой и лобовой точках оно близко к нулю.

Зависимости максимальных напряжений  $\sigma_s$  на контуре центральной эллиптической полости от периода решетки приведены на рис. 4.6 ( $b/a = 0,5$ ). Кривые 1, 2, 3 и 4 отвечают значениям  $\gamma_1 a$  равным 0,2; 0,4; 0,7 и 1,0 соответственно.

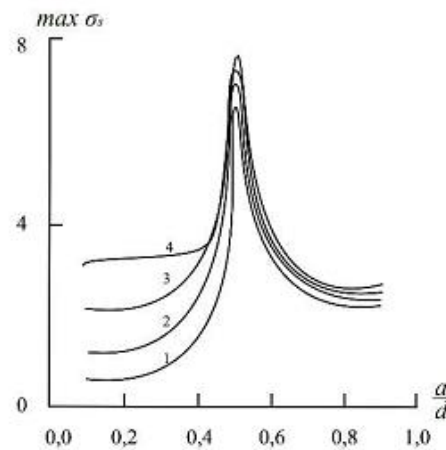


Рисунок 4.6 – Зависимость максимальных напряжений  $\sigma_s$  от периода решетки

Анализ полученных результатов показывает, что при значительном удалении элементов решетки друг от друга взаимовлияние эллиптических полостей несущественно и распределение напряжения  $\sigma_s$  близко к соответствующему распределению на контуре одиночной полости. Вместе с тем, при  $a/d = 0,5$ , то есть, когда большая ось эллипса равна полупериоду решетки, наблюдается резкое увеличение напряжения  $\sigma_s$ . Этот факт необходимо учитывать при анализе напряженного состояния конструкций, функционирующих в условиях динамического нагружения и содержащих полости.

Влияние границы полупространства  $x_2 = 0$  на распределения контурных напряжений в случае периодической решетки, составленной из эллиптических неоднородностей (рис. 4.1), иллюстрируется на рис. 4.7 – 4.8. Выбраны такие геометрические параметры:  $\frac{a}{b} = 2; \frac{h}{b} = 4$ . На всех рисунках кривая 1 соответствует защемленному полупространству ( $A = 1$ ); кривая 2 – полупространству с границей, свободной от сил ( $A = -1$ ); кривая 3 – неограниченной среде ( $A = 0$ ). Во всех случаях полагалось  $\gamma_1 d = 4,5$ .

На рисунке 4.7 приведены графики напряжения  $\sigma_n$  на контуре центрального эллиптического неподвижного и подвижного жесткого ( $\frac{\rho_B}{\rho_1} = 2$ ) включений в случае периодической решетки.

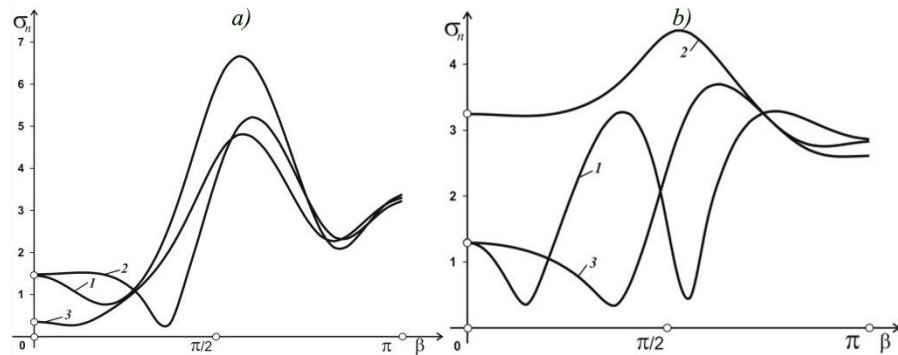


Рисунок 4.7 – Распределения напряжения  $\sigma_n$  на контуре центрального неподвижного (*a*) и жесткого (*b*) эллиптических включений в полупространстве

Расчеты показывают, что жесткость включения понижает значение контурного напряжения  $\sigma_n$ , если сравнивать с соответствующим значением в случае неподвижного включения. Кроме того, вблизи лобовой точки значения напряжения  $\sigma_n$  слабо зависят от граничных условий на прямой  $x_2 = 0$ . Анализ кривых распределения свидетельствует о существенном влиянии границы полупространства на значения контурного напряжения  $\sigma_n$ . Особенно это проявляется в случае решетки, составленной из жестких эллиптических включений (рис. 4.7 *b*).

На рисунке 4.8 показаны кривые распределения напряжения  $\sigma_s$  на границах эллиптических полостей периодической решетки. Видно, что, как и в случае решетки, состоящей из конечного числа эллиптических отверстий (рис. 3.8), наиболее сильно напряжение  $\sigma_s$  проявляет себя в заземленном полупространстве.

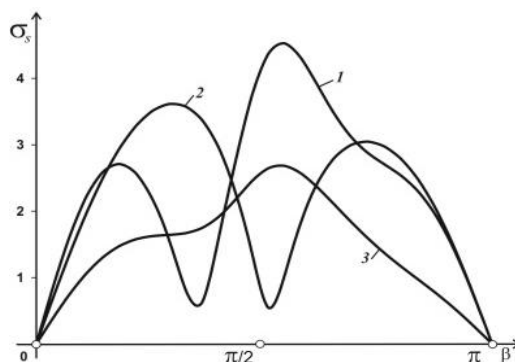


Рисунок 4.8 – Распределения напряжения  $\sigma_s$  на контуре центрального эллиптического отверстия в полупространстве

В случае периодической системы эллиптических отверстий характер изменения напряжения  $\sigma_s$  усложняется по сравнению с изменением напряжения  $\sigma_n$  на аналогичных решетках, состоящих из неподвижных или подвижных включений (рис. 4.7). Как и в случае неограниченной среды ( $A = 0$ ), в полупространстве ( $A = \pm 1$ ) значения  $\sigma_s$  вблизи теневой и лобовой точек близки к нулю. Отметим, что в данном случае распределения напряжения  $\sigma_s$  близки к аналогичным распределениям на контуре центрального рассеивателя решетки, состоящей из пяти эллиптических отверстий (рис. 3.8). Как уже отмечалось, насыщение решетки, составленной из  $M$  однородных объектов, происходит, начиная с  $M=9$  (с точностью **[10]**  $\approx (-3)$ ).

## 5 МЕТОД СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

### 5.1 Основные соотношения динамической теории упругости в случае плоской деформации

Под плоской деформацией понимают напряженно-деформированное состояние цилиндрического тела, нагруженного по боковой поверхности усилиями, действующими в плоскости поперечного сечения. В предположении, что ось цилиндра направлена вдоль оси  $Ox_3$  декартовой прямоугольной системы координат  $Ox_1x_2x_3$ , перемещение  $u_3$  вдоль этой оси равно нулю, а перемещения  $u_1, u_2$  и компоненты тензора напряжений  $\tau_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) зависят только от координат  $x_1$  и  $x_2$ . Отсюда непосредственно следует, что для изотропного тела  $\tau_{13} = \tau_{23} = 0$ ; кроме того,  $\tau_{33} = \nu(\tau_{11} + \tau_{22})$ , где  $\nu$  – коэффициент Пуассона среды.

В качестве основной характеристики, знание которой позволяет воссоздать полную картину напряженно-деформированного состояния, выберем вектор перемещения  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)'$  частиц среды. В случае установившихся волновых движений упругого тела (зависимость от времени выражается множителем  $e^{-i\omega t}$ ) компоненты вектора амплитуд перемещений  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)'$  удовлетворяют уравнениям движения

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \rho \omega^2 U_1 + f_1 &= 0, \\ \mu \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \rho \omega^2 U_2 + f_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ламе,  $\rho$  – плотность среды,  $\omega$  – частота колебаний,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)'$  – объемная сила.

Амплитудные значения напряжений связаны с амплитудами перемещений с помощью формул

$$\begin{aligned}\sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2(\lambda + \mu) \left( \frac{\partial(U_1 + iU_2)}{\partial z} + \frac{\partial(U_1 - iU_2)}{\partial \bar{z}} \right), \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= -4\mu \frac{\partial(U_1 - iU_2)}{\partial z}, \quad z = x_1 + ix_2, \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12} &= -4\mu \frac{\partial(U_1 + iU_2)}{\partial \bar{z}}, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Пусть  $L$  – некоторая кривая в поперечном сечении цилиндра. Обозначим через  $S_1$  и  $S_2$  амплитуды тангенциальной и нормальной компонент вектора напряжений на  $L$ . Тогда в произвольной точке кривой  $\zeta_0 \in L$  эти напряжения выражаются через компоненты тензора напряжений следующим образом [132]:

$$\begin{aligned}2i(S_1 + iS_2) &= (\sigma_{11} + \sigma_{22})e^{i\varphi_0} + (\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12})e^{-i\varphi_0}, \\ -2i(S_1 - iS_2) &= (\sigma_{11} + \sigma_{22})e^{-i\varphi_0} + (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})e^{i\varphi_0}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Здесь  $\varphi_0$  – угол положительной касательной к  $L$  в точке  $\zeta_0 \in L$  с осью  $Ox_1$ . Двумерная система напряжений для элемента на границе  $L$  представлена на рис. 5.1.

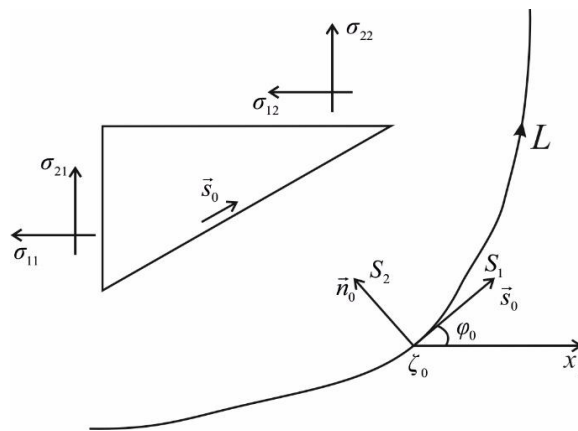


Рисунок 5.1 – Двумерная система напряжений на гладкой кривой



Введем в рассмотрение дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} L_{11} &= \mu \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \rho \omega^2, \\ L_{22} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \rho \omega^2, \\ L_{12} &= L_{21} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Тогда в случае  $\mathbf{f} = 0$  уравнения движения (5.1) приобретают вид

$$L_{22}U_1 + L_{12}U_2 = 0, \quad L_{21}U_1 + L_{11}U_2 = 0. \quad (5.5)$$

Если положить теперь

$$U_1 = L_{11}\Psi, \quad U_2 = -L_{21}\Psi, \quad (5.6)$$

где  $\Psi$  – некоторая скалярная функция, то получим, что функция  $\Psi(x_1, x_2)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)\Psi = 0. \quad (5.7)$$

После несложных преобразований уравнение (5.7) можно переписать в виде

$$(\Delta + \gamma_1^2)(\Delta + \gamma_2^2)\Psi = 0, \quad (5.8)$$

$$\gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho},$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – скорости распространения в изотропной среде продольной и поперечной волн соответственно.

Отметим, что к уравнению (5.7), а значит, и к уравнению (5.8) можно прийти, положив также

$$U_1 = -L_{12}\Psi, \quad U_2 = L_{22}\Psi. \quad (5.9)$$

Уравнение (5.8) легко сводится к двум уравнениям Гельмгольца. Действительно, пусть функции  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta\Psi_1 + \gamma_1^2\Psi_1 = 0, \quad \Delta\Psi_2 + \gamma_2^2\Psi_2 = 0. \quad (5.10)$$

Тогда из (5.8) получим

$$\Delta\Psi + \gamma_2^2\Psi = \Psi_1, \quad \Delta\Psi + \gamma_1^2\Psi = \Psi_2. \quad (5.11)$$

Беря разность этих уравнений, находим неизвестную функцию  $\Psi$  :

$$\Psi = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}. \quad (5.12)$$

Таким образом, изучение процесса распространения упругих волн в изотропной среде в условиях плоской деформации сводится к интегрированию двух уравнений Гельмгольца (5.10). Если функции  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  найдены, то функция  $\Psi$  будет получена из (5.12), а компоненты вектора амплитуд перемещений  $U_1$  и  $U_2$  могут быть получены по формулам (5.6) или (5.9) в зависимости от того, какие из них приняты за основу. Компоненты тензора амплитуд напряжений  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) определяются с помощью соотношений (5.2), а амплитуды напряжений  $S_1$  и  $S_2$  с помощью равенств (5.3). На границе цилиндра представляют интерес также распределения амплитуд напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{n_0} &= S_1 \sin \varphi_0 - S_2 \cos \varphi_0, \quad \sigma_{s_0} = \sigma_{11} + \sigma_{22} - \sigma_{n_0}, \\ \sigma_{n_0 s_0} &= S_1 \cos \varphi_0 + S_2 \sin \varphi_0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

связанных с координатами  $s_0$  и  $n_0$  на  $L$ .

## 5.2 Гармонические функции источника в условиях плоской деформации

Рассмотрим колебания плоскости под действием гармонической сосредоточенной силы, приложенной в точке  $\zeta = \xi + i\eta$  и направленной вдоль оси  $Ox_1$  (1-ое состояние) или вдоль оси  $Ox_2$  (2-ое состояние). Обозначим  $G_{11}, G_{21}$  и  $G_{12}, G_{22}$  – компоненты амплитуд перемещений 1-го и 2-го состояний соответственно.

В случае 1-го состояния положим в (5.1)  $f_1 = \delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta)$ ,  $f_2 = 0$ . Тогда аналогично (5.5) уравнения 1-го состояния запишем в виде

$$\begin{aligned} L_{22}G_{11} + L_{12}G_{21} &= -\delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta), \\ L_{11}G_{21} + L_{21}G_{11} &= 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Функции  $G_{11}$  и  $G_{21}$  будем определять согласно (5.6), т. е. они равны

$$G_{11} = L_{11}G, \quad G_{21} = -L_{21}G. \quad (5.15)$$

Здесь дифференциальное уравнение для функции  $G = G(x_1, x_2, \xi, \eta)$  получается точно так же, как и уравнение (5.8). Оно имеет вид

$$(\Delta + \gamma_1^2)(\Delta + \gamma_2^2)G = c\delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta), \quad c = -1/\mu(\lambda + 2\mu). \quad (5.16)$$

В случае 2-го состояния  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = \delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta)$ , и уравнения движения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{22}G_{12} + L_{12}G_{22} &= 0, \\ L_{11}G_{22} + L_{21}G_{12} &= -\delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Функции  $G_{12}$  и  $G_{22}$  определяем согласно (5.9), т. е. принимаем

$$G_{12} = -L_{12}G, \quad G_{22} = L_{22}G, \quad (5.18)$$

где функция  $G$  удовлетворяет уравнению (5.16).

Далее используем процедуру (5.11), (5.12) и находим

$$G = \frac{G_1 - G_2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}, \quad (5.19)$$

$$\Delta G_m + \gamma_m^2 G_m = c\delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta), \quad m = 1, 2. \quad (5.20)$$

Фундаментальные решения уравнений Гельмгольца (5.20) известны

$$G_m = \frac{c}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_m r), \quad r = |z - \zeta|, \quad m = 1, 2. \quad (5.21)$$

Следовательно, можно положить

$$G = \frac{c}{4i} \frac{H_0^{(1)}(\gamma_1 r) - H_0^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}. \quad (5.22)$$

Теперь, в соответствии с формулами (5.15), (5.18), можно найти компоненты матрицы Грина размерности  $2 \times 2$ , в столбцах которой представлены амплитуды перемещений 1-го и 2-го состояний соответственно.

Для определения элементов матрицы Грина удобно перейти к комплексным переменным  $z$  и  $\bar{z}$ , используя формулы перехода для частных производных второго порядка (1.9). Таким образом, с учетом представлений (5.15) и (5.18), находим следующие комбинации амплитуд перемещений 1-го и 2-го состояний:

$$\begin{aligned} G_{11} + iG_{21} &= -2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}^2} + 2(\lambda + 3\mu) \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \bar{z}} + \rho \omega^2 G, \\ G_{11} - iG_{21} &= -2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + 2(\lambda + 3\mu) \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \bar{z}} + \rho \omega^2 G, \\ G_{22} + iG_{12} &= 2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + 2(\lambda + 3\mu) \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \bar{z}} + \rho \omega^2 G, \\ G_{22} - iG_{12} &= 2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}^2} + 2(\lambda + 3\mu) \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \bar{z}} + \rho \omega^2 G. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Вычисление указанных в (5.23) производных функции  $G$  будем проводить с помощью известных соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial z^n} H_0^{(1)}(\gamma r) &= \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^n e^{-in\alpha} H_n^{(1)}(\gamma r), \\ \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} H_0^{(1)}(\gamma r) &= \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^n e^{in\alpha} H_n^{(1)}(\gamma r), \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma r) &= -\frac{\gamma^2}{4} H_0^{(1)}(\gamma r), \quad z - \zeta = re^{i\alpha}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Здесь  $H_n^{(1)}(x)$  – функция Ханкеля первого рода  $n$ -го порядка.

Используя явный вид функции  $G$  (5.22) и выражения (5.24) для производных функции Ханкеля  $H_0^{(1)}(\gamma r)$ , из (5.23) находим

$$\begin{aligned}
 G_{11} + iG_{21} &= h(\phi_{22}e^{2i\alpha} + \chi\phi_{20} - e\phi_{00}), \\
 G_{11} - iG_{21} &= h(\phi_{22}e^{-2i\alpha} + \chi\phi_{20} - e\phi_{00}), \\
 G_{22} + iG_{12} &= h(-\phi_{22}e^{-2i\alpha} + \chi\phi_{20} - e\phi_{00}), \\
 G_{22} - iG_{12} &= h(-\phi_{22}e^{2i\alpha} + \chi\phi_{20} - e\phi_{00}), \\
 \phi_{lm} &= \frac{\gamma_1^l H_m^{(1)}(\gamma_1 r) - \gamma_2^l H_m^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \quad \chi = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu, \\
 e &= \frac{2\rho\omega^2}{\lambda + \mu} = (\chi - 1)\gamma_2^2, \quad d = \frac{i}{4(\chi + 1)}, \quad h = \frac{d}{\mu}.
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Формулы (5.25) позволяют определить амплитуды перемещений 1-го и 2-го состояний. Отметим, что ядра  $\phi_{22}$  и  $\phi_{00}$  в (5.25) непрерывны, а функция  $\phi_{20}$  в точке приложения сосредоточенного источника имеет логарифмическую особенность:

$$\phi_{20} = \frac{2i}{\pi} \ln r + F_{20}, \tag{5.26}$$

где  $F_{20}$  – непрерывная функция. Следовательно, из (5.25) вытекает, что амплитуды перемещений  $G_{12}$  и  $G_{21}$  непрерывны, а  $G_{11}$  и  $G_{22}$  имеют в нуле логарифмическую особенность.

### 5.3 Постановка краевых задач

Рассмотрим в неограниченной упругой среде систему  $m$  бесконечных вдоль оси  $Ox_3$  однородных цилиндров, поперечные сечения которых ограничены замкнутыми контурами (без общих точек). Пусть  $L$  – совокупность этих контуров. Совокупность  $L$  разбивает плоскость  $Ox_1x_2$  на две области: внешнюю  $D_1$  и внутреннюю  $D_2$ . Положительное направление обхода на  $L$  выбираем так, чтобы при

движении вдоль  $L$  область  $D_1$  оставалась слева (рис. 5.2). Будем предполагать, что внутренности цилиндров представляют собой полости, неподвижные, подвижные жесткие или упругие включения, и пусть  $\rho_k$  и  $\lambda_k, \mu_k$  – плотности и коэффициенты Ламе матрицы ( $k = 1$ ) и упругих включений ( $k = 2$ ).

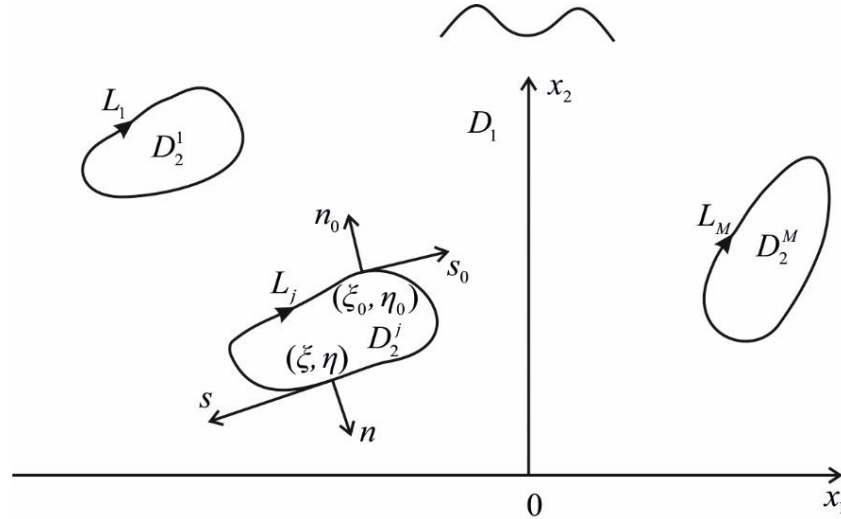


Рисунок 5.2 – Система неоднородностей в неограниченной упругой среде

В качестве внешнего воздействия будем рассматривать набегающую на цилиндры из бесконечности гармоническую волну расширения-сжатия ( $P$ -случай)

$$U_1^{(0)} = 0, U_2^{(0)} = \tau_1 e^{-i\gamma_1^{(1)} x_2}, \gamma_1^{(1)} = \omega/c_1^{(1)}, \tau_1 = const \quad (5.27)$$

или сдвига ( $SV$ -случай)

$$U_1^{(0)} = \tau_2 e^{-i\gamma_2^{(1)} x_2}, U_2^{(0)} = 0, \gamma_2^{(1)} = \omega/c_2^{(1)}, \tau_2 = const. \quad (5.28)$$

Здесь  $c_1^{(1)}$  и  $c_2^{(1)}$  – скорости  $P$ - и  $SV$ - волн в матрице.

При взаимодействии приходящей волны с цилиндрами возникают отраженные и проходящие внутрь цилиндров (если они являются упругими включениями) волны двух типов: продольные и поперечные, причем другие типы волн не образуются. Пусть  $U_1^{(k)}$  и  $U_2^{(k)}$  – амплитуды перемещений отраженного ( $k=1$ ) и проникающего внутрь упругих включений ( $k=2$ ) полей соответственно. Тогда общее поле перемещений  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)'$  равно  $(U_1^{(1)} + U_1^{(0)}, U_2^{(1)} + U_2^{(0)})'$  в матрице и  $(U_1^{(2)}, U_2^{(2)})'$

внутри упругих включений. В случае гармонической зависимости от времени  $(e^{-i\omega t})$  компоненты вектора  $\mathbf{U}$  удовлетворяют уравнениям движения (5.1) при соответствующем задании параметров матрицы и упругих включений. На бесконечности рассеянное поле  $\mathbf{U}^{(1)}$  должно выполнять условия излучения, которые заключаются в выполнении этих условий каждой компонентой поля в отдельности и означают, что перемещения  $U_1^{(1)}, U_2^{(1)}$  должны представлять собой расходящиеся волны.

Сформулируем теперь граничные условия для рассматриваемых краевых задач. Будем предполагать, что поперечное сечение каждого цилиндра описывается гладкой замкнутой кривой, параметрическое уравнение которой  $\xi = \xi(s), \eta = \eta(s)$ . Пусть  $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$  – точка  $L$ , в которой мы будем удовлетворять граничные условия.

**1.** На границе раздела двух сред (матрица – упругое включение) моделируем условия контакта типа склейки – непрерывность при переходе через  $L$  вектора перемещений  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)'$  и вектора напряжений  $\mathbf{S} = (S_1, S_2)'$ :

$$(U_m^{(1)} + U_m^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} = (U_m^{(2)})_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad (S_m^{(1)} + S_m^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} = (S_m^{(2)})_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad m = 1, 2. \quad (5.29)$$

Соотношения (5.29) следует понимать как равенства граничных значений соответствующих величин при стремлении точки наблюдения  $z = x_1 + ix_2 \in D_k$  к точке  $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) из областей  $D_1$  ( $k = 1$ ) и  $D_2$  ( $k = 2$ ).

**2.** Если  $D_2$  – совокупность неподвижных включений, то на  $L$  равны нулю перемещения:

$$(U_m^{(1)} + U_m^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} = 0, \quad z \in D_1, \quad \zeta_0 \in L_j, \quad m = 1, 2, \quad j = \overline{1, M}. \quad (5.30)$$

**3.** Если  $D_2$  – совокупность жестких включений, то граничные условия на  $L$  вытекают из уравнений движения абсолютно жесткого тела:

$$\begin{aligned} (U_1^{(1)} + U_1^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} &= B_1^j - \omega_j \eta_0, \\ (U_2^{(1)} + U_2^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} &= B_2^j + \omega_j \xi_0, \quad j = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Здесь предполагается, что включение  $D_2^j$  перемещается и поворачивается вместе с матрицей;  $B_1^j$  и  $B_2^j$  – амплитуды поступательного движения,  $\omega_j$  – амплитуда жесткого поворота  $j$ -го включения.

В случае (5.31), используя второй закон Ньютона, можно получить уравнения, которые характеризуют поступательные движения однородных жестких включений:

$$\int_{L_j} S_m ds_0 = -q_j B_m^j, \quad q_j = \omega^2 \rho_g S_g^j, \quad m = 1, 2, \quad j = \overline{1, M}. \quad (5.32)$$

Уравнения, описывающие вращательные движения жестких включений, имеют вид

$$\int_{L_j} (S_1(\eta_0 - x_{20}) - S_2(\xi_0 - x_{10})) ds_0 = -\omega^2 J_j \omega_j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (5.33)$$

где  $\rho_g$  – плотность,  $S_g^j$  – площадь,  $J_j$  – момент инерции включения  $D_2^j$  относительно произвольной точки  $A(x_{10}, x_{20})$ .

Дополнительные соотношения (5.32), (5.33) необходимо использовать для определения неизвестных постоянных  $B_1^j$ ,  $B_2^j$  и  $\omega_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ), фигурирующих в (5.31).

**4.** Если  $D_2$  – совокупность полостей, то граница  $L$  свободна от сил, и на  $L$  равны нулю компоненты вектора напряжений:

$$(S_m^{(1)} + S_m^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} = 0, \quad z \in D_1, \quad \zeta_0 \in L_j, \quad m = 1, 2, \quad j = \overline{1, M}. \quad (5.34)$$

Таким образом, задача дифракции плоской гармонической волны (5.27) или (5.28) на системе цилиндров рассмотренных типов в неограниченной упругой среде сводится к нахождению решений уравнений движения (5.1) при  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)' = 0$ , которые удовлетворяют соответствующие краевые условия на  $L$  и дополнительные условия излучения на бесконечности.



Далее будем рассматривать краевую задачу (5.29) для совокупности  $m$  упругих включений. Другие краевые задачи будут вытекать из нее как частные случаи.

#### 5.4 Интегральные представления компонент дифрагированного волнового поля

Предлагаемая методика решения рассматриваемых краевых задач основана на построении интегральных представлений амплитуд перемещений дифрагированного волнового поля, автоматически удовлетворяющих уравнениям плоской деформации и обеспечивающих выполнение условий излучения на бесконечности. Следуя, представим амплитуды перемещений отраженного ( $k=1$ ) и проходящего внутрь упругих включений ( $k=2$ ) полей в виде потенциалов типа простого слоя:

$$U_m^{(k)}(x_1, x_2) = \int_L (f_1^{(k)}(s)G_{m1}^{(k)}(z, \zeta) + f_2^{(k)}(s)G_{m2}^{(k)}(z, \zeta)) ds, \quad m, k = 1, 2. \quad (5.35)$$

Здесь  $f_1^{(k)}(s)$  и  $f_2^{(k)}(s)$  – неизвестные плотности,  $G_{1j}^{(k)}$  и  $G_{2j}^{(k)}$  – функции Грина, представляющие собой амплитуды перемещений  $j$ -го состояния в областях  $D_1$  и  $D_2$  в точке  $z = x_1 + ix_2 \in D_k$  при действии гармонической сосредоточенной силы, приложенной в точке  $\zeta = \xi + i\eta \in L$  и направленной вдоль оси  $Ox_1$  (1-ое состояние) или вдоль оси  $Ox_2$  (2-ое состояние). Эти функции определяются согласно (5.25) при соответствующем задании параметров матрицы ( $k=1$ ) и упругих включений ( $k=2$ ).

Компактные выражения компонент тензора амплитуд напряжений (5.2) получаются, если вместо амплитуд перемещений (5.35) рассматривать комбинации  $U_1^{(k)} \pm iU_2^{(k)}$  и сделать переход от переменных  $x_1, x_2$  к комплексным переменным  $z = x_1 + ix_2$  и  $\bar{z} = x_1 - ix_2$ . Поэтому целесообразно ввести в рассмотрение новые плотности

$$p_1^{(k)}(s) = f_1^{(k)}(s) + if_2^{(k)}(s), \quad p_2^{(k)}(s) = f_1^{(k)}(s) - if_2^{(k)}(s). \quad (5.36)$$

После несложных преобразований из (5.35) получаем

$$\begin{aligned}
U_1^{(k)} + iU_2^{(k)} &= \frac{1}{2} \int_L \left( p_1^{(k)}(s) (G_{11}^{(k)} + G_{22}^{(k)}) - p_2^{(k)}(s) (G_{22}^{(k)} - G_{11}^{(k)} - 2iG_{12}^{(k)}) \right) ds, \\
U_1^{(k)} - iU_2^{(k)} &= \frac{1}{2} \int_L \left( -p_1^{(k)}(s) (G_{22}^{(k)} - G_{11}^{(k)} + 2iG_{12}^{(k)}) + p_2^{(k)}(s) (G_{11}^{(k)} + G_{22}^{(k)}) \right) ds.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Вычисление указанных в (5.37) ядер можно осуществлять с помощью формул (5.25). Имеем

$$\begin{aligned}
G_{11}^{(k)} + G_{22}^{(k)} &= (G_{11}^{(k)} + iG_{21}^{(k)}) + (G_{22}^{(k)} - iG_{12}^{(k)}) = 2h_k (\chi_k \phi_{20}^{(k)} - e_k \phi_{00}^{(k)}), \\
G_{22}^{(k)} - G_{11}^{(k)} + 2iG_{12}^{(k)} &= (G_{22}^{(k)} + iG_{12}^{(k)}) - (G_{11}^{(k)} - iG_{21}^{(k)}) = -2h_k \phi_{22}^{(k)} e^{-2i\alpha}, \\
G_{22}^{(k)} - G_{11}^{(k)} - 2iG_{12}^{(k)} &= (G_{22}^{(k)} - iG_{12}^{(k)}) - (G_{11}^{(k)} + iG_{21}^{(k)}) = -2h_k \phi_{22}^{(k)} e^{2i\alpha}, \\
\phi_{lm}^{(k)} &= \frac{\gamma_1^{(k)l} H_m^{(1)}(\gamma_1^{(k)} r) - \gamma_2^{(k)l} H_m^{(1)}(\gamma_2^{(k)} r)}{\gamma_1^{(k)2} - \gamma_2^{(k)2}}, \quad d_k = \frac{i}{4(\chi_k + 1)}, \quad h_k = \frac{d_k}{\mu_k}, \\
\chi_k &= 3 - 4\nu_k, \quad e_k = (\chi_k - 1)\gamma_2^{(k)2}, \quad t_k = 8\mu_k(\lambda_k + \mu_k).
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Здесь  $\nu_k$  – коэффициент Пуассона среды  $D_k$ ,  $k=1, 2$ .

Подставляя выражения (5.38) в (5.37), приходим к следующим интегральным представлениям комбинаций  $U_1^{(k)} \pm iU_2^{(k)}$ :

$$\begin{aligned}
U_1^{(k)} + iU_2^{(k)} &= h_k \int_L \left( p_1^{(k)}(s) (\chi_k \phi_{20}^{(k)} - e_k \phi_{00}^{(k)}) + p_2^{(k)}(s) \phi_{22}^{(k)} e^{2i\alpha} \right) ds, \\
U_1^{(k)} - iU_2^{(k)} &= h_k \int_L \left( p_1^{(k)}(s) \phi_{22}^{(k)} e^{-2i\alpha} + p_2^{(k)}(s) (\chi_k \phi_{20}^{(k)} - e_k \phi_{00}^{(k)}) \right) ds.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Получим аналогично интегральные представления для комбинаций (5.2) амплитуд компонент тензора напряжений в областях  $D_1$  и  $D_2$ . Для этого используем равенства (5.23) и преобразования, продемонстрированные в (5.38). Подставляя (5.37) в (5.2), находим

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} &= t_k \int_L \left( p_1^{(k)}(s) \left( \frac{\partial^3 G^{(k)}}{\partial z^2 \partial \bar{z}} + \frac{\gamma_2^{(k)2}}{4} \frac{\partial G^{(k)}}{\partial z} \right) + p_2^{(k)}(s) \left( \frac{\partial^3 G^{(k)}}{\partial z \partial \bar{z}^2} + \frac{\gamma_1^{(k)2}}{4} \frac{\partial G^{(k)}}{\partial \bar{z}} \right) \right) ds, \\
\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{11}^{(k)} + 2i\sigma_{12}^{(k)} &= t_k \int_L \left( p_1^{(k)}(s) \frac{\partial^3 G^{(k)}}{\partial z^3} - p_2^{(k)}(s) \left( \chi_k \frac{\partial^3 G^{(k)}}{\partial z^2 \partial \bar{z}} + \frac{e_k}{4} \frac{\partial G^{(k)}}{\partial z} \right) \right) ds, \\
\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{11}^{(k)} - 2i\sigma_{12}^{(k)} &= t_k \int_L \left( -p_1^{(k)}(s) \left( \chi_k \frac{\partial^3 G^{(k)}}{\partial z \partial \bar{z}^2} + \frac{e_k}{4} \frac{\partial G^{(k)}}{\partial \bar{z}} \right) + p_2^{(k)}(s) \frac{\partial^3 G^{(k)}}{\partial \bar{z}^3} \right) ds.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Используем теперь выражения для функции  $G^{(k)}$  (5.22) в области  $D_k$  и производных функций Ханкеля (5.24). Получим

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} &= -2d_k \int_L \left( (\phi_{31}^{(k)} - \gamma_2^{(k)^2} \phi_{11}^{(k)}) (p_1^{(k)}(s)e^{-i\alpha} + p_2^{(k)}(s)e^{i\alpha}) \right) ds, \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{11}^{(k)} + 2i\sigma_{12}^{(k)} &= 2d_k \int_L (p_1^{(k)}(s)\phi_{33}^{(k)}e^{-3i\alpha} + p_2^{(k)}(s)(\chi_k\phi_{31}^{(k)} - e_k\phi_{11}^{(k)})e^{-i\alpha}) ds, \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{11}^{(k)} - 2i\sigma_{12}^{(k)} &= 2d_k \int_L (p_1^{(k)}(s)(\chi_k\phi_{31}^{(k)} - e_k\phi_{11}^{(k)})e^{i\alpha} + p_2^{(k)}(s)\phi_{33}^{(k)}e^{3i\alpha}) ds.\end{aligned}\quad (5.41)$$

Здесь функция  $\phi_{11}^{(k)}(r)$  непрерывна, а функции  $\phi_{31}^{(k)}(r)$  и  $\phi_{33}^{(k)}(r)$  имеют в нуле особенность типа Коши:

$$\phi_{31}^{(k)}(r) = \frac{2}{i\pi r} + F_{31}^{(k)}(r), \quad \phi_{33}^{(k)}(r) = \frac{2}{i\pi r} + F_{33}^{(k)}(r). \quad (5.42)$$

Таким образом, амплитуды перемещений и компонент тензора напряжений дифрагированного волнового поля в областях  $D_1$  и  $D_2$  вычислены. Теперь можно удовлетворять граничные условия на совокупности  $L$  замкнутых контуров  $L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ).

## 5.5 Граничные условия по перемещениям и соответствующие интегральные уравнения с логарифмическими особенностями

Проведем параметризацию каждого замкнутого контура  $L_l$  ( $l = \overline{1, M}$ ) совокупности  $L$  по формулам

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(\beta), \quad \eta = \eta(\beta), \quad \zeta = \xi + i\eta = \zeta(\beta), \\ \zeta(\beta + 2\pi) &= \zeta(\beta), \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi.\end{aligned}\quad (5.43)$$

Подставляя в (5.39) вместо  $z \in D_k$  переменную  $\zeta_0 = \zeta(\beta_0^j) \in L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ), получим значения комбинаций амплитуд перемещений  $U_1^{(k)} \pm iU_2^{(k)}$  на  $L$  со стороны матрицы ( $k = 1$ ) и со стороны упругих включений ( $k = 2$ ). При этом в (5.39), если  $\zeta_0 = \zeta(\beta_0^j)$  и  $\zeta = \zeta(\beta^j)$ , т. е. точки  $\zeta_0$  и  $\zeta$  принадлежат одному контуру  $L_j$ ,

ядро  $\phi_{20}^{(k)}(r_0)$  в соответствии с (5.26) имеет логарифмическую особенность, которую в случае замкнутых контуров целесообразно переписать в виде

$$\phi_{20}^{(k)}(r_0) = \frac{2i}{\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0}{2} \right| + F_{20}^{(k)}(\beta_0, \beta), \quad \zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0}. \quad (5.44)$$

Здесь ядро  $F_{20}^{(k)}(\beta_0, \beta)$  непрерывно, причем

$$F_{20}^{(k)}(\beta, \beta) = -1 - \frac{2i}{\pi} \left( C + \ln \left( \gamma_k \frac{ds}{d\beta} \right) \right), \quad C = 0,5772156.. \quad (5.45)$$

Отметим также, что

$$\int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0}{2} \right| d\beta_0 = -2\pi \ln 2. \quad (5.46)$$

Итак, удовлетворение граничных условий по перемещениям на контурах включений рассматриваемых типов приводит к интегральным уравнениям с логарифмическими ядрами (их число равно  $2M$ ). Например, приравнивание перемещений на  $L$  со стороны матрицы ( $k = 1$ ) и со стороны упругих включений ( $k = 2$ ), т. е. выполнение первого граничного условия в (5.29) применительно к комбинациям  $U_1 \pm iU_2$ , дает (суммирование по  $k = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} & (-1)^k h_k \chi_k \frac{2i}{\pi} \int_0^{2\pi} p_n^{(k)}(\beta^j) \ln \left| \sin \frac{\beta^j - \beta_0^j}{2} \right| d\beta^j + \\ & + \sum_{l=1}^M \int_0^{2\pi} (p_l^{(k)}(\beta^l) A_{nl}^{(k)}(\beta_0^j, \beta^l) + p_2^{(k)}(\beta^l) A_{n2}^{(k)}(\beta_0^j, \beta^l)) d\beta^l = M_n(\beta_0^j), \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$p_n^{(k)}(\beta) = p_n^{(k)}(s(\beta)) s'(\beta), \quad n = 1, 2, \quad j = \overline{1, M},$$

$$A_{nn}^{(k)}(\beta_0, \beta) = (-1)^k h_k (\chi_k (\phi_{20}^{(k)} - \delta_y \frac{2i}{\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0}{2} \right|) - e_k \phi_{00}^{(k)}),$$

$$A_{12}^{(k)}(\beta_0, \beta) = (-1)^k h_k e^{2i\alpha_0} \phi_{22}^{(k)}, \quad A_{21}^{(k)}(\beta_0, \beta) = (-1)^k h_k e^{-2i\alpha_0} \phi_{22}^{(k)},$$

$$\dots$$

$$M_n(\beta_0) = (-1)^n i \tau_1 e^{-i\gamma_1^{(1)} \eta_0} \quad \text{в } P \text{ - случае,}$$

$$M_n(\beta_0) = -\tau_2 e^{-i\gamma_2^{(1)} \eta_0} \quad \text{в } SV \text{ - случае.}$$

Здесь на каждом контуре  $L_l$  ( $l = \overline{1, M}$ ) выбрано начало отсчета и интегрирование по  $\beta^l$  проводится от 0 до  $2\pi$  против часовой стрелки, что соответствует изменению полярного угла на единичной окружности.

С целью получения сингулярных интегральных уравнений первого рода граничные условия по перемещениям следует продифференцировать по дуговой координате  $s_0 \in L_j$ , используя равенство

$$\left. \frac{\partial U}{\partial s_0} \right|_{L_j} = \left( \frac{\partial U}{\partial z} e^{i\varphi_0} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} e^{-i\varphi_0} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad e^{i\varphi_0} = \frac{d\zeta_0}{ds_0}, \quad \zeta_0 \in L_j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (5.48)$$

Эквивалентность краевых задач с граничными условиями по перемещениям и модифицированными граничными условиями с использованием (5.48) будет соблюдаться, если к последним присовокупить  $2M$  дополнительных условий. Учитывая интегрируемость логарифмической особенности в уравнениях (5.47) в явном виде с помощью формулы (5.46), указанные дополнительные условия целесообразно записывать в интегральной форме.

1. В случае упругих включений из равенства амплитуд перемещений на границе раздела двух сред (5.29) вытекают равенства средних значений амплитуд перемещений на  $L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ), которые запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U_1^{(1)} \pm iU_2^{(1)} + U_1^{(0)} \pm iU_2^{(0)}) d\beta_0^j &= \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U_1^{(2)} \pm iU_2^{(2)}) d\beta_0^j, \quad j = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Здесь подынтегральные выражения являются функциями переменной  $\zeta_0 \in L_j$  и комбинации  $U_1^{(k)} \pm iU_2^{(k)}$  ( $k=1, 2$ ) вычисляются согласно (5.39), где интегрирование осуществляется по  $L$ , т.е. совокупности контуров  $L_l$  ( $l = \overline{1, M}$ ). Очевидно, равенства (5.49) эквивалентны интегрированию по  $\beta_0^j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) уравнений (5.47).

2. Если  $D_2$  – совокупность неподвижных включений, то из равенства нулю амплитуд перемещений на  $L_j$  следуют равенства нулю средних значений амплитуд перемещений на  $L_j$ , т.е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U_1 \pm iU_2) d\beta_0^j = 0, \quad j = \overline{1, M}. \quad (5.50)$$

3. Интегрирование граничных условий (5.31) на контурах подвижных жестких включений, аналогично (5.50), позволяет представить амплитуды  $B_1^j$  и  $B_2^j$  поступательного движения  $j$ -го включения в интегральной форме:

$$\begin{aligned}
B_1^j \pm iB_2^j &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U_1 \pm iU_2) d\beta_0^j \mp \\
&\mp i\omega_j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi_0 \pm i\eta_0) d\beta_0^j, \quad j = \overline{1, M}.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Тогда для интегральной формы дополнительных условий (5.32) имеем:

$$\begin{aligned}
\int_{L_j} (S_1 \pm iS_2) ds_0 + \frac{q_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U_1 \pm iU_2) d\beta_0^j &= \\
= \pm i\omega_j \frac{q_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi_0 \pm i\eta_0) d\beta_0^j, \quad j = \overline{1, M}.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Необходимые дополнительные условия для определения амплитуд  $\omega_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) жесткого поворота включений вытекают из (5.33). Запишем их в виде

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i} \int_{L_j} ((S_1 + iS_2)(\bar{\zeta}_0 - \bar{z}_0) - (S_1 - iS_2)(\zeta_0 - z_0)) ds_0 &= \\
= \omega^2 J_j \omega_j, \quad z_0 = x_{10} + ix_{20}, \quad j = \overline{1, M}.
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Теперь можно переходить к построению сингулярных интегральных уравнений, эквивалентных интегральным уравнениям с логарифмической особенностью (5.47) в совокупности с обоснованными выше дополнительными условиями.

## 5.6 Сведение краевых задач к сингулярным интегральным уравнениям

**1.** В случае совокупности упругих включений граничные условия типа «склейки» для перемещений на  $L$  заменяем равенством производных перемещений по дуговой координате  $s_0$ , используя формулу дифференцирования (5.48). Необходимые производные  $\frac{\partial}{\partial z}(U_1^{(k)} \pm iU_2^{(k)})$  и  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(U_1^{(k)} \pm iU_2^{(k)})$  нами были получены при вычислении комбинаций амплитуд компонент тензора напряжений (5.2) в виде интегральных представлений (5.40). Дифференцирование по  $s_0 \in L_j$  граничных

условий типа склейки для  $U_1 \pm iU_2$  на контурах упругих включений должно привести к  $2M$  сингулярным интегральным уравнениям первого рода.

Приравнивание на границе раздела двух сред комбинаций амплитуд напряжений  $S_1 \pm iS_2$  осуществляется путем подстановки интегральных представлений (5.41) в выражения (5.3) для комбинаций  $S_1^{(k)} \pm iS_2^{(k)}$  и последующим предельным переходом при  $z \rightarrow \zeta_0 \in L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) из областей  $D_1$  ( $k=1$ ) и  $D_2$  ( $k=2$ ). Такая процедура должна привести к  $2M$  сингулярным интегральным уравнениям второго рода.

При фиксированном контуре  $L_j$  соответствующие ему четыре интегральных уравнения умножаем на значение  $s'_0 = ds_0/d\beta_0$  на этом контуре. Искомая система  $4M$  сингулярных интегральных уравнений приобретает вид (суммирование по  $n=1, 2$ ):

$$\int_L \left( p_n^{(1)}(\beta) B_{mn}^{(1)}(\beta_0^j, \beta) - p_n^{(2)}(\beta) B_{mn}^{(2)}(\beta_0^j, \beta) \right) d\beta = N_m(\beta_0^j), \quad m=1, 2, \quad j = \overline{1, M},$$

$$\frac{1}{2} p_m^{(1)}(\beta_0^j) + \frac{1}{2} p_m^{(2)}(\beta_0^j) +$$

$$(5.54)$$

$$+ \int_L \left( p_n^{(1)}(\beta) C_{mn}^{(1)}(\beta_0^j, \beta) - p_n^{(2)}(\beta) C_{mn}^{(2)}(\beta_0^j, \beta) \right) d\beta = T_m(\beta_0^j),$$

$$B_{11}^{(k)} = B_{22}^{(k)} = -h_k \left( \chi_k \phi_{31}^{(k)} - e_k \phi_{11}^{(k)} \right) \operatorname{Re} \left( \zeta'_0 e^{-i\alpha_0} \right),$$

$$B_{12}^{(k)} = \frac{h_k}{2} \left( \phi_{31}^{(k)} \zeta'_0 e^{i\alpha_0} - \phi_{33}^{(k)} \overline{\zeta'_0} e^{3i\alpha_0} \right), \quad B_{21}^{(k)} = \frac{h_k}{2} \left( \phi_{31}^{(k)} \overline{\zeta'_0} e^{-i\alpha_0} - \phi_{33}^{(k)} \zeta'_0 e^{-3i\alpha_0} \right),$$

$$C_{11}^{(k)} = id_k \left( a_k \phi_{31}^{(k)} - b_k \phi_{11}^{(k)} \right), \quad C_{12}^{(k)} = id_k \left( \left( \phi_{31}^{(k)} - \gamma_2^{(k)2} \phi_{11}^{(k)} \right) \zeta'_0 e^{i\alpha_0} - \phi_{33}^{(k)} \overline{\zeta'_0} e^{3i\alpha_0} \right),$$

$$C_{22}^{(k)} = id_k \left( \overline{a_k} \phi_{31}^{(k)} - \overline{b_k} \phi_{11}^{(k)} \right), \quad C_{21}^{(k)} = id_k \left( \left( \phi_{31}^{(k)} - \gamma_2^{(k)2} \phi_{11}^{(k)} \right) \overline{\zeta'_0} e^{-i\alpha_0} - \phi_{33}^{(k)} \zeta'_0 e^{-3i\alpha_0} \right),$$

$$a_k = \zeta'_0 e^{-i\alpha_0} - \chi_k \overline{\zeta'_0} e^{i\alpha_0}, \quad b_k = \gamma_2^{(k)2} \left( \zeta'_0 e^{-i\alpha_0} - (\chi_k - 1) \overline{\zeta'_0} e^{i\alpha_0} \right),$$

$$N_2 = -N_1 = \gamma_1^{(1)} \tau_1 \eta'_0 e^{-\gamma_1^{(1)} \eta_0}, \quad T_m = \frac{2\mu_1 \gamma_1^{(1)} \tau_1}{1-2\nu_1} e^{-\gamma_1^{(1)} \eta_0} (i\nu_1 \eta'_0 - (-1)^m (1-\nu_1) \zeta'_0) \text{ в } P\text{-случае}$$

$$N_m = i\gamma_2^{(1)} \tau_2 \eta'_0 e^{-\gamma_2^{(1)} \eta_0}, \quad T_m = -i\mu_1 \gamma_2^{(1)} \tau_2 q_m e^{-\gamma_2^{(1)} \eta_0}, \quad q_1 = \overline{\zeta'_0}, \quad q_2 = \zeta'_0 \text{ в } SV\text{-случае.}$$

Здесь интегрирование проводится по  $L$  – совокупности контуров  $L_l$  ( $l = \overline{1, M}$ ), причем обход каждого контура проводится по часовой стрелке (см. рис. 5.2); поэтому при переходе к интегрированию по  $\beta = \beta'$  в пределах от 0 до  $2\pi$  интегралы в левой части (5.54) меняют свой знак. Если точки  $\zeta$  и  $\zeta_0$  принадлежат одному

контуру  $L_j$ , то, как нетрудно показать, пользуясь соотношениями (5.42) для функций  $\phi_{31}^{(k)}(r_0)$  и  $\phi_{33}^{(k)}(r_0)$ , ядра  $B_{mn}$  и  $C_{mn}$  ( $n \neq m$ ) являются непрерывными, а ядра  $B_{mm}^{(k)}$  и  $C_{mm}^{(k)}$  становятся сингулярными:

$$\begin{aligned} B_{mm}^{(k)}(\beta_0^j, \beta^j) &= \frac{\chi_k}{2\pi i} \frac{\cos(\varphi_0 - \alpha_0)}{r_0} s'_0 + P_{mm}^{(k)}(\beta_0^j, \beta^j), \quad m=1, 2, \\ C_{11}^{(k)}(\beta_0^j, \beta^j) &= -\frac{1}{2\pi i} \left( \frac{\zeta'_0}{\zeta - \zeta_0} - \chi_k \frac{\bar{\zeta}'_0}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} \right) + Q_{11}^{(k)}(\beta_0^j, \beta^j), \\ C_{22}^{(k)}(\beta_0^j, \beta^j) &= -\frac{1}{2\pi i} \left( \frac{\bar{\zeta}'_0}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} - \chi_k \frac{\zeta'_0}{\zeta - \zeta_0} \right) + Q_{22}^{(k)}(\beta_0^j, \beta^j), \end{aligned} \quad (5.55)$$

где  $P_{mm}^{(k)}$ ,  $Q_{mm}^{(k)}$  – непрерывные функции своих аргументов.

Для однозначной разрешимости сингулярных интегральных уравнений первого рода в (5.54) к ним необходимо присовокупить  $2M$  дополнительных условий. Они вытекают из условий равенства средних значений комбинаций амплитуд перемещений  $U_1 \pm iU_2$  на  $L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ). Эти условия имеют вид (5.49), где комбинации  $U_1^{(k)} \pm iU_2^{(k)}$  находятся из интегральных представлений (5.39). Очевидно, необходимо проинтегрировать по  $\beta_0^j$  в пределах от 0 до  $2\pi$  интегральные уравнения (5.47), учитывая равенство (5.46). Дополнительные условия приобретают вид (суммирование по  $k=1, 2$ ):

$$\begin{aligned} &(-1)^{k-1} 4ih_k \chi_k \ln 2 \int_0^{2\pi} p_m^{(k)}(\beta^j) d\beta^j + \\ &+ \sum_{l=1}^M \int_0^{2\pi} (p_1^{(k)}(\beta^l) R_{m1}^{(k)}(\beta^l) + p_2^{(k)}(\beta^l) R_{m2}^{(k)}(\beta^l)) d\beta^l = \int_0^{2\pi} M_m^{(k)}(\beta_0^j) d\beta_0^j, \\ &R_{mn}^{(k)}(\beta) = \int_0^{2\pi} A_{mn}^{(k)}(\beta_0^j, \beta) d\beta_0^j, \quad m, n=1, 2, \quad j = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Таким образом, задача дифракции гармонической продольной или поперечной волны на совокупности  $M$  упругих включений в неограниченной упругой среде сводится к системе  $4M$  сингулярных интегральных уравнений (5.54). Для замыкания алгоритма к  $2M$  сингулярным интегральным уравнениям первого рода необходимо присовокупить  $2M$  дополнительных условий (5.56). При заданных геометрических,



механических и динамических параметрах исходной задачи дифракции система уравнений (5.54), (5.56) имеет единственное решение.

2. Если  $D_2$  – совокупность неподвижных включений, то нетрудно заметить, что искомые сингулярные интегральные уравнения первого рода и необходимые для их разрешимости дополнительные условия вытекают из соответствующих интегральных уравнений в (5.54) и дополнительных соотношений (5.56), если в них положить  $p_1^{(2)}(\beta) = p_2^{(2)}(\beta) = 0$ . Имеем (суммирование по  $n = 1, 2$ ):

$$-\sum_{l=1}^M \int_0^{2\pi} p_n^{(1)}(\beta^l) B_{mn}^{(1)}(\beta_0^j, \beta^l) d\beta^l = N_m(\beta_0^j), \quad m=1, 2, \quad j=\overline{1, M}, \quad (5.57)$$

$$4ih_1 \chi_1 \ln 2 \int_0^{2\pi} p_m^{(1)}(\beta^j) d\beta^j + \sum_{l=1}^M \int_0^{2\pi} p_n^{(1)}(\beta^l) R_{mn}^{(1)}(\beta^l) d\beta^l = \int_0^{2\pi} M_m(\beta_0^j) d\beta_0^j. \quad (5.58)$$

3. В случае подвижных жестких включений модифицированные граничные условия на  $L_j$  (дифференцирование по  $\beta_0^j$ ) для комбинаций  $U_1 \pm iU_2$  приводят к следующей системе сингулярных интегральных уравнений первого рода (суммирование по  $n = 1, 2$ ):

$$-\sum_{l=1}^M \int_0^{2\pi} p_n^{(1)}(\beta^l) B_{mn}^{(1)}(\beta_0^j, \beta^l) d\beta^l + \omega_j Q_m(\beta_0^j) = N_m(\beta_0^j), \quad (5.59)$$

$$Q_1(\beta_0) = i\zeta_0', \quad Q_2(\beta_0) = -i\bar{\zeta}_0', \quad m=1, 2, \quad j=\overline{1, M}.$$

Здесь, в отличие от (5.57), неизвестной также является амплитуда жесткого поворота  $j$ -го включения  $\omega_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ).

Необходимые дополнительные условия для однозначной разрешимости сингулярных интегральных уравнений (5.59) вытекают из (5.52) и они имеют вид (суммирование по  $n = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{1}{2} + \frac{2i}{\pi} h_1 \chi_1 q_j \ln 2 \right) \int_0^{2\pi} p_m^{(1)}(\beta^j) d\beta^j + \\ & + \sum_{l=1}^M \int_0^{2\pi} p_n^{(1)}(\beta^l) D_{mn}^j(\beta^l) d\beta^l + \omega_j D_m^j = F_m^j, \\ & D_{mn}^j(\beta) = \int_0^{2\pi} C_{mn}^{(1)}(\beta_0^j, \beta) d\beta_0^j + \frac{q_j}{2\pi} R_{mn}^{(1)}(\beta), \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$D_m^j = (-1)^m i \frac{q_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi_0 - (-1)^m i \eta_0) d\beta_0^j,$$

$$F_m^j = - \int_0^{2\pi} T_m(\beta_0^j) d\beta_0^j + \frac{q_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_m(\beta_0^j) d\beta_0^j.$$

Для замыкания алгоритма запишем также дополнительные условия, необходимые для определения амплитуд  $\omega_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ). Из (5.53) находим (суммирование по  $n = 1, 2$ ):

$$-\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p_1^{(1)}(\beta^j)(\bar{\xi}_0 - \bar{z}_0) - p_2^{(1)}(\beta^j)(\xi_0 - z_0)) d\beta_0^j +$$

$$+ \sum_{l=1}^M \int_0^{2\pi} p_n^{(1)}(\beta^l) \left( \int_0^{2\pi} (C_{1n}(\beta_0^j, \beta^l)(\bar{\xi}_0 - \bar{z}_0) - C_{2n}(\beta_0^j, \beta^l)(\xi_0 - z_0)) d\beta_0^j \right) d\beta^l +$$

$$+ \omega_j K^j = E^j, \quad j = \overline{1, M},$$

$$K^j = -2i\omega^2 J_j, \quad E^j = -2i \int_0^{2\pi} (T_1(\beta_0^j)(\bar{\xi}_0 - \bar{z}_0) - T_2(\beta_0^j)(\xi_0 - z_0)) d\beta_0^j.$$

4. При дифракции упругих волн на системе полостей возникают сингулярные интегральные уравнения второго рода, которые следуют из соответствующих интегральных уравнений в (5.54) при  $\mu_2 = 0$  и  $\lambda_2 = 0$ . Они имеют вид (суммирование по  $n = 1, 2$ ):

$$\frac{1}{2} p_m^{(1)}(\beta_0^j) - \sum_{l=1}^M \int_0^{2\pi} p_n^{(1)}(\beta^l) C_{mm}^{(1)}(\beta_0^j, \beta^l) d\beta^l = T_m(\beta_0^j), \quad (5.62)$$

$$m = 1, 2, \quad j = \overline{1, M}.$$

## 5.7 Численная реализация построенных алгоритмов

Полученные системы сингулярных интегральных уравнений численно решались двумя способами: методом дискретных особенностей и методом механических квадратур. На всех замкнутых контурах выбиралось нечетное число узлов  $N = 2n + 1$ . Получение соответствующих систем линейных алгебраических уравнений осуществлялось точно также, как и в предыдущих главах. Регулярные и

сингулярные интегралы приближенно вычислялись в соответствии с правилом прямоугольников, а внеинтегральные плотности представлялись в виде интерполяционных тригонометрических полиномов.

В методе дискретных особенностей в дискретную модель  $l$ -го сингулярного интегрального уравнения первого рода добавлялась регуляризирующая постоянная  $\gamma'_{ON}$  (общее количество таких постоянных равно  $2M$ , количество дополнительных условий также равно  $2M$ ). В результате задача дифракции на системе  $M$  упругих включений сводилась к системе  $2M(2N+1)$  линейных алгебраических уравнений с  $2M(2N+1)$  неизвестными. В случае системы  $M$  неподвижных включений порядок системы линейных алгебраических уравнений равен  $2M(N+1) \times 2M(N+1)$ , а в случае системы  $M$  подвижных жестких включений –  $M(2N+3) \times M(2N+3)$ . Задача дифракции на системе  $M$  полостей не содержит дополнительных условий, и ей соответствует система  $2MN$  линейных алгебраических уравнений с  $2MN$  неизвестными – значениями плотностей  $p_{1N}^{(1)}(\beta_v^j)$ ,  $p_{2N}^{(1)}(\beta_v^j)$ ,  $v = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, M}$  во внутренних узлах совокупности  $L$  замкнутых контуров. Во всех рассмотренных случаях системы линейных алгебраических уравнений имели полный ранг, и, следовательно, в результате численной реализации получались однозначные решения, которые использовались для исследования напряженно-деформированного состояния соответствующей структуры.

В методе механических квадратур, если дискретизируется  $l$ -е сингулярное интегральное уравнение первого рода, то одно из уравнений соответствующей системы линейных алгебраических уравнений заменяется дискретной моделью соответствующего дополнительного условия. В результате в случае системы  $M$  упругих включений решается  $4MN$  линейных алгебраических уравнений с  $4MN$  неизвестными – значениями плотностей  $p_{1N}^{(k)}(\beta_v^j)$ ,  $p_{2N}^{(k)}(\beta_v^j)$ ,  $v = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, M}$ ,  $k = 1, 2$ . Если рассматривается система  $M$  неподвижных включений, то порядок системы уравнений равен  $2MN \times 2MN$ , а в случае системы  $M$  подвижных жестких включений –  $M(2N+1) \times M(2N+1)$ . Задаче дифракции на системе  $M$  полостей соответствует система  $2MN$  линейных алгебраических уравнений с  $2MN$  неизвестными. Все

полученные системы уравнений имеют полный ранг, что позволяет получить единственное решение при заданных значениях  $M$  и  $N$ .

Численная реализация построенных систем линейных алгебраических уравнений проводилась на решетке, составленной из однородных эллиптических или ромбических неоднородностей, поочередно расположенных в упругой среде на одинаковом расстоянии  $d$  друг от друга и ориентированных вдоль оси  $Ox_1$ .

Параметрическое уравнение эллипса  $L_l (l=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ , представленного в решетке, изображенной на рис. 5.3, записывалось в виде

$$\begin{aligned}\xi(\beta) &= a \sin \beta + (2a + d)l, \\ \eta(\beta) &= -b \cos \beta, \quad \beta \in [0, 2\pi].\end{aligned}\tag{5.63}$$

В случае системы ромбических включений или отверстий в неограниченной упругой среде (рис. 5.4) использовалось следующее параметрическое уравнение основного контура  $L_0$ :

$$\begin{aligned}\xi(\beta) &= a(\sin \beta - \nu \sin 3\beta), \\ \eta(\beta) &= -(b \cos \beta + \nu \cos 3\beta), \quad \beta \in [0, 2\pi].\end{aligned}\tag{5.64}$$

Здесь при  $\nu/a=0,14036$  контур  $L_0$  имеет вид ромба со скругленными точками возврата, а при  $\nu=0$  контур  $L_0$  превращается в эллипс с полуосями  $a$  и  $b$  (5.63).

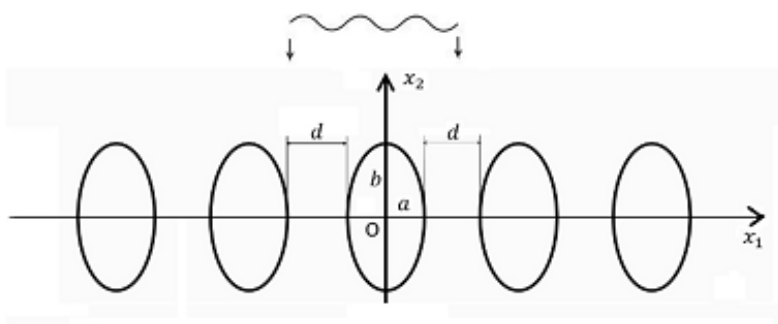


Рисунок 5.3 – Система эллиптических неоднородностей в упругой среде

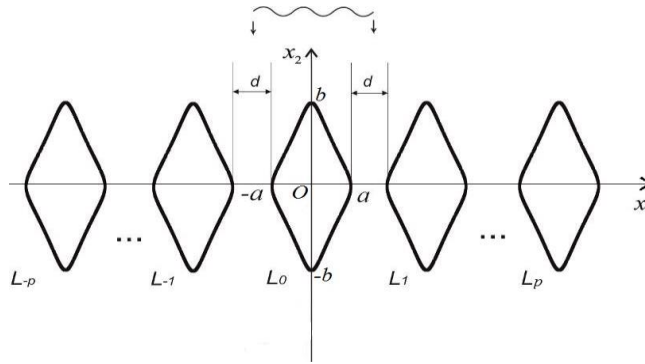


Рисунок 5.4 – Система ромбических неоднородностей в упругой среде

В ходе численной реализации на контурах неоднородностей (со стороны матрицы) вычислялись безразмерные напряжения  $\sigma_n, \sigma_s, \sigma_{ns}$ , получаемые путем деления соответствующих контурных напряжений (5.13) на максимальное значение напряжения в падающей волне, равное  $\tau_1 \gamma_1^{(1)} (\lambda_1 + 2\mu_1)$  в случае излучения продольной волны (5.27) –  $P$ - случай и  $\tau_2 \gamma_2^{(1)} \mu_1$  – в случае излучения поперечной волны (5.28) –  $SV$ - случай.

Точность вычислений проверялась путем сравнения результатов при различных значениях  $N$ . В случае рассматриваемого класса дифракционных задач метод дискретных особенностей и метод механических квадратур имеют практически одинаковую эффективность и сходятся с заданной точностью приблизительно при одном и том же количестве узлов на контурах неоднородностей. Расчеты показывают, что во всех рассмотренных случаях регуляризующие постоянные  $\gamma'_{on}$  с увеличением  $N$  быстро уменьшаются, и, как и в случае антиплоской деформации (см. главу 3), уже при  $N=25$  значения  $|\gamma'_{on}|$  не превосходят  $10^{-8}$ . Экспериментально установлено, что для достижения точности  $10^{-3}$  требуется  $N=55$ , а точность  $10^{-8}$  обеспечивается приблизительно 1000 точками коллокации. При этом достижение требуемой точности практически не зависит от типа неоднородностей и количества объектов в решетке.

## 5.8 Численные результаты в случае системы эллиптических неоднородностей

Задачи дифракции плоских гармонических волн на решетках малоисследованны. Однако особенностью метода сингулярных интегральных уравнений является то, что он допускает различные предельные переходы. Например, при  $d \rightarrow \infty$  возможно тестирование полученных алгоритмов путем сравнения рассчитываемых напряжений на контуре  $L_0$  с известными результатами, полученными для одиночных эллиптического отверстия и эллиптического упругого включения. Многочисленные кривые, характеризующие распределения контурных напряжений на границе одиночных эллиптических отверстия, неподвижного, подвижного жесткого и упругого включений, получены с участием автора в работах.

Расчеты показывают, что в случае трех или пяти эллиптических неоднородностей значения напряжений на контуре центрального эллипса  $L_0$  с точностью  $10^{-3}$  совпадают с аналогичными значениями напряжений на контуре одиночной соответствующей эллиптической неоднородности при значительном удалении элементов решетки друг от друга (отношение  $d/a$  порядка  $10^6$ ). Это означает, что влиянием отраженных волн от эллипсов  $L_l (l = \pm 1, \pm 2)$  на напряженное состояние центрального эллипса можно пренебрегать лишь при очень больших расстояниях между эллипсами.

### Случай одиночного эллиптического упругого включения

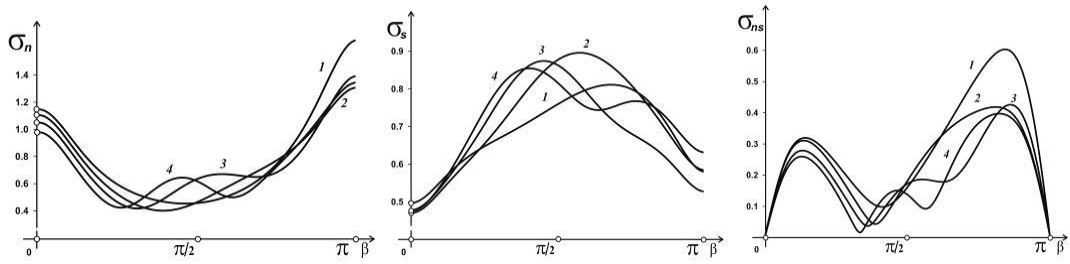


Рисунок 5.7 – Распределения напряжений на контуре эллиптического упругого включения ( $b/a=2$ ) при разных значениях  $\gamma_1^{(1)}a$  в случае  $P$ -волны

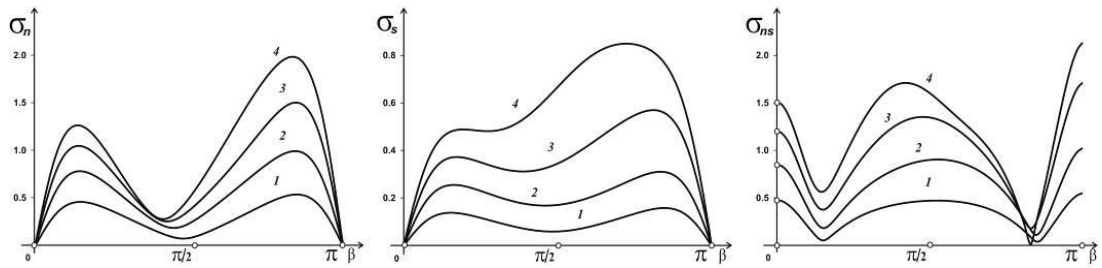


Рисунок 5.8 – Распределения напряжений на контуре эллиптического упругого включения ( $b/a=2$ ) при разных значениях  $\gamma_2^{(1)}a$  в случае  $SV$ -волны

На рисунке 5.7 и рисунке 5.8 приведены аналогичные распределения напряжений для эллиптического упругого включения вытянутого навстречу падающей волне ( $b/a=2$ ). Здесь также  $\mu_2/\mu_1=2$ ;  $\rho_2/\rho_1=2$ ;  $\nu_1=\nu_2=0,3$ . Рис. 5.7 соответствует  $P$ -случаю, рис. 5.8 –  $SV$ -случаю. Кривые 1, 2, 3 и 4 отвечают значениям параметров  $\gamma_1^{(1)}a$  равным 0,4; 0,7; 1,0 и 1,3 соответственно (здесь  $\gamma_2^{(1)}/\gamma_1^{(1)}=1,87$ ).

Анализ кривых распределения показывает, что в  $P$ -случае максимальными являются напряжения  $\sigma_n$ , которые достигаются в лобовой точке ( $\beta=\pi$ ). В  $SV$ -случае на границе раздела двух сред превалирующими могут быть напряжения  $\sigma_{ns}$ ; напряжения  $\sigma_n$  и  $\sigma_s$  вблизи теневой ( $\beta=0$ ) и лобовой ( $\beta=\pi$ ) точек близки к нулю.

Рисунки 5.14 и 5.15 иллюстрируют изменения напряжений на контурах эллиптического включения ( $b/a=2$ ;  $\rho_e/\rho_1=0,5$ ;  $\nu_1=0,3$ ). Кривые 1, 2, 3 и 4 отвечают значениям параметра  $\gamma_1^{(1)}a$ , равным 0,4; 0,7; 1,0 и 1,3.

Расчеты показывают, что, как и в случае упругого включения, при излучении  $P$ -волны преобладающими являются напряжения  $\sigma_n$ , причем максимальные их значения достигаются в лобовой точке; напряжения  $\sigma_{ns}$  вблизи теневой и лобовой точек близки к нулю. В  $SV$ -случае, наоборот, преобладающими являются напряжения  $\sigma_{ns}$ ; напряжения  $\sigma_n$  вблизи теневой и лобовой точек близки к нулю.

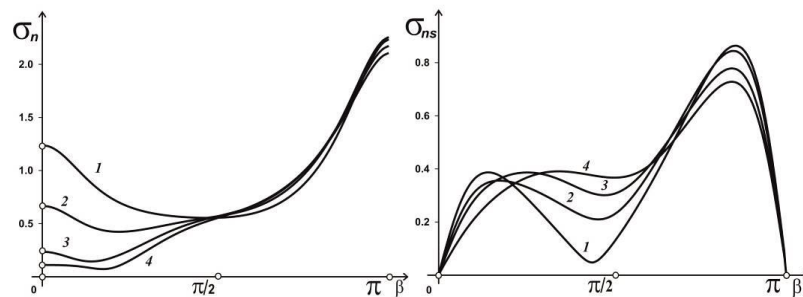


Рисунок 5.14 – Распределения напряжений на контуре эллиптического жесткого включения при разных значениях  $\gamma_1^{(1)}a$  в случае  $P$ -волны

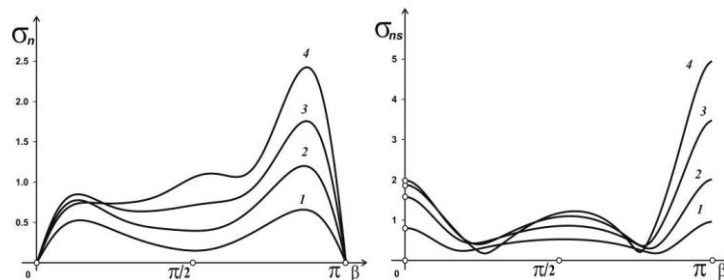


Рисунок 5.15 – Распределения напряжений на контуре эллиптического жесткого включения при разных значениях  $\gamma_1^{(1)}a$  в случае  $SV$ -волны

Случай решетки, состоящей из пяти эллиптических отверстий

На рисунках 5.19 и 5.20 иллюстрируются распределения напряжения  $\sigma_s$  на центральном ( $a$ ) и левом крайнем ( $b$ ) эллиптических отверстиях ( $d/a=3$ ;  $\nu_1=0,3$ ). Кривые 1, 2 ( $b/a=2$ ) и 3, 4 ( $b/a=0,5$ ) отвечают значениям  $\gamma_1^{(1)}a$ , равным 0,45; 0,85 и 0,9; 1,7.



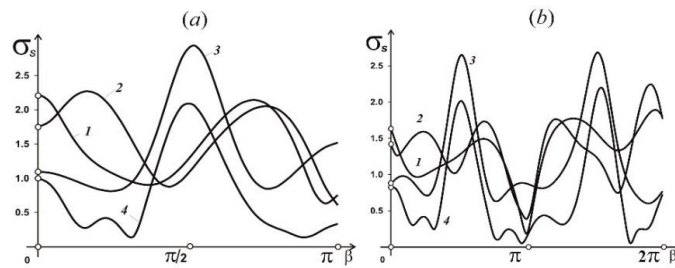


Рисунок 5.19 – Распределение контурного напряжения на центральном (а) и крайнем (b) эллиптических отверстиях решетки, составленной из 5 отверстий, при разных значениях  $\gamma_1^{(1)}a$  в случае  $P$ -волны

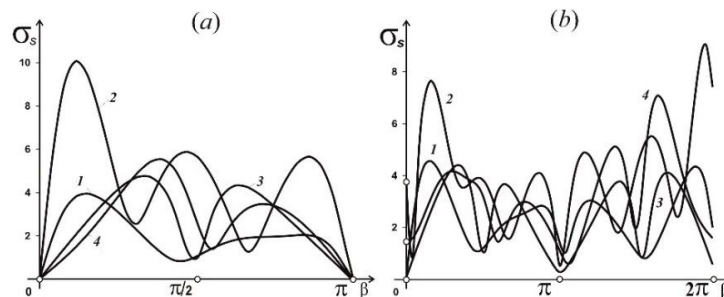


Рисунок 5.20 – Распределение контурного напряжения на центральном (а) и крайнем (b) эллиптических отверстиях решетки, составленной из 5 отверстий, при разных значениях  $\gamma_2^{(1)}a$  в случае  $SV$ -волны

Видно, что в случае сплюснутых эллипсов ( $a/b = 0,5$ ) максимальные значения напряжений в  $P$ -случае достигаются вблизи точек соскальзывания. В  $SV$ -случае характер изменения напряжений сложный и наблюдается значительное увеличение числа экстремальных точек.

## 5.9 Численные результаты в случае системы ромбических неоднородностей

Случай одиночного ромбического упругого включения.

На рис. 5.21 и рис. 5.22 представлены результаты расчетов напряжений на контурах ромбического упругого включения  $L_0$

( $b/a = 2$ ;  $\mu_1/\mu_2 = 2$ ;  $\rho_1/\rho_2 = 2$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ) в случае излучения  $P$ - и  $SV$ -волны соответственно. Кривые 1, 2, 3 и 4 отвечают значениям параметра  $\gamma_1^{(1)}a$ , равным 0,4; 0,7; 1,0 и 1,3.

Анализ кривых распределения контурных напряжений показывает принципиальное различие  $P$ - и  $SV$ -случаев. При дифракции поперечной волны преобладающим на контуре ромбического упругого включения может быть напряжение  $\sigma_{ns}$ .

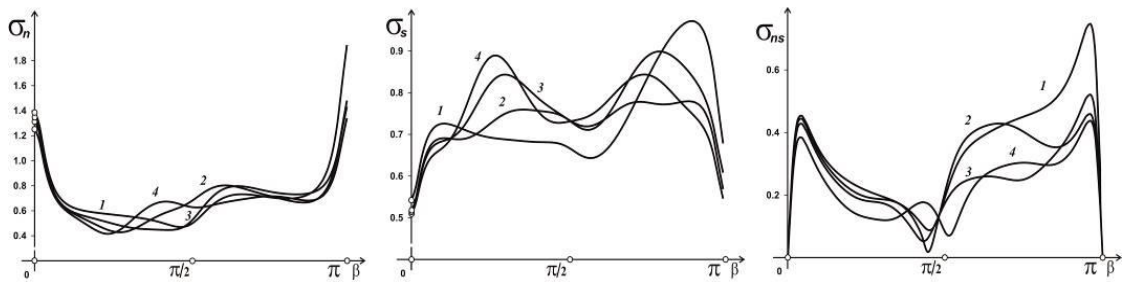


Рисунок 5.21 – Распределения напряжений на контуре ромбического упругого включения при разных значениях  $\gamma_1^{(1)}a$  в случае  $P$ -волны

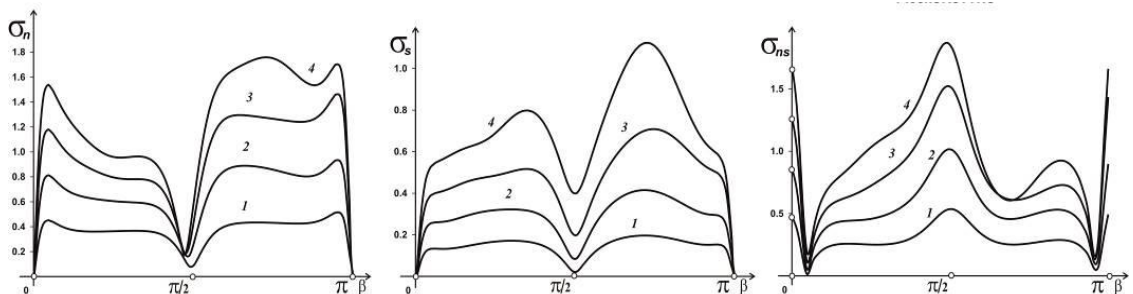


Рисунок 5.22 – Распределения напряжений на контуре ромбического упругого включения при разных значениях  $\gamma_1^{(1)}a$  в случае  $SV$ -волны

Случай одиночного ромбического жесткого включения.

Рисунок 5.23 и рисунок 5.24 иллюстрируют изменения напряжений на контуре ромбического жесткого включения  $L_0$  ( $b/a = 2$ ;  $\rho_1/\rho_2 = 2$ ;  $\nu_1 = 0,3$ ). Кривые 1, 2, 3 и 4 отвечают значениям параметра  $\gamma_1^{(1)}a$ , равным 0,4; 0,7; 1,0 и 1,3.

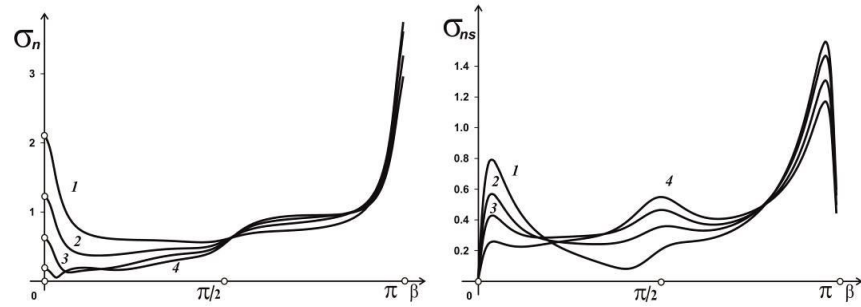


Рисунок 5.23 – Распределения напряжений на контуре ромбического жесткого включения при разных значениях  $\gamma_1^{(1)}a$  в случае  $P$ -волны

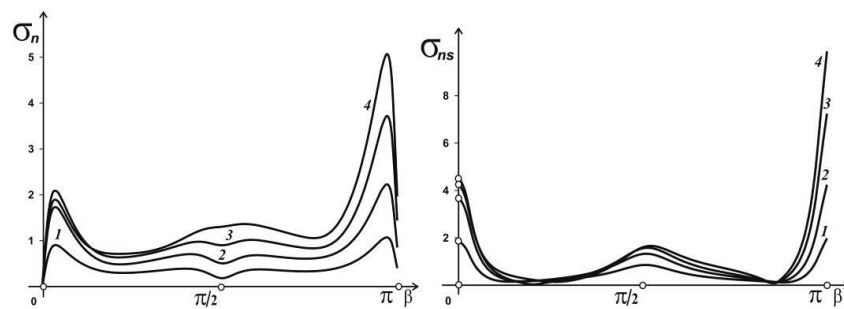


Рисунок 5.24 – Распределения напряжений на контуре ромбического жесткого включения при разных значениях  $\gamma_1^{(1)}a$  в случае  $SV$ -волны

Случай решетки, состоящей из пяти ромбических отверстий.

На рисунку 5.25 и рисунку 5.26 иллюстрируются распределения напряжения  $\sigma_x$  на центральном (а) и левом крайнем (б) ромбических отверстиях ( $d/a = 3$ ;  $\nu_1 = 0,3$ ). Кривые 1, 2 ( $b/a = 2$ ) и 3, 4 ( $b/a = 0,5$ ) отвечают значениям  $\gamma_1^{(1)}a$ , равным 0,45; 0,85 и 0,9; 1,7. Расчеты показывают, что максимальные значения напряжений в  $P$ -случае достигаются вблизи точек соскальзывания, причем наблюдаются резкое увеличение напряжений вблизи этих точек. В  $SV$ -случае характер изменения напряжений сложный и наблюдается значительное увеличение числа экстремальных точек.

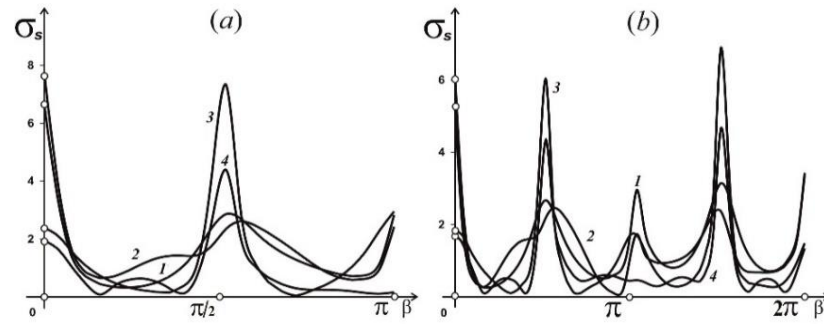


Рисунок 5.25 – Распределение контурного напряжения на центральном (а) и крайнем (b) ромбических отверстиях решетки, составленной из 5 отверстий, при разных значениях  $\gamma_1^{(1)}a$  в случае  $P$ -волны

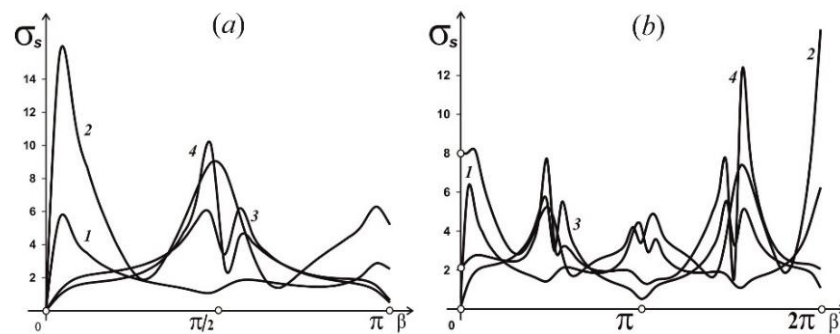


Рисунок 5.26 – Распределение контурного напряжения на центральном (а) и крайнем (b) ромбических отверстиях решетки, составленной из 5 отверстий, при разных значениях  $\gamma_1^{(1)}a$  в случае  $SV$ -волны

Таким образом, динамическая напряженность на границе неоднородностей существенно зависит от геометрических, механических и волновых характеристик. Наблюдается принципиальное различие в распределении контурных напряжений при дифракции на неоднородностях продольной и поперечной волн.

## ВЫВОДЫ

Сингулярные интегральные уравнения первого рода и интегральные уравнения Фредгольма второго рода, к которым сводятся задачи дифракции волн сдвига на системе включений различного типа или полостей в полупространстве, численно решаются методами дискретных особенностей и механических квадратур. С помощью компьютерного моделирования сравнивается эффективность этих методов и рассчитывается напряженное состояние на контурах неоднородностей с привлечением высокоэффективных алгоритмов.

Элементы конструкций, используемые в технике и строительстве, как правило, работают в условиях динамических нагрузок и часто содержат большое количество отверстий или включений, расположенных вдоль одной линии. Численные исследования показывают, что при подобной конфигурации неоднородностей напряженно-деформированное состояние соответствующей решетки обладает свойством насыщения. Здесь, начиная с некоторого количества объектов в решетке, дальнейшее увеличение количества отражателей практически не влияет на значения напряжений на границе центральной неоднородности. Поэтому такие решетки с конечным числом отверстий или включений с большой степенью точности можно аппроксимировать бесконечной, а именно периодической системой неоднородностей, и для исследования напряженно-деформированного состояния рассматриваемого элемента конструкций целесообразно изучать соответствующую периодическую задачу динамической теории упругости. Таким образом, исследование модельных задач дифракции упругих волн на периодической системе отверстий или включений различного типа в полубесконечной среде является актуальным.

В данном исследовании развивается подход, основанный на методе интегральных уравнений, и в результате компьютерного моделирования демонстрируется эффективность этого метода в случае воздействия на периодические решетки в полупространстве гармонической волны сдвига.

Рассматриваются плоские динамические задачи теории упругости о взаимодействии гармонических  $P$ - и  $SV$ -волн с системой включений различного типа или полостей. Краевые задачи сводятся к системам сингулярных интегральных уравнений, которые реализуются численно методами дискретных особенностей и механических квадратур. Показано, что в случае рассматриваемого класса задач эти два метода имеют одинаковую эффективность и сходятся с заданной точностью приблизительно при одном и том же количестве узлов на контурах неоднородностей. Построенные предложенными методами инструментальные программные средства позволяют численно решать разнообразные интегральные уравнения и с высокой точностью описывать поведение различных систем с усложненными свойствами.



## ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Назаренко А.М. Вычислительные методы в задачах дифракции упругих волн на системах неоднородностей на базе сингулярных интегральных уравнений. – Сумы: СумГУ. – 2015. – 220 с.
2. Назаренко А.М. Математическое и компьютерное моделирование в задачах дифракции  $P$ - и  $SV$ -волн на системе полостей и включений // Харків: Вісник ХНУ. Сер.: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2015. – Вып. 28. – С. 102-122.
3. Назаренко А.М. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции плоских волн на периодической системе туннельных разрезов // Труды XVI международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». – Харьков-Херсон. – 2013. – С. 285-288.
4. Назаренко А.М. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции плоских волн на цилиндрических включениях // Труды XVII международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». – Харьков-Сумы. – 2015. – С. 181-184.
5. Назаренко А.М. Моделирование взаимодействия гармонических  $P$ - и  $SV$ -волн с периодической системой криволинейных разрезов // Харків: Вісник ХНУ. Сер.: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2013. – №1063, вып. 22. – С. 125-135.
6. Назаренко А.М. Моделирование дифракции  $SH$ -волн на неоднородностях методами сингулярных интегральных уравнений // Харків: Вісник ХНУ. Сер.: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2015. – Вып. 27. – С. 106-122.



7. Назаренко А.М., Панченко Б.Е., Пилипенко С.А. Схема параллельного решения задач дифракции  $SH$ -волн на системе некруговых трещин в бесконечной упругой среде // Проблемы програмування. – 2014. – №2-3. – С. 82-87.
8. Назаренко А.М., Панченко Б.Е., Пилипенко С.А. Схема параллельного решения задач дифракции  $SH$ -волн на системе некруговых жестких вставок в бесконечной упругой среде // Черкаси: Вісник Черкаського університету. Сер.: Прикладна математика. Інформатика. – 2014. – №18 (311). – С. 22-31.
9. Назаренко А.М., Панченко Б.Е., Фильченко Д.В., Сайко И.Н. Параллельно-конвейерные схемы высокоточных кластерных вычислений в задачах дифракции гармонических волн на неоднородностях в условиях плоской и антиплоской деформации // XIII Международная научно-техническая конференция «Прогрессивная техника и технология»: тезисы докладов. – Севастополь. – 2012. – С. 51-52.
10. Назаренко О.М. Дифракція плоских гармонічних хвиль наперіодичній системі циліндричних порожнин // Харків: ВісникНТУ «ХП». Сер.: Математичне моделювання в техніці татехнологіях. – 2015. – №41(1150). – С. 91-95.
11. Назаренко О.М. Моделювання взаємодії плоских гармонійних хвиль з циліндричними включеннями // Харків: Вісник НТУ «ХП». Сер.:Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2015. –№18 (1127). – С. 108-115.
12. Панченко Б.Е., Назаренко А.М. Каркасный анализ предметной области: стационарные динамические задачи теории упругости для изотропных сред с произвольными неоднородностями //Кибернетика и системный анализ. – 2013. – №1. – С. 172-187.
13. Панченко Б.Е., Назаренко А.М., Пилипенко С.А. Взаимодействие волн сдвига с системой линейных неоднородностей некруговой формы в полупространстве // XVI Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, 14-15 травня 2015р.: матеріали конференції. – Київ. – 2015. – С. 177-179.

**14.** Назаренко О. М., Карпуша М. В. Моделювання та прогнозування нестационарних часових рядів // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – 2012. – №2. – С. 162 – 172.

**15.** Назаренко А. М., Фильченко Д. В. Идентификация и оптимизация слабо формализованных процессов в классе стационарных LQ моделей // Кибернетика и вычислительная техника. – Киев, 2011. – Вып. 158. – С. 81-99.